Trojné integrály

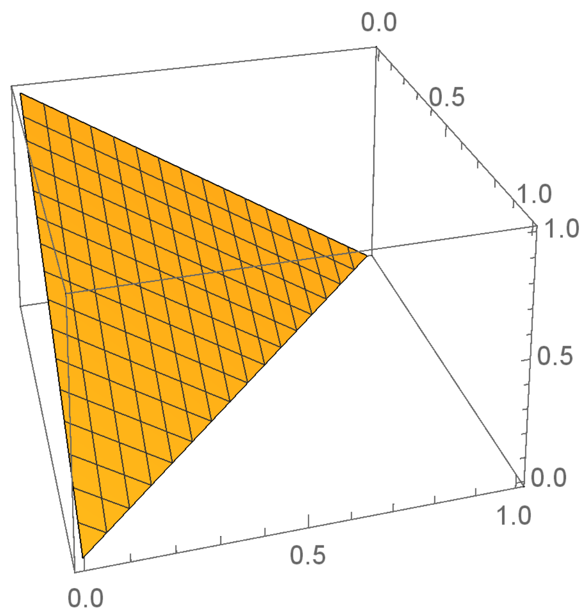
Používá se Fubiniho věta na převedení na trojnásobný integrál a věta o substituci, obdobně jako u dvojného integrálu a za obdobných předpokladů. Jen představa integračních oborů je poněkud obtíznější, protože jsou to množiny v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 1
Spočteme

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$.

Množina D je čtyřstěn, který vytvoří rovina s obecnou rovnicí $x+y+z = 1$ v prvním oktantu:



Geometricky lze na integrál pohlížet jako na objem tohoto čtyřstěnu.

Z obrázku vidíme, že např. x může nabývat hodnot z intervalu $[0, 1]$. Pak y je omezené zdola 0 a shora funkcí $1 - x$. Tudíž z podmínky $z \geq 0$ a rovnice $x + y + z \leq 1$ vidíme, že $0 \leq z \leq 1 - x - y$, a proto D můžeme popsat následovně

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \in [0, 1] \wedge 0 \leq y \leq 1 - x \wedge 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Aplikací Fubiniho věty (funkce $f(x, y, z) \equiv 1$ je omezená a spojitá v D) dostaneme

$$\begin{aligned}\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{1-x-y} 1\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} (1-x-y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\big[(1-x)^3\big]_0^1 = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

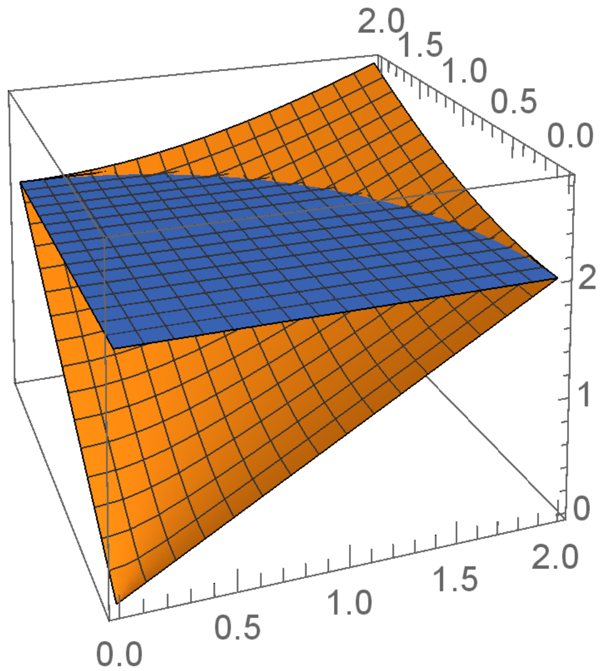
což je skutečně objem našeho čtyřstěnu (přesvedčte se sami!).

Příklad 2
Spočteme

$$I = \iiint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Integrační obor je množina v prvním oktantu omezená shora grafem funkce $z \equiv 2$ (modrý) a zdola $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (oranžový):



Zřejmě z nabývá hodnot z intervalu $[0, 2]$. Zvolme si libovolně pevně $z_0 \in [0, 2]$. V podstatě jde o řez koule v prvním oktantu rovinou $z \equiv z_0$ (např. volbou $z_0 = 2$ dostaneme modrou množinu zakreslenou v obrázku). Tímto způsobem jsme se z prostoru ($\mathbb{R}^3$) dostali do roviny ($\mathbb{R}^2$). Protože množina

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z_0\right\}$$

je „kruhová“, hodí se nám substituce do polárních souřadnic

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos t \\ y & = & r\sin t \end{array}, \; r \in (0, z_0],\; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

V prvním kroku tedy použijeme Fubiniho větu (funkce $f(x, y, z) = y$ je spojitá a omezená v D)

$$\iiint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\iint_{D_z} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z,$$

kde

$$D_z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\right\}.$$

Ve druhém kroku aplikujeme větu o substituci do polárních souřadnic (to je jistě možné ve vnitřku množiny D)

$$I = \int_0^2 \Big(\int_0^z \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin t\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}z = \int_0^2 \frac{1}{3} z^3 [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z = \frac{1}{3}\int_0^2 z^3 \mathrm{d}z = \frac{1}{12}[z^4]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Jiný způsob řešení

Úlohu lze řešit přímo substitucí do **válcových (cylindrických) souřadnic**

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos t \\ y & = & r\sin t \\ z & = & z \end{array}, \; r > 0,\; t \in [0, 2\pi),\; z \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že Jakobián této transformace je r.
V našem případě lze brát $z \in (0,2)$, $r \in (0,z)$ a $t \in (0,\pi/2)$, a tak

$$\iiint_D y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \Big(\int_0^z \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin t r \, \mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}r \Big) \mathrm{d}z,$$

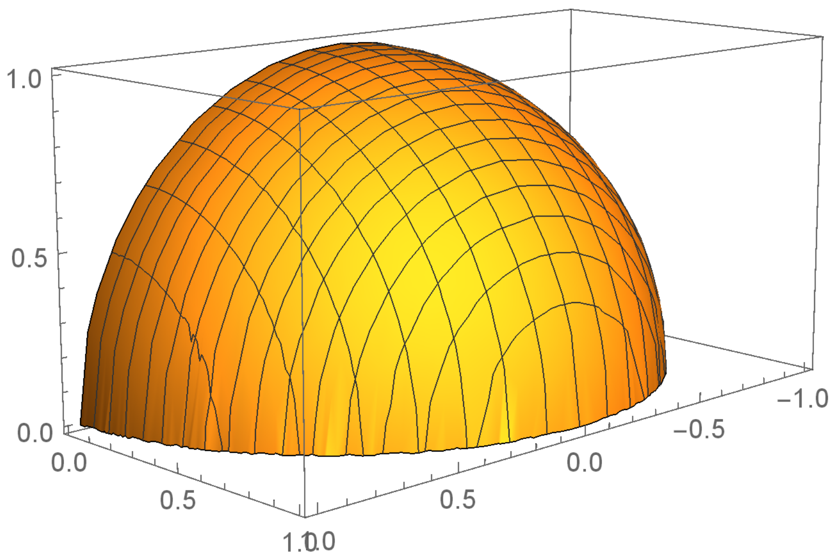
což jsme počítali výše.

Příklad 3
Spočteme

$$\iiint_D yz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

přes množinu $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Množina D je čvrtkoule



Nabízí se tedy substituce do **sférických souřadnic**

$$\begin{array}{rcl} x & = & r \sin s \, \cos t \\ y & = & r \sin s \, \sin t \\ z & = & r \cos s \end{array}, \; r > 0, \; t \in [0, 2\pi), \; s \in [0, \pi).$$

Jakobián této transformace je $-r^2 \sin s$.
Poznamenejme, že hodnota integrálu zůstane stejná, pokud z množiny D odstraníme její hranici, tj. plášť čtvrtkoule. Zobrazení sférickými souřadnicemi je pak z množiny M (její definice je uvedena níže) na vnitřek čtvrtkoule regulární.
Z podmínky

- $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ plyne $r^2 < 1$,
- $y > 0$ plyne $r \sin s \, \sin t > 0$,
- $z > 0$ plyne $r \cos s > 0$.

Řešením této soustavy nerovnic získáme množinu

$$M = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < r < 1 \wedge 0 < s < \frac{\pi}{2} \wedge 0 < t < \pi\Big\}.$$

Pak využívajíce větu o substituci do sférických souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned}\iiint_D yz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_M r^2 \sin s \, \sin t \cos s \; r^2 \sin s \, \mathrm{d}r\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\pi} r^4 \sin t \, \sin^2 s \cos s \, \mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}r = \frac{1}{5}[-\cos t]_0^{\pi} \frac{1}{3}[u^3]_0^1 = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

Příklady k procvičení
Vypočtěte

(i)
$$\iiint_D (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - z \leq 1\}$, [$\pi/6$]

(ii)
$$\iiint_D \frac{x + y}{4 + z} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 4\}$, [$9 \ln 2$]

(iii)
$$\iiint_D xyz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$, [$1/6$]

(iv)
$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$, [$\pi/6$]

(v)
$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z^2 \leq x^2 + y^2 \wedge z \geq 0\}$, [$\pi\sqrt{2}/7$]

(vi)
$$\iiint_D 2z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
přes množinu $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y - 1 \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - z^2 + 1 \geq 0\}$.
[$2/3$]