1. [2 punts] Demostreu que un graf d'ordre n i mida m és un arbre si, i només si, és acíclic i $m = n - 1$.

2. [4 punts] Responeu les preguntes següents, justificant les respostes.

   a) Trobeu un graf G tal que tant G com el seu complementari G^c siguin hamiltonians.

   b) Sigui T un arbre amb un nombre parell d'arestes. Proveu que T té almenys un vèrtex de grau parell.

   c) Sigui G un graf connex d'ordre n. Demostreu que G conté un subgraf connex d'ordre k, per a tot $1 \leq k \leq n$.

   d) Trobeu l'arbre que té per seqüència de Prüfer $(3, 3, 2, 2, 1)$. Indiqueu breument els passos que seguiu per trobar l'arbre.

3. [4 punts] Sigui $G = (V, A)$ un graf. El *graf línia* LG és el graf que té per vèrtexs les arestes de G i dos vèrtexs de LG són adjacents si, com a arestes de G, són incidents.

   a) Doneu una representació gràfica del graf línia de $K_{1,3}$ i del graf línia de K_4.

   b) Doneu l'ordre i el grau dels vèrtexs de LG en funció dels paràmetres de G.

   c) Proveu que si G és connex aleshores LG és connex.

   d) Proveu que si G és eulerià, aleshores LG és eulerià.

   e) Trobeu un graf G tal que LG sigui eulerià, però G no.

Informacions:

Cal que justifiqueu totes les respostes.
La durada de l'examen és de 2h.
Si ho considereu necessari, per respondre un apartat d'una pregunta podeu assumir que els apartats anteriors són certs, encara que no els hàgiu respost.
La nota d'una pregunta es reparteix equitativament entre els seus apartats.
Les preguntes 1 i 3 també compten per a la nota de la competència transversal.
Les notes es publicaran al Racó el dimecres 29 juny. La revisió serà el dijous 30, a les 9:30, a l'aula A5106.

Model de solució

1. *Demostreu que un graf d'ordre n i mida m és un arbre si, i només si, és acíclic i $m = n-1$.*

   $\boxed{\Rightarrow}$ Atès que els arbres són acíclics, només cal provar la igualtat $m = n - 1$. Ho fem per inducció sobre n. Per $n = 1$ és trivial. Suposem $n > 1$ i que la implicació és certa per a arbres d'ordre $< n$. Sigui $T = (V, A)$ un arbre d'ordre n, per ser graf acíclic, tota aresta és pont. Prenem a una aresta qualsevol de T, aleshores $T - a$ és un bosc amb 2 components connexos T_1 i T_2 que són arbres, amb ordres n_1, n_2, resp., tots dos més petits que n. Per hipòtesi d'inducció, les mides de T_1 i T_2 són $n_1 - 1$ i $n_2 - 1$, respectivament. Aleshores, la mida de T és $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$. (Nota: una altra manera de fer la inducció seria treient una fulla al pas d'inducció.)

   $\boxed{\Leftarrow}$ Només cal veure que si tenim un graf T acíclic amb $m = n-1$ també és connex. Suposem que $T_1, \ldots, T_k$ són els components connexos de T. Com que T és acíclic, cada T_i és un arbre, i per tant, per la implicació que ja hem demostrat, es compleix que $m_i = n_i - 1$ (on m_i i n_i són la mida i l'ordre de T_i, respectivament). De les igualtats

   $$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$

   es dedueix que $k = 1$, i per tant T és connex.

2. a) *Trobeu un graf G tal que tant G com el seu complementari G^c siguin hamiltonians.*

   Un exemple és el graf cicle C_5, que clarament és hamiltonià. En ser autocomplementari, es compleix el que demana l'enunciat.

   b) *Sigui T un arbre amb un nombre parell d'arestes. Proveu que T té almenys un vèrtex de grau parell.*

   Sigui n l'ordre de l'arbre T. Com en tot arbre, la mida és $n-1$, per tant n és senar. Sabem que un graf ha de tenir un nombre parell de vèrtexs de grau senar, per tant no tots els vèrtexs de T poden tenir grau senar i n'hi ha d'haver algun de grau parell.

   c) *Sigui G un graf connex d'ordre n. Demostreu que G conté un subgraf connex d'ordre k, per a tot $1 \leq k \leq n$.*

   Com que G és connex, conté un arbre generador T. Com que tot arbre no trivial té alguna fulla i el resultat d'eliminar una fulla d'un arbre segueix sent un arbre, podem trobar recursivament una ordenació $v_1, \ldots, v_n$ dels vèrtexs de G tal que $T_k = T - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_k\}$ és un arbre per tot $k \geq 2$. Com que aquest arbre T_k és un subgraf de G i té ordre $k - 1$, ja hem trobat un subgraf de G connex d'ordre k, per tot $1 \leq k \leq n-1$. (El subgraf connex d'ordre n pot ser el propi G.)

   Alternativa: executem l'algorisme DFS (o BFS) en G, començant des d'un vèrtex qualsevol, i escrivim les arestes visitades per l'algorisme segons l'ordre en què es visiten: $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Per la manera com s'executa el DFS, el subgraf de G induït per les arestes $a_1, \ldots, a_{k-1}$ és un arbre, i per tant és connex. Com que té ordre k, és un subgraf del tipus que es demana.

   d) *Trobeu l'arbre que té per seqüència de Prüfer* $(3, 3, 2, 2, 1)$. *Indiqueu breument els passos que seguiu per trobar l'arbre.*

   Atès que la seqüència té 5 elements, el conjunt de vèrtexs de l'arbre és [7]. Reconstruïm l'arbre seguint l'algorisme que detallem a continuació:

`Entrada` $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}) \in [n]^{n-2}$
`Sortida` arbre T amb seqüència de Prüfer $\mathbf{a}$

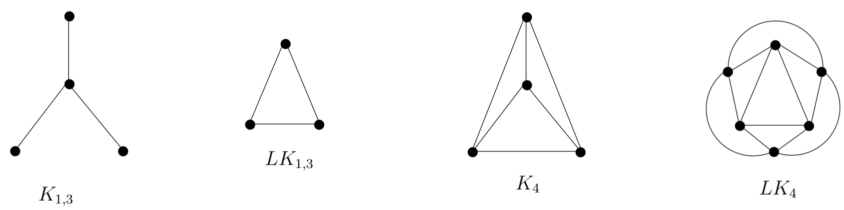
`Iniciar` $a_{n-1} =: n$, $A_0 := \{\}$, $k := 1$
`Mentre` $k \leq n-1$ `fer`
$b_k := \min\big([n] - (\{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}\} \bigcup \{b_1, \dots, b_{k-1}\})\big)$
$A_k := A_{k-1} \cup \{a_k b_k\}$
$k := k+1$

`Tornar` $T = \langle A_{n-1} \rangle$

L'arbre cercat és $T = ([7], \{12, 17, 23, 26, 34, 53\})$.

3. *Sigui $G = (V, A)$ un graf. El* graf línia *LG és el graf que té per vèrtexs les arestes de G i dos vèrtexs de LG són adjacents si, com a arestes de G, són incidents.*

a) *Doneu una representació gràfica del graf línia de $K_{1,3}$ i del graf línia de K_4.*



b) *Doneu l'ordre i el grau dels vèrtexs de LG en funció dels paràmetres de G.*

L'ordre de LG és la mida de G.

Sigui $a = xy$ un vèrtex de LG, on x, y són vèrtexs de G. Per la definició de LG, a és adjacent a totes les arestes incidents a x i a y a G, llevat d'ella mateixa, és clar. El nombre d'arestes incidents a un vèrtex és el grau del vèrtex, per tant

$$g_L(a) = g_G(x) - 1 + g_G(y) - 1 = g_G(x) + g_G(y) - 2.$$

c) *Proveu que si G és connex aleshores LG és connex.*

Cal veure que per tot parell de vèrtexs diferents de LG hi ha un camí d'un a l'altre.

Siguin $a = xy$ i $b = uv$ dos vèrtexs diferents de LG. Si a i b són adjacents ab és un a-b camí. Suposem que a i b no són adjacents i que $d = \mathrm{d}(x, u)$ és la més petita entre les distàncies d'un vèrtex d'a i un vèrtex de b. Considerem un x-u camí a G de longitud d, $x_0 x_1 \dots x_{d-1} x_d$. Per l'elecció de x i u, x_1 i x_{d-1} no poden ser y ni v, respectivament. Així, $aa_1 \dots a_d b$ és un a-b camí, on a_i denota l'aresta $x_{i-1}x_i$, $1 \leq i \leq d$.

d) *Proveu que si G és eulerià, aleshores LG és eulerià.*

Un graf connex és eulerià si i només si els vèrtexs tenen grau parell. Per l'apartat b), si els vèrtexs de G tenen grau parell els de LG també; a més si G és connex, per l'apartat c), LG ho és també. Per tant, si G és eulerià, LG és eulerià.

e) *Trobeu un graf G tal que LG sigui eulerià, però G no.*

$LK_{1,3}$ és un cicle d'ordre 3, per tant eulerià, però $K_{1,3}$ no ho és.