



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Tesis de Licenciatura

Una parametrización de difeomorfismos para registro de imágenes médicas

Julián Epstein

Directora: Teresa Krick
Codirector: Demián Wassermann

Noviembre 2013

Índice general

1. Registro de imágenes	9
1.1. Modalidades	10
1.2. Tipos de registro	11
1.3. Para qué registrar imágenes	11
1.3.1. Segmentación	11
1.3.2. Creación de atlas	11
1.3.3. Combinación de modalidades	12
1.3.4. Registro en vivo	12
1.3.5. Detección de cambios	12
1.3.6. Reconstrucción tridimensional	12
1.4. Familias de transformaciones	13
1.4.1. Transformaciones rígidas y afines	13
1.4.2. Modelos físicos	14
1.4.3. Interpolación y aproximación	14
1.4.4. Combinación de afines	15
1.4.5. Difeomorfismos	15
1.5. Medidas de similaridad	16
2. Grupos y Algebras de Lie	17
2.1. Subvariedades de \mathbb{R}^n	17
2.1.1. Espacio tangente via derivaciones y via curvas	17
2.1.2. Subvariedades	18
2.2. Grupos de Lie	19

2.2.1.	Subgrupos de Lie	21
2.2.2.	Morfismos	22
2.2.3.	Espacio tangente	23
2.3.	Algebras de Lie	24
2.4.	Exponencial de grupos y exponencial de matrices	27
2.4.1.	Exponencial de matrices	27
2.4.2.	Exponencial de grupos de Lie	28
2.4.3.	Relación entre las dos exponenciales	30
2.5.	Ejemplos de exponencial	30
2.5.1.	Exponencial en $SO(2, \mathbb{R})$	30
2.5.2.	Exponencial en $SO(3, \mathbb{R})$	32
2.5.3.	Exponencial en $SE(n, \mathbb{R})$	33
2.6.	Media en grupos de Lie	34
2.6.1.	Media de Fréchet	34
3.	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	37
3.1.	Teorema de existencia y unicidad local	38
3.1.1.	Ecuación de variaciones	38
3.1.2.	Dependencia de los parámetros	39
3.2.	Extensibilidad de la solución	40
3.3.	Campos	41
3.3.1.	Ecuaciones autónomas	41
3.3.2.	Ecuaciones no autónomas	42
3.4.	Algebra de Lie de campos y grupo de difeomorfismos	42
3.4.1.	Interpretación geométrica de $[X, Y]$	43
3.4.2.	Acciones de grupos de Lie	47
3.4.3.	Estructura diferenciable de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$	48
3.4.4.	Exponencial de campos	49
3.4.5.	Combinación de campos	49
3.5.	Metodos numéricos para resolver EDO's	52
3.5.1.	Teorema de convergencia	53

3.5.2.	Análisis de convergencia para Euler	55
4.	Transformaciones Poliafines, Polirígidas y Log-euclideanas Poliafines y Polirígidas	61
4.1.	Transformaciones poliafines y polirígidas	61
4.1.1.	Promedio local	61
4.1.2.	Pequeñas deformaciones	62
4.2.	Transformaciones poliafines y polirígidas	63
4.2.1.	Invertibilidad	64
4.2.2.	Parámetros	65
4.2.3.	Optimización	66
4.2.4.	Descenso de gradiente y Levenberg-Marquardt	67
4.2.5.	Gradiente de \mathbf{s}	67
4.2.6.	Integración numérica de la EDO	68
4.2.7.	Inconvenientes	71
4.3.	Transformaciones Log-euclideanas poliafines y polirígidas	73
4.3.1.	Integrabilidad	74
4.3.2.	Invertibilidad	74
4.3.3.	Invarianza por cambio de coordenadas afines	75
4.3.4.	Interpretación geométrica	75
4.3.5.	Integración rápida	76
4.3.6.	Por que “Log-Euclideanas”	78
4.3.7.	Estrategias de optimización	78
	Bibliografía	80

Agradecimientos

Llegar hasta acá es cerrar un ciclo. Durante todos estos años muchas personas queridas acompañaron este camino. Cuándo se agradece siempre se corre el riesgo de no mencionar a todos, porque recapitulando siempre resulta que hay mucho y a muchos a quien agradecer. Empecemos por el principio.

A mis viejos. Dani y Mabelita, por su apoyo, por su cariño. Por enseñarme el valor del conocimiento, y el amor al conocimiento. Gracias Mabelita por tu tesón. Por tu fuerza y perseverancia. Mabelita no se achica nunca y esa fuerza y alegría marcan el paso, construyen el camino por donde se llega al futuro. Gracias por enseñarme que solo el amor convierte en milagro el barro. Gracias viejo, por la pasión. Por ser tan buen tipo, por mostrarme que nunca se pierde el asombro y la fascinación. Por el amor al arte, la locura de la empresa, la entrega a la aventura, la jovialidad y el talento.

A mis hermanos. Porque con ellos tengo de to' y no me falta na'. Es un orgullo crecer a su lado. Verlos convertirse en artistas y personas. A Nati, por tu empatía, por tus consejos que valen oro, por tu estar, mas lejos o mas cerca, siempre presente. Siempre avida de escuchar, de querer y de crecer. A Tomi por ser el amigo primero. Apasionado de la vida. Por tu empuje y entusiasmo. Por tu risa contagiosa. Mi compañero de aventuras desde que el mundo es mundo y se empezaron a contar los días. Que lejos llegamos los tres epsteincitos!

A mis dos grandes amigos de la facu! A Manu, que escuchó esta tesis tantas veces. Gracias por tu confianza en mí, por ser tan generoso y tan cariñoso. Por tener el corazón siempre a flor de piel. A Mariano, con quien recorri este camino palmo a palmo. Materia a materia y delirio a delirio. Gracias por tu humor, por tu inteligencia y por la infinita ayuda que fuiste todos estos años. No podría pedir mejor compañero de viaje. Me encanto hacer esta carrera junto a ustedes.

A Demián y a Teresa. Por su paciencia y ayuda. Gracias Teresa, por confiar en mí, apostar a el trabajo interdisciplinario y aventurarte en nuevos terrenos. Gracias Demian, por tus consejos y por mostrarme que la matemática pura es aplicada. A los jurados Nicolas Saintier, por la buena disposición y tomarse el trabajo. En particular a Gabriel por ayudarme a pensar la parte numérica. Y a Gabriel Larrotonda que me dio buenas ideas sobre grupos de Lie de dimensión infinita.

A todos los geniales docentes que tuve. A Matias Graña, Patu Groisman, Mariela y Fernando Cuckierman, Daniel Carando y tantos otros. A todos los que con sus clases me enseñaron, a demas de mucha matematica, su propia facinación y creatividad.

A todos los JTP's y ayudantes fantasticos que tuve. Muchos de los cuales son mis amigos y me siguen enseñando todo el tiempo. A Matias del Hoyo, por ser tan generoso en todo y compartir la matemática que sabes (que es mucha!). A Seba Freyre, un grande en todo sentido. Gran matematico y amigo, gracias por tu creatividad y por estar siempre dispuesto a dar una mano con un problema (de matematica y de los otros). A Rafa Grimson, por el yoga, por los consejos, por tu ejemplo de ser capaz de reinventarte todo el tiempo, en la vida y la matemática.

A todos los grandes compañeros de la facu: Lucho (yo no me olvido), Lau, Mauro, Maxi, Herman, Lucas, Manuela, Guille, Fran, Fede. Y a todos los amigos de la vida, que visto en perspectiva no parecen ser un conjunto numerable, pero agradeceré a algunos en representación: Mati, Ale, Manu, Rita, Nachito, Lean, Zippo, Rodri, Gerva, Juan, Sofi, Nati, Olguis, a los flotantes. A todos.

A mis alumnos y compañeros de trabajo! Porque enseñando matemática me divertí y aprendí muchísimo.

Se abre una nueva etapa, y estoy contento de cerrar ésta con tanto para agradecer.

Introducción

El objetivo de esta tesis de licenciatura es explorar la matemática involucrada en un método de *registro de imágenes médicas*. El problema se enmarca en el área de *anatomía computacional*, en la cual se conjugan técnicas matemáticas de distintos campos, modelos tomados de la física y por supuesto la implementación computacional. En esta tesis trabajaremos esencialmente sobre la tesis doctoral de Vincent Arsigny, INRIA, Francia, [1], y dos artículos derivados de ella, [2, 3]. En ellos se propone un método para registrar imágenes y se desarrollan varios aspectos del mismo: la viabilidad computacional del método (y sus ventajas con respecto a otros), la matemática involucrada, así como ejemplos de aplicación. Nosotros nos concentraremos sobre el aspecto matemático. Desarrollaremos la teoría necesaria para presentar el método, probaremos la convergencia de algunos de los métodos numéricos involucrados, y daremos interpretaciones geométricas.

Registrar imágenes es encontrar correspondencias entre las mismas. En el caso de imágenes médicas se trata de imágenes 2D o 3D del cuerpo humano, como por ejemplo tomografías, resonancias magnéticas, radiografías, etc. En este contexto, registrar una imagen que llamaremos *origen* sobre otra que llamaremos *objeto*, consistirá en *transformar* la imagen *origen* hasta que sea *lo mas similar posible a la imagen objeto*. Es decir, buscamos una transformación geométrica tal que la imagen origen transformada y la imagen objeto minimicen cierto criterio de similaridad S , que será una función escalar. En líneas generales, el problema de registrar imágenes querrá decir para nosotros encontrar, entre un espacio de transformaciones posibles, la transformación que minimice cierto funcional. En el primer capítulo precisaremos estas nociones. Además, daremos un panorama de las aplicaciones médicas del registro de imágenes y del estado del arte en cuanto a los métodos.

La opción más simple para registrar imágenes es trabajar con transformaciones rígidas o afines. Estos espacios de transformaciones son grupos de Lie que pueden representarse como subvariedades de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Utilizando las propiedades de la exponencial de grupos de Lie, veremos en el segundo capítulo de nuestra tesis como se pueden parametrizar estas transformaciones. El problema de registrar las imágenes se reducirá entonces a encontrar el mínimo de S sobre el espacio de parámetros.

Como las transformaciones rígidas y afines son insuficientes en muchos casos para asemejar las imágenes, se recurre a transformaciones más generales. En particular, en los trabajos mencionados se propone una familia de transformaciones definidas como solución de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias. Dichas transformaciones combinan el efecto de transformaciones rígidas

o afines aplicadas sobre diversas partes de la imagen, de manera de obtener un difeomorfismo. En el primer artículo, [2], se detalla la forma en la que se combinan estas transformaciones locales y sus propiedades, mientras que en el segundo, [3], se propone una modificación en la manera de combinarlas, que mejora ciertas propiedades de la transformación resultante. Desarrollaremos en el tercer capítulo de nuestra tesis los aspectos involucrados de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Veremos la teoría necesaria para garantizar existencia de solución, las propiedades de las soluciones y algunos métodos numéricos para aproximarlas. Mostraremos en particular condiciones en las cuales no solo los métodos convergen a la solución buscada sino también sus derivadas a las derivadas de éstas. Además mostraremos en qué sentido estas transformaciones generalizan a los grupos de Lie, y daremos interpretaciones dinámicas del efecto de combinar campos vectoriales.

Finalmente en el último capítulo describiremos el método de Arsigny detalladamente, fundamentando ciertos aspectos matemáticos del mismo a partir de lo desarrollado en los capítulos anteriores.

Capítulo 1

Registro de imágenes

Modelaremos una imagen como una función I de un cierto dominio espacial Ω en los reales.

$$I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

El valor de la función es en general el valor de intensidad de gris o de color en cada punto de la imagen. Aunque la función en realidad solo está definida sobre finitos puntos de Ω , vamos a utilizar un modelo continuo, es decir, vamos a suponer que está definida sobre todo Ω . De hecho, supondremos además diferenciabilidad hasta el orden que requiramos, que en la práctica se puede lograr interpolando con funciones suaves.

Trabajaremos con imágenes médicas, que son imágenes de seres humanos adquiridas en contextos clínicos, donde el valor de I representa características del tejido que la imagen describe a las cuales se le asigna significado metabólico. El dominio Ω puede ser tridimensional $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, o plano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ según el tipo de imagen, pero en todo caso será acotado (e incluso podemos asumir que es compacto). No estamos considerando aquí videos, que incluyen la variable temporal (eg. ecografías). Llamaremos *modalidades* a los distintos tipos de imágenes médicas (tomografías, resonancias, etc), en donde la interpretación física y el rango de los valores de I es distinto para cada modalidad.

Las imágenes médicas son particularmente importantes en el estudio de neurociencias. El cerebro es un órgano de funcionamiento muy complejo y muy sensible. Es importante siempre que se pueda, que los estudios del mismo, el diagnóstico de enfermedades y la planificación de tratamiento se hagan de manera no invasiva y para eso las imágenes son fundamentales.

Registrar dos imágenes consiste en encontrar correspondencias espaciales en estructuras anatómicas de la “mejor manera posible”. Dependiendo del tipo de registro, se puede o no asumir que existe una correspondencia perfecta. Por ejemplo, esta hipótesis puede ser realista si se quiere registrar dos imágenes de la misma modalidad del mismo sujeto, pero no necesariamente si las imágenes son de modalidades o sujetos distintos (sobre todo si tienen distinta dimensión). En líneas generales se supone que existe una transformación preferencial dentro de la familia de transformaciones con las que se trabaja, con la cual la correspondencia es la mejor posible aunque no siempre es perfecta. Si suponemos esta hipótesis, el registro puede describirse de la

siguiente manera:

Dadas dos imágenes I y J definidas sobre dominios Ω y Ω' , registrar la imagen J (que llamaremos *imagen origen*) sobre la imagen I (que llamaremos *imagen objeto*) es hallar, dentro de una familia \mathfrak{F} establecida de transformaciones geométricas, una transformación $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ tal que las imágenes I y $J \circ T$ sean lo más parecidas posibles según algún criterio de similaridad S , es decir hallar

$$T = \underset{T' \in \mathfrak{F}}{\operatorname{argmin}} S(I, J \circ T'), \text{ o sea } S(I, J \circ T) \leq S(I, J \circ T'), \forall T' \in \mathfrak{F}.$$

La función S es menor cuanto más parecida son las imágenes (en realidad es más bien una medida de diferencia, no de similaridad; algunos autores usan medidas de similaridad S que se maximizan en vez de minimizarse).

Elegir criterios de similaridad y familias de transformaciones adaptadas a los distintos tipos de imágenes y a los distintos propósitos del registro, así como estrategias de optimización es una tarea compleja. La mayoría de los trabajos publicados en el área proponen formas de registrar imágenes adaptadas a algún problema particular, en general incluyendo una implementación computacional del método. La necesidad de que los métodos propuestos sean verdaderamente aplicables fuerza a que los mismos tengan estrategias numéricas estables y rápidas (en cuanto a complejidad). El objetivo de esta tesis es describir uno de estos métodos propuesto por Vincent Arsigny como parte de su tesis doctoral [2]. La contribución principal del mismo es proponer un tipo de transformaciones. No es un método de registro en sí, a pesar de que en [3] se aplica a casos concretos de registro a modo de ejemplos. En realidad se trata de dos familias de transformaciones relacionadas: las transformaciones *poliafinas* y las *polirígidas*, y de una mejora de las mismas, las transformaciones *log-euclidianas poliafinas* y *log-euclidianas polirígidas*.

En este capítulo mostraremos en forma general un resumen de los distintos aspectos del área de registro de imágenes médicas, así como algunas aplicaciones principales.

1.1. Modalidades

Los distintos aparatos que se usan para la obtención de imágenes (cada vez mas variados con el avance tecnológico) producen imágenes distintas. Pueden ser 2D o 3D, color o blanco y negro, en distintas escalas y resoluciones. Incluso, algunos aparatos como por ejemplo un resonador magnético, pueden producir más de una modalidad de imagen (T1, T2, T2*, BOLD, etc). Las modalidades pueden ser divididas en dos categorías principales: *anatómicas* y *funcionales*.

Las de tipo anatómico reflejan principalmente características morfológicas. Entre ellas encontramos Rayos X (RX), Tomografía computada (TC), Resonancia magnética (IRM de tipo T1, T2 y T2*), Ultrasonido (US), fotografía de cortes histológicos.

Las de tipo funcional dan información del metabolismo de la anatomía que describen. Por ejemplo: Tomografía computarizada por emisión de fotón único, tomografía por emisión de positrones, Resonancia magnética funcional (IRMf).

1.2. Tipos de registro

El registro de imágenes puede dividirse en las siguientes categorías: *Intra-sujeto* vs. *inter-sujeto*: Intra-sujeto es entre dos imágenes del mismo individuo e inter-sujeto entre imágenes de distintos individuos. *Monomodal* vs. *multimodal*: monomodal son imágenes de la misma modalidad, y multimodal imágenes de modalidades distintas.

Estas categorías se combinan y dan distintas posibilidades.

1.3. Para qué registrar imágenes

1.3.1. Segmentación

Cuando un especialista observa una imagen médica, por ejemplo de cerebro, su conocimiento de la anatomía del cerebro le permite identificar las distintas partes del mismo en la imagen que está viendo. ¿Cómo sabe el médico qué partes de la imagen representan qué partes del cerebro? Debido a su formación, que le permite conocer como es un cerebro tipo, y que a lo largo del tiempo vio muchos ejemplos (en vivo, en atlas de anatomía, etc.). Por consiguiente, la operación mental que hace al ver una imagen nueva, es asociarla con las que ya conoce, estableciendo correspondencias entre las partes. En un lenguaje más formal, encuentra transformaciones geométricas que convierten las imágenes que tiene en su memoria en algo similar a la nueva imagen que está viendo. O viceversa, encuentra transformaciones geométricas que deforman la imagen nueva en una conocida.

Al proceso de distinguir las partes de una imagen lo llamaremos *segmentación*. Lo descrito en el párrafo anterior es un ejemplo de este proceso hecho por un profesional. ¿Puede una computadora emularlo? Para eso debería contar con imágenes modelos de la anatomía que quiere describir. A una imagen de estas características la llamaremos *atlas*. El paso siguiente sería hacer un registro de uno de estos atlas sobre la imagen objeto. Una vez encontrada la deformación geométrica que mejor “alineó” el atlas con la imagen objeto, podemos considerar que le aplica esta deformación a las partes distinguidas del atlas. Las nuevas partes que quedan distinguidas ahora en la imagen objeto, son, idealmente, las correspondientes en la anatomía que la imagen representa. También se puede proceder al revés, registrando la imagen sobre el atlas.

1.3.2. Creación de atlas

En principio un atlas tendría que ser una imagen de buena calidad de cierta anatomía (cerebro, columna vertebral, corazón, etc.) en un individuo medio relativo a una población (por supuesto no siempre corresponde el mismo atlas para poblaciones de niños que de adultos, de hombres que de mujeres, etc.) y con sus distintas partes bien distinguidas. Ahora, ¿qué es un individuo estadísticamente promedio? Puede que ningún individuo del que se tengan buenas imágenes tenga una anatomía representativa de toda una población en todos sus aspectos. Esto sugiere otra posible aplicación del registro de imágenes: construir un atlas a partir de imágenes de

una población de individuos. Hay muchas estrategias propuestas para esto en la literatura que requieren registrar imágenes, por ejemplo [4].

1.3.3. Combinación de modalidades

El registro en el mismo sistema de coordenadas de dos imágenes de un mismo paciente (por ejemplo IRM y TC) permite ver en simultáneo la información que aportan. Por ejemplo, se utiliza en el planeamiento de una neurocirugía.

1.3.4. Registro en vivo

Cuando se planea una cirugía, se toman imágenes del paciente en las semanas previas a la intervención. Mediante métodos de tratamiento de imágenes se puede reconstruir información anatómica importante que no se ve a simple vista. Por ejemplo en una neurocirugía en la que se busca remover un tumor, es importante que durante la intervención no se dañen tejidos claves del cerebro como por ejemplo las fibras de materia blanca. Mediante un tratamiento de imágenes se puede detectar estas fibras a partir de una resonancia magnética preoperatoria. Ahora bien, durante la ejecución de la cirugía, la forma del cerebro cambia como producto de cambios de presión dentro del cráneo. Si el quirófano cuenta con un resonador, equipo de ultrasonido, cámaras de video u otros dispositivos, se pueden tomar imágenes durante la cirugía. Registrando, la imagen preoperatoria con estas imágenes en vivo se puede estimar la posición de dichas fibras u otros objetos de interés. Así, el cirujano puede tener en vivo una idea de la localización de estructuras importantes que tal vez no se perciban a simple vista.

Observamos que esta técnica requiere realizar el registro particularmente rápido. Se necesitan no solo buenas computadoras, sino métodos de registro de bajo costo computacional, e.g. [22].

1.3.5. Detección de cambios

Registrar imágenes de un mismo sujeto hechas en distinto momento permite hacer un seguimiento de los cambios que se producen en su anatomía. Por ejemplo, estudiar la evolución de enfermedades (por ejemplo el mal de Alzheimer), envejecimiento, o cambios producidos por una cirugía.

1.3.6. Reconstrucción tridimensional

Una de las maneras de digitalizar una anatomía tridimensionalmente, en particular un cerebro, es a partir de cortes histológicos: cortes planos de mucha precisión (pocas células de espesor). Las imágenes obtenidas dan mucha información de los tejidos a nivel molecular y a partir de ellas puede lograrse una imagen 3D del objeto de muy alta resolución.

Debido al poco espesor de los cortes, las imágenes de un corte y el siguiente deberían ser muy parecidas. Ahora, en el proceso de obtener los cortes, aplicarle químicos (para conservarlos y

distinguir los distintos tipos de tejidos) y ponerlos entre dos vidrios, se producen pequeñas deformaciones locales que llamamos *artefactos*. Hay dos posibilidades entonces para alinear los cortes y corregir artefactos: registrar cada imagen con la siguiente, o registrarlas sobre una imagen 3D de menor precisión (obtenida por otros métodos: IRM, TC) del objeto previo a los cortes, e.g. [9, 8].

1.4. Familias de transformaciones

Las familias de transformaciones que se usan para registrar las imágenes son de distintos tipos. Tienen propiedades distintas y distintos trasfondos a nivel teórico. En todos los casos, una transformación tiene asociada una cantidad de variables reales que la determinan. Algunas familias de transformaciones requieren muchas variables mientras que otras requieren pocas. Al número de variables necesarias se lo suele denominar en la literatura *grados de libertad*. En el principio del espectro tenemos las *transformaciones rígidas* y *afines* que requieren pocas variables para representarlas.

1.4.1. Transformaciones rígidas y afines

Son transformaciones de la forma $T_{A,b}(x) = Ax+b$ donde A es una transformación lineal inversible (afines) o una rotación (rígidas). Son muy útiles en registros intra-sujeto monomodal donde se puede asumir que el paciente no sufrió modificaciones en su anatomía entre una imagen y la otra, y que las diferencias entre las mismas se atribuyen a la posición del paciente con respecto al aparato, la escala de la imagen o deformaciones lineales propias del aparato.

Si por ejemplo, se trata de un registro $3D-3D$ (o sea $T_{A,b} : \Omega \rightarrow \Omega'$ con $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^3$), requerimos en principio 9 parámetros escalares para la matriz A y 3 para el vector b . Es decir, buscamos el mínimo de

$$s(A, b) := S(I, J \circ T_{A,b})$$

sobre \mathbb{R}^{12} o un subconjunto. Ahora, el conjunto de transformaciones afines y el de transformaciones rígidas (sin reflexiones) son grupos de Lie, $\text{Aff}(3, \mathbb{R})$ y $SE(3, \mathbb{R})$. Es decir que estamos optimizando un funcional sobre un grupo de Lie \mathbf{G} que actúa sobre \mathbb{R}^3 . O sea, buscamos

$$g = \underset{g \in \mathbf{G}}{\text{argmin}} S(I, J \circ g).$$

Para $\mathbf{G} = SE(3, \mathbb{R})$, según lo desarrollaremos en la Sección 2.5.3, podemos parametrizar los elementos $R \in \mathbf{G}$ via la exponencial (que es sobreyectiva),

$$R = \exp \begin{pmatrix} A_r & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_r = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

donde $r = (r_x, r_y, r_z) = \theta \cdot v_1 \in \mathbb{R}^3$, con $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ que indica el ángulo de rotación y $\|v_1\| = 1$ su eje. Por lo tanto $\dim(\mathbf{G}) = 6$. Para tener una biyección debemos restringirnos a rotaciones de ángulo menor que π .

En el caso de registro inter-sujeto, no suele ser realista asumir que la transformación necesaria es solo rígida o afín porque se trata de anatomías esencialmente distintas. En esos casos se usan transformaciones más generales que en la literatura se las suele llamar *no rígidas*. Describiremos ahora algunas de esas transformaciones clasificándolas en términos de la teoría que tienen de fondo.

1.4.2. Modelos físicos

Una manera de explicar las transformaciones que llevan a diferencias entre una imagen y otra, es pensar en las propiedades físicas del material que compone cierta anatomía. Esto tiene particular relevancia en el caso de registro intra-sujeto. Por ejemplo la deformación ocurrida en un paciente de antes a después de una cirugía cerebral está relacionada con cambios en la presión dentro del cráneo. Las transformaciones están basadas en distintos fundamentos físicos. Los principales son *teoría de fluidos viscosos*[18], *óptica*[11] y *elasticidad de materiales*[6].

1.4.3. Interpolación y aproximación

Dada una grilla de puntos $\{x_j\}$ en el dominio Ω de la imagen objeto, queremos asociarles puntos $\{y_j\}$ en Ω' e interpolar con funciones de cierta familia de funciones en el resto de los puntos. Dentro de las familias de transformaciones posibles para interpolar se destacan las que se obtienen a partir de un conjunto de funciones base. Lo que hacemos es considerar una combinación genérica de ciertas funciones base de nuestra familia,

$$T_\lambda(x) = \sum_{i=1}^n T_i(x, p, \{x_j\}, \{y_j\}),$$

donde cada función depende de los puntos de la grilla $\{x_j\}$, de sus imágenes $\{y_j\}$ y de un vector de parámetros p que las caracteriza. La función resultante depende de todos los parámetros que representaremos como un vector λ . El registro consiste en encontrar la combinación óptima de funciones base ajustando los parámetros en un espacio Λ de parámetros. Es decir, hallar el mínimo de la función $\mathbf{s} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\mathbf{s}(\lambda) := S(I, J \circ T_\lambda). \tag{1.1}$$

Por lo tanto, se busca optimizar una función escalar sobre algún subconjunto de \mathbb{R}^k con alguna estrategia de optimización. El problema principal que tenemos, es que \mathbf{s} suele tener muchos mínimos locales, y las estrategias de optimización no nos garantizan *a priori* hallar el mínimo global. Para simplificar la optimización se suele fijar los puntos $\{x_j\}$ en una grilla regular y optimizamos sólo sobre los $\{y_j\}$.

La combinación T de funciones base puede buscar interpolar (en general de forma aproximada) los puntos $\{(x_j, y_j)\}$ o hacer una mejor aproximación tipo cuadrados mínimos. Algunos de las familias de funciones son: B-splines, funciones radiales (por ejemplo Thin-Plate splines) [15] [13], y wavelets (análisis armónico)[20]. Por ejemplo, en el caso de funciones radiales, tomamos,

para cada punto x_i de la grilla, una función $f_i(x) = w_i g(\|x - x_i\|)$, donde g toma valores en $\mathbb{R}_{>0}$ y decrece rápidamente cuando nos alejamos de 0. Si $g(0) = 1$, armamos la combinación

$$T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i,$$

con los valores de w_i elegidos para minimizar $\sum_{i=1}^n \|T(x_i) - y_i\|^2$.

1.4.4. Combinación de afines

Aunque las transformaciones afin o rígida no sean adecuadas en algunos casos para el registro de imágenes, se puede utilizar combinaciones de transformaciones locales afines o rígidas locales (de hecho, si lo que se busca es una transformación diferenciable es, de hecho, infinitesimalmente lineal). Hay varias formas de hacer esto. Una opción es dividir el dominio en partes y hacer un registro lineal dentro de cada parte. Sin embargo lo más probable es que haya problemas en el contorno de las partes (no se peguen de manera continua). Para solucionar esto se define la transformación en cada parte y se suaviza la transformación total (por ejemplo convolucionando con Gaussianas). Para poder dar cuenta tanto de las deformaciones globales como las locales se puede usar un método multiresolución: primero se registra con el dominio entero sin segmentar y se guarda la imagen modificada como nueva imagen a registrar. Luego se divide en partes el dominio, se registra por partes, y se suaviza. Se divide cada parte en partes mas pequeñas y se itera el procedimiento. Otra posibilidad es hacer una combinación de transformaciones afines o rígidas cuyos coeficientes sean funciones suaves, lo que garantiza la suavidad de la transformación resultante (lo veremos más en detalle como preliminar de las transformaciones polirígidas y poliafines). Las transformaciones que estudiaremos en esta tesis están estrechamente vinculadas con estas ideas.

1.4.5. Difeomorfismos

Las familias de funciones mencionadas hasta ahora en líneas generales no garantizan la invertibilidad de las transformaciones. Esto es un problema, ya que nos gustaría que registrar la imagen J en I sea equivalente a registrar I en J , es decir, nos gustaría que la transformación T_{JI} y T_{IJ} sean mutuamente inversas (observemos que esto es más fuerte incluso que pedir que cualquiera de ellas sea inversible). Esto es importante por ejemplo, a la hora de hacer estadísticas en las deformaciones. Además quisiéramos que tanto la transformación como su inversa preserven la topología (que manden sectores conexos de una imagen en sectores conexos de la otra, superficies en superficies, curvas en curvas, etc), y sean suaves. Es decir, queremos que la transformación sea un difeomorfismo. Esto no está garantizado en principio por los métodos descritos anteriormente (salvo algunos métodos con fundamentos físicos que nombraremos más adelante). Pueden agregarse estas restricciones a la hora de buscar la transformación óptima, agregándole factores al funcional que penalicen la no invertibilidad o la no suavidad de la transformación y su inversa, e.g. [7, 12]. Esto no garantiza que $T_{IJ} \circ T_{JI} = \text{Id}$ pero por lo menos que sea lo más semejante posible.

Sin embargo, se puede trabajar directamente con familias de difeomorfismos y hay una tendencia fuerte en esta dirección en la comunidad. Una opción es obtener flujos de difeomorfismos que surgen como solución de ecuaciones diferenciales. Algunos métodos están basados en fundamentos físicos, e.g [19]. Otros, como el que describiremos en esta tesis, son puramente matemáticos.

1.5. Medidas de similaridad

Existen en la literatura distintas medidas de similaridad para comparar imágenes. La elección de una u otra depende del tipo de registro. En [16] se formaliza la elección de una medida de similaridad como un problema de estimador de máxima verosimilitud. Citaremos dos de ellas como ejemplo:

- Información mutua: Se basa en comparar la información que cada imagen contiene en el sentido de *teoría de la información*. Es particularmente útil para registro multimodal, ya que en ese caso los valores numéricos de una imagen o la otra tiene distinta interpretación y no tendrían por qué coincidir. Por ejemplo si una imagen es color y la otra es blanco y negro, o sobre todo si las imágenes no son de la misma dimensión.
- Distancia L_2 entre las imágenes:

$$S(I, J) = \int_{\Omega} (I(x) - J(x))^2 dx$$

Se usa especialmente en registración monomodal. Lo formulamos en el modelo continuo a fines teóricos pero en la práctica la integral es una suma finita sobre los pixels de la imagen.

Capítulo 2

Grupos y Algebras de Lie

Como vimos en el capítulo anterior, las mas simples de las transformaciones usadas en registro de imágenes son las transformaciones afines y rígidas. Estas familias de transformaciones forman grupos de Lie y estudiaremos en este capítulo como parametrizar algunos grupos de Lie de interés. Definiremos los grupos y álgebras de Lie, mostrando su relación y daremos ejemplos. Además, la teoría de grupos de Lie nos servirá como introducción para el estudio de grupos mas generales de difeomorfismos que veremos en el capítulo siguiente. En la última sección de este capítulo veremos algunas nociones de *medias en grupos de Lie*, que serán la motivación para la familias de transformaciones *Poliafines Log-euclideanas* que veremos en el último capítulo.

2.1. Subvariedades de \mathbb{R}^n

2.1.1. Espacio tangente via derivaciones y via curvas

Se recuerda que si M es una variedad diferenciable sobre \mathbb{R} de dimensión k , una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $C^\infty(M)$ si $f \circ \varphi^{-1}$ es infinitamente diferenciable (también diremos suave) para toda carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$. Una *derivación de M en $p \in M$* es una transformación \mathbb{R} -lineal $D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple la regla de Leibniz, es decir

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g), \forall f, g \in C^\infty(M).$$

El conjunto de todas las derivaciones D de M en p , que tiene una estructura natural de \mathbb{R} -espacio vectorial, es el *espacio tangente* T_pM . La unión disjunta de todos los T_pM para $p \in M$ es TM , que tiene a su vez una estructura de variedad diferenciable.

Hay otra definición equivalente del espacio tangente, con clases de equivalencia de curvas: Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una carta, donde $p \in U$ abierto. Decimos que una curva $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ es C^∞ (o suave) si $\varphi \circ \sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$ lo es. Consideremos el conjunto de todas las curvas suaves (definidas en $(-\epsilon, \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$) tales que $\sigma(0) = p$. Podemos definir una relación en este conjunto del siguiente modo: $\sigma_1 \equiv \sigma_2 \Leftrightarrow (\varphi \circ \sigma_1)'(0) = (\varphi \circ \sigma_2)'(0)$. Es facil ver (usando la regla de la

cadena usual de \mathbb{R}^n) que esta definición no depende de la carta elegida y que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de tales curvas σ se notan $[\sigma]$ y constituyen un espacio vectorial. Las operaciones vectoriales pueden definirse a partir de la definición, pero también se heredan de manera natural si mostramos la equivalencia con la otra definición. La equivalencia entre ambas definiciones esta dada por asociarle a cada clase de equivalencia de curvas por el punto $p \in M$, una derivación D_σ definida por:

$$\text{Dado } p \in U \text{ abierto y } f \in C^\infty(U), \quad D_\sigma(f) = (f \circ \sigma)'(0)$$

La buena definición así como la inyectividad de esta asociación resultan triviales. Recíprocamente, dada una derivación D en p , y una carta $\varphi = (x_1, \dots, x_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, con $p \in U$, podemos definir una curva $\sigma(t) = \varphi^{-1}(tD(x_1), \dots, tD(x_k))$ para $t \in (\epsilon, \epsilon)$ para algún ϵ suficientemente chico.

Para nosotros, un vector tangente $v \in T_pM$ tendrá ambas interpretaciones y usaremos una u otra según el caso. Por ejemplo, para definir el corchete de campos, pensamos a los vectores como derivaciones, aunque también se lo puede calcular, en un punto, en término de curvas.

Supongamos ahora que tenemos una función diferenciable $F : M \rightarrow N$ entre dos variedades. Dado $p \in M$, podemos definir una transformación lineal $d_pF : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$:

Usando la versión con curvas, dada $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ curva por p ,

$$d_pF([\sigma]) = [F \circ \sigma].$$

Con la definición por derivaciones, dada una derivación $D \in T_pM$ y dada $g \in C^\infty(N)$, definimos

$$d_pF(D)(g) = D(g \circ F).$$

En particular, si consideramos un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, como variedad diferenciable, tenemos que su espacio tangente $T_{t_0}I$ es de dimensión 1 y está generado por la derivación $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0}$. Es decir, hay una base natural para $T_{t_0}I$, y podemos identificar cada tangente con \mathbb{R} : $\lambda \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} \mapsto \lambda$. Ahora, si tenemos otra variedad M y una función $\gamma : I \rightarrow M$, la aplicación lineal $d_{t_0}\gamma : T_{t_0}I \rightarrow T_{\gamma(t_0)}M$, queda definida por

$$(d_{t_0}\gamma)\left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0}\right)(f) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma) = \left. \frac{\partial(f \circ \gamma)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = (f \circ \gamma)'(t_0)$$

Definimos entonces $\dot{\gamma} : I \rightarrow TM$ como $\dot{\gamma}(t_0) = (d_{t_0}\gamma)\left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0}\right)$. En particular esto extiende la definición de vector tangente a una curva para todo valor de t y la derivación $\dot{\gamma}(0)$ corresponde con la clase de curvas $[\gamma]$.

2.1.2. Subvariedades

Si M una variedad diferenciable, $N \subseteq M$ es una *subvariedad* de M si la inclusión $i : N \rightarrow M$ es diferenciable y cumple:

- $d_p i : T_p N \rightarrow T_p M$ es monomorfismo para todo $p \in N$.
- N tiene la topología de subespacio.

En nuestro caso vamos a trabajar con subvariedades de \mathbb{R}^n . Si vemos a \mathbb{R}^n como variedad, tenemos una carta trivial que es la identidad. Además, $T_p \mathbb{R}^n = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \rangle_{1 \leq i \leq n}$. Luego, tenemos un isomorfismo lineal entre $T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \mapsto (a_1, \dots, a_n),$$

que hace a cada tangente isomorfo a \mathbb{R}^n . Visto vía curvas, si tenemos $[\sigma] \in T_p \mathbb{R}^n$, esta clase de equivalencia está caracterizada (usando la carta id) por $\sigma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Si miramos con cuidado la equivalencia de las dos definiciones de tangentes, el mismo isomorfismo lineal que expresamos con derivaciones, se traduce en la aplicación:

$$[\sigma] \mapsto \sigma'(0).$$

Si ahora tomamos una subvariedad M de \mathbb{R}^n , la inclusión i nos da el monomorfismo lineal

$$d_p i : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n.$$

Si identificamos $T_p \mathbb{R}^n$ con \mathbb{R}^n , la imagen $d_p i(T_p M)$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n de la misma dimensión que $T_p M$ (que es la dimensión de M). Es decir, podemos ver a los vectores tangentes a M en p como elementos de \mathbb{R}^n , y los espacios vectoriales $T_p M$ como subespacios de \mathbb{R}^n . Via curvas, se tiene que $d_p i([\sigma]) = [i \circ \sigma]$. Pero la curva $i \circ \sigma$ no es más que ver la curva σ con codominio \mathbb{R}^n . Podemos escribir $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$. Identificamos entonces $[\sigma]$ con $\sigma'(0) \in \mathbb{R}^n$.

Si ahora tomamos una curva $\gamma : I \rightarrow M$ definida en un intervalo I , podemos decir que $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M \subseteq \mathbb{R}^n$ via la identificación. Si miramos con cuidado las definiciones veremos que $\dot{\gamma}(t)$ resulta ser simplemente el tangente a la curva γ (con codominio \mathbb{R}^n) en el sentido usual:

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)).$$

2.2. Grupos de Lie

Un grupo de Lie \mathbf{G} es una variedad diferenciable equipada de una estructura de grupo tal que las operaciones resultan diferenciables.

Definición 2.2.1. \mathbf{G} es un grupo de Lie (real) si (\mathbf{G}, \cdot) es un grupo que es también una variedad diferenciable sobre \mathbb{R} , tal que multiplicar e invertir:

$$m : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}, \quad (g, h) \mapsto gh \quad \text{e} \quad \text{inv} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}, \quad g \mapsto g^{-1}$$

son funciones diferenciables.

Observación 2.2.2.

1. Componiendo la multiplicación con las inclusiones de \mathbf{G} en $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, obtenemos también que multiplicar a derecha y multiplicar a izquierda por un $g \in \mathbf{G}$,

$$L_g : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}, \quad h \mapsto gh \quad \text{y} \quad R_g : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}, \quad h \mapsto hg$$

son diferenciables, $\forall g \in \mathbf{G}$.

2. Que la multiplicación e inversión sean diferenciables es equivalente a la diferenciabilidad de

$$\alpha : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}, \quad (g, h) \mapsto gh^{-1}.$$

Observación 2.2.3. Desde un punto de vista filosófico, se pueden pensar los grupos de Lie como familias “continuas y suaves” de transformaciones de un objeto geométrico, a pesar de que la definición de grupo es axiomática y no requiere que se trate de transformaciones. En los ejemplos que nos interesan, se trata explícitamente de transformaciones geométricas de \mathbb{R}^n .

Otra característica que esta implícita en la definición es que al darle estructura diferenciable, estamos trabajando con grupos que localmente son como un espacio vectorial de *dimensión finita*. Más adelante en esta tesis, trabajaremos con transformaciones más generales, que no admiten modelos locales de dimensión finita.

Ejemplo 2.2.4.

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo de Lie con la estructura diferenciable usual.
2. Todo espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión finita es un grupo de Lie con la suma. La estructura diferencial la hereda de ser isomorfo a \mathbb{R}^n con $n = \dim(\mathbb{V})$ (cualquier isomorfismo da la misma estructura diferencial). Las operaciones de suma y opuesto resultan trivialmente suaves con esa estructura.
3. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un grupo de Lie con el producto de \mathbb{C} . Es un grupo, que visto como abierto de \mathbb{R}^2 hereda su estructura diferenciable. Además el producto y la inversa en coordenadas de \mathbb{R}^2 tienen la forma

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') \quad \text{y} \quad (a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{\|(a, b)\|^2},$$

y por lo tanto son suaves.

4. $GL(n, \mathbb{R})$, el grupo de matrices inversibles es un grupo de Lie con la composición. Como $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ es abierto, hereda su estructura diferenciable ($\mathbb{R}^{n \times n}$ es un espacio vectorial y por lo tanto tiene una estructura diferenciable que lo hace isomorfo a \mathbb{R}^{n^2}). Si consideramos el producto en coordenadas, su expresión local resulta un polinomio en cada coordenada y por lo tanto suave. Usando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$, vemos que la inversión en coordenadas locales es una función racional en los coeficientes con denominador nunca nulo y por lo tanto suave.

5. El grupo $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ de las transformaciones afines inversibles de la forma

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \mapsto T\vec{x} + \vec{v}$$

con $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $T \in GL(n, \mathbb{R})$, es un grupo de Lie. Es claro que es un grupo y veremos luego que tiene una estructura diferenciable.

2.2.1. Subgrupos de Lie

Definición 2.2.5. Sea \mathbf{G} un grupo de Lie. Decimos que $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ es un *subgrupo de Lie* si se cumple que:

- es un subgrupo,
- es una subvariedad.

Obviamente vale lo siguiente:

Proposición 2.2.6. *Todo subgrupo de Lie es un grupo de Lie (con las operaciones heredadas).*

Ejemplo 2.2.7. 1. Si V es un espacio vectorial (grupo de Lie con la suma) y $W \subseteq V$ es un subespacio, entonces W es un subgrupo de Lie

2. $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie como subgrupo de Lie de (\mathbb{C}^*, \cdot) . Además la función $N : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $N(z) = \|z\|^2$ es diferenciable, y tiene a 1 como valor regular. Como $S^1 = N^{-1}(\{1\})$, el teorema del valor regular nos dice que es una subvariedad de \mathbb{C}^* .

3. Todo subgrupo abierto de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie.

Otros ejemplos destacados son ciertos subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$ que llamaremos *subgrupos clásicos*. Algunos ejemplos de estos son:

El grupo ortogonal:	$O(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(\mathbb{R}^n) : MM^t = \text{Id}_n\}.$
El grupo especial lineal:	$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(\mathbb{R}^n) : \det(M) = 1\}.$
El grupo de rotaciones:	$SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R}).$

Para los efectos de esta tesis nos interesa el último ejemplo $SO(n, \mathbb{R})$ en particular para $n=2$ y $n=3$. Veamos que es un grupo de Lie:

$O(n, \mathbb{R})$ es subvariedad ya que Id_n es un valor regular de la aplicación $\beta : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : \beta(M) = MM^t$ (**ver**) y es claro que es subgrupo. Por lo tanto es un grupo de Lie. Ahora, la función \det , restringida a $O(n, \mathbb{R})$, vale ± 1 . Por lo tanto, el subconjunto de $O(n, \mathbb{R})$ de matrices con determinante 1 es preimagen de un abierto, por ende abierto, y por lo tanto subgrupo de Lie de $O(n, \mathbb{R})$.

2.2.2. Morfismos

Definición 2.2.8. Un morfismo de grupos de Lie es un homomorfismo de grupos que además es diferenciable. Un isomorfismo de grupos de Lie, es un isomorfismo de los grupos que es además un difeomorfismo.

Las aplicaciones siguientes son morfismos de grupos de Lie

1. \mathbb{V} de dimensión n es isomorfo a \mathbb{R}^n (como se ve del ejemplo 2).

2.

$$\mathbb{R}^n \rightarrow GL(n+1, \mathbb{R}), \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & \text{Id}_n \end{pmatrix}$$

donde el 0 en la matriz representa un vector columna nulo y v es una fila es un morfismo (\mathbb{R}^n es, por supuesto, grupo de Lie con la suma).

3.

$$S^1 \rightarrow SO(n, \mathbb{R}), \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

es un morfismo.

4.

$$\text{Aff}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad T(x) = Ax + b \mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un morfismo (recordemos que los elementos de $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ son transformaciones afines: una transformación inversible A más un desplazamiento b).

La imagen es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ y la aplicación es un isomorfismo de grupos. Para que sea también un difeomorfismo, le damos a $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ la estructura diferencial inducida por la de su imagen via el morfismo. En adelante, vamos a identificar estos grupos de Lie. Podemos interpretar la aplicación de la siguiente manera: A cada $x \in \mathbb{R}^n$ le asociamos $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Es decir, inyectamos \mathbb{R}^n en el plano de \mathbb{R}^{n+1} con última coordenada

1. Luego, la transformación afín T de \mathbb{R}^n resulta la restricción de una transformación lineal de \mathbb{R}^{n+1} a dicho plano (que lo manda en sí mismo):

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A un morfismo de un grupo de Lie \mathbf{G} en $GL(n, \mathbb{R})$ lo llamaremos una *representación del grupo*.

El grupo de movimientos euclideos especiales de \mathbb{R}^n es $SE(n, \mathbb{R}) = \{T(x) = Rx + b : R \in SO(n, \mathbb{R}) \text{ y } b \in \mathbb{R}^n\}$. Es un subgrupo de Lie de $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ y lo identificaremos en adelante con su representación via el morfismo del ejemplo (4). Es decir:

$$SE(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} R & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : R \in SO(n, \mathbb{R}) \text{ y } b \in \mathbb{R}^n \right\}$$

2.2.3. Espacio tangente

Veamos, para algunos subgrupos inmersos en $\mathbb{R}^{n \times n}$ como son sus espacios tangentes.

Ejemplo 2.2.9. El espacio tangente a $GL(n, \mathbb{R})$ en A

$$T_A GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{R}) :$$

Como $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, su tangente en cualquier punto es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Consideremos $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y tomemos la curva $\sigma_B : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tal que $\sigma_B(t) = A + Bt$. La curva está bien definida si ϵ es chico, ya que como el determinante es continuo y A es inversible, podemos garantizar invertibilidad de $A + Bt$ para t chico. Como $\dot{\sigma}_B(0) = B$ y B es genérico, tenemos que $\mathbb{R}^{n \times n} = T_A GL(n, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.2.10. Sea $\mathbf{G} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un subgrupo de Lie. Queremos caracterizar como es el espacio tangente a \mathbf{G} en cualquiera de sus puntos con respecto al espacio tangente a \mathbf{G} en la identidad Id.

Veamos primero como es el diferencial de la aplicación $L_h : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, $g \mapsto hg$ para un grupo de Lie arbitrario. Tomemos una curva $\sigma : I \rightarrow \mathbf{G}$ tal que $\sigma(0) = g$. Se tiene que $L_h \circ \sigma : I \rightarrow \mathbf{G}$ satisface $L_h \circ \sigma(0) = hg$. Además, por lo visto en (4) arriba,

$$(L_h \circ \dot{\sigma})(0) = (d_g L_h)(\dot{\sigma}(0)). \quad (2.1)$$

Cuando $\mathbf{G} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, si $h = B, g = A \in GL(n, \mathbb{R})$, y si la curva σ es tal que $\dot{\sigma}(0) = V \in GL(n, \mathbb{R})$, es inmediato verificar que $(L_B \circ \dot{\sigma})(t) = B\dot{\sigma}(t)$, y por lo tanto $(L_B \circ \dot{\sigma})(0) = B\dot{\sigma}(0) = BV$. Es decir, en este caso, $d_A L_B : T_A \mathbf{G} \rightarrow T_B \mathbf{G}$ es tal que $d_A L_B(V) = BV$.

Como L_B es un difeomorfismo, $d_{\text{Id}} L_B$ es un iso entre los tangentes. Por lo tanto, el tangente en B al grupo de Lie $\mathbf{G} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, es

$$T_B \mathbf{G} = \{BV : V \in T_{\text{Id}} \mathbf{G}\}.$$

Ejemplo 2.2.11. El espacio tangente al grupo de rotaciones.

$$T_{\text{Id}}(SO(n, \mathbb{R})) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = -A\} :$$

Sea $c(t)$ una curva en $SO(n, \mathbb{R})$ tal que $c(0) = \text{Id}$ y $\dot{c}(0) = A$. Luego como

$$c(t)(c(t))^t = \text{Id},$$

derivando obtenemos la identidad de matrices

$$\dot{c}(t)(c(t))^t + c(t)(\dot{c}(t))^t = 0,$$

y evaluando en $t = 0$:

$$-A \text{Id}^t = \text{Id} A^t, \quad \text{i.e.} \quad -A = A^t.$$

La observación anterior caracteriza el espacio tangente en cualquier otro punto.

Ejemplo 2.2.12. El espacio tangente a $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ en la identidad es

$$\left\{ \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : M \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ y } v \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\}:$$

Sea $c(t)$ una curva en $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$, $c(t) = \begin{pmatrix} A(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que cumple que $A(0) = \text{Id}_n$, $\dot{A}(0) = M$, $b(0) = 0$ y $\dot{b}(0) = v$. Luego $c(t)$ es una curva por Id_{n+1} y $\dot{c}(0) = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.2.13. El espacio tangente a $SE(n, \mathbb{R})$ en la identidad es

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A^t = -A \text{ y } v \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\}.$$

Se deduce combinando los ejemplos anteriores.

2.3. Algebras de Lie

Definición 2.3.1. Un álgebra de Lie \mathfrak{a} es un espacio vectorial con una operación llamada corchete $[,]$ que cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ll} \text{bilinealidad:} & [\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z], \\ \text{antisimetría:} & [X, Y] = -[Y, X], \\ \text{identidad de Jacobi:} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \end{array}$$

Definición 2.3.2. Si \mathbb{V} es un álgebra de Lie, una subálgebra de Lie es un subespacio vectorial $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ tal que $[v, w] \in \mathbb{W}$, $\forall v, w \in \mathbb{W}$.

Ejemplo 2.3.3. 1. *Espacios vectoriales.* Cualquier espacio vectorial \mathbb{V} es un álgebra de Lie con el corchete definido como:

$$[X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathbb{V}.$$

En ese caso decimos que es un álgebra de Lie abeliana.

2. *Matrices cuadradas.* El espacio de las matrices cuadradas $\mathbb{R}^{n \times n}$ es un álgebra de Lie si tomamos como corchete al conmutador de matrices:

$$[A, B] = AB - BA.$$

3. (\mathbb{R}^3, \times) es un álgebra de Lie, donde \times es el producto vectorial: es fácil ver que es bilineal y antisimétrico y verifica Jacobi.

4. *Campos vectoriales.* Sea M una variedad diferenciable, y sea $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de campos vectoriales suaves en M que tiene una estructura natural de espacio vectorial (podemos sumar y multiplicar campos por escalares punto a punto). Dado un elemento $X : M \rightarrow TM$ en $\mathfrak{X}(M)$ y un punto $p \in M$, $X_p \in T_pM$ es una derivación en p , es decir una aplicación lineal de $C^\infty(M)$ en \mathbb{R} que satisface la regla de Leibniz:

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Visto globalmente, un campo induce un morfismo

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \text{donde } X(f)(p) := X_p(f), \quad \forall p \in M.$$

Pensándolos de esta manera, dado $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tiene sentido componerlos y obtener una nueva aplicación $X \circ Y : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $X \circ Y(f)(p) = X_p(Y(f))$. No vale en general que esa aplicación sea la inducida por un campo. Pero si definimos $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ podemos definir la función

$$[X, Y]_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : [X, Y]_p(f) = [X, Y](f)(p),$$

que resulta ser una función lineal que satisface la regla de Leibniz, es decir, $[X, Y]_p \in T_pM$. Luego $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ y es fácil verificar que con esta operación $\mathfrak{X}(M)$ resulta un álgebra de Lie.

Veremos ahora que todo grupo de Lie tiene un álgebra de Lie asociada.

Definición 2.3.4. Dado \mathbf{G} un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$, decimos que X es invariante a izquierda (análogamente a derecha) si:

$$d_p L_g : T_p \mathbf{G} \rightarrow T_{gp} \mathbf{G}$$

preserva el campo, $\forall p, g \in \mathbf{G}$, es decir $(d_p L_g)(X_p) = X_{gp}$, $\forall p, g \in \mathbf{G}$.

Observación 2.3.5. Si $\mathbf{G} \in GL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie de matrices, y $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ es un campo invariante a izquierda tal que $X_{\text{Id}} = A$ entonces

$$X_B = d_{\text{Id}} L_B(X_{\text{Id}}) = B X_{\text{Id}} = BA.$$

De la definición sale que un campo invariante a izquierda queda definido por su valor en la identidad e del grupo, ya que

$$X_g = (d_e L_g)(X_e).$$

Además para cada elemento $v \in T_e$ podemos definir el campo X tal que $X_g = (d_e L_g)(v)$ y resulta ser un campo suave invariante a izquierda [10, prop. 2.26, pág.29]

Por lo tanto podemos identificar el conjunto de campos invariantes a izquierda con $T_e(\mathbf{G})$. Pero dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ invariantes a izquierda, podemos tomar el corchete $[X, Y]$ y resulta que este corchete da un nuevo campo invariante a izquierda:

$$dL_g([X, Y]) = [dL_g X, dL_g Y].$$

Por lo tanto permite darle al espacio vectorial $T_e \mathbf{G}$ (o al de campos invariantes a izquierda) una estructura de álgebra de Lie (visto como campos invariantes es una subálgebra del álgebra de campos), que llamaremos la asociada al grupo \mathbf{G} . En adelante notaremos al álgebra de Lie de un grupo con la misma letra que el grupo pero en minúscula y con caracteres germánicos: $G \rightarrow \mathfrak{g}$. Es decir

$$\mathfrak{g} = T_e \mathbf{G}.$$

Los detalles de esta construcción hay que hacerlos con cuidado en el caso abstracto, es decir de un grupo cualquiera donde el espacio tangente en un punto es el formado por las derivaciones. Sin embargo, los ejemplos que trabajaremos nosotros, son subgrupos de $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$. Así que vamos a pensar $T_{\text{Id}} \mathbf{G}$ como un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$ y la siguiente proposición muestra que hereda la estructura de álgebra de Lie de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Proposición 2.3.6. *Sea $\mathbf{G} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ un subgrupo de Lie. Entonces el espacio tangente a \mathbf{G} en el elemento identidad Id es una subálgebra de Lie de $\mathbb{R}^{n \times n}$.*

Demostración. El espacio tangente $T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Basta ver que es cerrado por el corchete de $\mathbb{R}^{n \times n}$, es decir si $A, B \in T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$ entonces $[A, B] \in T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$. Para eso, consideremos curvas α y β en \mathbf{G} tales que

$$\alpha(0) = \beta(0) = \text{Id} \quad \text{y} \quad \dot{\alpha}(0) = A, \quad \dot{\beta}(0) = B,$$

y tomemos las función de dos variables

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{G}, \quad (s, t) \mapsto \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}.$$

Fijando el valor $s := s_0$, obtenemos una curva $\gamma_{s_0}(t)$ que pasa por Id : en efecto

$$\gamma_{s_0}(0) = \alpha(s_0)\beta(0)\alpha(s_0)^{-1} = \alpha(s_0)\text{Id}\alpha(s_0)^{-1} = \text{Id}.$$

Además, para cada s_0 tenemos el vector $\dot{\gamma}_{s_0}(0) \in T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$:

$$\dot{\gamma}_{s_0}(0) = \alpha(s_0)\dot{\beta}(0)\alpha(s_0)^{-1} = \alpha(s_0)B\alpha(s_0)^{-1}.$$

Como F es C^∞ como función que llega a $\mathbb{R}^{n \times n}$, la función $\sigma(s) = \dot{\gamma}_s(0)$ es una curva regular con valores en $T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$. Por lo tanto $\dot{\sigma}(0) \in T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$, ya que $T_{\text{Id}}(\mathbf{G})$ es una variedad lineal. Pero

$$\dot{\sigma}(s) = \dot{\alpha}(s)B\alpha(s)^{-1} + \alpha(s)B(\dot{\alpha}^{-1})(s) = \dot{\alpha}(s)B\alpha(s)^{-1} - \alpha(s)B\alpha^{-1}(s)\dot{\alpha}(s)\alpha^{-1}(s).$$

Evaluando en $s = 0$, obtenemos

$$\dot{\sigma}(0) = AB\text{Id}^{-1} - \text{Id}B\text{Id}A\text{Id} = AB - BA.$$

□

Cabe observar que si miramos al álgebra de Lie de un grupo como campos invariantes a izquierda, tiene un corchete propio (el corchete de campos). Identificando campos invariantes con vectores en $T_{\text{Id}} \mathbf{G}$, esto nos da un corchete en un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$ que en principio no tendría por qué ser el mismo que el conmutador de matrices. Pero puede probarse que los dos corchetes coinciden.

Ejemplo 2.3.7. Según los ejemplos 2.2.11 y 2.2.13, se tiene

1. El álgebra de Lie de $SO(n, \mathbb{R})$ es

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^t = -A\}.$$

2. El álgebra de Lie de $SE(n, \mathbb{R})$ es

$$\mathfrak{se}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Definición 2.3.8. Un morfismo de álgebras de Lie es una transformación lineal T entre los espacios vectoriales tal que preserve el corchete. Es decir

$$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

$$T([A, B]_{\mathbb{V}}) = [T(A), T(B)]_{\mathbb{W}}$$

Un isomorfismo de álgebras de Lie es un isomorfismo lineal tal que él y su inversa preservan corchete.

Vale que todo morfismo de grupos de Lie induce un morfismo entre sus álgebras de Lie, ya que si $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ es un morfismo de grupos de Lie, y $e \in \mathbf{G}$ es el elemento neutro de \mathbf{G} ,

$$d_e f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

cumple que:

$$(d_e f)([v; w]_{\mathfrak{g}}) = [(d_e f)(v); (d_e f)(w)]_{\mathfrak{h}}$$

2.4. Exponencial de grupos y exponencial de matrices

2.4.1. Exponencial de matrices

El espacio de matrices $\mathbb{R}^{n \times n}$ es una \mathbb{R} -álgebra con el producto y suma de matrices. Además como tiene dimensión finita como espacio vectorial, cualquier norma que le pongamos nos da la misma topología.

Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definimos la sucesión de sumas parciales para $k \in \mathbb{N}$:

$$S_k = \text{Id} + A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^k}{k!}.$$

Proposición 2.4.1. La sucesión anterior es convergente para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y por lo tanto la exponencial está bien definida para cualquier matriz.

Demostración. Consideremos la norma de operadores asociada a alguna norma en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Luego, vale que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Entonces tenemos la cota

$$\|S_k\| = \left\| \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=0}^k \frac{\|A\|^i}{i!}.$$

Luego, como la expresión de la derecha es una serie convergente en \mathbb{R} (de hecho es la serie de la exponencial de reales), por el criterio de Weierstrass la serie de matrices converge. La convergencia es en cualquier norma de matrices ya que todas dan la misma topología. Notamos:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

□

La exponencial de matrices cumple las siguientes propiedades:

1. $e^0 = \text{Id}$.
2. Si $AB = BA$ entonces $e^A e^B = e^{AB}$.
Se deduce fácilmente de aquí que $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. Esto dice en particular que e^A siempre es una matriz inversible.
3. $e^{CAC^{-1}} = C e^A C^{-1}$, $\forall C \in GL(n, \mathbb{R})$.
4. Dada una matriz A , la curva $c(t) = e^{tA}$ es diferenciable como función de \mathbb{R} en $GL(n, \mathbb{R})$ y su derivada es

$$\dot{c}(t) = A e^{tA}.$$

Además A conmuta con esta curva: $A e^{tA} = e^{tA} A$.

2.4.2. Exponencial de grupos de Lie

Dado un campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ en una variedad diferenciable M , decimos que $\sigma : I \rightarrow M$ es *curva integral* de X si $\dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}$. Es decir, el vector velocidad de la curva en cada punto de su trayectoria es el vector tangente que indica X en ese punto.

El teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias permite mostrar que para todo campo suave X y todo punto $p \in M$ existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$ y una curva integral $\sigma : I \rightarrow M$ tal que $\sigma(0) = p$, y que esa curva es además única.

Proposición 2.4.2. *Sea \mathbf{G} un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ un campo invariante a izquierda. El campo X queda determinado por su valor en la identidad $e \in \mathbf{G}$, digamos $X_e = v$. Luego, existe una única curva integral σ de X tal que $\sigma(0) = e$, $\dot{\sigma}(0) = v$ y está definida sobre todo \mathbb{R} .*

Demostración. Por el teorema de existencia y unicidad sabemos que existe una curva integral $\sigma : (-2\epsilon, 2\epsilon) \rightarrow \mathbf{G}$ para algún $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Queremos ver que la podemos extender. Llamemos $g = \sigma(\epsilon)$ y consideremos las curvas

$$\sigma_0 : (-\epsilon, 3\epsilon) \rightarrow \mathbf{G}, \quad \sigma_0(t) = \sigma(t - \epsilon)$$

$$\sigma_1 : (-\epsilon, 3\epsilon) \rightarrow \mathbf{G}, \quad \sigma_1(t) = (L_g \circ \sigma_0)(t) = g \sigma(\epsilon - t).$$

Vale que $\sigma_1(\epsilon) = g\sigma(0) = ge = g = \sigma(\epsilon)$. Si verificamos que σ_1 también es curva integral, como coincide con σ en un punto, lo hará en toda la intersección de sus dominios. Luego, basta ver que $\dot{\sigma}_1(t) = X_{\sigma_1(t)}$. Para ver esto, primer observemos que $\dot{\sigma}_0(t) = \dot{\sigma}(t - \epsilon)$. Luego

$$\dot{\sigma}_1(t) = d_{\sigma(t-\epsilon)}L_g(\dot{\sigma}(t - \epsilon)) = (d_{\sigma(t-\epsilon)}L_g)(X_{\sigma(t-\epsilon)}) = X_{g\sigma(t-\epsilon)} = X_{\sigma_1(t)}.$$

La anteúltima igualdad se debe a que X es invariante a izquierda.

El teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales nos garantiza que las curvas coinciden en $(-\epsilon, 2\epsilon)$. Esto nos permite pegarlas en forma suave y extender la curva σ en $(-2\epsilon, 3\epsilon)$. Procediendo inductivamente vemos que podemos ir agrandando el dominio indefinidamente a derecha y también a izquierda de manera análoga. \square

La proposición anterior nos permite construir la exponencial de grupos de Lie (abstractos) definida como

$$\exp : \mathfrak{g} = T_I \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}, \quad \exp(v) = \sigma_v(1),$$

donde $\sigma_v(t)$ es la curva integral correspondiente (que está definida en $t = 1$).

La exponencial de \mathbf{G} cumple las siguientes propiedades:

1. Para todo $t, t' \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\exp(tv) \exp(t'v) = \exp((t + t')v),$$

y una consecuencia inmediata es que

$$\exp(-v) = (\exp(v))^{-1}$$

2. Si \mathbf{G} y \mathbf{H} son grupos de Lie y $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ es un homomorfismo de grupos de Lie entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{H} \\ \exp_{\mathbf{H}} \uparrow & & \uparrow \exp_{\mathbf{G}} \\ T_e \mathbf{G} & \xrightarrow{d_e \phi} & T_e \mathbf{H} \end{array}$$

En particular, esta propiedad nos dice que si $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$ y tomamos $\phi = i$ la inclusión, entonces $\exp_{\mathbf{G}}(v) = \exp_{\mathbf{H}}(d_e i(v))$. En el caso en que \mathbf{G} y \mathbf{H} son grupos de matrices (en los que identificamos los tangentes con subespacios de $\mathbb{R}^{n \times n}$), podemos escribir $\exp_{\mathbf{G}}(v) = \exp_{\mathbf{H}}(v)$, $\forall v \in T_{\text{Id}} \mathbf{G}$.

2.4.3. Relación entre las dos exponenciales

Proposición 2.4.3. *Las dos nociones de exponencial presentadas coinciden para un subgrupo de Lie $\mathbf{G} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$.*

Demostración. Consideremos la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)} \\ \alpha(0) = \text{Id} \end{cases},$$

donde $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ es un campo invariante a izquierda.

La curva $c(t) = e^{tA}$ es solución única de este sistema ya que:

$$c(0) = e^{0A} = e^0 = \text{Id} \quad \text{y} \quad \dot{c}(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A = c(t)A = X_{c(t)},$$

ya que según la Observación 2.3.5, sabemos que si $X_{\text{Id}} = A$ entonces $X_B = BA$, $\forall B \in \mathbf{G}$. Luego $c(t)$ es la curva integral del campo X que pasa por la identidad y por lo tanto

$$\exp(A) = e^A.$$

□

2.5. Ejemplos de exponencial

Recordemos que el grupo de rotaciones es el conjunto de las matrices ortogonales de determinante 1:

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : AA^t = \text{Id}, \det(A) = 1\},$$

que visto como transformaciones lineales de \mathbb{R}^n , también lo podemos definir (de manera equivalente) por

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{End}(\mathbb{R}^n) : \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \text{ y } \det(A) = 1\},$$

y que según el ejemplo 2.3.7, su álgebra de Lie asociada es el conjunto de las matrices anti-simétricas:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^t = -A\}.$$

2.5.1. Exponencial en $SO(2, \mathbb{R})$

Como vimos anteriormente, existe un morfismo de grupos de Lie

$$S^1 \rightarrow SO(2, \mathbb{R}) \quad , \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Este morfismo resulta ser un isomorfismo de grupos de Lie y la exponencial de un grupo se corresponde con la exponencial del otro (propiedad 3 de exponencial de grupos). Pero podemos verlo de otra manera mas simple:

Consideremos el espacio vectorial $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Este espacio vectorial resulta una \mathbb{R} -álgebra con el producto de matrices y tenemos el isomorfismo de álgebras

$$\alpha : \mathbb{C} \rightarrow H \quad , \quad a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Esta aplicación también resulta un difeomorfismo y por lo tanto

$$\alpha(e^{a+bi}) = \alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+bi)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(a+bi))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n}{n!} = e\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right).$$

Como $SO(2, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ están incluidos en H , podemos ver la exponencial de un elemento de $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ del otro lado del morfismo. Tomemos un elemento cualquiera de $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Le corresponde $z = \theta i \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha(z) = Z$. Sabemos que $e^{\theta i} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, y por lo tanto, via α se obtiene

$$e\left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Esto caracteriza a todas las imágenes inversas por la exponencial de una rotación. Si

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

sus logaritmos son de la forma

$$(\theta + 2k\pi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Además muestra que la exponencial es sobreyectiva sobre $SO(2, \mathbb{R})$. Si restringimos el dominio y el codominio, establece una biyección:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} : \theta \in (-\pi, \pi) \right\} \longleftrightarrow SO(2, \mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.5.2. Exponencial en $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$

Consideremos el álgebra de Lie (\mathbb{R}^3, \times) . Para cada vector $r \in \mathbb{R}^3$, podemos considerar el endomorfismo A_r de \mathbb{R}^3 :

$$A_r(v) = r \times v.$$

Si $r = (r_x, r_y, r_z)$, la matriz de la transformación (en la base canónica) tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Resulta claro que es una matriz antisimétrica y de hecho la aplicación

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \quad , \quad r \mapsto A_r$$

es un isomorfismo lineal. Más aun, es un isomorfismo de álgebras de Lie:

$$A_{r \times s} = A_r A_s - A_s A_r = [A_r, A_s].$$

Veamos ahora como es la exponencial de un elemento $A_r \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Tomemos una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ orientada positivamente, donde v_1 está en la dirección de r : si $\theta = \|r\|$ entonces $r = \theta v_1$. Luego, por A_r ,

$$v_1 \mapsto r \times v_1 = 0 \quad , \quad v_2 \mapsto r \times v_2 = \theta v_3 \quad , \quad v_3 \mapsto r \times v_3 = -\theta v_2,$$

es decir,

$$|A_r|_B = \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir la matriz A como $A = C_{BE}|A_r|_B C_{EB}$, y por lo tanto su exponencial es

$$e^A = e^{C_{BE}|A_r|_B C_{EB}} = C_{BE} e^{|A_r|_B} C_{EB},$$

donde

$$e^{|A_r|_B} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^0 & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Luego, la transformación e^A deja fijo v_1 y gira un ángulo θ en el plano $\langle v_2, v_3 \rangle$ (de v_2 hacia v_3). Es decir, la rotación que resulta es la que tiene como eje a $\langle r \rangle$, como ángulo a $\theta = \|r\|$ y gira en el sentido antihorario con respecto a la orientación que induce r en $\langle r \rangle^\perp$.

Como se sabe que en \mathbb{R}^3 toda rotación es de este tipo en alguna base ortonormal, la exponencial es sobreyectiva. Si tomamos una rotación R y una base ortonormal orientada $\{v_1, v_2, v_3\}$ tal que su matriz en esa base sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

su conjunto de preimágenes por la exponencial (es decir de logaritmos) son las matrices anti-simétricas de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix},$$

donde $r = (r_x, r_y, r_z) = (\theta + 2k\pi)v_1$ con $k \in \mathbb{Z}$. En particular la exponencial es sobreyectiva y establece la siguiente biyección:

$$\{A_r \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) : r \in \mathbb{R}^3, \|r\| < \pi\} \longleftrightarrow SO(3, \mathbb{R}) \setminus \{R \in SO(3, \mathbb{R}) : -1 \text{ es autovalor de } R\}.$$

2.5.3. Exponencial en $SE(n, \mathbb{R})$

Recordemos que según el ejemplo 2.3.7 el álgebra de Lie asociada a

$$SE(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} R & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : R \in SO(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}$$

es

$$\mathfrak{se}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Calculemos la exponencial para un elemento genérico de $\mathfrak{se}(n, \mathbb{R})$:

$$\exp \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k.$$

$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 = \text{Id}$ y es fácil verificar que para $k \geq 1$, $\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego

$$\exp \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(A) & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{C}^*. \end{cases}$$

En particular vale que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{(k+1)!}$ es una serie convergente para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo tanto, por el criterio de Weierstrass, $g(A)$ está bien definida para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Queremos probar que $\exp : \mathfrak{se}(n, \mathbb{R}) \rightarrow SE(n, \mathbb{R})$ es sobreyectiva para $n = 2$ y 3 . Restrinjamonos a esos casos. O sea dado un elemento genérico $\begin{pmatrix} R & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(n, \mathbb{R})$, para $n = 2, 3$, queremos

hallar $\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{pmatrix} \exp(A) & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ tal que $\exp(A) = R$, ya que la exponencial es sobreyectiva en $SO(n, \mathbb{R})$ ($n = 2, 3$). Más aún según los resultados de la sección anterior, podemos elegir A con autovalores $\pm i\theta$ en el caso $n = 2$ y $0, \pm i\theta$ en el caso $n = 3$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Basta ver luego que podemos encontrar un $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(A)v = b$. Probemos que $g(A)$ es inversible, y por lo tanto $v = g(A)^{-1}b$:

Como g es una serie de potencias, los autovalores de $g(A)$ son $g(\lambda_i)$ donde λ_i son los autovalores de A . La expresión de la función g indica $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi i$ con $k \neq 0$. Luego $g(A)$ tiene autovalores no nulos por la elección de A y es por ende inversible.

Esto muestra que la exponencial es sobreyectiva, y que una vez elegido A como indicado, $v = g(A)^{-1}b$. Luego si $U \subseteq \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ (con $n = 2$ o 3) es un abierto tal que $\exp : U \leftrightarrow \exp(U)$ es una biyección, entonces, para $n = 2$ o 3 ,

$$\exp : \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(n, \mathbb{R}) : A \in U, v \in \mathbb{R}^n \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} R & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(n, \mathbb{R}) : R \in \exp(U), b \in \mathbb{R}^n \right\},$$

es una biyección.

2.6. Media en grupos de Lie

La noción de media de un conjunto finito de elementos es fundamental para realizar estadísticas. Cuando los elementos pertenecen a un espacio vectorial la noción más usual es tomar el promedio aritmético. Es decir, si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$, tomamos como media M al elemento:

$$MA(\{v_i\}_{i=1}^n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i.$$

Ahora, cuando en el espacio donde viven los elementos no está definida la suma y la división por n , no podemos utilizar esta fórmula. Dependiendo de las características del espacio existen distintas extensiones naturales. Una primera extensión que puede hacerse es en el caso de espacios métricos con la media de Fréchet.

2.6.1. Media de Fréchet

Sea (X, d) un espacio métrico, y sean p_1, \dots, p_n puntos en X . Consideremos la función

$$F(p) = \sum_{i=1}^n d^2(p; p_i),$$

que llamaremos *función de Fréchet asociada a p_1, \dots, p_n* . Si F alcanza un único mínimo en X , decimos que ese punto es la media de Fréchet de p_1, \dots, p_n y la notaremos $MF(\{p_i\}_{i=1}^n)$.

- Ejemplo 2.6.1.** 1. En \mathbb{R} con distancia usual $| * |$, la media de Fréchet es la media aritmética.
 2. En \mathbb{R}^n con la distancia euclídea la media de Fréchet es la media aritmética:

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \|p - p_i\|^2 \implies DF(p) = \sum_{i=1}^n 2(p - p_i),$$

y por lo tanto $DF(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$. Es fácil ver que ese p es un mínimo global de F .

3. Consideremos $\mathbb{R}_{>0}$ con la distancia hiperbólica $d(x; y) = |\ln(x) - \ln(y)|$. La exponencial $x \rightarrow e^x$ resulta ser una isometría y por lo tanto la media de Fréchet en $\mathbb{R}_{>0}$ con la métrica hiperbólica es la exponencial de la media en \mathbb{R} usual. Es decir

$$MF(\{p_i\}_{i=1}^n) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log p_i\right) = \left(\prod_{i=1}^n p_i\right)^{1/n},$$

que es la media geométrica.

4. En $\mathbb{R}^{n \times n}$ tenemos el producto interno Frobenius: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t) = \text{tr}(A^t B)$, que induce la norma Frobenius $\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2)^{1/2}$. Con esta norma $\mathbb{R}^{n \times n}$ resulta isométrico a \mathbb{R}^{n^2} con la norma euclídea: la isometría es mandar cada entrada de la matriz a una componente del vector de alguna manera. Por lo tanto la media de Fréchet también coincide en este caso con el promedio aritmético.
 5. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y sea $U \subseteq M$ con la siguiente propiedad: dados p y q en U , existe una única geodésica $\gamma_{pq}(t)$ que los une y tal que su longitud es el ínfimo de las longitudes de curvas suaves a trozos que los unen. Luego, U tiene estructura de espacio métrico con la distancia

$$d_g(p; q) = \text{long}(\gamma_{pq}) = \int \|\gamma'_{pq}(t)\| dt.$$

Tenemos por ende funciones de Fréchet asociadas a esa distancia y en los casos en que alcanzan un único mínimo tenemos una media de Fréchet.

Consideremos ahora un grupo de Lie de matrices $\mathbf{G} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$. Como el espacio tangente a \mathbf{G} en cada punto puede ser visto como un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$, el producto interno Frobenius induce un producto interno en cada tangente. Esto nos permite dos construcciones distintas de distancias en entornos de $\text{Id} \in \mathbf{G}$.

1. Sea $V \subseteq T_{\text{Id}} \mathbf{G}$ un entorno tal que $\exp : V \rightarrow \exp(V)$ sea biyectiva. Luego podemos definir una distancia en $\exp(V)$ vía la distancia Frobenius en V :

$$d(A, B) = \|\log(A) - \log(B)\|_F.$$

En ese caso, la media de Fréchet está bien definida entre elementos $A_1, \dots, A_n \in \exp(V)$ ya que lo está entre sus logaritmos. Resulta

$$MF(\{A_i\}_{i=1}^n) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(A_i)\right).$$

Si los $\log(A_i)$ conmutan dos a dos, entonces esta media es igual a la media geométrica

$$MF(\{A_i\}_{i=1}^n) = (A_1 \cdots A_n)^{1/n}.$$

2. Si consideramos en cada tangente el producto interno Frobenius, tenemos una métrica Riemanniana en \mathbf{G} . En variedades Riemannianas, siempre se puede tomar un entorno de un punto en el cual las geodésicas que unen puntos son únicas y minimizan distancias. O sea que podemos tomar en \mathbf{G} un entorno donde d_g está bien definida y eso nos da otra noción de media de Fréchet.

La primera de estas nociones de media es la que llamaremos *Media Log-euclídeana*, ya que es la noción de media euclídea en los logaritmos de los elementos, proyectada de nuevo al espacio via la exponencial.

En algunos contextos, se le quiere dar importancias relativas distintas a los distintos elementos a los que se le busca la media. En esos casos, dados pesos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ tales que $\sum \omega_i = 1$, se puede considerar una *media de Fréchet pesada* entre los elementos p_1, \dots, p_n como el elemento del espacio que minimiza:

$$F_\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i d^2(p, p_i)$$

En el caso de \mathbb{R}^n con la norma euclídea, la media de Fréchet pesada entre p_1, \dots, p_n resulta ser:

$$MF_\omega(\{v_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n w_i p_i.$$

En el caso de un grupo de matrices esto da una variación de la noción de media que definimos anteriormente, que llamaremos *Media Log-Euclídeana pesada*:

$$MF_\omega(\{A_i\}_{i=1}^n) = \exp\left(\sum_{i=1}^n w_i \log(A_i)\right).$$

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Dada una función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ llamamos *ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condiciones iniciales* a una ecuación del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t)) \\ \alpha(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Una solución de la ecuación es una función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ al menos derivable, con $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$. Para resaltar la dependencia de la solución de la condición inicial podemos notarla $\alpha_{(t_0, x_0)}(t)$. El teorema de existencia y unicidad de EDO's garantiza que pidiendo ciertas hipótesis sobre F existe solución con cierto grado de suavidad que depende de la suavidad de F . Además la solución es única en el siguiente sentido: dada otra solución definida sobre un intervalo $I' \ni t_0$, ambas coinciden en $I \cap I'$.

Cuando en la ecuación no se especifican condiciones iniciales simplemente la llamaremos EDO, y podemos definir la función Φ asociada a la ecuación,

$$\Phi(t, t_0, x) = \alpha_{(t_0, x)}(t),$$

que nos da la solución para todas las condiciones iniciales $\alpha(t_0) = x$, que se ponen explícitamente como argumentos. En el caso de tener fijos los valores iniciales usaremos el término *problema de valores iniciales* como sinónimo de *EDO de primer orden con condiciones iniciales*.

Si la función F no depende explícitamente de la variable t diremos que la ecuación es *autónoma*. En ese caso podemos remover t de los argumentos de F y la ecuación será de la forma $\dot{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$. Caso contrario la llamaremos *no autónoma*. Una interpretación de la ecuación (3.1) es la siguiente: la solución $\alpha(t)$ describe la evolución de un sistema que a tiempo t_0 está en estado x_0 y evoluciona guiado por la función F . Por ejemplo la posición de una partícula que a tiempo t_0 está en el lugar x_0 .

3.1. Teorema de existencia y unicidad local

El teorema de existencia y unicidad de EDO's es un teorema clásico que puede enunciarse con distintos niveles de generalidad. Enunciaremos sin demostración la versión que vamos a usar, ver por ejemplo [17, pág. 44].

Teorema 3.1.1. *Sea $F(t, x)$ de clase $C^k(U, \mathbb{R}^n)$ donde $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es un abierto y $k \geq 1$. Alrededor de cada $(t_0, x_0) \in U$, existe un entorno $I \times V \subseteq U$ tal que la función $\Phi(t, s, x)$ asociada a la ecuación está definida, es de clase $C^k(I \times I \times V, \mathbb{R}^n)$ y es única. En particular, si $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ entonces $\Phi \in C^\infty(I \times I \times V, \mathbb{R}^n)$*

Cuando la condición inicial está fijada, $\alpha(t_0) = x_0$, el teorema anterior nos da una solución local de la EDO con condiciones iniciales, fijando las variables correspondientes de Φ .

Comentarios sobre la demostración:

En realidad, lo que usamos es que que la función F es localmente Lipschitz en la variable x , uniformemente respecto de t . Es decir, que para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe un entorno $I \times V \subseteq U$ y un constante $K > 0$ tal que

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq K\|x - y\|$$

La idea para construir la solución local es definir una contracción en cierto espacio de funciones tal que su punto fijo sea la solución de la ecuación (el punto fijo se obtiene como límite de una sucesión de funciones). Esto requiere formular la ecuación diferencial como una ecuación integral. Nos garantiza la existencia de solución local, al menos continua con respecto al valor inicial de x . Ahora, para garantizar la diferenciabilidad respecto de x de la solución, se considera otra ecuación asociada con la original que llamaremos *ecuación de variaciones*.

3.1.1. Ecuación de variaciones

Supongamos estamos en las hipótesis del teorema anterior y que tenemos una solución $\Phi \in C^2(I \times I \times V, \mathbb{R}^n)$. Entonces usando la regla de la cadena obtenemos la matriz $n \times n$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, t_0, x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(t, \Phi(t, t_0, x)) \right) = F_x(t, \Phi(t, t_0, x)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, t_0, x).$$

(Aquí, $F_x := \frac{\partial}{\partial x} F$.) Pero como estamos suponiendo que $\Phi \in C^2(I \times I \times V, \mathbb{R}^n)$ podemos intercambiar las derivadas respecto de t y de x en el lado izquierdo. Entonces, nos queda que $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, t_0, x) \right) = F_x(t, \Phi(t, t_0, x)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, t_0, x)$$

que poniendo $\Theta = \partial \Phi / \partial x$ como una matriz incógnita de tamaño $n \times n$, y expresando con punto la derivada temporal (lugar a lugar) resulta

$$\dot{\Theta}(t, t_0, x) = F_x(t, \Phi(t, t_0, x)) \cdot \Theta(t, t_0, x), \quad (3.2)$$

o en una forma más simple aún si no explicitamos la dependencia de las condiciones iniciales

$$\dot{\Theta}(t) = F_x(t, \Phi(t)) \cdot \Theta(t).$$

Además, observemos que dado que $\Phi(t_0, t_0, x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la solución en la condición inicial t_0 es

$$\Theta(t_0, t_0, x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_0, t_0, x) = \text{Id}.$$

Esta es la que llamaremos *ecuación de variaciones*. Observemos que si ya conocemos Φ , su única incognita es Θ y de hecho es lineal.

Volviendo a la demostración del teorema de existencia y unicidad, la idea para probar diferenciabilidad respecto de x es hallar una sucesión en un espacio de funciones que tienda a la solución de la ecuación y cuyas derivadas formen una sucesión que tienda a la solución de la ecuación de variaciones. Con este truco obtenemos que Φ es C_x^1 . Luego, iterativamente conseguimos derivadas de orden superior, siempre y cuando podamos diferenciar F las veces necesarias.

3.1.2. Dependencia de los parámetros

Una EDO con parámetros es una ecuación del tipo

$$\dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t), \lambda),$$

donde λ es un vector de k parámetros. En ese caso tenemos el siguiente corolario del teorema 3.1.1.

Corolario 3.1.2. *Sea $F(t, x, \lambda)$ de clase $C^k(U \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ donde $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ son abiertos. Alrededor de cada $(t_0, x_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda$, existe un entorno $I \times V \times \Lambda_0 \subseteq U \times \Lambda$ tal que la función $\Phi(t, s, x, \lambda)$ es de clase $C^k(I \times I \times V \times \Lambda_0, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La idea es ampliar las variables dependientes con λ y definir una nueva ecuación agregando la condición $\dot{\lambda}(t) = 0$. Es decir, definimos $\tilde{F}(t, (x, \lambda)) = (F(t, x, \lambda), 0)$

$$\tilde{F}(t, y) : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

tal que $\tilde{U} \subseteq U \times \Lambda$. Luego tenemos la nueva ecuación

$$\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t, \alpha(t), \lambda(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{F}(t, \beta(t)).$$

Luego, el flujo $\tilde{\Phi}(t, s, (x, \lambda))$ está definido en $I \times I \times \tilde{V} \subseteq I \times \tilde{U}$ y es de clase $C^k(I \times I \times \tilde{V}, \mathbb{R}^{n+k})$. En particular, podemos restringirlo a un entorno $I \times I \times V \times \Lambda_0$. Si nos quedarnos con sus primeras $2 + n$ componentes obtenemos el Φ deseado y depende de manera C^k de λ . \square

Con una técnica parecida se puede reducir una ecuación *no autónoma* a una *autónoma*. Basta con agregar la variable dependiente t y la ecuación $\dot{t} = 1$

Observemos que si $F \in C^\infty(U \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ en particular es C^k para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos garantizado que $\Phi \in C^k(I \times I \times V \times \Lambda_0, \mathbb{R}^n)$ para todo k y por ende es C^∞ .

3.2. Extensibilidad de la solución

El teorema de existencia y unicidad es esencialmente local. Para un problema con condiciones iniciales, no garantiza que la solución esté definida para todo tiempo. Sin embargo, dados dos intervalos (abiertos) I e I' que se intersectan y en los que hay definidas soluciones α y α' , las mismas coinciden en $I \cap I'$. Podemos pegarlas de manera suave y obtenemos una solución definida en $I \cup I'$. Si consideramos transitivamente todos los intervalos I de t_0 en donde hay definida solución, y los unimos, obtenemos algún intervalo maximal. Pegando todas las soluciones podemos definir una solución en el intervalo maximal que llamaremos solución maximal. Si todas las soluciones locales son por ejemplo C^k , la solución maximal será C^k . Sin embargo no vale en general que el intervalo maximal sea todo \mathbb{R} , ni siquiera cuando la función $F(t, x)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. El ejemplo clásico es la EDO unidimensional

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \alpha^2(t) \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}.$$

La solución es $\alpha(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$ si $x_0 \neq 0$ o $\alpha(t) \equiv 0$ si $x_0 = 0$. El intervalo más grande sobre el que está definida la solución es $(\frac{1}{x_0}; +\infty)$, \mathbb{R} ó $(-\infty; \frac{1}{x_0})$ dependiendo de si x_0 es < 0 , $= 0$ ó > 0 (respectivamente). Si por ejemplo $x_0 > 0$, el intervalo está acotado superiormente por $\frac{1}{x_0}$.

¿Qué pasa cuando $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$? La solución se va a $+\infty$. Se dice entonces que la solución *explota en tiempo finito*. La siguiente proposición generaliza esta situación.

Proposición 3.2.1. *Sea $F(t, x)$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y consideremos la EDO con condición inicial $\alpha(t_0) = x_0$ con $(t_0, x_0) \in U$. Supongamos que α está definida en un intervalo maximal $I = (T_-, T_+)$ con $T_+ < \infty$. Entonces dado un compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $[t_0, T_+] \times C \subset U$, existe un $t_C \in [t_0, T_+)$ tal que la solución $\alpha(t)$ no está en C a partir de t_C . Es decir, la solución escapa en tiempo finito a todo compacto. En particular si $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces $\|\alpha(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow T_+$.*

Por último damos un criterio que asegura existencia de solución para todo $t \in \mathbb{R}$ en el caso en que la función F está acotada linealmente respecto de la variable x sobre todo compacto en t :

Proposición 3.2.2. *Supongamos que $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y que para cada $T > 0$ existen constantes $M(T)$ y $L(T)$ tales que*

$$\|F(t, x)\| \leq M(T) + L(T)\|x\|.$$

Entonces la solución a la EDO (con cualquier condición inicial) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Es decir, está bien definido $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

3.3. Campos

Recordamos que $\mathfrak{X}(M)$ nota el espacio de campos vectoriales suaves de la variedad diferenciable M (donde un campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ es una función C^∞ que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector en T_pM). Si la variedad es un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ el espacio tangente a U en todo punto es isomorfo a \mathbb{R}^n . Luego, podemos identificar los campos (suaves) X en U con funciones $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

3.3.1. Ecuaciones autónomas

La función que define una ecuación autónoma, puede pensarse como un campo en su dominio. Con esta identificación, la solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)) \\ \alpha(t_0) = x_0 \end{cases}$$

es una curva cuyo vector velocidad en cada punto de su trayectoria viene dado por el valor del campo X en ese punto. Estas curvas se llaman *curvas integrales* del campo X .

Podemos describir las soluciones de una EDO con condiciones iniciales, en términos de otra con condición inicial en tiempo $t_0 = 0$. Es fácil verificar que $\alpha(t)$ es solución de la EDO con condición inicial $\alpha(t_0) = x_0$ si $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t + t_0)$ es solución de la EDO con condición inicial $\alpha(0) = x_0$. Recíprocamente, si conocemos $\tilde{\alpha}(t)$ entonces $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t - t_0)$. En términos de la función Φ asociada a la ecuación,

$$\Phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t - t_0, 0, x_0),$$

donde el término derecho de la igualdad está definido si el izquierdo lo está. En adelante, para sistemas autónomos, nos quedaremos con la función de dos variables $\phi(t, x_0) := \Phi(t, 0, x_0)$ que describe la solución a tiempo t de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}$$

y la llamaremos *flujo del campo* X . El dominio máximo de ϕ es un abierto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Cuando el campo X está definido sobre todo \mathbb{R}^n y $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ decimos que el campo es *completo*.

Llamemos $U_t \subseteq \mathbb{R}^n$ a la sección de U fijando el tiempo t . Quedan definidas funciones

$$\phi_t : U_t \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_t(x) := \phi(t, x).$$

El conjunto de funciones $\{\phi_t\}_t$ cumple las siguientes propiedades:

1. $U_0 = \mathbb{R}^n$ y $\phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$;
2. Para los valores de $x \in \mathbb{R}^n$ donde ambos términos están definidos:

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x);$$

3. $\text{Im}(\phi_t) = U_{-t}$, $\phi_t : U_t \rightarrow U_{-t}$ es inversible, y $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

En el caso de campos completos, $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Las propiedades anteriores se pueden enunciar de manera más simple:

1. $\phi_0 = id_{\mathbb{R}^n}$;
2. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$;
3. $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

Estas propiedades nos dicen que dado un campo completo X , la funciones $\phi_t \in \text{Diff}^k(\mathbb{R}^n)$, es decir, son de clase C^k y con inversa C^k , $\forall k$. Así, $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ son un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de difeomorfismos C^∞ . Más aún, tenemos una aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^k(\mathbb{R}^n)$, $t \mapsto \phi_t$, que es un morfismo de grupos. A la familia $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ la llamaremos *(sub)grupo (uniparamétrico) de difeomorfismos de X* .

3.3.2. Ecuaciones no autónomas

En el caso de EDO no autónomas, la interpretación geométrica es pensar a la función que define la ecuación como un campo que varía con el tiempo. En adelante, denotaremos $X(t, x)$ a un campo que varía con el tiempo. En esos casos, no puede definirse un flujo como en el caso autónomo pero sí tenemos la función $\Phi(t, t_0, x_0)$ que llamaremos *proceso asociado al campo X* . En los casos en que Φ este definido sobre todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ diremos que X es completo. Fijando las variables temporales en Φ obtenemos una familia de difeomorfismos $\{\phi_{t_1, t_0}\}$ (donde $\phi_{t_1, t_0}(x) := \Phi(t_1, t_0, x)$) que cumple las siguientes propiedades:

1. $\phi_{t_0, t_0} = id_{\mathbb{R}^n}$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$;
2. $\phi_{t_2, t_1} \circ \phi_{t_1, t_0} = \phi_{t_2, t_0}$ para toda terna $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
3. $(\phi_{t_1, t_0})^{-1} = \phi_{t_0, t_1}$.

3.4. Algebra de Lie de campos y grupo de difeomorfismos

Sea $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de campos suaves en \mathbb{R}^n . El corchete en $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definido en el Ejemplo 1.3.3(4) lo vuelve un álgebra de Lie. Como el tangente $T_p\mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^n en cualquier punto p se identifica con \mathbb{R}^n , obtenemos un isomorfismo entre $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dado por

$$X(p) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ si } X_p = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p\mathbb{R}^n, \forall p \in \mathbb{R}^n,$$

es decir $X(p)$ es el vector de coordenadas de X_p en la base canónica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ de $T_p\mathbb{R}^n$.

Luego $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Lie de dimensión infinita, a diferencia de las álgebras de Lie asociadas a grupos de Lie. Esta representación nos permite describir de manera explícita como actúa un campo en una función: si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (pensado como vector columna de funciones, por simplicidad de notación) tenemos

$$X(f)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^n a_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \frac{\partial f}{\partial X(p)}(p) = \nabla f(p) \cdot X(p) = (\nabla f \cdot X)(p).$$

Es decir $X(f) = \nabla f \cdot X$.

Si queremos ver al corchete de Lie entre dos campos X e Y como $[X, Y] \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tenemos que ver como opera en una función.

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= \nabla(Y(f)) \cdot X - \nabla(X(f)) \cdot Y \\ &= \nabla(\nabla f \cdot Y) \cdot X - \nabla(\nabla f \cdot X) \cdot Y \\ &= (Y^t \cdot H(f) + \nabla f \cdot DY) \cdot X - (X^t \cdot H(f) + \nabla f \cdot DX) \cdot Y \\ &= \nabla f \cdot DY \cdot X - \nabla f \cdot DX \cdot Y \\ &= \nabla f \cdot (DY \cdot X - DX \cdot Y) = (DY \cdot X - DX \cdot Y)(f). \end{aligned}$$

Es decir, visto como un elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, vale $[X, Y] = DY \cdot X - DX \cdot Y$.

En particular, si tenemos matrices A, B , y les asociamos campos $X_A(p) = Ap$ y $X_B(p) = Bp$ (donde los vectores son vectores columna), entonces

$$[X_A, X_B](p) = DX_B(p) \cdot X_A(p) - DX_A(p) \cdot X_B(p) = BAp - ABp = (BA - AB)p = X_{[B, A]}(p).$$

Es decir $[X_A, X_B] = X_{[B, A]} = X_{-[A, B]} = -X_{[A, B]}$.

Observación 3.4.1. La aplicación $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $A \mapsto -X_A$ es un morfismo de álgebras de Lie.

3.4.1. Interpretación geométrica de $[X, Y]$

Veamos ahora una interpretación geométrica del corchete de Lie de campos. Para eso, necesitamos algunas definiciones.

Sea $\alpha : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, y sea $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Definimos un nuevo campo $\alpha^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ de la siguiente manera:

$$(\alpha^*Y)_p = (d_{\alpha(p)}\alpha^{-1})(Y_{\alpha(p)}) \in T_pM, \quad \forall p \in M.$$

Observación 3.4.2. En el caso particular en que $M = N = \mathbb{R}^n$, podemos pensar que se trata de un cambio de coordenadas para el campo Y y podemos dar una expresión explícita para ese cambio de coordenadas $\alpha^*Y \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$:

$$(\alpha^*Y)(p) = D\alpha^{-1}(\alpha(p)) \cdot Y(\alpha(p)).$$

Demostración. En \mathbb{R}^n , la matriz de la aplicación $d_{\alpha(p)}\alpha^{-1}$ en la base canónica

$$E = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(p)} \right\}_{1 \leq i \leq n}$$

es igual a la matriz Jacobiana $D\alpha^{-1}$ evaluada en el punto $\alpha(p)$. Por lo tanto, $(\alpha^*Y)_p = (d_{\alpha(p)}\alpha^{-1})(Y_{\alpha(p)})$ se traduce en coordenadas en

$$[(\alpha^*Y)_p]_E = D\alpha^{-1}(\alpha(p)) \cdot [Y_{\alpha(p)}]_E,$$

donde $[\cdot]_E$ nota el vector columna de coordenadas en la base E .

Para ver lo del cambio de coordenadas, consideremos la carta α^{-1} de \mathbb{R}^n , con coordenadas y_1, \dots, y_n , y sea $B = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\alpha(p)} \right\}_{1 \leq i \leq n}$ la base correspondiente de $T_{\alpha(p)}\mathbb{R}^n$. Entonces vale que

$$[Y_{\alpha(p)}]_B = [(\alpha^*Y)_p]_E,$$

ya que

$$(d_{\alpha(p)}\alpha^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\alpha(p)}\right)(f) = \frac{\partial(f \circ \alpha^{-1})}{\partial y_i} \Big|_{\alpha(p)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p (f), \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

es decir

$$(d_{\alpha(p)}\alpha^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\alpha(p)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad \forall 1 \leq i \leq n;$$

luego, si $[Y_{\alpha(p)}]_B = (a_1, \dots, a_n)$, es decir $Y_{\alpha(p)} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\alpha(p)}$, entonces

$$(\alpha^*Y)_p = (d_{\alpha(p)}\alpha^{-1})(Y_{\alpha(p)}) = \sum_{i=1}^n a_i (d_{\alpha(p)}\alpha^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\alpha(p)}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

es decir $(a_1, \dots, a_n) = [(\alpha^*Y)_p]_E$.

Por lo tanto

$$[Y_{\alpha(p)}]_B = D\alpha^{-1}(\alpha(p)) \cdot [Y_{\alpha(p)}]_E,$$

o sea $D\alpha^{-1}(\alpha(p))$ es la matriz de cambio de la base canónica E a la base B . □

Ahora, consideremos dos campos X, Y en \mathbb{R}^n .

Dado $p \in \mathbb{R}^n$, podemos considerar el flujo del campo X , $\phi(t, x) : U(p) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido en un entorno $U(p)$ de $(0, p)$, y las funciones $\phi_t : U(p)_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas para tiempo t pequeño en un entorno de p y difeomorfas con su imagen. Para cada t , se tiene $Y_{\phi_t(p)} \in T_{\phi_t(p)}\mathbb{R}^n$. Sea $\phi_t^*Y \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ como arriba, que define para t pequeño la curva

$$c_p(t) := (\phi_t^*Y)(p) = D\phi_t^{-1}(\phi_t(p)) \cdot Y(\phi_t(p)) = \overline{D\phi_{-t}(\phi_t(p))} \cdot Y(\phi_t(p)) \quad (3.3)$$

en $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, que satisface que

$$c_p(0) = D\phi_0(\phi_0(p)) \cdot Y(\phi_0(p)) = \text{Id} \cdot Y(p) = Y(p). \quad (3.4)$$

Definimos la *derivada de Lie* de un campo Y con respecto a un campo X en p de la siguiente manera:

$$L_X Y(p) := c'_p(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^* Y)(p) - Y(p)}{t}.$$

Proposición 3.4.3. $L_X Y(p) = [X, Y](p)$.

Demostración. Recordemos primero la ecuación de variaciones: Si $\phi(t, x)$ es el flujo de un campo X ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (t, x) = DX(\phi(t, x)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) \quad \text{con} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, x) = \text{Id}.$$

En particular

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (0, x) = DX(\phi(0, x)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, x) = DX(x).$$

Además, como $\phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_0 = \text{id}$, entonces $D\phi_{-t}(\phi_t(p)) = (D\phi_t(p))^{-1}$. Veamos como es $c'_p(0)$:

$$\begin{aligned} c'_p(0) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (D\phi_{-t}(\phi_t(p)) \cdot Y(\phi_t(p))) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (D\phi_{-t}(\phi_t(p))) \cdot Y(\phi_0(p)) + D\phi_0(\phi_0(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Y(\phi_t(p))) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} ((D\phi_t(p))^{-1}) \cdot Y(p) + \text{Id} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Y(\phi_t(p))). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} ((D\phi_t(p))^{-1}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(D\phi_t(p))^{-1} - \text{Id}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (D\phi_t(p))^{-1} \frac{\text{Id} - D\phi_t(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (D\phi_t(p))^{-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\text{Id} - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, p) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (0, p) = -DX(p). \end{aligned}$$

Por otra parte $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (Y(\phi_t(p))) = DY(\phi_0(p)) \cdot X(\phi_0(p)) = DY(p) \cdot X(p)$. Esto completa la demostración por la descripción de $[X, Y]$ vista en el párrafo anterior. \square

Queremos probar que si el corchete $[X, Y] = 0$ entonces los flujos conmutan. Para eso necesitamos algunos lemas. En adelante supondremos por simplicidad que los campos con que trabajaremos son completos.

Proposición 3.4.4. Sean $\alpha \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y sea $\{\psi_t\}_t \in \mathbb{R}$ el grupo de difeomorfismos de Y . Entonces, el flujo de α^*Y es $\beta_t = \alpha^{-1} \circ \psi_t \circ \alpha$.

Demostración. Es inmediato que $\beta_0(p) = \alpha^{-1} \circ \psi_0 \circ \alpha(p) = \alpha^{-1}(\alpha(p)) = p$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Debemos ver entonces que $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t \beta_t(p) = (\alpha^*Y)(\beta_t(p))$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} (\alpha^*Y)(\beta_t(p)) &= (\alpha^*Y)(\alpha^{-1} \circ \psi_t(\alpha(p))) = D\alpha^{-1}(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \psi_t(\alpha(p))) \cdot Y(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \psi_t(\alpha(p))) \\ &= D\alpha^{-1}(\psi_t(\alpha(p))) \cdot Y(\psi_t(\alpha(p))) = D\alpha^{-1}(\psi_t(\alpha(p))) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t \psi_t(\alpha(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t (\alpha^{-1} \circ \psi_t \circ \alpha)(p) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t \beta_t(p). \end{aligned}$$

□

Definición 3.4.5. Decimos que un campo $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es *invariante* por un difeomorfismo $\alpha \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ si satisface $\alpha^*Y = Y$.

Tenemos el siguiente corolario inmediato de la proposición anterior:

Corolario 3.4.6. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y $\{\phi_t\}_t$ y $\{\psi_t\}_t$ sus respectivos grupos de difeomorfismos. Supongamos que Y es invariante por ϕ_t , $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces $\psi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_s$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Basta con tomar $\alpha = \phi_t$ para cada t y aplicar la proposición anterior. □

Teorema 3.4.7. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ y $\{\phi_t\}_t$ y $\{\psi_t\}_t$ sus respectivos grupos de difeomorfismos. Entonces

$$[X, Y] = 0 \implies \psi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_s, \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por el corolario anterior, basta con demostrar que $[X, Y] = 0 \implies Y$ es invariante por ϕ_t para todo t . Sea $[X, Y] = 0$, queremos ver que $(\phi_t^*Y)(p) = Y(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Fijado $p \in \mathbb{R}^n$, consideremos la curva $c_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c_p(t) = (\phi_t^*Y)(p)$ definida en (3.3). Sabemos por (3.4) que $c_p(0) = Y(p)$, luego alcanza con probar que la curva c_p es constante.

Por la Proposición 3.4.3, sabemos que $c_p'(0) = [X, Y](p)$, $\forall p$, y por lo tanto $c_p'(0) = 0$, $\forall p$. Probemos que $c_p'(t) = 0$ para todo t :

$$\begin{aligned} c_p'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c_p(t+h) - c_p(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D\phi_{-t-h}(\phi_{t+h}(p)) \cdot Y(\phi_{t+h}(p)) - D\phi_{-t}(\phi_t(p)) \cdot Y(\phi_t(p))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D\phi_{-t-h}(\phi_h \circ \phi_t(p)) \cdot Y(\phi_h \circ \phi_t(p)) - D\phi_{-t}(\phi_t(p)) \cdot Y(\phi_t(p))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D\phi_{-t-h}(\phi_h(q)) \cdot Y(\phi_h(q)) - D\phi_{-t}(q) \cdot Y(q)}{h} \quad \text{donde } q := \phi_t(p). \end{aligned}$$

Usando que $D\phi_{-h-t} = D(\phi_{-t} \circ \phi_{-h}) = D\phi_{-t}(\phi_{-h}) \cdot D\phi_{-h}$, se concluye

$$\begin{aligned} c'_p(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D\phi_{-t}(\phi_{-h} \circ \phi_h(q)) \cdot D\phi_{-h}(\phi_h(q)) \cdot Y(\phi_h(q)) - D\phi_{-t}(q) \cdot Y(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} D\phi_{-t}(q) \cdot \frac{D\phi_{-h}(\phi_h(q)) \cdot Y(\phi_h(q)) - Y(q)}{h} = D\phi_{-t}(q) \cdot c'_q(0) = 0. \end{aligned}$$

□

Tenemos el siguiente corolario

Corolario 3.4.8. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tales que $[X, Y] = 0$ y sean $\{\phi_t\}_t$ y $\{\psi_t\}_t$ sus respectivos grupos de difeomorfismos. Entonces $X + Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ es completo y su grupo de difeomorfismos es $\{\gamma_t\}_t$ con $\gamma_t := \phi_t \circ \psi_t$, $\forall t$.

Demostración. Tenemos que probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \gamma_t(p) = (X + Y)(\gamma_t(p)) \quad \text{y} \quad \gamma_0(p) = p, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

La segunda condición es obvia dado que $\gamma_0 = id$. Primero veamos que $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \gamma_t(p) = X(p) + Y(p)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\phi_t \circ \psi_t)(p) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\phi(t, \psi(t, p))) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, \psi(0, p)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, \psi(0, p)) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, p) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, p) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, p) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, p) = X(p) + \text{Id} \cdot Y(p) = X(p) + Y(p). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\gamma_{t+h} = \phi_{t+h} \circ \psi_{t+h} = \phi_h \circ \phi_t \circ \psi_h \circ \psi_t = \phi_h \circ \psi_h \circ \phi_t \circ \psi_t = \gamma_h \circ \gamma_t$$

dado que los flujos conmutan por el Teorema anterior. Por lo tanto, Dado un $t \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}^n$, llamemos $q = \gamma_t(p)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \gamma_t(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_{t+h}(p) - \gamma_t(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma_h(\gamma_t(p)) - \gamma_t(p)}{h} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \gamma_t(\gamma_t(p)) = X(\gamma_t(p)) + Y(\gamma_t(p)). \end{aligned}$$

□

3.4.2. Acciones de grupos de Lie

Definición 3.4.9. 1. Una acción de un grupo de Lie \mathbf{G} en una variedad M es un homomorfismo de grupos

$$\mathbf{G} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad g \mapsto A_g$$

tal que la función

$$\mathbf{G} \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto A_g(m)$$

es suave (o sea C^∞).

2. Una acción de un álgebra de Lie de dimensión finita en una variedad M , es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M), \xi \rightarrow \xi_M$$

tal que

$$\mathfrak{g} \times M \rightarrow TM, (\xi, m) \mapsto \xi_M(m)$$

es suave.

Supongamos que tenemos una acción de \mathbf{G} en M . Consideremos una curva suave $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{G}$. Para cada punto $m \in M$, obtenemos una curva suave en M , $\tilde{\gamma}(t) = A_{\gamma(t)}(m)$. Usando esta idea y ciertas curvas (subgrupos uniparamétricos de \mathbf{G}), podemos ver lo siguiente

Teorema 3.4.10. *Dada una acción de un grupo de Lie \mathbf{G} en M , podemos asociarle una acción de su correspondiente álgebra de Lie \mathfrak{g} de la siguiente manera: para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, consideramos la curva $\gamma_\xi(t) = \exp(-t\xi)$ en \mathbf{G} . Luego, definimos*

$$\xi_M(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_{\gamma_\xi(t)}(m).$$

Ejemplo 3.4.11. El grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ actúa sobre \mathbb{R}^n . El morfismo de álgebras de Lie dado por el teorema anterior es el visto en la observación 3.4,

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \quad A \mapsto -X_A,$$

y resulta ser inyectivo.

3.4.3. Estructura diferenciable de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$

Nos gustaría afirmar que la acción del grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ en \mathbb{R}^n nos permite ver a $GL(n, \mathbb{R})$ como un subgrupo de Lie de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$. A nivel algebraico es de hecho un homomorfismo de grupos inyectivo. Sin embargo, $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ no es una variedad en el sentido usual, es decir, no es un espacio topológico que localmente se parece a \mathbb{R}^k para ningún k . Podríamos intentar darle una estructura de variedad diferencial de dimensión infinita, es decir, darle un atlas con cartas que vayan a espacios vectoriales de dimensión infinita donde haya definido un cálculo.

El primer ejemplo de este tipo de variedades son las variedades de Banach, (toman cartas es un espacio de Banach). Entre las variedades diferenciales de dimensión infinita son las más similares a las usuales. Los grupos que son variedades en este sentido se denominan grupos de Lie-Banach. Otro ejemplo más general son las variedades de Fréchet. Los espacios de Fréchet son una generalización de los espacios de Banach, pero en vez de tener una norma, tienen una topología definida a partir de una familia de seminormas, y son completos respecto de esa

familia (una sucesión es convergente, si lo es con todas las seminormas). Por ejemplo, si M es una variedad diferencial usual compacta, podemos darle al espacio de funciones suaves $C^\infty(M, M)$ una estructura de variedad de Fréchet. $\text{Diff}(M)$ resulta ser un abierto de $C^\infty(M, M)$ y por lo tanto hereda estructura de variedad de Fréchet. Es decir, si M es una variedad compacta, el espacio $\text{Diff}(M)$ es un grupo de Lie-Fréchet. En particular, para ese caso, resulta que el álgebra de Lie de $\text{Diff}(M)$ es el álgebra de campos $\mathfrak{X}(M)$.

Sin embargo, en nuestro caso tenemos los difeomorfismos de una variedad no compacta, $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$. Este grupo resulta no tener una estructura de variedad de Fréchet (y en particular tampoco de variedad de Banach). Es decir, $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ no es un grupo de Lie-Fréchet, por lo cual no tenemos el lenguaje, en principio, para hablar de su espacio tangente en la identidad ni de campos invariantes, y por ende no podemos asociarle el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ (que sería lo deseable).

3.4.4. Exponencial de campos

Sin embargo, a pesar de no tener el lenguaje de grupos y álgebras del Lie, tenemos una noción de exponencial, aunque no esté definida globalmente sobre $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Recordemos que dado el flujo $\phi(t, x)$ de un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, definimos $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, o más precisamente $\phi_t^X(x)$ para explicitar la dependencia del campo X , y que si el dominio de ϕ_t^X es \mathbb{R}^n entonces $\phi_t \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$. En particular, si el dominio de ϕ_1^X es \mathbb{R}^n , podemos asociarle a X el difeomorfismo $\phi_1^X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea

$$D := \{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) : \text{el dominio de } \phi_1^X \text{ es } \mathbb{R}^n\}.$$

Podemos entonces definir la aplicación:

$$\exp : D \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n), \quad \exp(X) = \phi_1^X,$$

que cumple las siguientes propiedades

1. $nX \in D, \forall X \in D$ y $n \in \mathbb{N}$, y $\exp(nX) = \exp(X)^n$.
2. $-X \in D, \forall X \in D$, y $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$.

3.4.5. Combinación de campos

Veamos ahora como se comportan los flujos de los campos completos cuando operamos con ellos. En principio, queremos ver que pasa con las curvas integrales de un campo cuando se lo multiplica por una función acotada. Para eso, veamos las siguiente proposiciones.

Proposición 3.4.12. *Sea $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo suave, y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $X(x_0) = 0$. Entonces, toda curva integral $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de V que pasa por x_0 es la curva constante $\gamma_0(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Observemos que la curva $\gamma_0(t) = x_0$ es curva integral del campo X definida sobre todo \mathbb{R} pues $\dot{\gamma}_0(t) = 0 = X(x_0) = X(\gamma_0(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si otra curva integral $\gamma : I \rightarrow X$ satisface $\gamma(t_0) = x_0$, por el teorema de existencia y unicidad de ODE's, coincide con γ_0 en un abierto y por lo tanto en todo \mathbb{R} por ser conexo. \square

Proposición 3.4.13. Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo completo y $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave acotada y positiva. Consideremos el campo $Y(x) = w(x)X(x)$. Luego Y es completo y las curvas integrales del campo Y son reparametrizaciones de las del campo X .

Demostración. Supongamos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Y(x_0) = 0$. Entonces $X(x_0) = 0$ por ser w positiva, y por la proposición anterior, existe una única curva integral de Y y de X que pasa por x_0 , que es la curva constante $\gamma(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Sea $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la curva integral de Y con $\gamma_1(0) = x_0$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Y(x_0) \neq 0$. Sea γ la curva integral de X con $\gamma(0) = x_0$, que como X es completo, está definida sobre todo \mathbb{R} . Mostraremos que existe $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reparametrización con $\varphi(0) = 0$ tal que $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ (con lo cual γ_1 está definido sobre todo \mathbb{R}).

Observemos que $Y(\gamma_1(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$, pues sino por lo anterior γ_1 sería constante (y no pasaría por x_0).

Supongamos que existen tales γ y φ , esto nos permitirá determinar quiénes son. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(s) = Y(\gamma_1(s)) &\Leftrightarrow \dot{\gamma}(\varphi(s))\varphi'(s) = w(\gamma \circ \varphi(s))X(\gamma \circ \varphi(s)) \\ &\Leftrightarrow X(\gamma(\varphi(s)))\varphi'(s) = w(\gamma(\varphi(s)))X(\gamma(\varphi(s))) \Leftrightarrow \varphi'(s) = w(\gamma(\varphi(s))) \end{aligned}$$

pues $X(\gamma(\varphi(s))) = X(\gamma_1(s)) \neq 0$, $\forall s$ por ser $Y(\gamma_1(s)) \neq 0$ y w positiva.

Por lo tanto

$$\int_0^s \frac{\varphi'(\zeta)}{w(\gamma(\varphi(\zeta)))} d\zeta = \int_0^s 1 d\zeta = s.$$

Sea $u(t) = w(\gamma(t))$. Obtenemos mediante el cambio de variables $\varphi(\zeta) = \tau$,

$$\int_0^t \frac{d\tau}{u(\tau)} = \varphi^{-1}(t).$$

Probemos que la función $g(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{w(\gamma(\tau))}$ es una función biyectiva de \mathbb{R} en \mathbb{R} y que por lo tanto, podremos definir la parametrización $\varphi := g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la inversa de la función g .

La función g es continua, estrictamente creciente y está definida sobre todo \mathbb{R} (pues w es positiva). Como la función w es además acotada, $u(t)$ es positiva y acotada, digamos $0 < u(t) \leq C$. Luego

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{u(\tau)} d\tau \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{C} d\tau = +\infty.$$

Análogamente $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$. Por lo tanto $\varphi = g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida, y $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$ es la reparametrización buscada de γ . \square

Proposición 3.4.14. *Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ un campo completo, y sea $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave acotada (no necesariamente positiva). Entonces $Y(x) = w(x)X(x)$ es completo y sus curvas integrales son constantes o reparametrizaciones de las de X .*

Demostración. Nuevamente, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Y(x_0) = w(x_0)X(x_0) = 0$, la curva integral de Y por ese punto es constante.

Sea ahora x_0 tal que $Y(x_0) \neq 0$, y sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ la curva integral de X tal que $\gamma(0) = x_0$. Como en la demostración anterior, sea $u(t) = w(\gamma(t))$. Entonces $u(0) \neq 0$ (pues sino $Y(x_0) = 0$). Supongamos s.p.g. que $u(0) > 0$. Por continuidad existe un intervalo maximal (a, b) con $0 \in (a, b)$ tal que u es positiva en (a, b) , eventualmente con $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$. Si no, $u(a) = 0$ y/o $u(b) = 0$. La función $g(t) = \int_0^t \frac{1}{u(\tau)} d\tau$ es creciente en (a, b) . Queremos ver que su imagen es todo \mathbb{R} . En caso $b = +\infty$ se obtiene como en la demostración anterior

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty,$$

y de la misma manera, en caso $a = -\infty$ se obtiene $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$.

Si $b < +\infty$, recordando $u(b) = 0$, por el teorema del valor medio se tiene

$$u(\tau) = u'(\xi)(b - \tau) \leq M(b - \tau), \quad \forall 0 \leq \tau < b,$$

donde $M := \max_{\xi \in [0, b]} u'(\xi) > 0$ pues $u(\tau) > 0$ en $[0, b)$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow b} g(t) \geq \int_0^t \frac{1}{M(b - \tau)} d\tau = \frac{1}{M} \lim_{t \rightarrow b} (-\ln(b - t) + \ln b) = +\infty.$$

Análogamente si $a \neq -\infty$, $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = -\infty$.

Luego si $\varphi = g^{-1}$, $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ es curva integral de Y definida $\forall t \in \mathbb{R}$. \square

Enunciemos ahora sin demostración la fórmula de Lie-Trotter, que nos dirá como es el flujo de una suma de campos, ver por ejemplo [14] para una demostración.

Proposición 3.4.15. *Sean X e Y campos completos en \mathbb{R}^n y sean $f(t, x)$ y $g(t, x)$ los respectivos flujos, y $(f_t)_t, (h_t)_t$ sus grupos de difeomorfismos. Supongamos $X + Y$ completo y sean $h(t, x)$ y $(h_t)_t$ su flujo y grupo de difeomorfismos. Luego*

$$h(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_{t/N} \circ g_{t/N})^N(x)$$

donde la convergencia es uniforme sobre compactos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Esta fórmula es conocida como fórmula de Lie-Trotter. Para el caso de campos lineales nos da que

$$e^{A+B} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{A/N} e^{B/N} \right)^N,$$

donde la convergencia es en norma de operadores.

Podemos interpretarlo de la siguiente manera: dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$, fluir guiado por el campo $X + Y$ es como fluir un tiempo pequeño guiado por el campo X , luego un tiempo pequeño por el campo Y , luego por el campo X y así siguiendo alternadamente. La igualdad se da a nivel infinitesimal. Esta interpretación geométrica sugiere que si queremos combinar difeomorfismos que se obtienen como flujos de campos X y Y a tiempo $t = 1$ una opción razonable es tomar el flujo a tiempo $t = 1$ del campo promedio $\frac{X + Y}{2}$. Si los campos A y B son lineales y viven en una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$, sus flujos a tiempo $t = 1$, e^A y e^B viven en un subgrupo de Lie de $\mathbf{G} \subset GL(n, \mathbb{R})$. Si nos restringimos a un entorno donde la exponencial es biyectiva, esta manera de combinar e^A y e^B coincide con la *media Log-Euclideana* que introdujimos en el capítulo anterior. Si tuviéramos una distancia definida en un espacio de campos y pudiéramos restringir tanto los campos como los difeomorfismos con que trabajamos de manera que \exp sea biyectiva, podríamos emular la construcción de la *media Log-Euclideana* al contexto de dimensión infinita. Sin embargo no contamos en principio con esa estructura y nos quedaremos con la idea geométrica solamente.

3.5. Métodos numéricos para resolver EDO's

Veremos métodos numéricos de un paso. Consideremos una ecuación ordinaria con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t)) \\ \alpha(0) = x \end{cases}$$

y supongamos que tiene solución definida globalmente en todas las variables. En principio queremos aproximar la solución en tiempo $t = 1$ al problema de valores iniciales. Dado $N \in \mathbb{N}$, tomamos una partición regular del intervalo $[0, 1]$, $t_0 = 0$, $t_1 = h$, \dots , $t_N = Nh = 1$. Y consideremos una iteración

$$x_{k+1} = x_k + h \Psi(h, t_k, x_k) \quad \text{con } x_0 := x. \quad (3.5)$$

La idea es aproximar la solución $\alpha(1)$ por x_N . Diremos que el método es *convergente* para esta ecuación si $x_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \alpha(1)$. Nos va a interesar, no solo probar la convergencia puntual del método, sino también la convergencia de las aproximaciones como funciones de la condición inicial x (la condición inicial en t va a estar fija en $t_0 = 0$). Es decir, podemos escribir explícitamente la dependencia en la ecuación (3.5) de la condición inicial x , obteniendo funciones $\alpha_k(x) = x_k$ que cumplen la iteración

$$\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(x) + h \Psi(h, t_k, \alpha_k(x)) \quad \text{con } \alpha_0(x) = x.$$

La última de estas funciones, $\alpha_N(x) = x_N$, es la que usaremos como aproximación de la función $\alpha_{(0,x)}(1) = \phi_{1,0}(x)$ asociada a la ecuación.

El método está caracterizado por la función $\Psi(h, t, x)$, que usualmente es alguna modificación de la función $F(t, x)$ que define la ecuación. El primero y más elemental de los métodos es el *método de Euler*. En este método la iteración está caracterizada por elegir $\Psi(h, t, x) := F(t, x)$. Es decir

$$\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(x) + hF(t_k, \alpha_k(x)) \quad \text{con} \quad \alpha_0(x) = x.$$

Diremos que el método es *consistente* si $\Psi(0, t, x) = F(t, x)$. Observemos que el método de Euler cumple esta condición trivialmente.

3.5.1. Teorema de convergencia

Para las siguientes definiciones no explicitaremos la dependencia de la condición inicial x para facilitar las ideas.

Llamaremos error de truncamiento local $l(h, t)$ a la diferencia

$$l(h, t) = \alpha(t + h) - (\alpha(t) + h\Psi(h, t, \alpha(t))),$$

donde α es la solución al problema de valores iniciales. Nos dice por cuanto difiere la solución real de la aproximación si hicieramos un solo paso de la iteración a partir de tiempo t y del punto $\alpha(t)$. Definiremos además

$$\tau(h, t) = \frac{l(h, t)}{h},$$

y $\tau_i(h) = \tau(h, t_i)$. También tendremos

$$\tau(h) = \sup_{t \in [0, 1]} \|\tau(h, t)\|.$$

El error global en una etapa k de una iteración con paso h es la diferencia:

$$e_k(h) = \alpha(t_k) - x_k = \alpha(t_k) - \alpha_k(x).$$

Al último error, es decir, lo que difiere la estimación de la solución real a tiempo 1, lo notaremos $e(h)$. Cuando menor sea el valor de h más pasos se requieren para llegar a la última iteración y por eso elegimos no notarlo e_N . En general, cuando se preste a ambigüedad agregaremos en el subíndice no solo el índice del paso k en que nos encontramos sino la cantidad de pasos totales N : $e_{k,N}(h)$. Es decir $e(h) = e_{N,N}(h)$ con $N = 1/h$. El método es convergente si $e(h) = e_{N,N}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$.

Diremos que un método es de orden p (para una cierta ecuación) si vale que $\tau(h) = O(h^p)$.

Proposición 3.5.1. *Sea una EDO con condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t)) \\ \alpha(0) = x \end{cases}$$

con solución $\alpha(t)$ continua para $t \in [0, 1]$. Supongamos que tenemos un método de un paso dado por $\Psi(h, t, x)$, continua en $[0, h_0] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ para algún $0 < h_0 \leq 1$. Si el método es consistente, entonces $\tau(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$.

Demostración. Por definición de $l(t, h)$ tenemos que

$$\begin{aligned} l(t, h) &= \alpha(t+h) - \alpha(t) - h\Psi(h, t, \alpha(t)) \\ &= \int_t^{t+h} (\dot{\alpha}(s) - \Psi(h, t, \alpha(t))) ds \\ &= \int_t^{t+h} (\Psi(0, s, \alpha(s)) - \Psi(h, t, \alpha(t))) ds, \end{aligned}$$

donde la integral es coordenada a coordenada, por ser consistente el método.

Como las funciones α y Ψ son continuas, tenemos que la composición $\Psi(h, t, \alpha(t))$ es uniformemente continua en $[0, h_0] \times [0, 1]$. Consideremos

$$Z(h) = \max_{s, t \in [0, 1], |s-t| \leq h} \|\Psi(0, s, \alpha(s)) - \Psi(h, t, \alpha(t))\|.$$

Se tiene $\|l(t, h)\| \leq hZ(h)$. Además, por continuidad uniforme, $Z(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$. Luego, para $h > 0$,

$$0 \leq \tau(h) = \sup_{t \in [0, 1]} \|\tau(h, t)\| \leq Z(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

□

Finalmente, se dice que el método es *estable* si $\Psi(h, t, x)$ es continua en $[0, h_0] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^n$ para algún $0 < h_0 \leq 1$ y globalmente Lipschitz en x , uniformemente respecto de (h, t) , con constante K , es decir

$$\|\Psi(h, t, x) - \Psi(h, t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (h, t) \in [0, h_0] \times [0, 1].$$

Observemos que si F es globalmente Lipschitz en x , uniformemente respecto de t , entonces el método de Euler es estable.

El siguiente teorema caracteriza cuándo un método de un paso es convergente.

Teorema 3.5.2. *Sea una EDO con condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t)) \\ \alpha(0) = x \end{cases},$$

con solución $\alpha(t)$ continua para $t \in [0, 1]$. Supongamos que tenemos un método de un paso dado por $\Psi(h, t, x)$ que es estable (con constante de Lipschitz K) y consistente. Entonces

$$\|e_k\| \leq \frac{e^K - 1}{K} \tau(h)$$

y el método es convergente.

Demostración. Por definición, sabemos que

$$\alpha(t_{k+1}) = \alpha(t_k) + h \Psi(h, t_k, \alpha(t_k)) + h \tau(h, t_k).$$

Luego podemos acotar inductivamente el error global e_k :

$$\|e_{k+1}\| = \|\alpha(t_{k+1}) - x_{k+1}\| \leq \|\alpha(t_k) - x_k\| + h \|\Psi(h, t_k, \alpha(t_k)) - \Psi(h, t_k, x_k)\| + h \|\tau(h, t_k)\|.$$

Usando que Ψ es Lipschitz, tenemos

$$\|e_{k+1}\| \leq \|e_k\| + h K \|e_k\| + h \|\tau(h, t_k)\| \leq (1 + hK) \|e_k\| + h \|\tau(h, t_k)\| \leq (1 + hK) \|e_k\| + h \tau(h).$$

Como α es continua en $[0, 1]$, $\tau(h, t)$ es continua en $[0, 1] \times [0, h_0]$, y $\tau(h) < \infty$. Si seguimos la acotación, nos queda que

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\| &\leq (1 + hK)^{k+1} \|e_0\| + \left(\sum_{i=1}^k (1 + hK)^i \right) h \tau(h) \\ &\leq (1 + hK)^{k+1} \|e_0\| + \frac{(1 + hK)^{k+1} - 1}{hK} h \tau(h). \end{aligned}$$

Usando que $\left(1 + \frac{K}{N}\right)^k \leq \left(1 + \frac{K}{N}\right)^N \leq e^K$ y que $e_0 = \alpha(0) - x_0 = 0$, queda

$$\|e_k\| \leq \frac{e^K - 1}{K} \tau(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0.$$

En particular $e(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$ y el método es convergente.

□

3.5.2. Análisis de convergencia para Euler

Analicemos ahora el método de Euler con un poco más de detalle. Nos interesa estudiar si la convergencia es uniforme y qué podemos decir de la convergencia de las derivadas.

Sea la EDO con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t)) \\ \alpha(0) = x \end{cases},$$

donde suponemos que la función F es $C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y globalmente Lipschitz en x , uniformemente respecto de t , con constante L (y por lo tanto el método de Euler es estable). Suponemos además que la solución $\alpha(t, x) := \Phi(t, 0, x)$, está definida en un abierto que contiene a $[0, 1] \times \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto (y es por lo tanto C^∞ allí). En particular estamos en las condiciones del Teorema 3.5.2.

Dado $N \in \mathbb{N}$, recordemos que el método está dado por aproximar $\alpha(1, x)$ via la sucesión $\alpha_k(x)$, $k = 1, \dots, N$, definida por

$$\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(x) + hF(t_k, \alpha_k(x)) \quad \text{con} \quad \alpha_0(x) = x.$$

Cuando queramos explicitar la cantidad total de pasos, agregaremos N como subíndice y notaremos $\alpha_{k,N}(x)$.

Veamos cómo es el error de truncamiento local.

Si consideramos el desarrollo de Taylor en t de $\alpha(t+h, x)$, tenemos

$$\alpha(t+h, x) = \alpha(t, x) + h\dot{\alpha}(t, x) + \int_t^{t+h} \ddot{\alpha}(s, x)(t+h-s)ds,$$

donde la integral es coordenada a coordenada.

Luego tenemos una expresión para τ que depende de x :

$$\begin{aligned} h\tau(h, t, x) &= \left(\alpha(t, x) + hF(t, \alpha(t, x)) + \int_t^{t+h} \ddot{\alpha}(s, x)(t+h-s)ds \right) \\ &\quad - \left(\alpha(t, x) + hF(t, \alpha(t, x)) \right) \\ &= \int_t^{t+h} \ddot{\alpha}(s, x)(t+h-s)ds. \end{aligned}$$

Ahora, como sabemos que $\alpha \in C^\infty([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, $\ddot{\alpha}(t, x)$ es continua en ambas variables y lo podemos acotar por

$$M = \sup_{[0,1] \times \Omega} \|\ddot{\alpha}(t, x)\|.$$

Por lo tanto,

$$h\|\tau(h, t, x)\| \leq \int_t^{t+h} \|\ddot{\alpha}(s, x)\|(t+h-s)ds \leq M \int_t^{t+h} (t+h-s)ds \leq M \frac{h^2}{2}.$$

Es decir que $\tau(h, x) = \sup_{t \in [0,1]} \|\tau(h, t, x)\| \leq (M/2)h$ y converge a 0 uniformemente respecto de x en Ω . La acotación de la prueba del Teorema 3.5.2 vale para todo $x \in \Omega$, y por lo tanto

$$\alpha_{N,N}(x) \rightrightarrows \alpha(1, x)$$

uniformemente sobre Ω .

Además, nos va a ser útil acotar la norma $\|\alpha_k\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup\{\|\alpha_k(x)\|_\infty : x \in \Omega\}$ para probar también la convergencia de las derivadas, es decir para probar que

$$\frac{\partial}{\partial x} \alpha_{N,N}(x) \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial x} \alpha(1, x) \tag{3.6}$$

uniformemente sobre Ω también.

Por el Teorema 3.5.2,

$$\|\alpha(t_k, x) - \alpha_k(x)\| \leq \frac{e^K - 1}{K} \tau(h, x) \leq \frac{e^K - 1}{K} \frac{M}{2} h. \quad (3.7)$$

Como $\alpha(t, x)$ es continua en el compacto $[0, 1] \times \Omega$, es acotada, y resulta

$$\|\alpha_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{e^K - 1}{K} \frac{M}{2} h + \|\alpha\|_{L^\infty([0,1] \times \Omega)}.$$

Observemos que la cota no depende de la cantidad de pasos del método. Sea entonces $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto que contenga las imágenes de $\alpha(t, x)$ y $\alpha_{k,N}(x)$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall 1 \leq k \leq N$, para todo $t \in [0, 1]$, $x \in \Omega$.

Para probar (3.6), vamos a proceder en dos etapas.

Primero, consideremos la ecuación de variaciones (3.2) asociada a nuestra ecuación

$$\begin{cases} \dot{\Theta}(t, x) = F_x(t, \alpha(t, x)) \cdot \Theta(t, x) \\ \Theta(0, x) = \text{Id} \end{cases} \quad (3.8)$$

La solución de (3.8) es $\Theta(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha(t, x)$, y en particular $\Theta(t, x) \in C^\infty([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$. Si planteamos para Θ una aproximación análoga a la del método de Euler

$$\Theta_{k+1}(x) := \Theta_k(x) + h F_x(t_k, \alpha(t_k, x)) \cdot \Theta_k(x) = \left(\text{Id} + h F_x(t_k, \alpha(t_k, x)) \right) \cdot \Theta_k(x) \quad \text{con} \quad \Theta_0(x) = \text{Id},$$

probaremos primero que $\Theta_{N,N}(x) \rightrightarrows \Theta(1, x) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha(1, x)$ uniformemente sobre Ω :

Usando nuevamente que

$$\begin{aligned} \Theta(t_{k+1}, x) &= \Theta(t_k, x) + h \dot{\Theta}(t_k, x) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{\Theta}(t, x) (t_{k+1} - t) dt \\ &= (\text{Id} + h F_x(t_k, \alpha(t_k, x))) \cdot \Theta(t_k, x) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{\Theta}(t, x) (t_{k+1} - t) dt, \end{aligned}$$

(donde la integral es coordenada a coordenada) tenemos que

$$\Theta(t_{k+1}, x) - \Theta_{k+1}(x) = \left(\text{Id} + h F_x(t_k, \alpha(t_k, x)) \right) \cdot (\Theta(t_k, x) - \Theta_k(x)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{\Theta}(t, x) (t_{k+1} - t) dt.$$

Es decir que el error $E_{k+1} = \Theta(t_{k+1}, x) - \Theta_{k+1}(x)$ cumple

$$\|E_{k+1}\| \leq \|\text{Id} + h F_x(t_k, \alpha(t_k, x))\| \|E_k\| + \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ddot{\Theta}(t, x) (t_{k+1} - t) dt \right\|$$

donde la norma es la norma operador de matrices (que cumple $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$). Por la continuidad de $\ddot{\Theta}$ sobre $[0, 1] \times \Omega$, y teniendo en cuenta que podemos acotar cualquier norma

de una matriz en término de los módulos de sus componentes (agregando eventualmente una constante multiplicativa), podemos acotar el término de la integral por $(M'/2)h^2$. Acotemos además

$$\|F_x(t_k, \alpha(t_k, x))\| \leq \sup_{t \in [0,1], y \in \tilde{\Omega}} \|F_x(t, y)\| = K'. \quad (3.9)$$

Luego, acotando iterativamente como en el Teorema 3.5.2 obtenemos

$$\|E_{k,N}\| \leq \frac{(e^{K'} - 1)M'}{K'} \frac{h}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\Theta_{N,N}(x) \rightrightarrows \Theta(1, x) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha(1, x)$$

uniformemente sobre Ω .

Además, podemos acotar uniformemente $\|\Theta_{k,N}(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$ como lo hicimos para $\alpha_{k,N}$, digamos,

$$\|\Theta_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{e^{K'} - 1}{K'} \frac{M'}{2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \alpha \right\|_{L^\infty([0,1] \times \Omega)} = R. \quad (3.10)$$

Ahora, vamos a probar que $\|\Theta_{N,N}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{N,N}(x)\| \rightrightarrows 0$ uniformemente sobre Ω .

Volvamos a la iteración $\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(x) + h F(t_k, \alpha_k(x))$ con $\alpha_0(x) = x$. Derivando ambos lados respecto de x obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \alpha_{k+1}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k(x) + h F_x(t_k, \alpha_k(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k(x) \quad \text{con} \quad \frac{\partial}{\partial x} \alpha_0(x) = \text{Id.}$$

Consideremos la diferencia $d_k = \Theta_k(x) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k(x)$. Se tiene para la norma operador:

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}(x)\| &= \left\| \Theta_{k+1}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{k+1}(x) \right\| \\ &= \left\| \Theta_{k+1}(x) - \Theta_k(x) + \Theta_k(x) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{k+1}(x) \right\| \\ &\leq \left\| \Theta_k(x) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k(x) \right\| + h \|F_x(t_k, \alpha(t_k, x)) \cdot \Theta_k(x) - F_x(t_k, \alpha_k(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k(x)\| \\ &\leq \|d_k(x)\| + h \|F_x(t_k, \alpha(t_k, x)) - F_x(t_k, \alpha_k(x))\| \|\Theta_k(x)\| \\ &\quad + h \|F_x(t_k, \alpha_k(x))\| \left\| \Theta_k(x) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k(x) \right\|. \\ &\leq (1 + h \|F_x(t_k, \alpha_k(x))\|) \|d_k(x)\| + h \|F_x(t_k, \alpha(t_k, x)) - F_x(t_k, \alpha_k(x))\| \|\Theta_k(x)\|. \end{aligned}$$

Vamos a acotar los términos a la derecha uno a uno.

Para $\|F_x(t_k, \alpha_k(x))\|$ vale la misma acotación (3.9) ya que $\alpha_k(x) \in \tilde{\Omega}$:

$$\|F_x(t_k, \alpha_k(x))\| \leq \sup_{t \in [0,1], y \in \tilde{\Omega}} \|F_x(t, y)\| = K'.$$

Además F_x es continua, y por lo tanto Lipschitz como función de $[0, 1] \times \tilde{\Omega}$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$, digamos de constante L' . Finalmente, tenemos la acotación (3.10), $\|\Theta_k(t, x)\| \leq R$. Por lo tanto

$$\|d_{k+1}(x)\| \leq (1 + hK') \|d_k(x)\| + hRL' \|\alpha(t_k, x) - \alpha_k(x)\|$$

Finalmente, por (3.7) para $\|\alpha(t_k, x) - \alpha_k(x)\|$, concluimos

$$\|d_{k+1}(x)\| \leq (1 + hK') \|d_k(x)\| + Qh\tau(h, x),$$

para una constante Q . Iterando la desigualdad nuevamente, y usando que $\|d_0(x)\| = 0$, queda finalmente que $\|d_{k,N}(x)\| \leq \frac{e^{K'} - 1}{K'} Q\tau(h, x) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$, uniformemente sobre Ω , por la Proposición 3.5.1.

Así, $\frac{\partial}{\partial x} \alpha_{N,N}(x) \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial x} \alpha(1, x)$ uniformemente sobre Ω .

Supongamos ahora que tenemos una ecuación que depende de parámetros

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t), \lambda) \\ \alpha(0) = x \end{cases},$$

por el Corolario 3.1.2 y su demostración, la solución $\alpha(t, x, \lambda)$ es C^∞ respecto de todas sus variables, y se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = \tilde{F}(t, \beta(t)) \\ \beta(0) = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \end{cases},$$

donde $\beta = (\alpha, \lambda)$, $\tilde{F}(t, (x, \lambda)) = (F(t, x, \lambda), 0)$, y $\alpha(t, x, \lambda)$ se corresponde con las primeras $1 + n$ coordenadas de la solución $\beta(t, x, \lambda)$. Ahora, si aproximamos $\alpha(1, x, \lambda)$ con Euler, nos queda

$$\alpha_{k+1}(x, \lambda) = \alpha_k(x, \lambda) + hF(t_k, \alpha_k(x, \lambda)) \quad \text{con} \quad \alpha_0(x, \lambda) = x,$$

y si por otro lado, aproximamos $\beta(1, x, \lambda)$ con Euler, tenemos

$$\beta_{k+1}(x, \lambda) = \beta_k(x, \lambda) + h\tilde{F}(t_k, \beta_k(x, \lambda)) \quad \text{con} \quad \beta_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Se comprueba facilmente que

$$\beta_k(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_k(x, \lambda) \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Cuando el campo F está definido globalmente, es todo lo suave que se precisa y globalmente Lipschitz en (x, λ) para $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$, entonces \tilde{F} también tendrá las mismas propiedades. Es decir,

estamos en la situación del análisis de convergencia hecho en la sección anterior. Supongamos que el par (x, λ) está restringido a un compacto $\Omega \times \Lambda$, entonces tendremos

$$\beta_{N,N}(x, \lambda) \rightrightarrows \beta(1, x, \lambda) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial(x, \lambda)} \beta_{N,N}(x, \lambda) \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial(x, \lambda)} \beta(1, x, \lambda)$$

uniformemente en $\Omega \times \Lambda$. Pero se tiene

$$\frac{\partial}{\partial(x, \lambda)} \beta_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \alpha_k & \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_k \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial(x, \lambda)} \beta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \alpha & \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\alpha_{N,N}(x, \lambda) \rightrightarrows \alpha(1, x, \lambda) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{N,N}(x, \lambda) \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial x} \alpha(1, x, \lambda) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha_{N,N}(x, \lambda) \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial \lambda} \alpha(1, x, \lambda)$$

uniformemente en $\Omega \times \Lambda$.

Capítulo 4

Transformaciones Poliafines, Polirígidas y Log-euclideanas Poliafines y Polirígidas

En este capítulo, propondremos dos familias de funciones apropiadas para el registro de imágenes. Estas transformaciones son difeomorfismos, y están caracterizadas por una cierta cantidad de parámetros. Es decir, en principio la novedad que suponen es una nueva forma de parametrizar difeomorfismos.

A la cantidad de parámetros del método de parametrización se los llama en la literatura los *grados de libertad*. Lo que se busca con el registro de imágenes es obtener una deformación que minimice cierto funcional. Como las transformaciones están caracterizadas por sus parámetros, el funcional se minimiza en el espacio de parámetros. Una excesiva cantidad de parámetros puede llevar a que la estrategia elegida de optimización se estanque fácilmente en mínimos locales del funcional, mientras que tener poca versatilidad en las transformaciones que se usan, no permite llegar a un mínimo suficientemente bajo. Las transformaciones que propondremos a continuación tienen un buen equilibrio en este sentido.

4.1. Transformaciones poliafines y polirígidas

La idea principal de estas transformaciones es fusionar transformaciones afines (rígidas) actuando localmente en distintas partes de la imagen, de manera que la transformación resultante sea un difeomorfismo.

4.1.1. Promedio local

Un primer enfoque ingenuo sería el de hacer un promedio pesado localmente.

Consideremos transformaciones afines T_1, T_2, \dots, T_m de la forma

$$T_i(x) = A_i x + d_i$$

donde $A_i \in GL(n, \mathbb{R})$ es una matriz inversible y $d_i \in \mathbb{R}^n$ es un vector (columna). Cada transformación va a actuar en una región de influencia. En vez de trabajar con regiones fijas del plano, vamos a tomar regiones difusas caracterizadas por funciones \tilde{w}_i que son C^∞ . Luego, las combinamos para obtener

$$T(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \tilde{w}_i(x)} \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i(x) T_i(x).$$

La propuesta más sencilla para las regiones es tomar para \tilde{w}_i Gaussianas acompañadas de un peso p_i que pondere la importancia de cada región respecto a las otras:

$$\tilde{w}_i(x) = \frac{p_i}{(2\pi\sigma_i^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x - a_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right),$$

con $\sigma_i, p_i \in \mathbb{R}_{>0}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$. Podemos normalizar los \tilde{w}_i poniendo $w_i := \tilde{w}_i / \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i$, y luego

$$T(x) = \sum_{i=1}^m w_i(x) T_i(x) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m w_i(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Se pueden considerar otras alternativas para las funciones \tilde{w}_i , además de Gaussianas. Por ejemplo, se pueden considerar regiones adaptadas a cada imagen particular. En el caso en que la imagen que queremos modificar contiene estructuras rígidas (como huesos u otras estructuras articuladas), podemos considerar la región que ocupan éstas en la imagen, digamos $H \subset \Omega$. La función indicadora del conjunto $\mathbb{I}_H(x)$ no es suave, pero podemos suavizarla convolucionando con una gaussiana: $\tilde{w}_i = \mathbb{I}_H(x) * G(x)$ con $G(x)$ gaussiana centrada en el origen.

La transformación T así obtenida será C^∞ . Lo que no podemos garantizar es la invertibilidad. De hecho, hay ejemplos muy simples y que aparecen naturalmente donde se pierde la inyectividad.

4.1.2. Pequeñas deformaciones

Nos gustaría promediar las transformaciones localmente, pero de manera tal que el promedio siga siendo un difeomorfismo. Podemos proceder de la siguiente manera:

1. A cada transformación afín (rígida) T_i , $1 \leq i \leq m$, le asignamos una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\dot{\alpha}_i(t) = V_i(t, \alpha_i(t)) \tag{4.1}$$

donde $V_i(t, x)$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^n (no autónoma pues varía con el tiempo), de manera tal que si $\Phi_i(t, t_0, x)$ es el proceso asociado a la ecuación (4.1), entonces $T_i(x) = \Phi_i(1, 0, x)$.

2. Creamos un campo nuevo promediando localmente los campos

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^m w_i(x) V_i(t, x)$$

con w_i , $1 \leq i \leq m$, definidos arriba, tales que $\sum_{i=1}^m w_i(x) = 1$.

3. Creamos la ecuación diferencial no-autónoma

$$\dot{\alpha}(t) = V(t, \alpha(t)),$$

y la integramos hasta tiempo 1: si $\Phi(\cdot, t_0, x)$ es el proceso asociado a la ecuación, buscamos la transformación $T(x) = \Phi(1, 0, x)$.

4.2. Transformaciones poliafines y polirígidas

Sean entonces

$$T_i(x) = A_i x + d_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

donde $A_i \in GL(n, \mathbb{R})$ (respectivamente $A_i \in SO(n, \mathbb{R})$) y $d_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de desplazamiento, las transformaciones afines (respectivamente rígidas) que queremos fusionar.

El flujo de una ecuación diferencial es una curva en el espacio $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ que en $t = 0$ vale la identidad. Sea L_i el logaritmo principal de A_i . Una curva natural que une T_i con la identidad es

$$\alpha_i(t, x) = e^{tL_i} x + t d_i$$

ya que $\alpha_i(0, x) = x$ y $\alpha_i(1, x) = T_i(x)$.

Si derivamos respecto de t , obtenemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \alpha_i(t, x) = L_i e^{tL_i} x + d_i.$$

Combinando las dos expresiones tenemos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_t \alpha_i(t, x) = L_i(\alpha(t, x) - t d_i) + d_i.$$

Es decir, si tomamos el campo (que varía con el tiempo)

$$V_i(t, x) := L_i(x - t d_i) + d_i,$$

podemos plantear la ecuación diferencial (no-autónoma)

$$\dot{\alpha}_i(t) = V_i(t, \alpha_i(t)).$$

Si llamamos $\Phi_i(t, t_0, x)$ al proceso asociado a esta ecuación, resulta que $\Phi_i(t, 0, x) = \alpha_i(t, x)$. Se puede verificar que la expresión general de Φ_i es

$$\Phi_i(t, t_0, x) = \left((t - t_0) + t_0(\text{Id} - e^{(t-t_0)L_i}) \right) d_i + e^{(t-t_0)L_i} x. \quad (4.2)$$

Según la sección anterior, pongamos

$$V(t, x) := \sum_{i=1}^m w_i(x) V_i(t, x),$$

y planteamos la ecuación diferencial (no-autónoma)

$$\dot{\alpha}(t) = V(t, \alpha(t)). \quad (4.3)$$

Obtenemos un proceso $\Phi(t, t_0, x)$ que nos da la posición final a tiempo t de un punto que a tiempo t_0 se encontraba en la posición x . La transformación T que buscamos es $T(x) = \Phi(1, 0, x)$. La llamaremos *transformación poliafín* en el caso en que $A_i \in GL(n, \mathbb{R})$ y *polirígida* en el caso en que $A_i \in SO(n, \mathbb{R})$.

4.2.1. Invertibilidad

En la Sección 3.3.2 vimos algunas propiedades del proceso asociado a una ecuación no autónoma. Si el proceso $\Phi(t, t_0, x)$ asociado a un campo (que varía con el tiempo) está definido sobre todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces $\phi_{t_1, t_0}(x) := \Phi(t_1, t_0, x)$ es inversible con inversa $\phi_{t_0, t_1}(x)$. En la construcción de la polirígida, $T = \phi_{1,0}$ y por ende tiene inversa $\phi_{0,1}$.

La siguiente figura ilustra como la fusión infinitesimal de transformaciones mejora la invertibilidad.

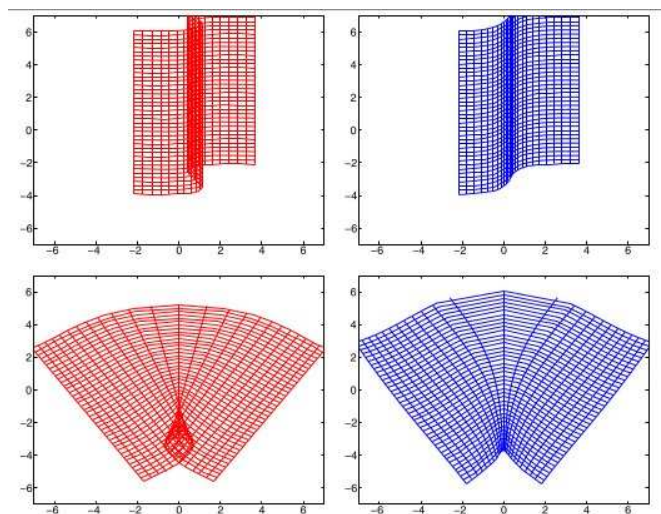


Figura 4.1:

Las dos figuras de arriba fusionan dos translaciones y las dos de abajo dos rotaciones, del lado izquierdo (en rojo) con fusión directa y del derecho (en azul) con el método de polirígdas. La figura es tomada de [3]

Se ve claramente que la fusión directa de las transformaciones (figuras del lado izquierdo, en rojo) no resulta en transformaciones inversibles (envían distintos puntos de grilla al mismo lugar, por ende son no inyectivas) en contraste con las polirígdas. En las cuatro imágenes se usaron regiones centradas en los puntos $P_1 = (-2, 0)$ y $P_2 = (2, 0)$, con funciones $\tilde{w}_i = \frac{1}{1 + ((x_1 - c_i)/\sigma)^2}$ donde $c_1 = -2$, $c_2 = 2$ y $\sigma = 5$. En las figuras de arriba se fusionan translaciones $T_i(x) = x + d_i$ con $d_1 = (3, 1)$ y $d_2 = (-1, 5, 4)$. En las de abajo las transformaciones T_i son rotaciones alrededor del centro de las regiones de ángulos $\theta_1 = 0,65$ y $\theta_2 = -0,65$ (radianes) respectivamente.

4.2.2. Parámetros

El campo $V(t, x)$ en realidad depende de los siguientes parámetros λ :

- Los parámetros de los campos V_i , $1 \leq i \leq m$: las matrices L_i y los desplazamientos d_i .
- Los parámetros de las funciones w_i . Para el caso de Gaussianas: los pesos p_i , los centros de las regiones a_i (media) y el factor de amplitud de la región σ_i (desviación estandar).

Lo notaremos por lo tanto $V(t, x, \lambda)$. Llamemos $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ al espacio de parámetros. Como $V(t, x, \lambda)$ depende de manera C^∞ de los parámetros, por el Corolario 3.1.2, tenemos que $T_\lambda(x) := T(x, \lambda) = \Phi(1, 0, x, \lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \Lambda)$ (aquí para $n = 2$ o 3).

Podemos describir Λ para el caso de las transformaciones polirígidas, i.e. $A_i \in SO(n, \mathbb{R})$, con regiones dadas por Gaussianas:

Por lo desarrollado en la Sección 2.5, sabemos que $L_i \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

Para el caso $n = 2$, la matriz L_i está caracterizada por el ángulo de rotación $\theta_i \in [-\pi, \pi]$.

Para el caso $n = 3$, $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ está en biyección con \mathbb{R}^3 (de hecho es un isomorfismo de álgebras de Lie). Si $r = (r_x, r_y, r_z) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de rotación, podemos pedir $\|r\| \in B := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| \leq \pi\}$.

Los desplazamientos d_i nunca van a ser mayores que el diámetro de la imagen a registrar. De hecho, en general bastará con desplazamientos pequeños, así que podemos pedir $d_i \in D \subset \mathbb{R}^n$ con D un entorno compacto de 0.

Con respecto a los parámetros de los w_i , tenemos que los $a_i \in \Omega$ (el dominio de la imagen que es acotado y podemos suponer compacto), los $p_i \in P = [a, b]$, para algún intervalo $0 < a < b$ y los $\sigma_i \in \Sigma = [a', b']$ con $0 < a' < b'$.

Por lo tanto, si $\lambda \in \Lambda$ es un vector de parámetros para una transformación polirígida con m componentes, tenemos:

- para $n = 2$,

$$\lambda = ((\theta_i); (d_i); (a_i); (p_i); (\sigma_i)) \in \Lambda = [-\pi, \pi]^m \times D^m \times \Omega^m \times P^m \times \Sigma^m,$$

- para $n = 3$,

$$\lambda = ((r_i); (d_i); (a_i); (p_i); (\sigma_i)) \in \Lambda = B^m \times D^m \times \Omega^m \times P^m \times \Sigma^m.$$

Luego el espacio de parámetros es compacto. En ambos casos, tomando $\theta_i = 0$ (respectivamente $r_i = 0$) y $d_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$, se obtiene $V_i(t, x) = 0$, $\forall t, x$, y por lo tanto $V(t, x) = 0$ también, lo que implica que la transformación polirígida T_λ correspondiente es la transformación identidad $T_\lambda(x) = x$, $\forall x$. Es decir, no hacemos ninguna deformación en la imagen *origen*.

4.2.3. Optimización

Como se explica en el capítulo 1, el problema del registro de las imagen origen $J : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ en la imagen objeto $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ consiste en encontrar una transformación $T_\lambda : \Omega \rightarrow \Omega'$ que minimice un criterio de similaridad entre la imagen *origen* J transformada por T_λ y la imagen *objeto* I . Las aplicaciones de nuestro método son principalmente registro monomodal, y la medida de similaridad que vamos a usar es el de la distancia L_2 . Según la Identidad (1.1), el funcional que se busca minimizar sobre $\lambda \in \Lambda$ es entonces $\mathbf{s} : \lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\mathbf{s}(\lambda) ::= S(I, J \circ T_\lambda) = \int_{\Omega} (I(x) - J \circ T_\lambda(x))^2 dx. \quad (4.4)$$

Si $\lambda_0 \in \Lambda$ realiza el mínimo de la función \mathbf{s} , usaremos la transformación T_{λ_0} para registrar las imágenes.

Para no tener problemas con el dominio de $J \circ T_\lambda$, adoptaremos la convención de que al fondo de la imagen (es decir donde no se encuentra la anatomía representada por la imagen) corresponde el valor $J(x) = 0$. Luego, podemos extender el dominio de J a todo \mathbb{R}^n definiendo $J(x) = 0, \forall x \in \Omega^c$.

Referiremos dos métodos para minimizar la función \mathbf{s} : descenso de gradiente y Levenberg-Marquardt.

4.2.4. Descenso de gradiente y Levenberg-Marquardt

El algoritmo de descenso de gradiente es el siguiente :

- Se inicializa en cierto vector de parámetros λ_0 y se calcula $\mathbf{s}(\lambda_0)$.
- Se calcula $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$ y se actualiza $\lambda_1 = \lambda_0 - h_1 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$ para cierto valor de h_1 que garantice que $\mathbf{s}(\lambda_1) < \mathbf{s}(\lambda_0)$.
- Se itera hasta que $\mathbf{s}(\lambda_{N+1}) - \mathbf{s}(\lambda_N) < \epsilon$ para cierta precisión ϵ prefijada.

No es el nuestro objetivo aquí explayarnos sobre las particularidades de este método, pero sí destacaremos algunos problemas que presenta para nuestra aplicación. En principio, que puede ser un método lento y requerir un gran número de iteraciones (particularmente cuando se está cerca del mínimo). Además, los parámetros que definen nuestras transformaciones son de naturaleza muy distinta (los componentes de las rotaciones, la media y varianza de las gaussianas, etc.), y por lo tanto tienen distinta escala. Esto hace que las componentes de $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda}$ tengan distinta magnitud y genera que el descenso de gradiente modifique considerablemente más algunas variables que otras. Una manera de remediarlo es normalizar la amplitud de cada variable dividiendo las componentes del gradiente asociadas a cada variable por distintas constantes. Sin embargo esto no es del todo satisfactorio. La solución propuesta en [2], es usar el algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM).

La idea de LM es mejorar el descenso de gradiente considerando una aproximación cuadrática en vez de lineal de la función a optimizar, valiéndose de una estimación de algunas componentes del Hessiano. Más precisamente, LM combina en cada iteración (de manera adaptativa) una optimización de tipo Gauss-Newton con descenso de gradiente. En el artículo [2], los autores muestran como el uso de LM mejora la velocidad de convergencia y permite obtener mejores mínimos locales, además de ponderar mejor la importancia de cada variable. No obstante, la naturaleza distinta de las variables sigue generando problemas, y por lo tanto recurren a optimizar por separado los distintos tipos de variables. Cada iteración se divide en varias etapas: en cada una se optimiza (con LM) un grupo de variables distinto.

4.2.5. Gradiente de \mathbf{s}

Cualquiera de los dos métodos de optimización mencionados requiere disponer al menos de $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda}$. Para ver qué forma tiene, necesitamos el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [5,

Th. 8.5].

Lema 4.2.1. *Sea U un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que la función $(x, \lambda) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existe y es continua en todo U . Supongamos que tenemos $A \times B \subseteq U$, donde A y B son subconjuntos de medida no nula de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^k respectivamente, con B es abierto. Entonces, se tiene que la función*

$$F(\lambda) = \int_A f(x, \lambda) dx$$

es diferenciable en B , y

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda) = \int_A \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx$$

para todo λ en B .

Luego, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.2. *La función $s : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (4.4) es diferenciable respecto de λ en Λ° y se tiene la expresión*

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda}(\lambda) = -2 \int_{\Omega} (I(x) - J \circ T_\lambda(x)) \left((\nabla J \circ T_\lambda)(x) \cdot \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}(x) \right) dx.$$

Demostración. Sabemos que la función $f(x, \lambda) = (I(x) - J \circ T(x, \lambda))^2$ está definida sobre todo $U = \Omega \times \Lambda$ y es diferenciable respecto a λ con derivada continua. Si consideramos $A = \Omega$ y $B = \Lambda^\circ$ en la proposición anterior, ambos son conjuntos de volumen no nulo, y el lema anterior combinado con la regla de la cadena nos da el resultado. □

Por supuesto, tenemos problemas en $\partial\Lambda$. Para el caso de descenso de gradiente, si el descenso nos lleva hasta la frontera de Λ no podemos continuar el algoritmo. Sin embargo, en los casos en los que se utiliza este método se presupone que la T_λ que se busca ya está cercana a la identidad. En principio, porque antes de aplicar un registro de tipo *no-rígido* se realiza un registro afín. Luego las deformaciones locales que se requieren para asemejar una imagen a la otra no son muy bruscas (en general se usan deformaciones locales menores). Por esto, se puede asumir que si se inicializa el descenso de gradiente con parámetros $\lambda_0 \in \Lambda^\circ$ tales que $T_{\lambda_0} = \text{Id}$, es esperable que el descenso de gradiente se mantenga en valores cercanos a λ_0 y no alcance nunca $\partial\Lambda$.

4.2.6. Integración numérica de la EDO

Al no tener una solución explícita en término de funciones conocidas para la Ecuación (4.3), las transformaciones poliafinas y polirígidas deben ser aproximadas numéricamente. Esto tiene dos facetas:

- Por un lado queremos poder evaluar la transformación T_{λ_0} que hallemos al determinar los parámetros $\lambda_0 \in \Lambda$ que minimizan la función \mathbf{s} para transformar efectivamente la imagen origen J .
- Por otro lado, para la minimización de \mathbf{s} se requiere conocer $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda}$, para lo cual –según la Proposición 4.2.2– necesitamos conocer la función $\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}(x)$. Pero al no tener una expresión explícita de T_λ no sabemos qué derivar! Lo que haremos entonces es aplicar lo desarrollado en la Sección 3.5.2 y valernos de la aproximación numérica de T_λ , en la cual la dependencia con respecto a λ es explícita.

Vamos a trabajar con dos esquemas numéricos de aproximación de la solución:

Esquema explícito de primer orden (Método de Euler).

Siguiendo lo desarrollado en la Sección 3.5, dado $N \in \mathbb{N}$, definimos recursivamente

$$\alpha_{k+1,N}(x, \lambda) = \alpha_{k,N}(x, \lambda) + \frac{1}{N}V\left(\frac{k}{N}, \alpha_{k,N}(x, \lambda), \lambda\right) \quad \text{con } \alpha_{0,N}(x, \lambda) = x.$$

La transformación $\alpha_N(x, \lambda) := \alpha_{N,N}(x, \lambda)$ es nuestra aproximación de la función $T_\lambda(x) = T(x, \lambda)$.

Según lo visto en la Sección 3.5.2, bajo ciertas hipótesis podemos garantizar que las derivadas de $\frac{\partial \alpha_N}{\partial \lambda}$ convergen uniformemente a $\frac{\partial T}{\partial \lambda}$: necesitamos que $V(t, x, \lambda)$ sea $C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \Lambda)$ y globalmente Lipschitz en (x, λ) , uniformemente respecto de t . Lo primero se cumple para nuestros campos, pero debemos hacer una modificación para poder garantizar lo segundo.

Como mencionamos en el capítulo 1, nuestras imágenes (médicas) están definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^n para $n = 2$ o 3 , que podemos suponer compactos. Sea $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n$ un compacto (suficientemente grande) tal que $\Omega \subset \Omega_1^\circ$, Ω_2 otro compacto tal que $\Omega_1 \subset \Omega_2^\circ$, y sea $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ que satisface

$$\zeta(x) = 1 \quad \text{para } x \in \Omega_1 \quad \text{y} \quad \zeta(x) = 0 \quad \text{para } x \in \Omega_2^c.$$

Consideramos ahora el campo

$$\tilde{V}(t, x, \lambda) := \zeta(x)V(t, x, \lambda).$$

Podemos asegurar que \tilde{V} es $C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \Lambda)$ y tiene soporte en $[0, 1] \times \Omega_2 \times \Lambda$. En particular, recordando que Λ es acotado, es globalmente Lipschitz respecto del par (x, λ) , uniformemente respecto de t .

Sea entonces la EDO

$$\dot{\alpha}(t) = \tilde{V}(t, \alpha(t), \lambda)$$

con proceso asociado $\tilde{\Phi}(t, t_0, x, \lambda)$, y sea $\tilde{T}(x, \lambda) = \tilde{\Phi}(1, 0, x, \lambda)$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. \tilde{V} es completo.

2. Las aproximaciones $\tilde{\alpha}_N$ por el método de Euler satisfacen

$$\tilde{\alpha}_N(x, \lambda) \rightrightarrows \tilde{T}(x, \lambda) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{\alpha}_N}{\partial \lambda}(x, \lambda) \rightrightarrows \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \lambda}(x, \lambda) \quad \text{uniformemente en } \Omega \times \Lambda.$$

3. Sean $x \in \Omega$ y $\lambda \in \Lambda$. Si $\Phi(t, 0, x, \lambda) \in \Omega_1, \forall t \in [0, 1]$, entonces $\tilde{\Phi}(t, 0, x, \lambda) = \Phi(t, 0, x, \lambda), \forall t \in [0, 1]$. En particular $\tilde{T}(x, \lambda) = T(x, \lambda)$.

Demostremos la propiedad 3: Sean $x_0 \in \Omega$ y $\lambda \in \Lambda$ fijos, y sean $\alpha(t) = \Phi(t, 0, x_0, \lambda)$ y $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\Phi}(t, 0, x_0, \lambda)$ curvas integrales de $V(t, x, \lambda)$ y $\tilde{V}(t, x, \lambda)$ respectivamente, definidas en $(a, b) \supset [0, 1]$. Se tiene

$$\dot{\alpha}(t) = V(t, \alpha(t), \lambda) \quad \text{con} \quad \alpha(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{\tilde{\alpha}}(t) = \tilde{V}(t, \tilde{\alpha}(t), \lambda) \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha}(0) = x_0.$$

Ahora bien, $\alpha(t) \subset \Omega_1, \forall t \in (a, b)$ implica $\dot{\alpha}(t) = V(t, \alpha(t), \lambda) = \tilde{V}(t, \tilde{\alpha}(t), \lambda) = \dot{\tilde{\alpha}}(t)$, y como ambos satisfacen la misma condición inicial, por el teorema de unicidad se tiene $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$.

Esta última propiedad nos asegura que para los fines prácticos, la modificación introducida en V no modifica los resultados. Esto es en el siguiente sentido: como el proceso Φ obtenido de integrar los campos V definidos para las poliafinos (polirígidas) se mantiene cercano a la identidad, basta con tomar un compacto Ω_1 suficientemente grande para asegurar que la transformación $\tilde{T}(x, \lambda) = T(x, \lambda)$ para todo $(x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda$. Si esto sucede, en particular vale que $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \lambda} = \frac{\partial T}{\partial \lambda}$. La razón para que consideremos esta modificación en los campos es de índole teórica, ya que nos permite demostrar que las aproximaciones numéricas, así como sus derivadas respecto a los parámetros, convergen uniformemente a las de la transformación.

Esquema de segundo orden

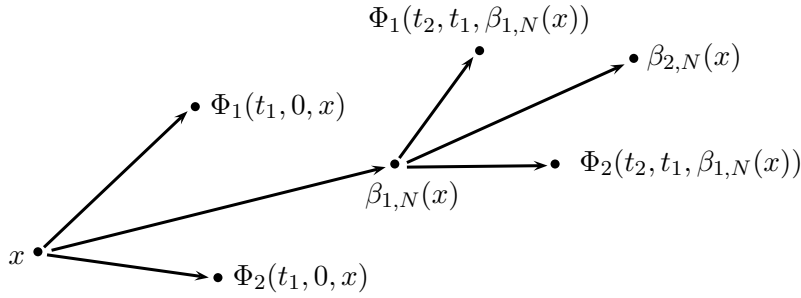
La idea de este esquema es que en cada iteración vamos a sumar un pequeño desplazamiento. Pero este desplazamiento no es un múltiplo del vector tangente como en el método anterior, sino la suma pesada localmente de los desplazamientos que se observarían si cada componente evolucionara independientemente un pequeño intervalo de tiempo. Consideremos los procesos Φ_i asociados a los campos V_i . Para cada $N \in \mathbb{N}$ llamamos $t_k = k/N$ y definimos recursivamente la sucesión $\beta_{k,N}(x)$:

$$\beta_{k+1,N}(x) = \beta_{k,N}(x) + \sum_{i=1}^M w_i(\beta_{k,N}(x)) \left(\Phi_i \left(t_{k+1}, t_k, \beta_{k,N}(x) \right) - \beta_{k,N}(x) \right) \quad \text{con} \quad \beta_{0,N}(x) = x.$$

Así por ejemplo,

$$\beta_{1,N}(x) = x + \sum_{i=1}^m w_i(x) \left(\Phi_i \left(\frac{1}{N}, 0, x \right) - x \right).$$

Es decir, a x le sumamos una combinación lineal de los desplazamientos $\Phi_i \left(\frac{1}{N}, 0, x \right) - x, 1 \leq i \leq m$, como se ilustra en la figura siguiente (donde, por simplicidad, consideramos simplemente la suma de dos componentes):



Tenemos una formula explícita para cada Φ_i , así que podemos realizar los cálculos en cada paso de la iteración. Concretamente necesitamos conocer $\Phi_i(t_{k+1}, t_k, y) - y$, para distintos valores de t_k e y dados por la iteración. Usando la expresión (4.2) dada para $\Phi_i(t, t_0, x)$, tenemos que:

$$\Phi_i(t_{k+1}, t_k, x) = \left(\frac{1}{N} + t_k (\text{Id} - e^{L_i/N}) \right) d_i + e^{L_i/N} x - x = \frac{1}{N} d_i + \left(e^{L_i/N} - \text{Id} \right) (x - t_k d_i).$$

Al igual que para el método anterior, la aproximación que queremos de la solución es la transformación $\beta_N(x) = \beta_{N,N}(x)$. El nombre *esquema de segundo orden* es el que usan en el artículo [2], aunque cabe señalar (como de hecho lo hacen los autores también) que las derivadas segundas del esquema (con respecto al incremento de t que se hace entre un paso y el siguiente) solo coinciden parcialmente con las derivadas segundas de la verdadera solución T .

Derivadas respecto de los parámetros para los esquemas numéricos

Podemos hallar una expresión para las derivadas de los esquemas numéricos respecto de los parámetros, ya que son éstas las que usaremos en el descenso de gradiente como sustituto de $\frac{\partial T}{\partial \lambda}$. Para ambos esquemas se obtienen iterativamente. Por ejemplo, para el primero, tenemos

$$\frac{\partial \alpha_{k+1,N}}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \frac{\partial \alpha_{k,N}}{\partial \lambda}(x, \lambda) + \frac{1}{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{k}{N}, \alpha_{k,N}(x, \lambda), \lambda \right) \frac{\partial \alpha_{k,N}}{\partial \lambda}(x, \lambda) + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \left(\frac{k}{N}, \alpha_{k,N}(x, \lambda), \lambda \right) \right) \quad (4.5)$$

con $\frac{\partial \alpha_{0,N}}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 0$.

4.2.7. Inconvenientes

Las transformaciones descritas anteriormente son difeomorfismos y combinan el efecto local de varias transformaciones afines (rígidas). Sin embargo presentan algunos inconvenientes a la hora de aplicarlas al registro de imágenes:

1. Las inversas no pertenecen a la misma clase de funciones: es decir, si T es poliafín (polirígida), T^{-1} no es en general poliafín (polirígida). Esto es un problema ya que como explicamos en la Sección 1.4.5, no solo es deseable que T sea difeomorfismo (preserve la topología), sino también que si T_{IJ} es la mejor transformación poliafín (polirígida) que deforma la imagen I en la imagen J , su inversa sea $T_{IJ}^{-1} = T_{JI}$, es decir, la mejor transformación poliafín (polirígida) que deforma J en I .

2. la integración numerica de la EDO es muy costosa computacionalmente.

Las transformaciones log-euclideanas poliafines y polirígidas permiten superar estos inconvenientes, sin perder la idea original de fusionar infinitesimalmente finitas transformaciones afines (rígidas) que actúan localmente.

Observación 4.2.3. Cabe señalar que en [3] afirman que las transformaciones poliafines (rígidas) no son invariantes por cambios de coordenadas. Este sería otro de los inconvenientes. Sin embargo esto parecería no ser así:

Dada una ecuación no autónoma

$$\dot{\alpha}(t) = V(t, \alpha(t)),$$

sea $\Phi(t, t_0, x)$ el proceso asociado a la ecuación, y sea $F \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ un cambio de coordenadas. Para cada $t \in \mathbb{R}^n$, podemos mirar el campo $V_t(x) = V(t, x)$. El campo V_t escrito en nuevas coordenadas es

$$\tilde{V}(t, y) = F^*V_t(y) = DF^{-1}(F(y)) \cdot V_t(F(y)),$$

y la ecuación la nueva ecuación es

$$\dot{\tilde{\alpha}}(t) = \tilde{V}(t, \tilde{\alpha}(t)).$$

Consideremos $\tilde{\Phi}(t, t_0, y) = F^{-1} \circ \Phi(t, t_0, F(y))$, y $\tilde{\phi}_{t,t_0}(y) = F^{-1} \circ \phi_{t,t_0} \circ F(y)$. Luego, $\tilde{\Phi}$ es el proceso asociado a la nueva ecuación si

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}(t, t_0, y) &= \tilde{V}(t, \tilde{\phi}_{t,t_0}(y)) = DF^{-1}(F \circ \tilde{\phi}_{t,t_0}(y)) \cdot V(t, F \circ \tilde{\phi}_{t,t_0}(y)) \\ &= DF^{-1}(F \circ \tilde{\phi}_{t,t_0}(y)) \cdot V(t, F \circ \tilde{\phi}_{t,t_0}(y)) \\ &= DF^{-1}(F \circ F^{-1} \circ \phi_{t,t_0} \circ F(y)) \cdot V(t, F \circ F^{-1} \circ \phi_{t,t_0} \circ F(y)) \\ &= DF^{-1}(F \circ F^{-1} \circ \phi_{t,t_0} \circ F(y)) \cdot V(t, F \circ F^{-1} \circ \phi_{t,t_0} \circ F(y)) \\ &= DF^{-1}(\phi_{t,t_0} \circ F(y)) \cdot V(t, \phi_{t,t_0} \circ F(y)). \end{aligned}$$

Pero si miramos $\tilde{\Phi}(t, t_0, F(y))$ con t_0 e y fijos, es una curva con parámetro t . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}(t, t_0, y) &= DF^{-1}(\tilde{\Phi}(t, t_0, F(y))) \cdot \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}(t, t_0, F(y)) \\ &= DF^{-1}(\tilde{\Phi}(t, t_0, F(y))) \cdot V(t, \tilde{\Phi}(t, t_0, F(y))) \\ &= DF^{-1}(\phi_{t,t_0} \circ F(y)) \cdot V(t, \phi_{t,t_0} \circ F(y)). \end{aligned}$$

Es decir, el proceso asociado a la ecuación original, escrito en las nuevas coordenadas ($\tilde{\Phi}(t, t_0, y)$) es el proceso asociado al campo escrito en nuevas coordenadas ($\tilde{V}(t, y)$).

4.3. Transformaciones Log-euclidianas poliafines y polirígidas

En la sección anterior vimos como una transformación afín (rígida) puede ser obtenida como la solución de una ecuación diferencial. Para eso construimos una curva en el espacio $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ y buscamos *ad hoc* una ecuación diferencial ordinaria cuya solución fuera dicha curva. La curva evoluciona exponencialmente en la parte lineal (rotación) y linealmente en el desplazamiento. Esto correspondería con una curva exponencial en el espacio $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, pero este grupo de Lie no es el mismo que $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ que es un producto semidirecto de estos grupos. Esta es la razón por la que la ecuación diferencial resulta no autónoma. Podemos solucionar este problema considerando para cada T_i una ecuación más natural. Para eso nos valemos de las coordenadas homogéneas $\text{Aff}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ introducidas en la sección 2.2.2.

Si $T_i(x) = A_i x + d_i$, podemos ver a T_i como la restricción a una variedad lineal de una transformación $\bar{T}_i \in GL(n+1, \mathbb{R})$:

$$\bar{T}_i \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & d_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i x + d_i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como vimos en la Sección 2.5.3, sea

$$L_i = \begin{pmatrix} M_i & v_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad e^{L_i t} = \begin{pmatrix} A_i & d_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La aplicación

$$\begin{pmatrix} \alpha_i(t, x) \\ 1 \end{pmatrix} = e^{L_i t} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha_i(t, x) \\ 1 \end{pmatrix} = L_i e^{L_i t} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = L_i \begin{pmatrix} \alpha_i(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quedándonos con la primer coordenada ya que la segunda es nula, esto es equivalente a:

$$\frac{d}{dt} \alpha_i(t, x) = M_i \alpha_i(t, x) + v_i.$$

Es decir, si tomamos el campo (que no varía con el tiempo t)

$$V_i(x) = M_i x + v_i,$$

podemos plantear la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{\alpha}_i(t) = V_i(\alpha_i(t)).$$

Ahora sí, podemos operar como hicimos en la sección anterior creando un nuevo campo V a partir de los V_i :

$$V(x) := \sum_{i=1}^m w_i(x) V_i(x) = \sum_{i=1}^m w_i(x) (M_i x + v_i),$$

donde los coeficientes w_i son funciones que determinan el área de influencia de cada transformación.

Terminamos planteando la ecuación diferencial, que resulta autónoma,

$$\dot{\alpha}(t) = V(\alpha(t)). \quad (4.6)$$

Obtenemos el flujo $\phi(t, x)$ solución de la ecuación con condición inicial $\alpha(0) = x$, y la transformación T se obtiene de integrar hasta tiempo $t = 1$, es decir $T(x) = \phi(1, x)$.

A dicha transformación la llamaremos log-ecuclideana poliafín /polirígida ya que proviene de la fusión de los verdaderos logaritmos de las transformaciones. En adelante usaremos el nombre abreviado LEPA o LEPR. Como la ecuación (4.6) es autónoma, nos da mejores propiedades que las que tenían las transformaciones poliafines y polirígidas.

Observemos que tenemos la siguiente expresión para V en coordenadas homogéneas:

$$\begin{pmatrix} V(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m w_i(x) \begin{pmatrix} M_i & v_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.1. Integrabilidad

Tenemos la acotación,

$$\|V(x)\| \leq \sum_{i=1}^M |w_i(x)| \|V_i(x)\| \leq \left(\sum_{i=1}^M M_i \right) \|x\| + \sum_{i=1}^M v_i.$$

Por la Proposición 3.2.2, la ecuación tiene solución para todo tiempo, es decir, el campo V es completo.

4.3.2. Invertibilidad

Al ser la Ecuación (4.6) una ecuación autónoma, tiene asociado un flujo $\phi(t, x)$, que puede verse como un subgrupo uniparamétrico de difeomorfismos $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. La transformación LE-poliafín (LE-polirígida) que se obtiene de la ecuación no es más que ϕ_1 . Recordemos las propiedades de grupo del flujo:

1. $\phi_0(x) = x$
2. $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{t+s}(x)$

Un corolario de estas propiedades es que T es inversible con inversa $\phi_{-1}(x)$:

$$\phi_{-1}(\phi_1(x)) = \phi_0(x) = x.$$

Pero más aun, como $T = \exp(V)$ en el sentido de 3.4.4, su inversa puede obtenerse exponenciando el campo opuesto: $T^{-1} = \exp(-V)$. Es este caso es

$$-V(x) = \sum_{i=1}^N w_i(x)(-V_i(x)),$$

y si uno integra los nuevos campos $-V_i$ obtiene $\exp(-V_i) = T_i^{-1}$. Por lo tanto T^{-1} es una transformación LEPA (LAPR) que fusiona la transformaciones afines (rígidas) T_i^{-1} con los mismos pesos w_i .

4.3.3. Invarianza por cambio de coordenadas afines

Supongamos que tenemos un cambio de coordenadas, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismo. Por lo visto en 3.4.2 sabemos que el campo V expresado en estas nuevas coordenadas es $\bar{V} = F^*V$, es decir:

$$\bar{V}(y) = DF^{-1}(F(y)) \cdot V(F(y)).$$

La proposición 3.4.4 nos garantiza que el flujo de este nuevo campo no es mas que el flujo del anterior expresado en nuevas coordenadas y en particular

$$\bar{T}(y) = \bar{\phi}(1, y) = (F^{-1} \circ \phi_1 \circ F)(y) = (F^{-1} \circ T \circ F)(y)$$

4.3.4. Interpretación geométrica

El hecho de que las ecuaciones que definen las transformaciones LEPA y LEPR sean autonomas nos permite interpretar geometricamente como actuan. El campo V se obtiene como suma de campos $w_i(x)V_i(x)$. Si miramos el flujo ϕ_i de un campo V_i para un valor de x fijo, tenemos una curva integral para el campo V_i : $t \rightarrow \phi_i(t, x)$. Ahora como las funciones w_i son positivas y acotadas, vimos en la proposición 3.4.13 que las curvas integrales de $w_i(x)V_i(x)$ son reparametrizaciones de las de $V_i(x)$. Por ejemplo, si $V_i(x)$ genera una rotacion alrededor de un centro p_i , las curvas integrales de V_i recorren circulos concentricos alrededor de p_i a velocidad constante y las curvas integrales de w_iV_i los recorren a velocidad menor (ya que $|w_i(x)| < 1$ para todo x) y no necesariamente constante. Si el valor de w_i disminuye a medida que nos alejamos de p_i (por ejemplo, si w_i es una gaussiana normalizada centrada en p_i) las curvas integrales que empiezan en valores de x lejanos a p_i se recorren a velocidad menor. Consideremos los flujos $\varphi_i(t, x)$ de los campos $w_i(x)V_i(x)$ y sea $\phi(t, x)$ el flujo de $V(x)$. Dado un $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $\varphi_i(t, x)$ es una curva integral de $w_i(x)V_i(x)$ y tiene la misma traza que $\phi_i(t, x)$. La formula de Lie-Trotter 3.4.15 nos dice que la transformación $T(x) = \phi(1, x)$ satisface el siguiente limite:

$$T(x) = \phi(1, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\varphi_1\left(\frac{1}{k}, -\right) \circ \varphi_2\left(\frac{1}{k}, -\right) \circ \cdots \circ \varphi_M\left(\frac{1}{k}, -\right) \right)^k (x)$$

Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, podemos dar una aproximacion de la trayectoria de la curva $\phi(t, x_0)$ (que a tiempo $t = 1$ es $T(x_0)$) de la siguiente manera: x_0 se desplaza sobre

la curva integral $\varphi_1(t, x_0)$ por un intervalo de tiempo $1/k$. Es decir, se desplaza por la traza de $\phi_1(t, x_0)$ pero recorriendo una distancia menor cuanto menor sea $w_1(x)$ sobre la trayectoria recorrida (como $\|w_1(x)\| < 1$ hará una trayectoria mas corta que la que hace $\phi_i(t, x_0)$ en el mismo intervalo de tiempo). Termina en $x_1 = \varphi_1(\frac{1}{k}, x)$. Luego se desplaza de por un intervalo igual de tiempo por la curva $\varphi_2(t, x_1)$ hasta el punto $x_2 = \varphi_2(\frac{1}{k}, x_1)$. Asi siguiendo hasta $x_M = \varphi_2(\frac{1}{k}, x_{M-1})$. Luego se repite todo el proceso k veces, es decir, $x_{M+1} = \varphi_1(\frac{1}{k}, x_M)$, etc.

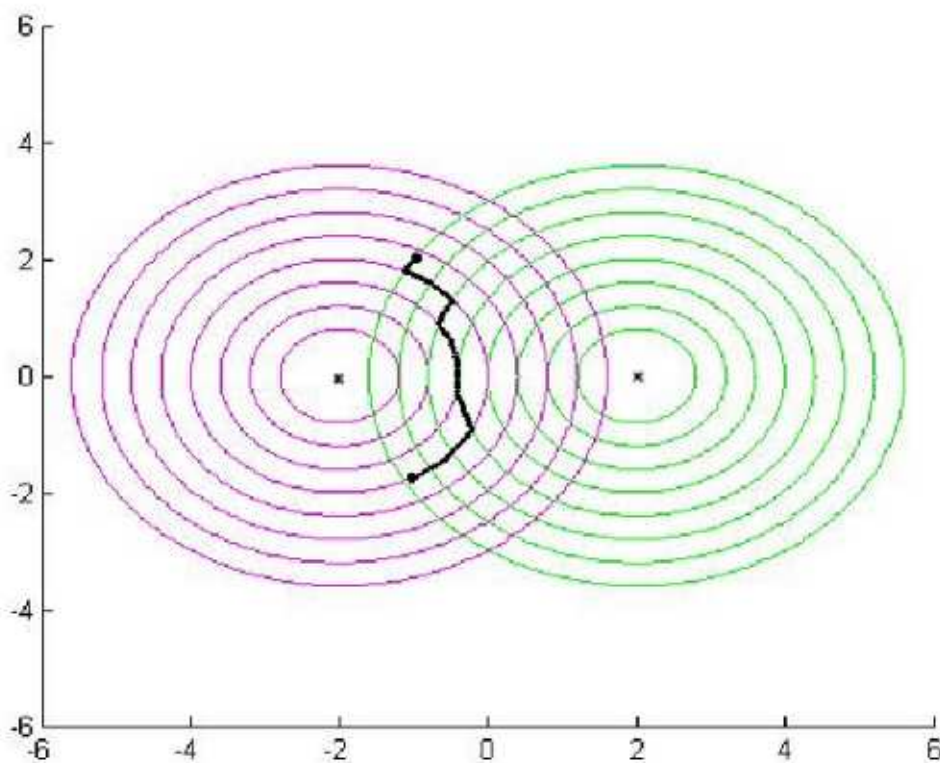


Figura 4.2:
Aproximación de la curva $\phi(t, x_0)$ para $t \in [0, 1]$

4.3.5. Integración rápida

La transformación que buscamos es $T(x) = \phi(1, x) = \phi_1(x)$. Usando las propiedades de grupo de $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, tenemos que

$$T = \phi_1 = \phi_{1/2} \circ \phi_{1/2} = \phi_{1/2}^2.$$

Inductivamente, podemos ver que

$$T = \phi_{1/2^n}^{2^n},$$

¿Cuál es la ventaja de esto? Que conociendo los valores de $\phi(\frac{1}{2^n}, x)$, basta con realizar n composiciones para calcular T , y no 2^n : componemos $\phi(\frac{1}{2^n}, -)$ consigo misma y obtenemos $\phi(\frac{1}{2^{n-1}}, -)$, luego componemos esta nueva transformación consigo misma y obtenemos $\phi(\frac{1}{2^{n-2}}, -)$, etc. Esta propiedad del flujo de una ecuación diferencial autónoma motiva un método numérico para aproximar $T(x)$, que denominan *transformada poliafin rápida* y puede presentarse en tres etapas.

1. Multiplicamos el campo V por $\frac{1}{2^N}$
2. Calculamos una aproximación de $\phi(\frac{1}{2^N}, x)$ a partir del campo $\frac{1}{2^N}V$. En [3] se refieren a este paso como *exponenciación* y proponen dos posibilidades:
 - Esquema de primer orden:

$$\alpha_{2^{-N}}(x) = x + \frac{1}{2^N}V(x)$$

- Esquema de segundo orden:

$$\beta_{2^{-N}}(x) = \sum_1^M w_i(x)T_i^{2^{-N}}(x)$$

Donde $T_i^{2^N}(x)$ puede expresarse en coordenadas homogéneas como

$$T_i^{2^N} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \exp(\frac{1}{2^N}L_i) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Componemos iterativamente las transformaciones:

$$\alpha_{2^{-(k-1)}}(x) = \alpha_{2^{-k}} \circ \alpha_{2^{-k}}(x) \qquad \beta_{2^{-(k-1)}}(x) = \beta_{2^{-k}} \circ \beta_{2^{-k}}$$

Las aproximaciones que buscamos son $\alpha(x) = \alpha \frac{1}{2^0}(x)$ y $\beta(x) = \beta \frac{1}{2^0}(x)$ respectivamente.

Este algoritmo puede probarse que converge a $T(x)$. En [3] muestran, a partir de ejemplos sintéticos, que los valores de $\alpha(x)$ obtenidos con este algoritmo en N pasos son comparables con los que se obtienen con el método de Euler en 2^N pasos. Por lo tanto se reduce la complejidad algorítmica drásticamente con resultados similares. Otra ventaja de este método es que puede utilizar el mismo algoritmo para aproximar $T^{-1}(x)$: basta con utilizar en el primer paso el campo $-\frac{1}{2^N}V$.

4.3.6. Por que “Log-Euclideanas”

En la sección 2.5.3 vimos que dado elementos $T_1, \dots, T_M \in U \subseteq \mathbf{G}$ en un grupo de Lie $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, donde U es un abierto tal que todos los elementos tienen logaritmo, podemos obtener una noción de media de $\{T_i\}$ utilizando los logaritmos. Si además se le quiere dar una importancia relativa distinta a cada elemento, podemos considerar pesos $w_1, \dots, w_M > 0$ tales que $\sum w_i = 1$. Luego, la media con pesos puede formularse

$$MF(\{T_i\}_{i=1}^n) = \exp\left(\sum_{i=1}^n w_i \log(T_i)\right).$$

La denominamos *media Log-Euclidean con pesos* ya que es la media de Frechet con pesos en el espacio euclideo de los logaritmos proyectada de nuevo a \mathbf{G} con la exponencial.

Sean $T_i \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ transformaciones rígidas, que pueden representarse como matrices $\tilde{T}_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ y consideremos sus logaritmos como campos vectoriales completos, es decir $V_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $V_i(x) = M_i x + v_i$ tales que $\exp(V_i) = T_i$ (exponencial de campos). Si tomamos funciones $w_i(x) = w_i$ constantes, la transformación LEPR obtenida coincidirá con la media Log-Euclidean de las matrices \tilde{T}_i para los mismos pesos. Como vimos en la sección 3.4.1, tenemos un morfismo de álgebras de Lie inyectivo: $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. El espacio vectorial de dimensión infinita $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ resulta ser un módulo respecto del anillo de funciones acotadas y suaves $C_{acot}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es decir, que combinar los campos $\{V_i(x)\}$ con pesos $\{w_i(x)\}$,

$$V(x) = \sum_{i=1}^M w_i(x) V_i(x)$$

no es más que una combinación lineal en el módulo $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Es decir, podemos pensar que es una extensión a dimensión infinita de la *media Log-Euclidean con pesos* de $SO(n, R)$, donde los pesos son funciones que dan importancia relativa distinta a cada $T_i(x)$ a nivel local en vez de global.

4.3.7. Estrategias de optimización

El método utilizado para estimar los parámetros para las transformaciones PR tiene un gran costo computacional. Por eso, en el artículo [3] recurren a otra estrategia de optimización. En el ejemplos de aplicación en [3], se registra un cerebro previamente segmentado sobre otra imagen de la misma modalidad (IMR T1). Se eligen ciertos sectores que se pueden distinguir en la imagen. En el ejemplo usado en [3] se distinguen: ojos, tronco del encefalo, cerebelo y quiasma óptico:

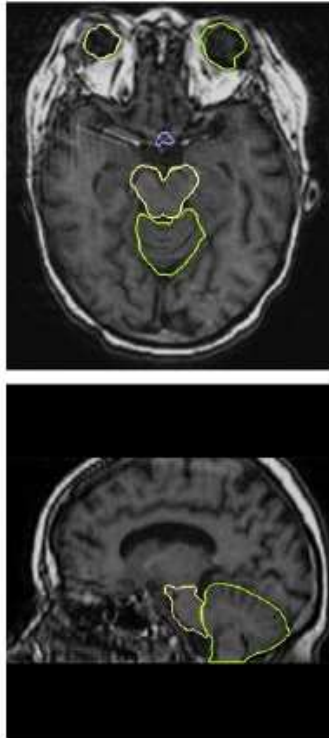


Figura 4.3:

Las figura, tomada de [3], muestra zonas distinguidas en un atlas. La modalidad de la imagen es MRI T1. Arriba: corte axial. Abajo: corte sagital.

Estas áreas de la imagen, son registradas contra la imagen objeto con transformaciones afines. Luego, a partir de los sectores se definen funciones $w_i(x)$ (normalizadas) y con las transformaciones A_i se define el campo $V(x)$ y se obtiene la transformación *Log-Euclidean poliafin*.

Bibliografía

- [1] V. Arsigny, *Processing Data in Lie Groups: An Algebraic Approach. Application to Non-Linear Registration and Diffusion Tensor MRI*. Thèse de Science, Ecole polytechnique, November 2006.
- [2] V. Arsigny, X. Pennec, N. Ayache, *Polyrigid and polyaffine transformations: A novel geometrical tool to deal with non-rigid deformations – Application to the registration of histological slices*. *Medical Image Analysis* 9 (2005) 507-523.
- [3] V. Arsigny, O. Commowick, N. Ayache, X. Pennec, *A Fast and Log-Euclidean Polyaffine Framework for Locally Linear Registration*. *J Math Imaging Vis* (2009) 33: 222-238.
- [4] B. Avants, P. Yushkevich, J. Pluta, D. Minkoff, M. Korczykowski, J. Detre, J. Gee, *The optimal template effect in hippocampus studies of diseased populations*. *NeuroImage* 49(3):2457-66, 2010.
- [5] D. Azagra, *Cálculo Integral*, Departamento de Analisis Matemático Facultad de Ciencias Matematicas Universidad Complutense de Madrid, Febrero 2007.
- [6] C. Broit, *Optimal registration of deformed images*, Ph.D. dissertation, Dept. Comput. Inf. Sci., Univ. Pennsylvania, Philadelphia, 1981.
- [7] G. Christensen, H. Johnson, *Consistent image registration*,. *IEEE Transactions on medical imaging*, vol. 20, Nro. 7, Julio 2001
- [8] J. Dauguet, T. Delzescaux, F. Conde, J. Mangin, N. Ayache, P. Hantraye, V. Froui, *Three-dimensional reconstruction of stained histological slices and 3D non-linear registration with in-vivo MRI for whole baboon brain*. *Journal of Neuroscience Methods* 164 (2007) 191–204.
- [9] M. Feuerstein, H. Heibel, J. Gardiazabal, N. Navab, M. Groher, *Reconstruction of 3-D Histology Images by Simultaneous Deformable Registration*. *Lecture Notes in Computer Science* Volume 6892, 2011, pp 582-589.
- [10] P. Jancsa, M. Farinati, *Grupos y álgebras de Lie*, Publicaciones de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Cordoba, 2010
- [11] B. P. K. Horn and B. G. Schunck, *Determining optical flow*, *Artif. Intell.*, vol. 17, pp. 185–203, 1981

- [12] O. Musse, F. Heitz, J. Armspach, *Topology preserving deformable image matching using constrained hierarchical parametric models*, IEEE Trans. Image Process., vol. 10, no. 7, pp. 1081-1093, Jul. 2001. IEEE Trans. Med. Imag., vol. 20, no. 7, pp. 568-582, Jul. 2001.
- [13] K. Rohr, H. S. Stiehl, R. Sprengel, W. Beil, T. M. Buzug, J. Weese, and M. H. Kuhn, *Point-based elastic registration of medical image data using approximating thin-plate splines*, in Visualization Biomed. Comput, Proc. Soc. Photo-Optical Instrum. Eng. (SPIE), Bellingham, WA, 1996, vol. 1131, pp. 297–306
- [14] E. Nelson, *Topics in dynamics I: Flows*, Princeton University Press, April 1970.
- [15] M. Fornefett, K. Rohr, and H. S. Steihl, *Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images*, Image Vis. Comput., vol. 19, no. 1–2, pp. 87–96, 2001
- [16] A. Roche, G. Malandain, N. Ayache, S. Prima, *Towards a Better Comprehension of Similarity Measures used in Medical Image Registration*. Springer Verlag. Proceedings MICCAI'99, volume 1679 of LNCS, 555-566, 1999.
- [17] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Version: Marzo 2011.
- [18] G. E. Christensen, R. D. Rabbitt, and M. I. Miller, *3D brain mapping using a deformable neuroanatomy*, Phys. Medicine Biol., vol. 39, pp. 609–618, 1994.
- [19] A. Trouve, *Diffeomorphisms groups and pattern matching in image analysis* Int. J. Comput. Vis., vol. 28, no. 3, pp. 213-221, 1998.
- [20] Y. T. Wu, T. Kanade, C. C. Li, and J. Cohn, *Image registration using wavelet-based motion model* Int. J. Comput. Vis., vol. 38, no. 2, pp. 129–152, 2000.
- [21] D. L. Collins and A. C. Evans, *Animal: Validation and applications of nonlinear registration-based segmentation*, Int. J. Pattern Recogn. Artif. Intell., vol. 11, no. 8, pp. 1271–1294, 1997
- [22] W. Wells *et al*, *An automatic registration method for frameless stereotaxy, Image Guided Surgery, and Enhanced Reality Visualization*. IEEE Transactions on medical imaging, vol. 15, Nro. 2, abril 1996.