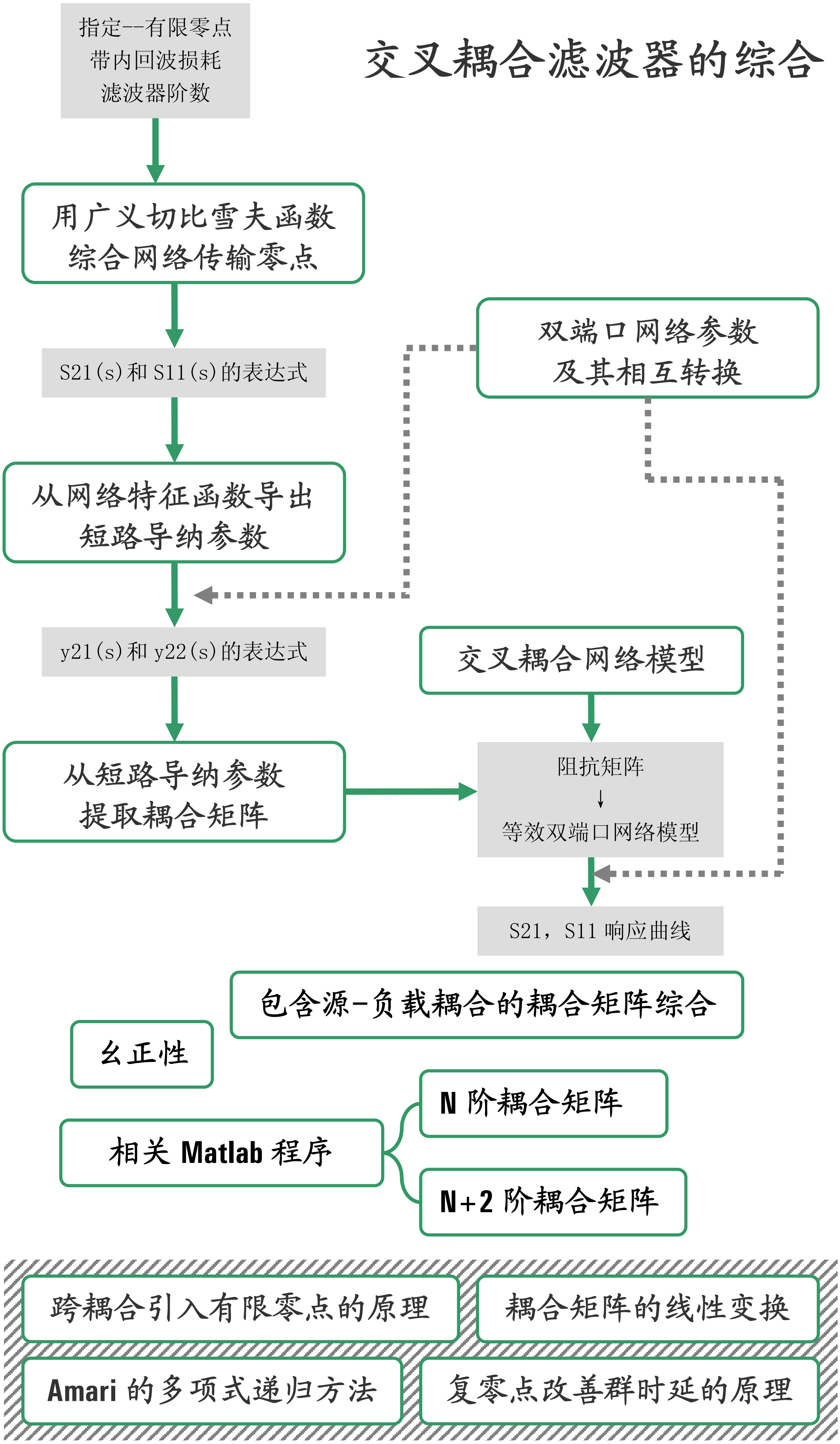
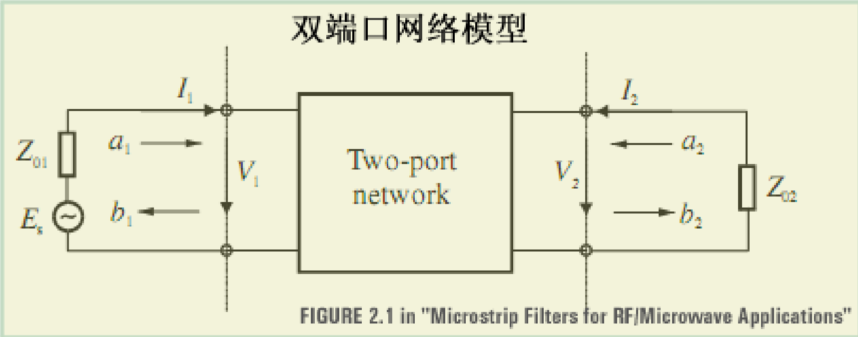
交叉耦合滤波器的综合



指定--有限零点
带内回波损耗
滤波器阶数
用广义切比雪夫函数
综合网络传输零点
S21(s)和S11(s)的表达式
从网络特征函数导出
短路导纳参数
y21(s)和y22(s)的表达式
从短路导纳参数
提取耦合矩阵
双端口网络参数
及其相互转换
交叉耦合网络模型
阻抗矩阵
↓
等效双端口网络模型
S21，S11 响应曲线
包含源-负载耦合的耦合矩阵综合
幺正性
相关 Matlab 程序
N 阶耦合矩阵
N+2 阶耦合矩阵
跨耦合引入有限零点的原理
耦合矩阵的线性变换
Amari 的多项式递归方法
复零点改善群时延的原理

§ 双端口网络参数及其相互转换

==



端口电压电流(V1 V2 I1 I2) → 入射/反射波电压(a1 b1 a2 b2) → 散射矩阵参数(S11 S21)

Ref. Jia-Sheng Hong "Microstrip Filters for RF Microwave Applications" 2.1&2.2

参考网络理论，在保证功率不变的前提下对各个端口电压电流归一化。

$v_n = V_n / \sqrt{Z_{0n}}$ $\quad$ $i_n = I_n \sqrt{Z_{0n}}$ $\quad$ 其中 Z_{0n} 表示从端口 n 向外看的特性阻抗。

图中 a_n b_n 分别表示入射波和反射波电压的归一化值 v_n^+ v_n^- 有 $\begin{cases} v_n = a_n + b_n \\ i_n = a_n - b_n \end{cases}$ 即

$$V_n = \sqrt{Z_{0n}}(a_n + b_n)$$
$$I_n = \frac{1}{\sqrt{Z_{0n}}}(a_n - b_n) \qquad n = 1 \text{ and } 2$$

or

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{\sqrt{Z_{0n}}} + \sqrt{Z_{0n}}\, I_n\right)$$
$$b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{\sqrt{Z_{0n}}} - \sqrt{Z_{0n}}\, I_n\right) \qquad n = 1 \text{ and } 2$$

(2.4) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

双端口网络散射矩阵如下定义：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} \qquad S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} \qquad S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0}$$

(2.6) (2.7) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

短路导纳参数(y) 开路网络参数(z) → 输入阻抗(Z) → 反射系数(S11)

Ref. 黄席椿 高顺泉 《滤波器综合设计原理》 3.4&6.4

用短路导纳参数 $y_{11}y_{12}y_{21}y_{22}$ 表示双端口网络的基本方程

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{y_{22}}{|y|}I_1 - \dfrac{y_{12}}{|y|}I_2 & ① \\ V_2 = \dfrac{-y_{21}}{|y|}I_1 + \dfrac{y_{11}}{|y|}I_2 & ② \end{cases}$$

其中 $|y| = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} = y_{11}y_{22} - y_{12}^2$

用开路网络参数表示

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{z}_{11}I_1 + \mathrm{z}_{12}I_2 \\ V_2 = \mathrm{z}_{21}I_1 + \mathrm{z}_{22}I_2 \end{cases} \quad => \quad \mathrm{z}_{11} = \frac{y_{22}}{|y|} \quad \mathrm{z}_{22} = \frac{y_{11}}{|y|} \quad \mathrm{z}_{12} = \mathrm{z}_{21} = \frac{-y_{12}}{|y|} = \frac{-y_{21}}{|y|}$$

将 $V_2 = -I_2Z_{02}$ 代入基本方程②，可得 $I_2 = \dfrac{y_{21}}{y_{11} + Z_{02}|y|}I_1$ 再代入①得：

$$V_1 = \frac{\mathrm{z}_{11}\left(\dfrac{1}{y_{22}} + Z_{02}\right)}{\mathrm{z}_{22} + Z_{02}}I_1 \quad => \quad \text{输入阻抗} \quad Z_{11}(s) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\mathrm{z}_{11}\left(\dfrac{1}{y_{22}} + Z_{02}\right)}{\mathrm{z}_{22} + Z_{02}}$$

网络无耗，输入功率 P_1 等于负载功率 P_2，若在实频率 ω 下输入阻抗 $Z_{11}(j\omega) = R + jX$ ，有

$$P_2 = P_1 = |I_1|^2 R = \frac{|V_0|^2 R}{|Z_{01} + Z_{11}|} = \frac{|V_0|^2 R}{(Z_{01} + R)^2 + X^2}$$

$$P_{\max} = \frac{|V_0|^2}{4Z_{01}}$$

根据反射系数定义

$$|S_{11}|^2 = 1 - \frac{P_2}{P_{\max}} = 1 - \frac{4Z_{01}R}{(Z_{01} + R)^2 + X^2} = \frac{(Z_{01} - R)^2 + X^2}{(Z_{01} + R)^2 + X^2} = \left|\frac{Z_{01} - Z_{11}(j\omega)}{Z_{01} + Z_{11}(j\omega)}\right|^2$$

进行解析开拓

$$S_{11}(s)S_{11}(-s) = \left[\frac{Z_{01} - Z_{11}(s)}{Z_{01} + Z_{11}(s)}\right]\left[\frac{Z_{01} - Z_{11}(-s)}{Z_{01} + Z_{11}(-s)}\right]$$

于是

$$S_{11}(s) = \frac{Z_{01} - Z_{11}(s)}{Z_{01} + Z_{11}(s)} \quad => \quad Z_{11}(s) = \frac{1 - S_{11}(s)}{1 + S_{11}(s)}Z_{01}$$

§ 交叉耦合网络模型

Ref.　Jia-Sheng Hong “Microstrip Filters for RF Microwave Applications” chapter 8

==

n阶交叉耦合滤波器等效电路模型

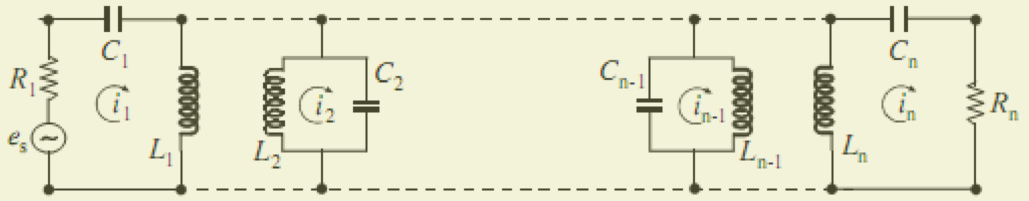


FIGURE 8.1 in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

根据 Kirchhoff 电压定律，各谐振回路电压之和为 0，列出电路环路方程组：

$$
\begin{aligned}
\left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) i_1 - j\omega L_{12} i_2 \cdots - j\omega L_{1n} i_n &= e_s \\
- j\omega L_{21} i_1 + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) i_2 \cdots - j\omega L_{2n} i_n &= 0 \\
&\vdots \\
- j\omega L_{n1} i_1 - j\omega L_{n2} i_2 \cdots + \left(R_n + j\omega L_n + \frac{1}{j\omega C_n}\right) i_n &= 0
\end{aligned}
$$

(8.1) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

Lij= Lji，表征谐振器 i 与谐振器 j 之间的互感系数，这里假设为电感耦合(电耦合)，因此互耦合引起的电压降带负号。将方程组用矩阵形式表示：

$$
\begin{bmatrix}
R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} & -j\omega L_{12} & \cdots & -j\omega L_{1n} \\
-j\omega L_{21} & j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} & \cdots & -j\omega L_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-j\omega L_{n1} & -j\omega L_{n2} & \cdots & R_n + j\omega L_n + \frac{1}{j\omega C_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} e_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

(8.2) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

即 [Z] • [i] = [e] ，其中[Z]为 n×n 阻抗矩阵。

这里我们可首先考虑同步调谐滤波器，即各谐振器具有同一谐振频率 ω_0，那么滤波器的中心频率也为 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，其中 $L = L_1 = L_2 = \cdots L_n$ 且 $C = C_1 = C_2 = \cdots C_n$

下面对阻抗矩阵进行归一化。

定义相对带宽 $FBW = \Delta\omega/\omega_0$

$\left[\bar{Z}\right]$为归一化阻抗矩阵，满足 $[Z]=\omega_0 L\cdot FBW\cdot[\bar{Z}]$

s

$$[\bar{Z}]=\begin{bmatrix} \dfrac{R_1}{\omega_0 L\cdot FBW}+p & -j\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{L_{12}}{L}\cdot\dfrac{1}{FBW} & \cdots & -j\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{L_{1n}}{L}\cdot\dfrac{1}{FBW} \\ -j\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{L_{21}}{L}\cdot\dfrac{1}{FBW} & p & \cdots & -j\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{L_{2n}}{L}\cdot\dfrac{1}{FBW} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -j\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{L_{n1}}{L}\cdot\dfrac{1}{FBW} & -j\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{L_{n2}}{L}\cdot\dfrac{1}{FBW} & \cdots & \dfrac{R_n}{\omega_0 L\cdot FBW}+p \end{bmatrix} \quad \text{with } p=j\frac{1}{FBW}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

(8.4) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

定义外部品质因数 Qe 满足 $\dfrac{R_i}{\omega_0 L}=\dfrac{1}{Q_{ei}} \quad \text{for } i=1,n$

定义耦合系数 $M_{ij}=\dfrac{L_{ij}}{L}$

对于窄带滤波器有 $\omega/\omega_0\approx 1$

归一化阻抗矩阵可改写为：

$$[\bar{Z}]=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{q_{e1}}+p & -jm_{12} & \cdots & -jm_{1n} \\ -jm_{21} & p & \cdots & -jm_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -jm_{n1} & -jm_{n2} & \cdots & \dfrac{1}{q_{en}}+p \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad q_{ei}=Q_{ei}\cdot FBW \quad \text{for } i=1,n, \quad m_{ij}=\frac{M_{ij}}{FBW}$$

(8.7) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

以上滤波器电路模型可看作双端口网络

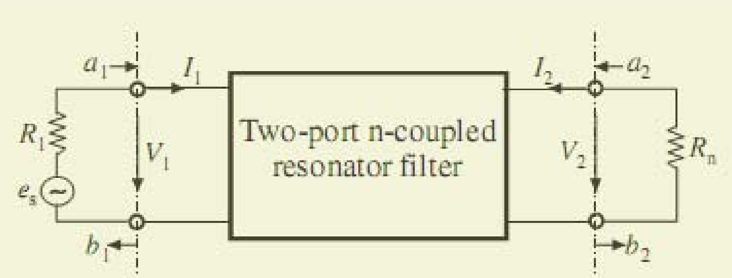


FIGURE 8.1 in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

根据“双端口网络参数及其相互转换”一节的讨论，有

$$a_1 = \frac{e_s}{2\sqrt{R_1}} \qquad b_1 = \frac{e_s - 2i_1R_1}{2\sqrt{R_1}}$$

$$a_2 = 0 \qquad b_2 = i_n\sqrt{R_n}$$

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{2\sqrt{R_1R_n}i_n}{e_s}$$

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = 1 - \frac{2R_1i_1}{e_s}$$

(8.10) (8.11) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

由[Z]・[i] = [e]，得

$$i_1 = \frac{e_s}{\omega_0 L\cdot FBW}[\bar{Z}]_{11}^{-1}$$

$$i_n = \frac{e_s}{\omega_0 L\cdot FBW}[\bar{Z}]_{n1}^{-1}$$

(8.12) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

散射矩阵有如下表示方法

$$S_{21} = \frac{2\sqrt{R_1R_n}}{\omega_0 L\cdot FBW}[\bar{Z}]_{n1}^{-1} \qquad S_{21} = 2\frac{1}{\sqrt{q_{e1}\cdot q_{en}}}[\bar{Z}]_{n1}^{-1}$$

$$S_{11} = 1 - \frac{2R_1}{\omega_0 L\cdot FBW}[\bar{Z}]_{11}^{-1} \qquad S_{11} = 1 - \frac{2}{q_{e1}}[\bar{Z}]_{11}^{-1}$$

(8.12) (8.13) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

上述分析方法对非异步调谐亦适用。

所谓异步调谐，意思是各谐振器的谐振频率 $\omega_{0i} = 1/\sqrt{L_iC_i}$ 可以不等于滤波器中心频率 ω_0，这等于增加了优化的输入变量(即自耦合系数)，能更充分地挖掘滤波器的潜力。

这时归一化阻抗矩阵表示为：

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_{e1}} + p - jm_{11} & -jm_{12} & \cdots & -jm_{1n} \\ -jm_{21} & p - jm_{22} & \cdots & -jm_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -jm_{n1} & -jm_{n2} & \cdots & \frac{1}{q_{en}} + p - jm_{nn} \end{bmatrix}$$

with $M_{ij} = \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_i L_j}}$ $\quad jm_{ii} = j\frac{1}{FBW}[(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}) - (\frac{\omega}{\omega_{0i}} - \frac{\omega_{0i}}{\omega})]$

(8.15) in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

§用广义切比雪夫函数综合网络传输零点

==

Ref. Richard J. Cameron

"General Coupling Matrix Synthesis Methods for Chebyshev Filtering Functions"

满足广义切比雪夫特性的网络参数(S11,S21,Cn)相互关系

定义网络传输函数 $S21(s)$，反射系数 $S11(s)$，特征函数 $C_N(s)$，三者满足：

$$C_N(\omega)=\frac{S11(\omega)}{S21(\omega)} \qquad \text{-----①}$$

$$S_{21}^2(\omega)=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\omega)} \qquad \text{----②}$$

双端口无损网络能量守恒 $S_{11}^2+S_{21}^2=1$ ----③

由①②③看出，3 种网络参数都可以表示成 2 个多项式的比值。

$$S_{11}(\omega)=\frac{F_N(\omega)}{E_N(\omega)} \quad S_{21}(\omega)=\frac{P_N(\omega)}{\varepsilon E_N(\omega)} \quad C_N(\omega)=\frac{F_N(\omega)}{P_N(\omega)}.$$

其中 $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{10^{RL/10}-1}}\cdot\left.\frac{P_N(\omega)}{F_N(\omega)}\right|_{\omega=1}$

特征函数应具有 N 阶切比雪夫特性：$|\omega|=1$ 时 $C_N=1$，$|\omega|<1$ 时 $C_N\le 1$，$|\omega|>1$ 时 $C_N>1$

令 $C_N(\omega)=\cosh\left[\sum_{n=1}^{N}\cosh^{-1}(x_n)\right]$ 其中 $x_n=\frac{\omega-1/\omega_n}{1-\omega/\omega_n}$ (归一化的传输零点)

不难看出，$C_N(\omega)$ 符合切比雪夫多项式特性。

下面求 $E_N(\omega)$ $F_N(\omega)$ $P_N(\omega)$ 这 3 个多项式的系数，对应传输函数和反射系数的零极点

由③看出 $E(s)E(-s)=F(s)F(-s)+\frac{P(s)P(-s)}{\varepsilon^2}$

传输零点(ω n) → S11,S21,Cn 表达式

首先求 $F_N(\omega)$ 和 $P_N(\omega)$ 的表达式，即将 $C_N(\omega)$ 分解成两分式比值。

>>>

$$C_N(\omega) = \cosh\left[\sum_{n=1}^{N} \cosh^{-1}(x_n)\right]$$

>>>

$$C_N(\omega) = \cosh\left[\sum_{n=1}^{N} \ln(a_n + b_n)\right]$$ 其中 $a_n = x_n$ and $b_n = (x_n^2 - 1)^{1/2}$

>>>

$$\begin{aligned} &C_N(\omega) \\ &= \frac{1}{2}\left[\exp\left(\sum \ln(a_n+b_n)\right) + \exp\left(-\sum \ln(a_n+b_n)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\prod_{n=1}^{N}(a_n+b_n) + \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(a_n+b_n)}\right]. \end{aligned} \qquad (5)$$

>>>

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2}\left[\prod_{n=1}^{N}(a_n+b_n) + \prod_{n=1}^{N}(a_n-b_n)\right]$$

>>>

$$C_N(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{\prod_{n=1}^{N}(c_n+d_n) + \prod_{n=1}^{N}(c_n-d_n)}{\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\omega}{\omega_n}\right)}\right]$$ 其中 $$\begin{aligned} c_n &= \omega - \frac{1}{\omega_n} \\ d_n &= \omega'\left(1-\frac{1}{\omega_n^2}\right)^{1/2} \\ \omega' &= (\omega^2-1)^{1/2} \end{aligned}$$

>>>显然，$C_N(\omega)$ 的分母由传输零点 ω_n 组成，下面将 $C_N(\omega)$ 的分子单独提出来分析

$$\mathrm{Num}[C_N(\omega)] = F_N(\omega) = \frac{1}{2}\left[G_N(\omega) + G'_N(\omega)\right]$$

其中 $$G_N(\omega) = \prod_{n=1}^{N}[c_n+d_n] = \prod_{n=1}^{N}\left[\left(\omega-\frac{1}{\omega_n}\right)+\omega'\left(1-\frac{1}{\omega_n^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$G'_N(\omega) = \prod_{n=1}^{N}[c_n - d_n] = \prod_{n=1}^{N}\left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_n}\right) - \omega'\left(1 - \frac{1}{\omega_n^2}\right)^{1/2}\right]$$

>>>用迭代的方法分析 $G_N(\omega)$

$$\begin{aligned} G_1(\omega) &= [c_1 + d_1] \\ &= \left(\omega - \frac{1}{\omega_1}\right) + \omega'\left(1 - \frac{1}{\omega_1^2}\right)^{1/2} \\ &= U_1(\omega) + V_1(\omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(\omega) &= G_1(\omega) \cdot [c_2 + d_2] \\ &= [U_1(\omega) + V_1(\omega)]\left[\left(\omega - \frac{1}{\omega_2}\right) + \omega'\left(1 - \frac{1}{\omega_2^2}\right)^{1/2}\right] \\ &= [U_2(\omega) + V_2(\omega)]. \end{aligned} \tag{13}$$

得到迭代关系：

$$U_2(\omega) = \omega U_1(\omega) - \frac{U_1(\omega)}{\omega_2} + \left(1 - \frac{1}{\omega_2^2}\right)^{1/2} \omega' V_1(\omega)$$

$$V_2(\omega) = \omega V_1(\omega) - \frac{V_1(\omega)}{\omega_2} + \left(1 - \frac{1}{\omega_2^2}\right)^{1/2} \omega' U_1(\omega).$$

总共进行 N-1 次迭代（包括所有无限零点），最终

$$G_N(\omega) = U_N(\omega) + V_N(\omega)$$

>>>

同理，分析 $G'_N(\omega) = U'_N(\omega) + V'_N(\omega)$

会发现 $U'_N(\omega) = U_N(\omega)$ $\quad\quad V'_N(\omega) = -V_N(\omega)$

所以，$\mathrm{Num}[C_N(\omega)] = U_N(\omega)$

至此，$C_N(\omega) = \dfrac{F_N(\omega)}{P_N(\omega)}.$ 各项系数已确定，根据 $E(s)E(-s) = F(s)F(-s) + \dfrac{P(s)P(-s)}{\varepsilon^2}$

可得到 $E(s)$ 表达式，最终得到：

$$S_{11}(\omega) = \frac{F_N(\omega)}{E_N(\omega)} \quad S_{21}(\omega) = \frac{P_N(\omega)}{\varepsilon E_N(\omega)} \quad C_N(\omega) = \frac{F_N(\omega)}{P_N(\omega)}.$$

§从网络特征函数导出短路导纳参数

Ref. Richard J. Cameron

"General Coupling Matrix Synthesis Methods for Chebyshev Filtering Functions"

==

由"双端口网络参数及其相互转换"的结论：

$$Z_{11}(s)=\frac{1-S_{11}(s)}{1+S_{11}(s)}Z_{01} \qquad Z_{11}(s)=\frac{z_{11}\left(\frac{1}{y_{22}}+Z_{02}\right)}{z_{22}+Z_{02}}$$

将 Z_{01} 归一化为 1，并将上面求得的 $S_{11}(s)$ 的解析式代入

$$Z_{11}(s)=\frac{1-S_{11}(s)}{1+S_{11}(s)}=\frac{E(s)\pm F(s)}{E(s)\mp F(s)}=\frac{m_1+n_1}{m_2+n_2}$$ 其中 m、n 分别为偶、奇次多项式

求偶、奇次多项式：

$$m_1+n_1=\text{numerator of}\, Z_{11}(s)=E(s)+F(s)$$

$$m_1=\mathrm{Re}(e_o+f_o)+\mathrm{Im}(e_1+f_1)s+\mathrm{Re}(e_2+f_2)s^2+\cdots$$
$$n_1=\mathrm{Im}(e_o+f_o)+\mathrm{Re}(e_1+f_1)s+\mathrm{Im}(e_2+f_2)s^2+\cdots$$

e_i 和 f_i 分别是 E(s)和 F(s)的实系数，因此 m1 的奇次项系数为 0，n1 的偶次项系数为 0

在偶阶情况下，n1 阶数小于 m1，将 n1 提出

$$Z_{11}(s)=\frac{n_1[m_1/n_1+1]}{m_2+n_2}. \qquad \Rightarrow \qquad y_{22}=n_1/m_1$$

由于 y_{21} 和 y_{22} 的分母相同， y_{21} 分子和 $S_{21}(s)$ 有相同的传输零点，得： $y_{21}=P(s)/\varepsilon m_1.$

同理，在奇阶情况下

$$y_{22}=m_1/n_1 \qquad y_{21}=P(s)/\varepsilon n_1$$

§从短路导纳参数提取耦合矩阵

Ref.　Richard J. Cameron

“General Coupling Matrix Synthesis Methods for Chebyshev Filtering Functions”

==

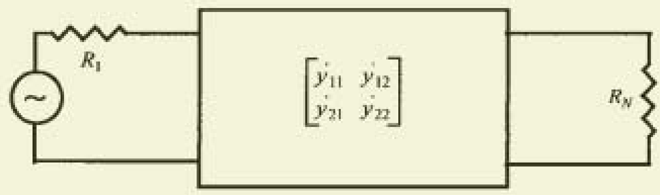


FIGURE 2(a) in "General Coupling Matrix Synthesis Methods..."

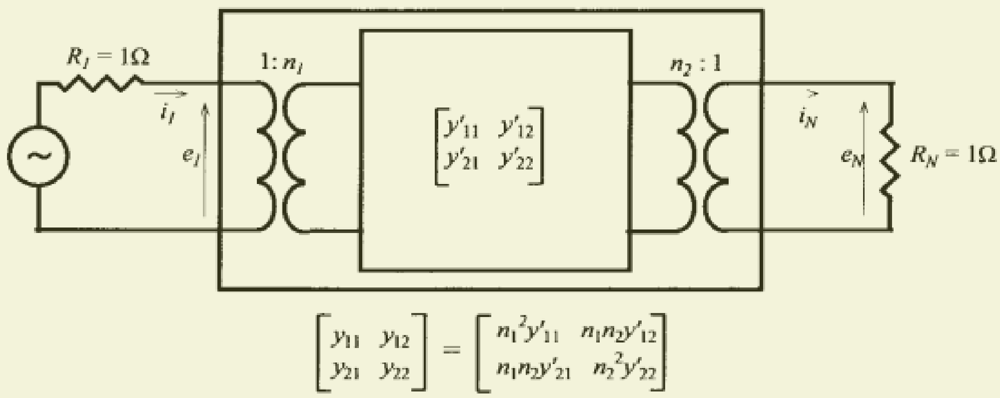


FIGURE 2(b) in "General Coupling Matrix Synthesis Methods..."

将 N 阶交叉耦合滤波器器视为一个二端口网络（上上图），并对源阻抗和负载进行归一化（上图），得到系统导纳矩阵：

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_N \end{bmatrix}$$

“交叉耦合网络模型”一节中讨论过 N 阶谐振网络的环路方程组

$$[j\mathbf{M} + s\mathbf{I} + \mathbf{R}] \cdot [i_1, i_2, i_3, \cdots, i_N]^t = e_1[1, 0, 0, \cdots, 0]^t$$

计算该双端口网络的短路导纳参数

$$y_{21}(s) = \left.\frac{i_N}{e_1}\right|_{R_1, R_N=0} = j[-\mathbf{M} - \omega\mathbf{I}]_{N1}^{-1}$$

$$y_{22}(s) = \left.\frac{i_N}{e_N}\right|_{R_1, R_N=0} = j[-\mathbf{M} - \omega\mathbf{I}]_{NN}^{-1}$$

由于 M 是实对称矩阵，有以下结论：

1.　M 的特征值均为实数，

2. 对应于两个不同的特征值的两个特征向量是正交的

存在 N×N 阶正交矩阵 T，满足

$-M = T \cdot \Lambda \cdot T^t$ 其中 $\Lambda = diag\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_N\right]$，$\lambda_i$ 是-M 的特征值，且 $T \cdot T^t = I$

代入上式：

$$y_{21}(s) = j\left[\mathbf{T} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{T}^t - \omega\,\mathbf{I}\right]^{-1}_{N1}$$

$$y_{22}(s) = j\left[\mathbf{T} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{T}^t - \omega\,\mathbf{I}\right]^{-1}_{NN}$$

等式右边可化为

$$\left[\mathbf{T} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{T}^t - \omega\,\mathbf{I}\right]^{-1}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_{ik} T_{jk}}{\omega - \lambda_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, N$$

即

$$y_{21}(s) = j \sum_{k=1}^{N} \frac{T_{Nk} T_{1k}}{\omega - \lambda_k}$$

$$y_{22}(s) = j \sum_{k=1}^{N} \frac{T_{Nk}^2}{\omega - \lambda_k}$$

将前面求得的 $y_{21}(s)$ 和 $y_{22}(s)$ 的表达式代入，即可求出 T 的第一行和最后一行

$$T_{Nk} = \sqrt{r_{22k}} \qquad T_{1k} = \frac{r_{21k}}{T_{Nk}} = \frac{r_{21k}}{\sqrt{r_{22k}}}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots, N$$

其中 r_{22k}，r_{21k} 分别是 $y_{22}(s)$ 和 $y_{21}(s)$ 各个特征根的留数。

还可求出 $\Lambda = diag\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_N\right]$

构造一组满秩基 rank(T)=N

$$\left[T\right] = \begin{bmatrix} T_{1k} & T_{2k} & \cdots & T_{1,N-1} & T_{1N} \\ * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * \\ T_{Nk} & T_{Nk} & \cdots & T_{N,N-1} & T_{NN} \end{bmatrix}$$

保持 T 的首尾行不变！对这组基进行正交变换，就能得到一组标准正交基，即正交矩阵 T。

最后由 $-M = T \cdot \Lambda \cdot T^t$ 求出耦合矩阵。

以上求解的是源阻抗和负载归一化后的耦合矩阵，去归一化的方法为：

$$n_1^2 = R_1 = \sum_{k=1}^{N} T_{1k}^2 \quad n_2^2 = R_N = \sum_{k=1}^{N} T_{Nk}^2$$

$$T'_{1k} = T_{1k}/n_1 \qquad T'_{Nk} = T_{Nk}/n_2$$

§散射矩阵的幺正性

==

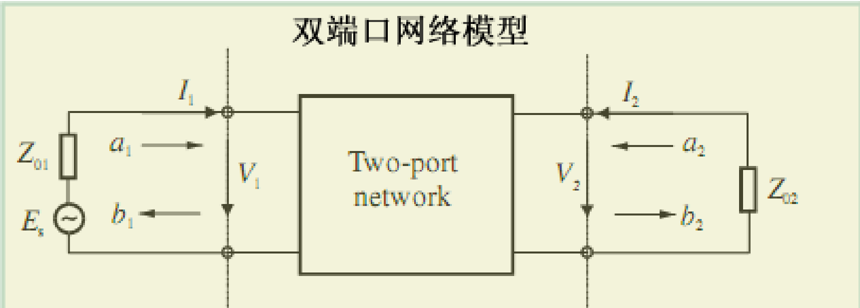


FIGURE 2.1 in "Microstrip Filters for RF/Microwave Applications"

分析双端口无耗互易网络散射矩阵的幺正性 → S11,S21 相位之间的关系

Ref. 吴万春 梁昌洪 《微波网络及其应用》 第一章

在微波传输线中，横向电场和磁场是决定功率沿轴向传输的量，通常用他们来定义线上的电压和电流，即传输线上的电压与其横向电场成比例，电流与其横向磁场成比例，可以把横向电场和磁场写为

$$\begin{cases} E_t = V(z)e_t(u,v) \\ H_t = I(z)h_t(u,v) \end{cases}$$

式中 $e_t(u,v)$ 和 $h_t(u,v)$ 是代表电场和磁场横截面分布的矢量，$V(z)$ 和 $I(z)$ 是标量，代表横向电场和磁场沿轴向传输情况，按照波印廷定理

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_s E_t \times H_t^* \cdot i_z ds = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V(z)I^*(z)\right]\int_s e_t \times h_t \cdot i_z ds$$

归一化，令 $\int_s e_t \times h_t \cdot i_z ds = 1$ 则传输功率是 $P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[VI^*\right]$

对于多模传输线 $P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_n V_n(z)I_n^*(z)$

以上推论为下面做准备。

研究单端口网络负载特性时，我们用一个封闭曲面 S 把负载包围起来。封闭曲面内无源，麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \times E = -j\omega\mu H \\ \nabla \times H = J + j\omega\varepsilon E = \delta E + j\omega\varepsilon E \end{cases}$$

由 $\oint_S E \times H^* \cdot ds = \int_{s'} E_t \times H_t^* \cdot i_z ds = -\sum_{i=1}^{n} V_i I_i^*$ 其中 s' 是输入端口面积

且 $\oint_S E \times H^* \cdot ds = \int_v \nabla \cdot \left(E \times H^*\right) dv = -\int_v \left(H^* \cdot \nabla \times E - E \cdot \nabla \times H^*\right)$ 将麦氏方程组代入

$$= -j\omega\left[\int_v \mu |H|^2 dv - \int_v \varepsilon |E|^2 dv\right] - \int_v \delta |E|^2 dv$$

第一项是平均磁场能量W_H，第二项是平均电场能量W_E，最后一项是消耗功率P，得出：

$$\sum_{i=1}^{n} V_i I_i^* = j\omega\left(4W_H - 4W_E\right) + 2P$$

对于无耗双端口网络 $i^+ v = j\omega\left(4W_H - 4W_E\right)$

而 $\begin{cases} v = a + b = \left([I] + [s]\right)a \\ i = a - b = \left([I] - [s]\right)a \end{cases}$ 代入上式

$$i^+ v = a^+\left([I] + [s]^+\right)\left([I] - [s]\right)a = a^+\left([I] - [s]^+[s]\right)a + a^+\left([s]^+ - [s]\right)a = j\omega\left(4W_H - 4W_E\right)$$

式中$\left([I] - [s]^+[s]\right)$是实数矩阵，故$a^+\left([I] - [s]^+[s]\right)a$是实数，要使上式成立，必须

$$[s]^+[s] = [I] \quad \text{称为无耗对称性（幺正性）}$$

即

$$\begin{bmatrix} s_{11}^* & s_{21}^* \\ s_{12}^* & s_{22}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得无耗双端口网络方程组

$$\begin{cases} |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \\ |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1 \\ s_{11}^* s_{12} + s_{21}^* s_{22} = 1 \\ s_{12}^* s_{11} + s_{21} s_{22}^* = 1 \end{cases}$$

对于互易网络 $s_{12} = s_{21}$ 后两式合并

$$\begin{cases} |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \\ |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1 \\ s_{11}^* s_{21} + s_{21}^* s_{22} = 1 \end{cases}$$

令 $s_{21} = |s_{21}| e^{j\phi}$ $s_{11} = |s_{11}| e^{j\theta_1}$ $s_{22} = |s_{22}| e^{j\theta_2}$

代入上面第 3 个式子，得 $e^{j(\phi - \theta_1)} + e^{j(\theta_2 - \phi)} = 0$

等价于 $\left(\phi - \theta_1\right) = \pi + \left(\theta_2 - \phi\right)$ 即 $\phi - \dfrac{1}{2}\left(\theta_1 + \theta_2\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(2k \pm 1\right)$

§ 包含源-负载的交叉耦合滤波器

==

n阶包含源-负载耦合的交叉耦合滤波器等效电路模型

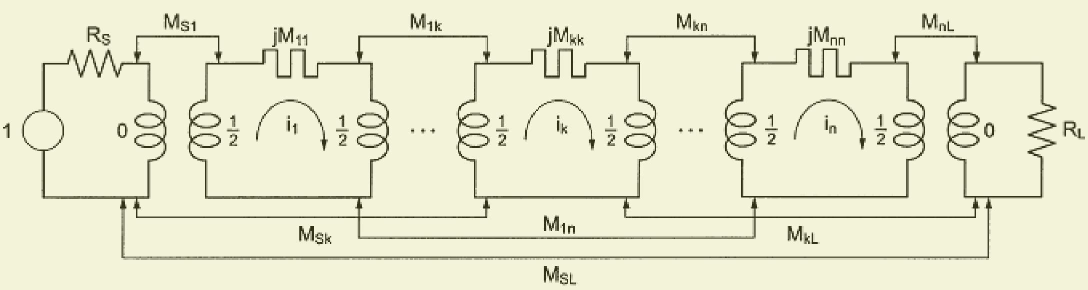


FIGURE 2 in "Efficient Electromagnetic Optimization of Microwave Filters and Multiplexers Using Rational Models"

☆ (N+2)阶耦合矩阵 → S 参数

☆ 设计指标 → S21,S11 表达式 → 短路导纳参数 → (N+2)阶耦合矩阵

Ref. Richard J. Cameron

“Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters”

在这种结构中，源和负载跟 N 个谐振器之间都能产生耦合，最多能产生 N 个有限传输零点，其(N+2)×(N+2)阶耦合矩阵如下

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}
0 & M_{S1} & M_{S2} & \cdots & M_{Sn} & M_{SL} \\
M_{S1} & M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} & M_{1L} \\
M_{S2} & M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{2n} & M_{2L} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
M_{Sn} & M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn} & M_{nL} \\
M_{SL} & M_{1L} & M_{2L} & \cdots & M_{nL} & 0
\end{bmatrix}
$$

(21) in "Efficient Electromagnetic Optimization of Microwave Filters and Multiplexers Using Rational Models"

回路方程组

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_1 & jM_{S1} & jM_{S2} & \cdot\ \cdot & jM_{SN} & jM_{SL} \\
jM_{S1} & s & jM_{12} & \cdot\ \cdot & jM_{1N} & jM_{1L} \\
jM_{S2} & jM_{12} & s & \cdot\ \cdot & jM_{2N} & jM_{2L} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\
jM_{SN} & jM_{1N} & \cdot & \cdot\ \cdot & s & jM_{NL} \\
jM_{SL} & jM_{1L} & \cdot & \cdot\ \cdot & jM_{NL} & R_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_S \\ i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ i_N \\ i_L \end{bmatrix}
$$

(4-2a) in "源-负载耦合交叉耦合滤波器的综合与设计"

写成矩阵方程

$$E = Z \cdot I = \left(sU_0 + jM + R\right) I$$

其中，U_0 是将 N+2 阶单位矩阵中的第一个元素和最后一个元素设为 0，其余元素不变；M 是 N+2 阶耦合矩阵，R 是 N+2 阶方阵，除左上角和右下角元素分别为 R1,R2 外，其余元素为 0。

由“交叉耦合网络模型”的结论：

$$S_{21} = -2j\sqrt{R_1R_2}\left[Z^{-1}\right]_{N1}$$

$$S_{11} = 1 + 2jR_1\left[Z^{-1}\right]_{11}$$

这里

类似“用广义切比雪夫函数综合网络传输零点”的讨论，求出 *F(s), P(s), E(s)*的表达式。由于引入源-负载耦合后，可以实现 S21 有限零点个数 nfz=N，分两种情况来考虑：

① nfz <N

同前 $S_{11}(\omega) = \dfrac{F_N(\omega)}{E_N(\omega)} \quad S_{21}(\omega) = \dfrac{P_N(\omega)}{\varepsilon E_N(\omega)}$

② nfz =N

对波纹系数作出修正（原因不详） $S_{21}(s) = \dfrac{P(s)}{\varepsilon E(s)} \quad S_{11}(s) = \dfrac{F(s)}{\varepsilon_R E(s)}$

其中，$\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$

然后考虑 S 参数矩阵的幺正性，即满足 $\phi - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\pi}{2}(2k \pm 1)$，其中 3 个符号分别代表 S21, S11, S22 的相角。

由于 S21, S11, S22 的分母相同，仅考虑它们的分子：S11, S22 分子多项式都有 N 个纯虚数零点，两者相位之和$(\theta_1 + \theta_2) = 2N \cdot \frac{\pi}{2} = N\pi$。S21 分子多项式的有限零点要么在复平面的虚轴上，要么关于虚轴对称分布，那么总有$\phi = nfz \cdot \frac{\pi}{2}$。代入幺正性的表达式，得出：

$$(N - nfz) = 2k \pm 1$$

说明滤波器阶数与有限零点个数的差必须为奇数。

如果不满足这个条件，就给上面求出的 S21 多项式的分子乘以虚数 i，使其相位增加$\frac{\pi}{2}$

接着，按“从网络特征函数导出短路导纳参数”，求出短路导纳系数 $y_{21}(s)$ $y_{22}(s)$

显示表达：

$$
\begin{aligned}
[Y_N] &= \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{y_d(s)} \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix} \\
&= j\begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(s-j\lambda_k)} \cdot \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(6) in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

$y(s)$由分母$y_d(s)$和分子$y_n(s)$构成，进而写成特征根λ_k和留数r_k的表达式。

当 nfz <N 时，提取项$K_0 = 0$

当 nfz =N 时，$y_{21}(s)$分子分母的阶数相等，同为 N 阶，需提出一个常数项K_0以降低分子阶数，方可得到其留数。提取K_0的方法：

$$
jK_0 = \left.\frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)}\right|_{s=j\infty} = \left.\frac{jP(s)/\varepsilon}{y_d(s)}\right|_{s=j\infty}
$$

当 nfz =N 时，对带内波纹进行修正，引入ε_R，使得$y_d(s)$最高项系数为$(1+1/\varepsilon_R)$，将其归一化，系数归入K_0，得到：

$$
K_0 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(1+1/\varepsilon_R)} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(\varepsilon_R+1)}
$$

于是，$y'_{21n}(s) = y_{21n}(s) - jK_0 y_d(s)$，其分子为 N-1 阶，可求出留数。

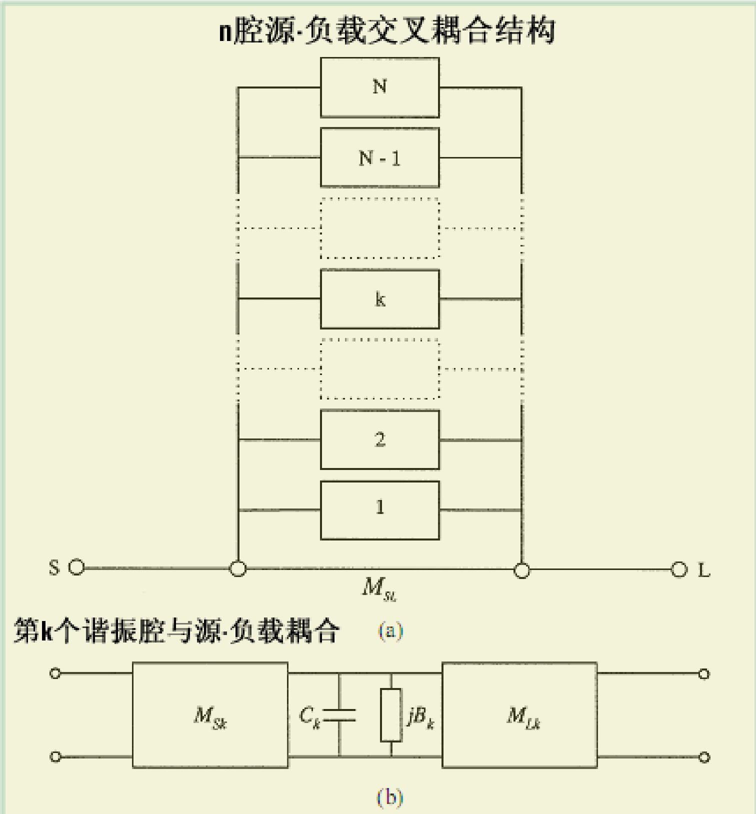


Fig.1 in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

包含源-负载耦合的 N 腔交叉耦合结构，可以看作源、负载分别和每个谐振器耦合形成的耦合单元的并联(图 a)，第 k 个耦合单元的等效电路如图 b。耦合单元的转移[A]矩阵为：

$$[ABCD]_k = -\begin{bmatrix} \dfrac{M_{Lk}}{M_{Sk}} & \dfrac{(sC_k + jB_k)}{M_{Sk}M_{Lk}} \\ 0 & \dfrac{M_{Sk}}{M_{Lk}} \end{bmatrix}$$

(12) in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

转换为导纳[Y]矩阵

$$\begin{aligned}[y_k] &= \begin{bmatrix} y_{11k}(s) & y_{12k}(s) \\ y_{21k}(s) & y_{22k}(s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{M_{Sk}M_{Lk}}{(sC_k + jB_k)} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{M_{Sk}}{M_{Lk}} & 1 \\ 1 & \dfrac{M_{Lk}}{M_{Sk}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(sC_k + jB_k)} \cdot \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk}M_{Lk} \\ M_{Sk}M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(13) in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

整个网络的短路导纳矩阵为各单元的导纳矩阵之和，并与之前求出的[Y]矩阵对比

$$[Y_N]=\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix}$$
$$=[y_{SL}]+\sum_{k=1}^{N}\begin{bmatrix} y_{11k}(s) & y_{12k}(s) \\ y_{21k}(s) & y_{22k}(s) \end{bmatrix}$$
$$=j\begin{bmatrix} 0 & M_{SL} \\ M_{SL} & 0 \end{bmatrix}+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(sC_k+jB_k)}$$
$$\cdot\begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk}M_{Lk} \\ M_{Sk}M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix}.$$

(14) in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

$$[Y_N]=\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{y_d(s)}\begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix}$$
$$=j\begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix}+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(s-j\lambda_k)}\cdot\begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix}$$

(6) in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

可以看出：

$$M_{SL}=K_0 \quad C_k=1 \quad B_k(\equiv M_{kk})=-\lambda_k$$
$$M_{Lk}^2=r_{22k} \quad M_{Sk}M_{Lk}=r_{21k}$$
$$M_{Lk}=\sqrt{r_{22k}}=T_{Nk}$$
$$M_{Sk}=r_{21k}/\sqrt{r_{22k}}=T_{1k}$$

(16) in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

至此，综合得到 fully canonical transversal network 形式的耦合矩阵(下图)，对应上面的”n 腔源-负载交叉耦合结构”图，包含 N 个谐振腔的自耦合，源、负载与各个谐振腔的耦合，源-负载之间的直接耦合。类似“从短路导纳参数提取耦合矩阵”的讨论，有：

$$n_1^2=R_1=\sum_{k=1}^{N}T_{1k}^2 \quad n_2^2=R_N=\sum_{k=1}^{N}T_{Nk}^2$$

经过线性变换，可以构造各种形式的耦合结构。

	S	1	2	3	..	k	..	N-1	N	L
S		M_{S1}	M_{S2}	M_{S3}	..	M_{Sk}	..	$M_{S,N-1}$	M_{SN}	M_{SL}
1	M_{1S}	M_{11}								M_{1L}
2	M_{2S}		M_{22}							M_{2L}
3	M_{3S}			M_{33}						M_{3L}
:	:				$\ddots$					:
k	M_{kS}					M_{kk}				M_{kL}
:	:						$\ddots$			:
N-1	$M_{N-1,S}$							$M_{N-1,N-1}$		$M_{N-1,L}$
N	M_{NS}								M_{NN}	M_{NL}
L	M_{LS}	M_{L1}	M_{L2}	M_{L3}	..	M_{Lk}	..	$M_{L,N-1}$	M_{LN}	

Fig.2 in "Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

§相关 Matlab 程序

==

Ref.　Richard J. Cameron

"General Coupling Matrix Synthesis Methods for Chebyshev Filtering Functions"

"Advanced Coupling Matrix Synthesis Techniques for Microwave Filters"

Smain Amari

"Synthesis of Cross-Coupled Resonator Filters Using an Analytical Gradient-Based Optimization Technique"

☆ (N×N)耦合矩阵

滤波器参数

```
ftz = [1.5000j 2.1000j];                    %零点位置
RL = 24;                                    %带内波纹电平
N = 6;                                      %滤波器阶数
```

迭代法求 $C_N(s)$ 的分子多项式 $F_N(s)$ $E_N(s)$ $P_N(s)$

```
syms w;                                     %符号表达式
ftz = ftz/j;                                %转换成实频率
nz = length(ftz);
U = w-1/ftz(1);                             %U 初值
V = ((w^2-1)^0.5)*(1-1/(ftz(1)^2))^0.5;     %V 初值
for k=2:1:N                                 %N 阶，N 次迭代
    PreU = U;
    PreV = V;
    if k>nz                                 %无限零点
        U = CalU(inf, PreU, PreV);
        V = CalV(inf, PreU, PreV);
    else                                    %有限零点
        U = CalU(ftz(k), PreU, PreV);
        V = CalV(ftz(k), PreU, PreV);
    end
end
```

```
function U2 = CalU(w2, U1, V1)
syms w;
U2 = w*U1-U1/w2+((1-1/w2^2)^0.5)*((w^2-1)^0.5)*V1;
```

```
function V2 = CalV(w2, U1, V1)
syms w;
V2 = w*V1-V1/w2+((1-1/w2^2)^0.5)*((w^2-1)^0.5)*U1;
```

```
F = sym2poly(U);                              %最后一个 U(w)即为 F(w)
frz = roots(F);                               %带内反射零点
P = poly(ftz);                                %P(w)，实频率!!
F = poly(frz);                                %F(w)，实频率!!最高项系数为 1
rip = 1./sqrt(10^(0.1*RL)-1.0)*abs(polyval(P,1)/polyval(F,1));     %rip : ε
PP = conv(P,P);                               %P(w)P(-w)
FF = rip^2*conv(F,F);                         %F(w)F(-w)
EE = [zeros(1,length(FF)-length(PP)),PP]+FF;  %E(w)E(-w)
r = roots(EE);                                %共 2N 个解，共轭
r = r(find(imag(r)>0));                       %E(w)的根，实频率!!

E = poly(j*r);                                %E(s) 复频率!!
F = poly(j*frz);                              %F(s)
P = poly(j*ftz);                              %P(s)
```

考虑幺正性（见“散射矩阵的幺正性”）

```
if mod(N-nz,2)==0                             %如果(N-nz)是偶数
    P = j*P;                                  %P(s)增加 π/2 相位
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% E =
% [1.0000,   2.3492-0.6353i,   4.1100-1.5712i,   4.3700-2.7167i,   3.1427-2.8355i,   1.2631-1.8665i ]
% j*r =
% [-0.2309-1.1834i, -0.5800-0.7248i, -0.6660-0.0383i, -0.5126+0.5713i, -0.2777+0.9340i, -0.0820+1.0766i ]
% F =
% [ 1.0000, 0-0.6353i, 1.3507, 0-0.7788i, 0.4138, -0.1870i, 0.0129 ]
% j*frz =
% [ -0.9520i, -0.6024i, 0.9802i, 0.8137i, 0.4575i, -0.0616i ]
% P =
% [ 1.0000i, 3.6000, -3.1500i ]
% j*ftz =
% [ 1.5i, 2.1i ]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

求短路导纳参数 $y_{21}(s)$ $y_{22}(s)$ 的留数 r21, r22，进而得到 T 的首尾行

```
EF = E+F;
m1 = zeros(1,N+1);
n1 = zeros(1,N+1);
for k=N+1:-2:1
    n1(k) = j*imag(EF(k));
    m1(k) = real(EF(k));
end
for k=N:-2:1
    m1(k) = j*imag(EF(k));
    n1(k) = real(EF(k));
```

```
end
if mod(N,2)                                           %奇阶
    [r21,eigval,R] = residue(P/rip,n1);               %求 y21 的留数,特征值
    [r22,eigval,R] = residue(m1,n1);                  %求 y22 的留数,特征值
else                                                  %偶阶
    [r21,eigval,R] = residue(P/rip,m1);               %求 y21 的留数,特征值
    [r22,eigval,R] = residue(n1,m1);                  %求 y22 的留数,特征值
end
r21 = real(r21);
r22 = real(r22);
Tnk = sqrt(r22);                                      %T 的末行
T1k = r21./Tnk;                                       %T 的首行
R1 = sum(T1k.^2);                                     %源阻抗
RN = sum(Tnk.^2);                                     %负载阻抗
```

正交变换，求得正交矩阵 T → M

```
%构造一组线性无关向量---秩 rank(T)==N
T(1,:) = T1k/sqrt(R1);                                %首行，去归一化
T(2,:) = Tnk/sqrt(RN);                                %末行，去归一化
T(3,:) = [1 0 0 0 0 0];
T(4,:) = [0 0 1 0 0 0];
T(5,:) = [0 0 0 1 0 0];
T(6,:) = [0 0 0 0 1 0];

Tk = GramSchmidt(T);                                  %施密特标准正交变换

temp = Tk(N,:);                                       %还原首尾行
Tk(N,:) = Tk(2,:);
Tk(2,:) = temp;

M = -1*Tk*diag(imag(eigval))*inv(Tk);                 %耦合矩阵
```

```
function V = GramSchmidt(X)                           %施密特正交变换
[m,n] = size(X);
N = n;
V = zeros(N);
for k=1:N
    V(k,:) = X(k,:);
    for kk=k-1:-1:1
        V(k,:)=V(k,:)-dot(X(k,:),V(kk,:))/dot(V(kk,:),V(kk,:))*V(kk,:);
    end
    V(k,:)=V(k,:)/sqrt(dot(V(k,:),V(k,:)));           %标准化
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% r21 =
% [ 0.1499, -0.1057, 0.1782, -0.2902, -0.1914, 0.2592 ]
% r22 =
% [ 0.1499, 0.1057, 0.1782, 0.2902, 0.1914, 0.2592 ]
% T1k =
% [ 0.3871, -0.3251, 0.4222, -0.5387, -0.4375, 0.5091 ]
% Tnk =
% [ 0.3871, 0.3251, 0.4222, 0.5387, 0.4375, 0.5091 ]
% eigval =
% [ -1.3395i, 1.1983i, 1.1311i, -0.9472i, 0.6719i, -0.0792i ]
% R1 = RN = 1.1746
% T =
% [     0.3572    -0.3000     0.3896    -0.4971    -0.4036     0.4698
%          0     1.0000          0          0          0          0
%          0          0     1.0000          0          0          0
%          0          0          0     1.0000          0          0
%          0          0          0          0     1.0000          0
%     0.3572     0.3000     0.3896     0.4971     0.4036     0.4698   ]
% 不清楚何种正交变换能保持首尾行不变，所以这里不描述变换过程，直接给出变换后的正交矩阵
% Tk =
% [   0.3572    -0.3000     0.3896    -0.4971    -0.4036     0.4698
%     0         -0.8026          0          0     0.5965     0.0000
%     0.8630    -0.0000    -0.3224     0.0000     0.0000    -0.3888
%    -0.0000    -0.0000     0.7698     0.0000     0.0000    -0.6383
%          0    -0.4193          0     0.7112    -0.5642     0.0000
%     0.3572     0.3000     0.3896     0.4971     0.4036     0.4698 ]
% M =
% [   0.0335    -0.1268     0.5405    -0.3629    -0.6386          0
%    -0.1268    -1.0110          0          0    -0.1772     0.1268
%     0.5405          0     0.8921     0.3004          0     0.5405
%    -0.3629          0     0.3004    -0.6379          0    -0.3629
%    -0.6386    -0.1772          0          0     0.0545     0.6386
%          0     0.1268     0.5405    -0.3629     0.6386     0.0335   ]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

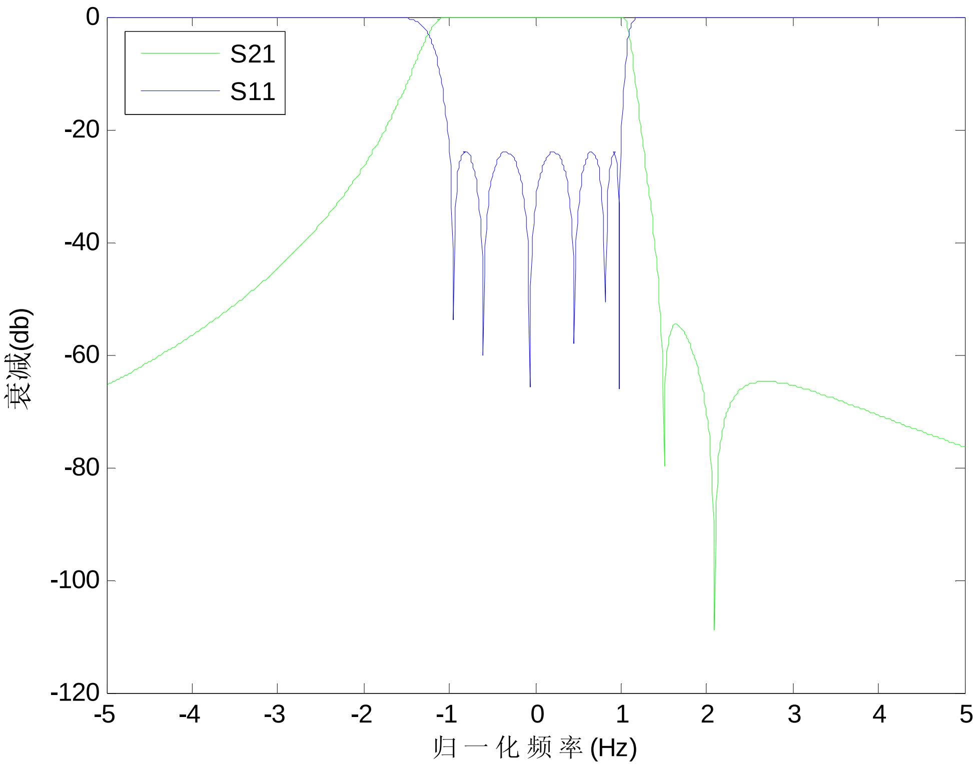
绘制该耦合矩阵对应的 S 曲线和群时延曲线(参考 Amari 的文献)

```
M = round(M*10000)/10000;                 %M 矩阵精度：4 位小数
w1 = -5;                                  %横坐标左区间
w2 = 5;                                   %横坐标右区间
dw = 0.01;                                %绘图精度
w = w1:dw:w2;                             %频率点
S21 = zeros(1, length(w));                %S21
S11 = zeros(1, length(w));                %S11
Tg = zeros(1, length(w));                 %群时延
```

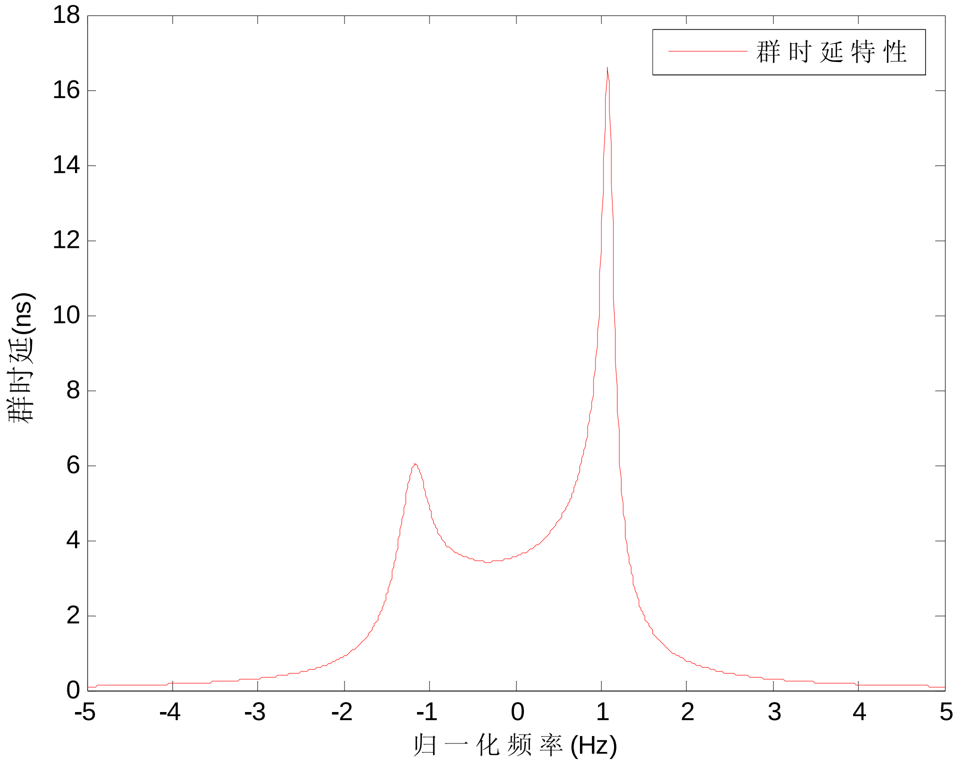
```
for k=1:1:length(w)                                      %构造阻抗矩阵 Z
    R=zeros(N);                                          %上面使用归一化的 R1,RN
    R(1,1)=R1;
    R(N,N)=RN;
    U = eye(N);
    Z = w(k)*U-j*R+M;                                        %阻抗矩阵
    Zt = inv(Z);                                         %取逆
    S21(k) = 20*log10(-2*j*sqrt(R1*RN)*Zt(N,1));               %S21 对数值
    S11(k) = 20*log10(1+2*j*R1*Zt(1,1));                       %S11 对数值
    for kk=1:N                                           %群时延
        Tg(k)=Tg(k)+(Zt(N,kk)*Zt(kk,1)/Zt(N,1));
    end
    Tg(k)=imag(Tg(k));
end

figure(1)                                                %绘图
grid on
plot(w,S21,'g',w,S11,'b');
legend('S21','S11',2);
xlabel('归一化频率(Hz)');
ylabel('衰减(db)')

figure(2)
grid on
plot(w,Tg,'r');
legend('群时延特性');
xlabel('归一化频率(Hz)');
ylabel('群时延(ns)')
```



0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
S21
S11
衰减(db)
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
归 一 化 频 率 (Hz)



18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
群 时 延 特 性
群时延(ns)
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
归 一 化 频 率 (Hz)

☆ (N+2)×(N+2)阶耦合矩阵

☆ 考虑极端情况：N 阶滤波器带 N 个有限零点（Cameron 2003 年文献的 Illustrative Example）

☆ 每一步的计算结果见 Cameron 2003 年文献 TABLE I II III

滤波器参数

```
ftz = [-3.7431j -1.8051j 1.5699j 6.1910j];      %零点位置
RL = 22;                                         %带内波纹电平
N = 4;                                           %滤波器阶数
```

迭代法求 $C_N(s)$ 的分子多项式 $F_N(s)$ $E_N(s)$ $P_N(s)$

```
syms w;                                          %符号表达式
ftz = ftz/j;                                     %转换成实频率
nz = length(ftz);
U = w-1/ftz(1);                                  %U 初值
V = ((w^2-1)^0.5)*(1-1/(ftz(1)^2))^0.5;          %V 初值
for k=2:1:N                                      %N 阶，N 次迭代
    PreU = U;
    PreV = V;
    if k>nz                                      %无限零点
        U = CalU(inf, PreU, PreV);
        V = CalV(inf, PreU, PreV);
    else                                         %有限零点
        U = CalU(ftz(k), PreU, PreV);
        V = CalV(ftz(k), PreU, PreV);
    end
end
```

```
function U2 = CalU(w2, U1, V1)
syms w;
U2 = w*U1-U1/w2+((1-1/w2^2)^0.5)*((w^2-1)^0.5)*V1;
```

```
function V2 = CalV(w2, U1, V1)
syms w;
V2 = w*V1-V1/w2+((1-1/w2^2)^0.5)*((w^2-1)^0.5)*U1;
```

```
F = sym2poly(U);                           %最后一个 U(w)即为 F(w)
frz = roots(F);                            %带内反射零点
P = poly(ftz);                             %P(w)，实频率!!
F = poly(frz);                             %F(w)，实频率!!最高项系数为 1
rip = 1./sqrt(10^(0.1*RL)-1.0)*abs(polyval(P,1)/polyval(F,1));      %rip : ε
PP = conv(P,P);                            %P(w)P(-w)
FF = rip^2*conv(F,F);                      %F(w)F(-w)
```

```
EE = [zeros(1,length(FF)-length(PP)),PP]+FF;   %E(w)E(-w)
r = roots(EE);                                 %共 2N 个解，共轭
r = r(find(imag(r)>0));                        %E(w)的根，实频率!!

E = poly(j*r);                                 %E(s) 复频率!!
F = poly(j*frz);                               %F(s)
P = poly(j*ftz);                               %P(s)
```

考虑幺正性（见“散射矩阵的幺正性”）

```
if mod(N-nz,2)==0                              %如果(N-nz)是偶数
    P = j*P;                                   %P(s)增加 π/2 相位
end
```

注：以上程序段与 N×N 阶耦合矩阵一致

求短路导纳参数 $y_{21}(s)$ $y_{22}(s)$ 的留数 r21, r22，进而得到 T 的首尾行

```
EF = E+F;
m1 = zeros(1,N+1);
n1 = zeros(1,N+1);
for k=N+1:-2:1
    n1(k) = j*imag(EF(k));
    m1(k) = real(EF(k));
end
for k=N:-2:1
    m1(k) = j*imag(EF(k));
    n1(k) = real(EF(k));
end
if nz==N                                       %修正波纹系数
    epr = rip/sqrt(rip^2-1);                   % epr : εR
    msl = epr/rip/(epr+1);                     % msl : K0
else
    epr = 1.0;
    msl = 0.0;
end
y21n = P/rip;
if mod(N,2)                                    %奇阶
    if nz==N                                   %N=nz，从 y21 分子提取常数项
        y21n = y21n - j*msl*n1;
    end
    [r21,eigval,R] = residue(y21n,n1);         %求 y21 的留数,特征值
    [r22,eigval,R] = residue(m1,n1);           %求 y22 的留数,特征值
else                                           %偶阶
    if nz==N
        y21n = y21n - j*msl*m1;
    end
    [r21,eigval,R] = residue(y21n,m1);         %求 y21 的留数,特征值
```

```
    [r22,eigval,R] = residue(n1,m1);                %求 y22 的留数,特征值
end
r21 = real(r21);
r22 = real(r22);
Tnk = sqrt(r22);                                    %T 的末行
T1k = r21./Tnk;                                     %T 的首行
R1 = sum(T1k.^2);                                   %源阻抗
RN = sum(Tnk.^2);                                   %负载阻抗
```

构造耦合矩阵，尚不清楚去归一化的方法，因此这里采用归一化的终端阻抗(R1=RN=1)

```
M = -diag([0;imag(eigval);0]);
M(1,2:N+1) = T1k.';
M(N+2,2:N+1) = Tnk.';
M(2:N+1,1) = T1k;
M(2:N+1,N+2) = Tnk;
M(1,N+2) = M(1,N+2)+msl;
M(N+2,1) = M(N+2,1)+msl;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% M =
%   [        0     0.3646    -0.3438     0.6681    -0.6540     0.0151
%       0.3646     1.3141          0          0          0     0.3639
%      -0.3438          0    -1.2967          0          0     0.3431
%       0.6681          0          0    -0.8041          0     0.6678
%      -0.6540          0          0          0     0.7830     0.6537
%       0.0151     0.3639     0.3431     0.6678     0.6537          0 ]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

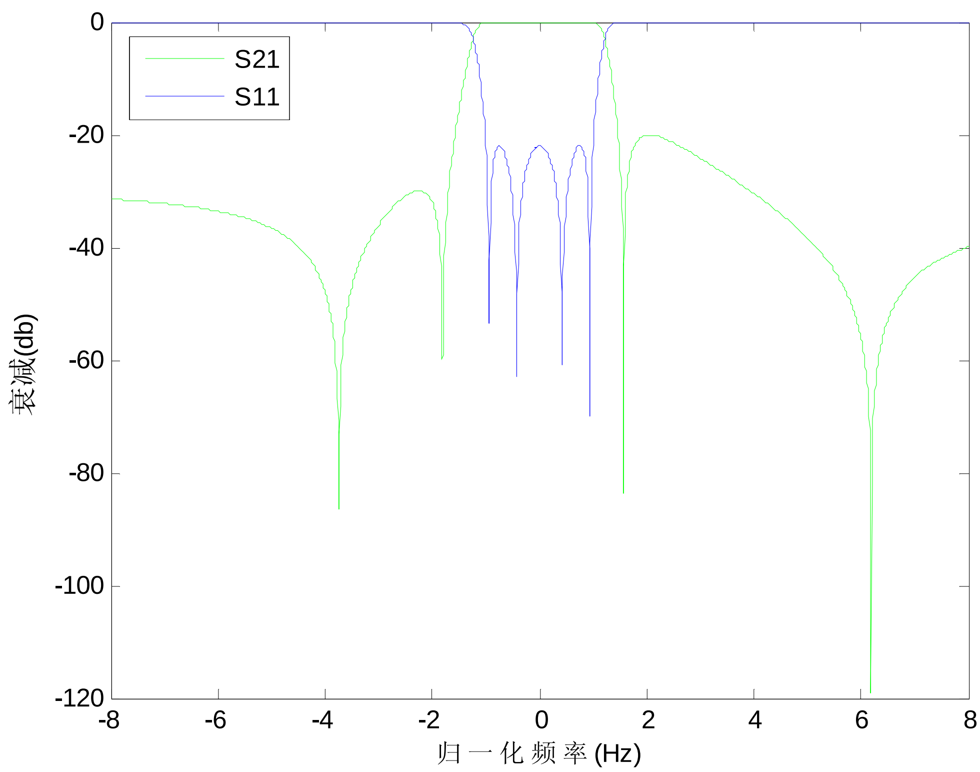
绘制该耦合矩阵对应的 S 曲线和群时延曲线(参考 Amari 的文献)

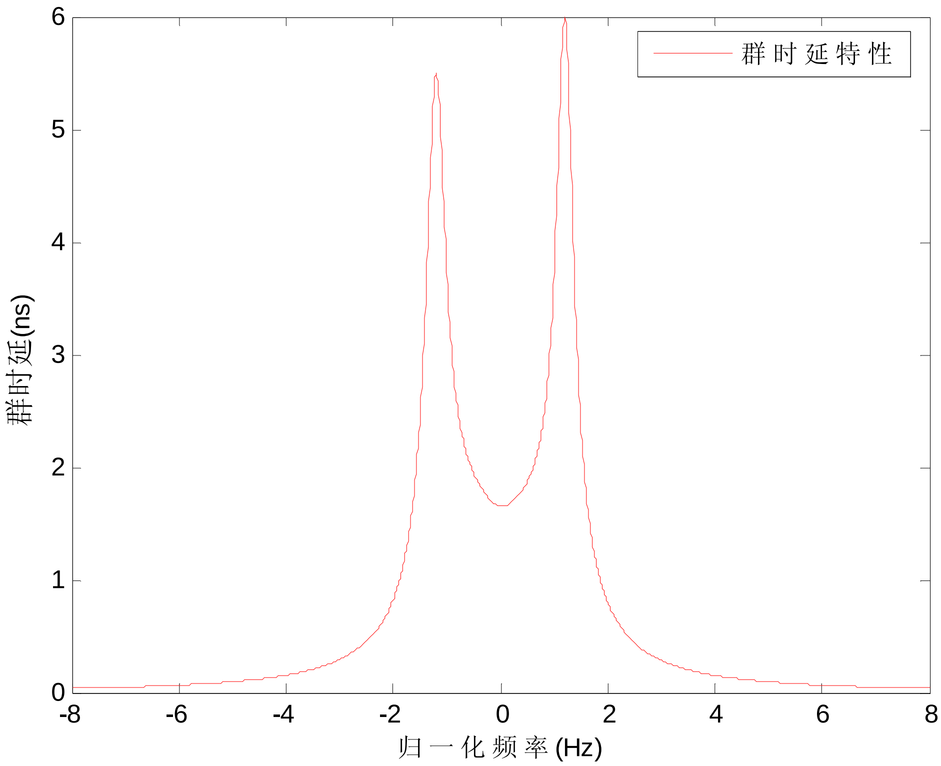
```
M = round(M*10000)/10000;                           %M 矩阵精度：4 位小数
R1 = 1;                                             %采用归一化的终端阻抗
RN = 1;
w1 = -8;                                            %横坐标左区间
w2 = 8;                                             %横坐标右区间
dw = 0.01;                                          %绘图精度
w = w1:dw:w2;                                       %频率点
S21 = zeros(1, length(w));                          %S21
S11 = zeros(1, length(w));                          %S11
Tg = zeros(1, length(w));                           %群时延
for k=1:1:length(w)                                 %构造阻抗矩阵 Z
    R=zeros(N+2);                                   %上面使用归一化的 R1,RN
    R(1,1)=R1;
    R(N+2,N+2)=RN;
    U = eye(N+2);
    U(1, 1) = 0;
    U(N+2, N+2) = 0;
    Z = w(k)*U-j*R+M;                               %阻抗矩阵
```

```
    Zt = inv(Z);                                        %取逆
    S21(k) = 20*log10(-2*j*sqrt(R1*RN)*Zt(N+2,1));      %S21 对数值
    S11(k) = 20*log10(1+2*j*R1*Zt(1,1));                %S11 对数值
    for kk=2:N+1                                        %群时延，求和范围 2:N+1
        Tg(k)=Tg(k)+(Zt(N+2,kk)*Zt(kk,1)/Zt(N+2,1));
    end
    Tg(k)=imag(Tg(k));
end

figure(1)                                               %绘图
grid on
plot(w,S21,'g',w,S11,'b');
legend('S21','S11',2);
xlabel('归一化频率(Hz)');
ylabel('衰减(db)')

figure(2)
grid on
plot(w,Tg,'r');
legend('群时延特性');
xlabel('归一化频率(Hz)');
ylabel('群时延(ns)')
```





群时延特性
群时延(ns)
6
5
4
3
2
1
0
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
归一化频率(Hz)