4. MEKANIKA

4.1 HUKUM KEPLER

Pencarian manusia akan pertanyaan bagaimana benda-benda langit sesungguhnya bergerak, telah didengungkan secara berabad-abad dan telah banyak gagasan dan teori (baik dengan dasar logika maupun murni khayalan) yang mencoba menjelaskannya. Pada abad ke-16 muncul banyak Astronom yang mulai menentang paham Geosentris yang telah lama diimani. Salah satunya adalah Tycho Brahe, astronom Denmark yang melakukan pengamatan dengan peralatan minimum, namun dengan akurasi yang sangat baik.

Adalah murid Brahe, Johannes Kepler, yang kemudian berhasil merumuskan teori dasar tentang pergerakan planet-planet, berdasarkan data pengamatan yang dikumpulkan Brahe.

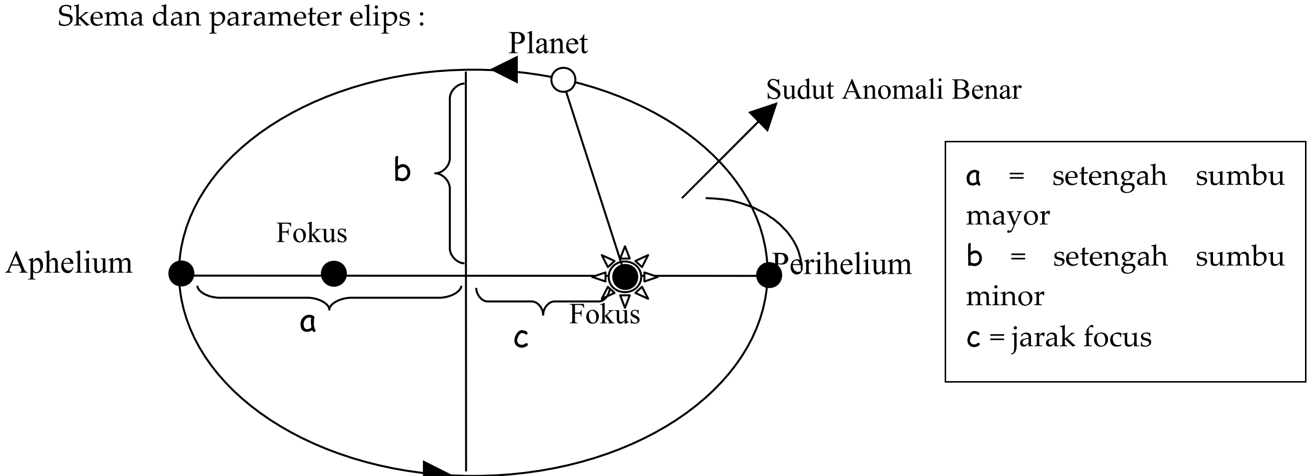
<u>A.Hukum kepler pertama</u>

Hukum Kepler pertama berbunyi,

"orbit setiap planet berbentuk elips dengan matahari berada di salah satu fokusnya"

Elips adalah bentuk bangun datar yang merupakan salah satu dari irisan kerucut (selain lingkaran, hiperbola, dan parabola). Dimana eksentrisitas elips bernilai antara 0 dan 1. Lintasan suatu planet mengelilingi matahari akan berupa sebuah elips, dan matahari akan selalu berada di salah satu dari dua focus elips tersebut.

Skema dan parameter elips :



Berlaku persamaan :

(4.1) $c^2 + b^2 = a^2$

(4.2) eksentrisitas (e) = $\dfrac{c}{a}$

(4.3) Jarak perihelium = (a – c) = a (1 - e)

(4.4) Jarak aphelium = (a + c) = a (1+ e)

Hukum pertama kepler jelas-jelas menentang pernyataan Nicolaus Copernicus yang menyatakan bahwa orbit planet berbentuk lingkaran dengan matahari berada di pusat lingkaran. Dan terbukti dari hasil pengamatan bahwa orbit elips Kepler dapat memberikan posisi yang lebih akurat dibandingkan orbit lingkaran.

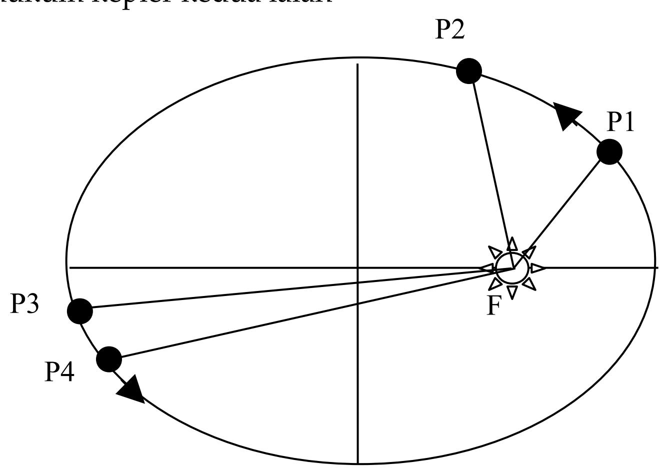
Kesalahan Copernicus ini dapat dipahami sebab meskipun memiliki lintasan elips, namun eksentrisitas orbit planet mendekati nol, sehingga sekilas akan tampak mendekati lingkaran, bahkan untuk perhitungan-perhitungan sederhana kita boleh mengasumsikan orbit planet adalah lingkaran.

B. Hukum kepler kedua

Hukum kepler kedua berbunyi,

"vektor radius suatu planet akan menempuh luas areal yang sama untuk selang waktu yang sama"

Vektor radius ialah garis hubung antara planet dengan pusat gravitasi (matahari). Gambaran dari hukum kepler kedua ialah



Apabila Planet membutuhkan waktu yang sama untuk menempuh P1 – P2 dan P3 - P4, maka luas areal P1 – F – P2 akan sama dengan P3 - F - P4, begitu pula sebaliknya. Dengan kata lain kita dapat menyatakan bahwa kecepatan angulernya konstan.

Karena planet selalu mematuhi hokum kepler, maka konsekuensi dari hukum kedua kepler ini ialah kecepatan linear planet di setiap titik di orbitnya tidaklah konstan, tetapi bergantung pada jarak planet. Contohnya planet akan bergerak paling cepat saat dia ada di perihelium, dan akan bergerak paling lambat saat dia ada di aphelium.

C. Hukum kepler ketiga

Hukum kepler ketiga berbunyi

"pangkat tiga sumbu semi major orbit suatu planet sebanding dengan kuadrat dari periode revolusi planet tersebut"

Kepler menemukan hubungan diatas, atau apabila sumbu semi mayor kita nyatakan dengan a dan periode revolusi planet kita nyatakan dengan T, maka secara matematis hukum ketiga kepler dapat ditulis

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \text{konstanta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5)$$

Ternyata untuk benda-benda yang mengelilingi pusat gravitasi yang sama, besarnya kontanta akan sama, misalnya bagi planet Venus dan planet Bumi, atau bagi Io dan Europa. Untuk benda-benda yang memenuhi syarat tersebut berlaku

$$\boxed{\frac{a_1^{\,3}}{T_1^{\,2}} = \frac{a_2^{\,3}}{T_2^{\,2}} = \frac{a_3^{\,3}}{T_3^{\,2}} = \ldots = \text{konstanta}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5\ \text{b})$$

Apabila benda yang kita tinjau adalah planet yang mengitari matahari, dan kita nyatakan a dalam Satuan Astronomi dan T dalam tahun, maka kita akan mendapati

$$\frac{a_{planet}^{\;3}}{T_{planet}^{\;2}} = \frac{a_{bumi}^{\;3}}{T_{bumi}^{\;2}}$$

$$\frac{a_{planet}^{\;3}}{T_{planet}^{\;2}} = 1$$

$$\boxed{a_{planet}^{\;3} = T_{planet}^{\;2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.5\ \text{c})$$

Persamaan 4.5 c adalah bentuk sederhana dari hukum kepler 3, namun **hanya** bisa digunakan apabila a dinyatakan dalam Satuan Astronomi, T dalam tahun **dan** pusat gravitasi adalah benda bermassa sama dengan matahari.

Perlu diingat bahwa hukum kepler tidak hanya berlaku pada planet di tata surya saja, namun juga berlaku pada satelit planet-planet, asteroid, komet, pada sistem bintang ganda, dan lain-lain.

4.2 HUKUM GRAVITASI NEWTON

Sebelum era Newton, bidang mekanika benda langit merupakan bidang yang berdasarkan pengamatan empiris. Baru dengan kejeniusannya Newton dapat menjelaskan fenomena alam yang terjadi secara teoritis dan mampu menerangkan "mengapa" peristiwa tersebut dapat terjadi.

Dua pertanyaan, mengapa apel jatuh dari pohon dan mengapa bulan mengitari bumi, yang tampak sebagai dua hal yang sama sekali berbeda dan tidak berhubungan, ternyata dijawab Newton oleh satu kata : Gravitasi.

Hukum Gravitasi Newton sendiri berbunyi,

" semua partikel materi di alam semesta menarik semua partikel lain dengan gaya yang sebanding dengan produk massa dan berbanding terbalik dengan pangkat dua dari jarak antara keduanya",

atau secara matematis,

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \quad \text{...} \quad (4.6)$$

Dimana F ialah gaya gravitasi (newton), m_1 dan m_2 adalah massa kedua benda (kilogram), r adalah jarak kedua benda (meter), dan G ialah konstanta gravitasi universal yang besarnya 6,67 x 10^{-11} N.m^2.kg^{-2} .

Lalu menurut persamaan gaya yang kita ketahui, bahwa gaya ialah perkalian antara massa dan percepatan benda, atau

$$F = ma\ ,$$

bila kita gabungkan dengan persamaan 4.6 kita akan mendapat,

$$ma = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Apabila kita tinjau benda 1 sebagai pemberi gaya gravitasi dan kita nyatakan dengan M, lalu benda 2 sebagai objek yang terkena pengaruh gaya kita nyatakan sebagai m, kita akan dapat,

$$ma = G\frac{mM}{r^2}\text{, atau}$$

$$\boxed{a = G\frac{M}{r^2}} \quad \text{.. (4.7),}$$

yaitu persamaan **kuat medan gravitasi** atau lebih dikenal sebagai percepatan gravitasi, yang dalam fisika dinyatakan sebagai "g", yang ternyata bergantung pada massa benda sumber dan jarak benda.

Energi potensial gravitasi yang dimiliki sebuah benda, sebanding dengan produk massa benda tersebut dan massa benda sumber, serta berbanding terbalik dengan jarak antara kedua benda, serta bernilai selalu negatif, sebab energi potensial gravitasi selalu bersifat seolah-olah "kekurangan" energi, atau dinyatakan dengan,

$$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{r}} \quad \text{...(4.8).}$$

Potensial gravitasi yang dimiliki sebuah benda didefinisikan sebagai energi potensial gravitasi per satuan massa, atau dinyatakan

$$V = \frac{E_p}{m}$$

$$\boxed{V = -G\frac{M}{r}} \quad \text{...(4.9)}$$

Dimana perlu diingat bahwa massa benda yang berpengaruh ialah benda sumber gravitasi saja.

Contoh soal :

Urutkan benda-benda berikut sesuai dengan percepatan gravitasinya (dari nilai kecil ke besar) mengelilingi Bumi:

- sebuah stasiun luar angkasa dengan massa 200 ton dan berjarak 6580 km dari Bumi
- seorang astronot dengan massa 60 kg dan berjarak 6580 km dari Bumi
- sebuah satelit dengan massa 1 ton dan berjarak 418000 km dari Bumi
- Bulan dengan massa $7{,}4 \times 10^{19}$ ton dan berjarak 384000 km dari Bumi

Jawab :

Percepatan gravitasi sebanding dengan massa benda pusat, dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak. Namun untuk keempat benda massa benda pusat sama (Bumi), sehingga kita hanya perlu melihat faktor jarak. Maka urutan benda-benda dari percepatan gravitasi terbesar hingga terkecil ialah : 1) stasiun luar angkasa dan astronot; 2)Bulan; 3)satelit. Perlu diperhatikan bahwa massa masing-masing benda sama sekali tidak berpengaruh.

4.3 MEKANIKA ORBIT SEDERHANA

Bulan mengalami gaya tarik gravitasi ke arah bumi, namun mengapa bulan tidak pernah jatuh ke bumi padahal tidak ada gaya yang tampak menahan atau menarik bulan ke arah berlawanan ?

Ternyata bulan dapat mempertahankan posisinya terhadap bumi ialah karena melakukan revolusi mengelilingi bumi, sehingga gaya gravitasi akan **berlaku sebagai gaya sentripetal** bagi putaran bulan, analoginya adalah apabila kita memutar bola bertali, maka bola tersebut adalah bulan, dan gravitasi adalah tali tersebut, atau kita nyatakan

$$Fsentripetal = Fgravitasi$$

Orbit bulan berupa elips, namun memiliki eksentrisitas mendekati nol, sehingga dapat kita dekati sebagai sebuah lingkaran. Maka radius orbit dapat kita asumsikan tetap, sehingga dapat kita nyatakan,

$$\frac{m v_{orbit}{}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\boxed{v_{orbit} = \sqrt{\frac{GM}{r}}} \qquad \text{.................................. (4.10)}$$

Dimana v_{orbit} ialah **kecepatan orbit** mengelilingi benda pusat (yang besarnya selalu konstan), dan bergantung pada massa benda pusat dan jarak. Persamaan 4.10 hanya berlaku bagi benda-benda yang mengelilingi benda pusat gravitasi dengan orbit lingkaran.

Untuk gerak melingkar, berlaku
$v = \omega r$

(gabungkan dengan pers. 4.10) $\quad \omega r = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r}$$

$$\omega^2 r^3 = GM$$

($\omega = \frac{2\pi}{T}$, dengan T = periode) $\quad (\frac{2\pi}{T})^2 r^3 = GM$

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = GM$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Karena lingkaran adalah elips yang memiliki eksentrisitas 0, maka berlaku a =r, sehingga menjadi

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}} \quad \text{...} \quad (4.11)$$

Uraian diatas adalah salah satu pembuktian hukum kepler 3. Dimana sebelum dirumuskannya hukum gravitasi oleh Newton, tidak dapat dibuktikan orang (termasuk Kepler sendiri !). Dan Newton mampu menentukan nilai konstanta dari ruas kiri persamaan 4.5, yaitu sebesar $GM/4\pi^2$.

Persamaan 4.11 adalah **bentuk umum hukum kepler 3**, dan berlaku untuk semua orbit yang terpengaruh oleh gravitasi, baik itu lingkaran, elips, parabola, atau hiperbola.

Bagi benda-benda yang mengelilingi matahari, atau mengelilingi bintang dengan massa sama dengan massa matahari Persamaan 4.11menjadi :

$$\frac{a_1^{\ 3}}{T_1^{\ 2}} = \frac{GM_{solar}}{4\pi^2}$$

Bagi benda-benda yang mengelilingi bintang bermassa selain matahari menjadi

$$\frac{a_2^{\ 3}}{T_2^{\ 2}} = \frac{GM_{star}}{4\pi^2}$$

Apabila kita bagi kedua persamaan di atas didapat

$$\frac{\left(\frac{a_2^{\ 3}}{T_2^{\ 2}}\right)}{\left(\frac{a_1^{\ 3}}{T_1^{\ 2}}\right)} = \frac{M_{star}}{M_{solar}}$$

Apabila a dinyatakan dalam satuan astronomi, dan T dalam tahun, maka kita dapat memasukkan persamaan 4.5 c kedalam persamaan diatas

$$\frac{\left(\frac{a_2^{\ 3}}{T_2^{\ 2}}\right)}{1} = \frac{M_{star}}{M_{solar}}$$

Dan bila kita nyatakan semua massa bintang dalam massa matahari, ruas kanan dapat kita ganti menjadi

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = M_{star}} \quad \text{...(4.12)}$$

Dengan catatan a dinyatakan dalam SA, T dalam tahun, dan M_{star} dinyatakan dalam massa matahari. Bila kita masukan matahari sebagai bintang yang kita tinjau, kita akan mendapati persamaan 4.12 menjadi persamaan 4.5 c. Dapat kita simpulkan persamaan 4.12 ialah bentuk umum hukum kepler 3 bagi benda bermassa berbeda dengan matahari.

Contoh soal :
Jika matahari kita massanya diperbesar hingga menjadi dua kali massa sekarang, tapi susunan tata surya sama sekali tidak berubah, berapa lama waktu yang akan Bumi butuhkan untuk satu kali mengelilingi matahari ?

Jawab :

$$\frac{a^3}{T^2} = M_{star}$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{M_{star}}}$$

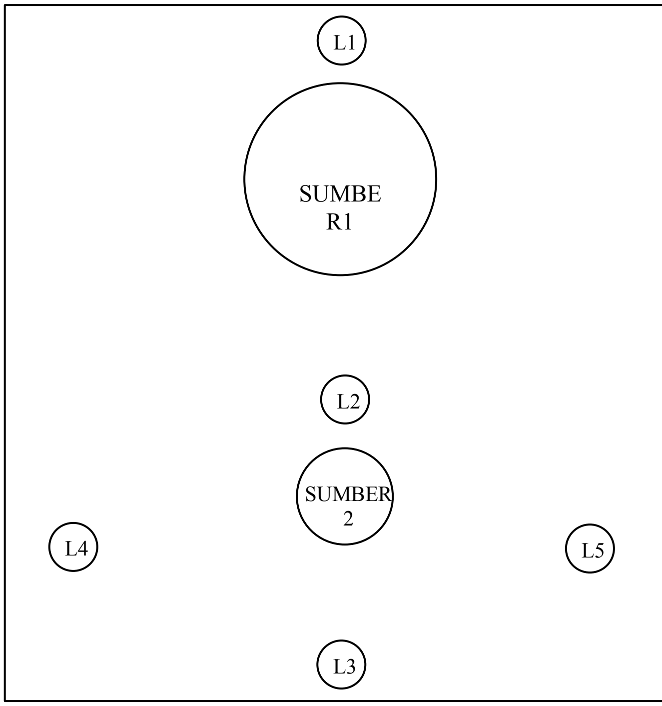
$$T = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ tahun}$$

$$= 258 \text{ hari}$$

4.4 TITIK NETRAL DAN TITIK PUSAT MASSA

A. Titik Netral

Pada sistem tiga benda (dua sumber gravitasi, dan satu benda objek), terdapat titik-titik dimana gaya gravitasi dari kedua benda saling meniadakan, sehingga apabila benda objek ditempatkan di titik tersebut, maka benda tersebut akan diam relatif terhadap kedua benda sumber gravitasi (mengalami keseimbangan gravitasi). Titik-titik tersebut disebut **titik netral**, atau titik Lagrange.



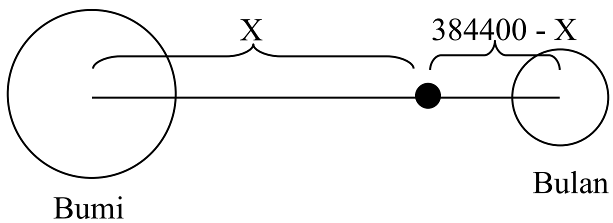
Dari gambar disamping, dapat dilihat posisi kelima titik Lagrange (L1,L2,L3,L4,L5).

Penurunan titik-titik ini menggunakan kurva potensial gravitasi dalam ruang dimensi tiga, dan pertama kali dipecahkan oleh matematikawan Prancis Josef Lagrange.

Yang paling mudah tentunya titik Lagrange kedua, yang letaknya berada di antara kedua benda sumber. Dan secara sederhana dapat dihitung letaknya dengan menyamakan gaya gravitasi dari kedua benda sumber.

Contoh soal :
Bila jarak bumi-bulan adalah 384400 km, dan massa bumi = 81 kali massa bulan. maka tentukan jarak titik netral -yang berada di antara bumi dan bulan- terhadap pusat bumi !

Jawab :
Secara logika, letak titik netral pasti harus lebih dekat ke Bulan daripada Bumi karena massa Bulan lebih kecil dari bumi. Maka keadaan soal bisa digambarkan,



Lalu,

$$F_{Bumi} = F_{Bulan}$$

$$\frac{GM_B m}{x^2} = \frac{GM_m m}{(384400 - x)^2}$$

$$\frac{384400 - x}{x} = \sqrt{\frac{M_m}{M_B}}$$

$$384400 - x = x\sqrt{\frac{M_m}{M_B}}$$

$$x\sqrt{\frac{M_m}{M_B}} + x = 384400$$

$$x(\sqrt{\frac{M_m}{M_B}} + 1) = 384400$$

$$x = \frac{384400}{\sqrt{\frac{M_m}{M_B}} + 1}$$

$$x = \frac{384400}{\sqrt{\frac{1}{81}} + 1}$$

$$x = 345960\ km$$

Jadi, letak titik netral ialah 345960 km dari pusat bumi.

B. Titik Pusat Massa

Pada sistem dua benda, sesungguhnya kedua benda selalu saling mengitari pusat massa sistem. Hal tersebut berlaku juga untuk matahari dan planet-planetnya. Jika kita tinjau sistem matahari-Jupiter, kita sekilas akan melihat Jupiter bergerak mengelilingi Matahari. Namun apabila kita perhatikan lebih seksama, ternyata matahari dan Jupiter keduanya mengitari pusat massa sistem Jupiter-Matahari, namun letak titik itu sangat dekat dengan pusat matahari, sehingga gerakan matahari tidak kentara terlihat, melainkan hanya bergoyang sedikit saja. Hal serupa terjadi bagi sistem Bumi-Bulan, Jupiter-Ganymede, dan lain-lain, namun tidak bagi Pluto-Charon, dimana letak titik pusat massa sistem berada di luar permukaan Pluto.

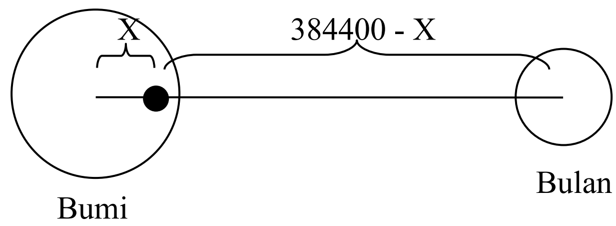
Secara sederhana, prinsip menghitung letak titik pusat massa (untuk sistem dua benda) serupa dengan cara menghitung letak titik tumpu suatu penggaris yang diberi beban berbeda di kedua sisinya.

Contoh Soal :

Bila jarak bumi-bulan adalah 384400 km, dan massa bumi = 81 kali massa bulan, hitung letak titik pusat massa sistem Bumi-Bulan, diukur dari pusat bumi !

Jawab :

Keadaan Sistem Bumi-Bulan dapat digambarkan,



Lalu,

$$
\begin{aligned}
m_1 a_1 &= m_2 a_2 \\
M_B x &= M_m (384400 - x) \\
M_B x &= 384400 M_m - M_m x \\
M_B x + M_m x &= 384400 M_m \\
x(M_B + M_m) &= 384400 M_m \\
x &= \frac{384400 M_m}{(M_B + M_m)} \\
x &= \frac{384400(1)}{(81+1)} \\
x &= 4687 \text{ km}
\end{aligned}
$$

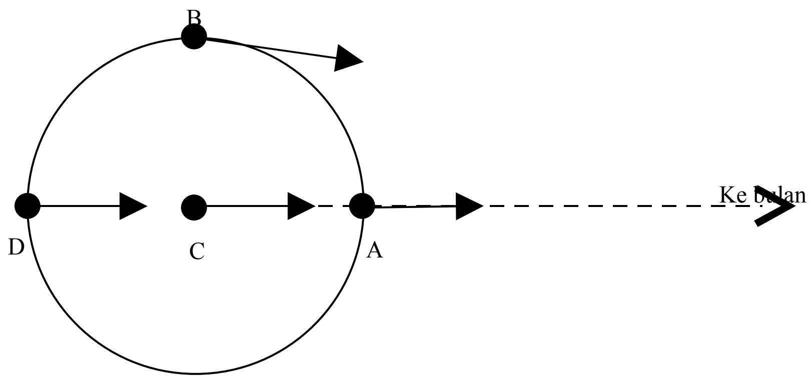
Karena jari-jari permukaan bumi sekitar 6400 km, maka jelas titik pusat massa sistem berada di dalam permukaan bumi, 4687 km dari pusat bumi.

4.5 GAYA PASANG SURUT

Kita telah mengenal peristiwa naiknya muka air laut di saat bulan purnama dan bulan baru, namun apa yang sebenarnya menJadi penyebab fenomena tersebut ?

Gaya pasang surut didefinisikan sebagai selisih gaya gravitasi di permukaan benda dengan di pusat benda. Pada terapan umumnya gaya ini tidak hanya menyebabkan naiknya permukaan air laut di bumi saJa, namun Juga menyebabkan komet yang lewat terlalu dekat dengan matahari akan pecah, atau satelit yang terlalu dekat dengan planet induknya akan terpecah membentuk cincin.

Perhatikan gambar berikut, dengan asumsi kemiringan orbit Bulan terhadap ekuator 0.



Kita akan menghitung besar gaya pasang surut oleh bulan kepada bumi. Gaya pasang surut di titik A didefinisikan sebagai selisih gaya di permukaan dengan gaya di pusat, atau dinyatakan

$$F_{PASU} A = F_A - F_C$$

$$= \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

Dengan d ialah Jarak bulan ke bumi (dari pusat ke pusat), R ialah radius permukaan bumi (kita sumsikan berupa bola sempurna), M adalah massa bumi, dan m adalah massa bulan.

$$= GMm\left(\frac{1}{d^2 - 2dR + R^2} - \frac{1}{d^2}\right)$$

$$= GMm\left(\frac{d^2 - (d^2 - 2dR + R^2)}{d^4 - 2d^3R + d^2R^2}\right)$$

$$= GMm\left(\frac{d^2 - (d^2 - 2dR + R^2)}{d^4 - 2d^3R + d^2R^2}\right)$$

$$= GMm\left(\frac{2dR - R^2}{d^4 - 2d^3R + d^2R^2}\right)$$

$$= GMm\left(\frac{d}{d^4} . \frac{2R - \frac{R^2}{d}}{1 - \frac{2R}{d} + \frac{R^2}{d^2}}\right)$$

Karena d Jauh lebih besar daripada R (d >> R), maka persamaan menJadi

$$= GMm\left(\frac{1}{d^3}.\frac{2R-0}{1-0+0}\right)$$

$$\boxed{F_{PASU}A = \frac{2GMmR}{d^3}} \quad \text{..................................(4.13)}$$

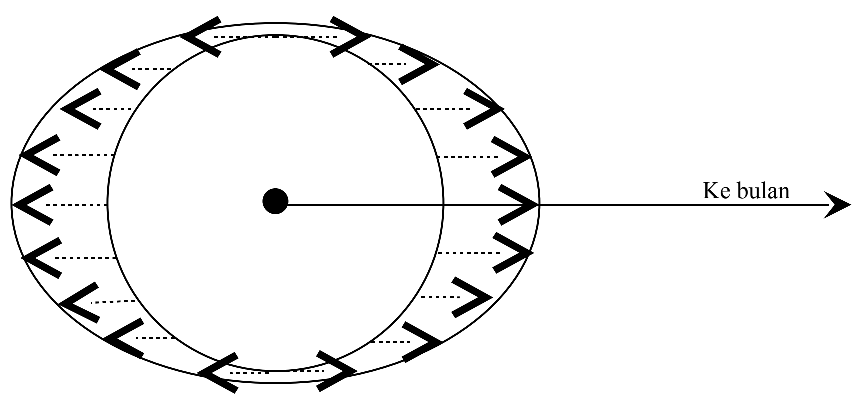
Melalui penurunan yang sama akan diperoleh gaya pasang surut di masing-masing titik

$$F_{PASU}B = \frac{GMmR}{d^3} \qquad \text{(setengah } F_{PASU}A\text{)}$$

$$F_{PASU}C = 0$$

$$F_{PASU}D = -\frac{2GMmR}{d^3} \qquad \text{(negatif dari } F_{PASU}A\text{)}$$

Atau bila digambar dalam diagram gaya di seluruh permukaan akan berbentuk :



Dimana tinggi permukaan air laut akan mengikuti diagram diatas, terbesar di ekuator, dan terus menurun hingga terkecil di kutub. Perlu dilihat bahwa besar gaya pasang surut di titik A akan sama dengan di titik D, hanya berlawanan arah. Sehingga walaupun Bulan ada di sisi kanan Bumi dalam gambar, sisi kiri bumi Juga akan "menggelembung" dengan besar yang sama. Hal inilah yang menyebabkan pasang saat Purnama sama dengan pasang saat Bulan Baru. Dan setiap hari, pengamat di permukaan bumi akan mengalami 2 kali pasang dan 2 kali surut, akibat rotasi bumi.

Persamaan 4.13 berlaku umum bagi dua benda yang saling mempengaruhi karena gravitasi.