Differenciál egyenletek

Galik Zsófia menedzser hallgató

Differenciál egyenletek osztályzása

A differenciálegyenletek olyan egyenletek a matematikában (közelebbről a matematikai analízisben), melyekben az ismeretlen kifejezés egy differenciálható függvény, és az egyenlet a függvény és ennek deriváltja között teremt kapcsolatot. A problémák differenciálegyenletben való megfogalmazása a fizikában, mérnöki tudományokban, a közgazdaságtanban és még számos tudományban alapvető szerepet töltenek be.

Definíció: Az olyan egyenletet, amelyben állandókon és ismert függvényeken kívül egy ismeretlen függvény és ennek az ismeretlen függvénynek a deriváltja vagy magasabb rendű deriváltjai szerepelnek.

*Közönséges differenciálegyenletek*nek nevezzük, azt a differenciálegyenletet, amelyben szereplő ismeretlen függvény egyváltozós. Ha az ismeretlen függvény többváltozós, akkor *parciális differenciálegyenlet*ről beszélünk.
Egy differenciálegyenlet *elsőrendű*, ha az egyenletben az ismeretlen függvénynek csak az első deriváltja szerepel. N-ed rendűnek nevezzük, ha az egyenletben található derivált függvények közül az *n-ed rendű* a legmagasabb derivált.
Ha az ismeretlen függvényre és ennek deriváltjaira nézve a differenciálegyenlet lineáris és ezek szorzatai nem jelennek meg az egyenletben, akkor a differenciál egyenlet *lineáris,* ellenkező esetben *nem lineáris*.
*Explicit*nek nevezzük a differenciálegyenletet abban az esetben, ha az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja van kifejezve, ellenkező esetben a differenciálegyenlet *implicit.*

Közönséges, lineáris differenciálegyenletek típusai:

1. Homogén lineáris differenciálegyenlet (függő változóban homogén), ha lineáris, de nincs benne csak az x-től függő vagy konstans tag. Példa:

$$\sin(x)y'(x) - e^x y(x) = 0$$, elsőrendű homogén lineáris,

$$x^3 y''(x) + \frac{1}{x} y(x) = 0$$, másodrendű homogén lineáris

2. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet, ha van benne konstans, vagy x-től függő tag. Példa:

$$\sin(x)y'(x) - e^x y(x) = \mathrm{tg}(x)$$, elsőrendű inhomogén lineáris,

$$x^3 y''(x) + \frac{1}{x} y(x) = x^2 + 5$$, másodrendű inhomogén lineáris

3. Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet, ha az y és összes deriváltja együtthatója konstans. Példa:

$3y' - 7y = 0$, elsőrendű állandó együtthatós homogén lineáris,

$9y''(x) + 4y'(x) = 5x^{12}$, másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris.

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a megoldások során előforduló függvények mindig integrálhatóak, és az un. együtthatókban adott függvények folytonosak.

1.Példa

Legyen *f* minden x-re folytonos függvény. Ekkor az *y'=f(x),* xeI egy elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet. Ennek a megoldása:

$$y(x)=\int f(x)dx + C, CeR$$

Tehát az *y'=f(x)* differenciálegyenlet megoldása a határozatlan integrál fogalmával egybeesik. Az elsőrendű differenciálegyenlet **általános megoldás**án olyan függvényt értünk, amely kielégíti a differenciálegyenletet és melyben szerepel egy tetszőlegesen választható C konstans. A differenciálegyenlet egy olyan megoldását, amelyet az általános megoldásból egy konkrét C érték esetén kapunk, a differenciálegyenlet **partikuláris megoldás**ának nevezünk.

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

a,Szétválasztható differenciálegyenletet

Ha az *f* függvény olyan szorzatra bontható, amelynek egyik tényezője csak az x változó, a másik tényezője csak *y* függvénye *f(x,y)=g(x)*h(y)*, akkor a differenciálegyenletet változókban szétválaszthatónak (szeparábilisnak) nevezzük.

Általános alakja: *y'=g(x)*h(y),* ahol g folytonos az I intervallumon és h a K intervallumon.

Megoldása: *y'* helyébe *dy/dx*-et írva az egyik oldalra rendezzük azon kifejezéseket, amelyekben csak az *x*, másik oldalra amelyekben csak az *y* változó fordul elő:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) * h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \text{ ahol } h(y)$$

Most mindkét oldalt integrálhatjuk:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c$$

amely a differenciálegyenlet általános megoldása

2.Példa

$$(1\text{-}\cos y)y' = 1 + \sin x$$

$$(1 - \cos y)dy/dx = 1 + \sin x$$

$$\int (1 - \cos y)dy = \int (1 + \sin x)dx$$

$$y - \sin y = x - \cos x + c$$ ceR

3.Példa

$$y' = \frac{x^3}{(y+1)^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(y+1)^2}$$
$$(y+1)^2 dy = x^3 dx$$
$$\int (y+1)^2 dy = \int x^3 dx$$
$$\frac{(y+1)^3}{3} = \frac{x^4}{4} + c$$

b,Szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenletek

Bizonyos rendű differenciálegyenletek megfelelő helyettesítéssel visszavezethetők változókban szétválasztható típusú differenciálegyenletekre. Az alábbiakban két ilyen típus megoldási módszerét mutatjuk be.

1.típus

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Megoldása: az ilyen típusú differenciálegyenlet $z(x) = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel változókba szétválaszthatóvá válik, mivel

$$y = zx$$
$$y' = z'x + z$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$z'x + z = f(z)$$
$$z'x = f(z) - z$$

Szétválasztva a z és x változókat

$$\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x}$$

Integrálás után az általános megoldás

x>0 esetén $\ln x = \int \frac{dz}{f(z)-z} + c$

x<0 esetén $\ln(-x) = \int \frac{dz}{f(z)-z} + c$

4.Példa

$y' = \frac{y^2-x^2}{xy} = \frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{\frac{y}{x}}$ $\frac{y}{x} = z$

$z'x + z = \frac{z^2-1}{z}$

$z'x = \frac{z^2-1-z^2}{z} = -\frac{1}{z}$

$\frac{dz}{dx}x = -\frac{1}{z}$

$\int zdz = \int -\frac{1}{x}dx$

$\frac{z^2}{2} = -\ln x + c$ ha x>0

$\frac{z^2}{2} = -\ln(-x) + c$ ha x<0

x>0

$\frac{(\frac{y}{x})^2}{2} = -\ln x + c$

$\frac{y^2}{2x^2} = -\ln cx$

$y^2 = 2x^2(\ln\frac{c}{x})$

$y = +-\sqrt{2}x(\ln\frac{c}{x})$

x<0

$y = +-\sqrt{2}(-x)(\ln\frac{c}{-x})$

2.típus:

$y' = f(ax = by + c)$

Megoldása: vezessük be a $z(x) = ax + by + c$ függvényt

$z'(x) = a + by'$ azaz $y' = \frac{z'-a}{b}$

Az eredeti egyenletbe helyettesítve mind a bal, mind a jobboldal kifejezhető a z fügvénnyel:

$\frac{z'-a}{b} = f(z)$

$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$

$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$

$x = \int\frac{dz}{a+bf(z)} + c$ alakban kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását

5.Példa

$$y' = x + 2y + 1$$
$$x + 2y + 1 = z$$
$$y = \frac{z-x-1}{2}$$
$$y' = \frac{z'-1}{2}$$
$$z = \frac{z'-1}{2}$$
$$z' = 2z + 1$$
$$\frac{dz}{dx} = 2z + 1$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{2z+1}dz = \int 1dx$$
$$\frac{1}{2}\ln|2z + 1| = x + c$$

Visszahelyettesítés:

$$\frac{1}{2}\ln(2x + 4y + 3) = x + c$$

<u>Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet</u>

Általános alakja: *y'+p(x)y=q(x)* ahol p(x) és q(x) adott folytonos függvények az I intervallumon.

Ha q(x)=0, akkor az *y'+p(x)y=0* differenciálegyenletet elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletnek, különben inhomogénnek nevezzük.

Ha a differenciálegyenlet megoldható, akkor általában több (végtelen sok) megoldásfüggvénye van. Ezek közül bizonyos feltételek hozzátételével ki tudjuk választani a számunkra megfelelőt. Ha a differenciálegyenlethez mellékfeltételként előírjuk a keresett függvény, ill. deriváltjainak értékét egy adott helyen, akkor ún. *kezdeti feltétel*t szabunk meg. Ha a mellékfeltétel olyan, hogy legalább két pontban a függvény értékét írja elő, akkor ezt a feltételt *peremfeltétel*nek nevezzük.

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő.

A lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldása során alkalmazott lépések:

1.lépés: megoldjuk az inhomogén differenciálegyenlet homogén párját

2.lépés: konstans variáció (Lagrange-módszerrel)

3.lépés: c(x) eredményének behelyettesítése a kiindulási egyenletbe

<u>6.Példa</u>

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1$$

1. lépés:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y$$
$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$
$$\ln y = 2\ln x + \ln c$$
$$\ln y = \ln cx^2$$

melyből

$$y = cx^2$$

2.lépés:

$y = c(x)x^2$

$y' = c'(x)x^2 + c(x)2x$

ezeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$c'(x)x^2 + c(x)2x - \frac{2}{x}c(x)x^2 = x^2 + 1$

$c'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$

$c(x) = \int(1 + \frac{1}{x^2})dx$

$c(x) = x - \frac{1}{x}$

Tehát az inhomogén partikuláris megoldás:

$y_p = (x - \frac{1}{x})x^2$

$y = x^3 - x$

Így az inhomogén általános megoldás:

$y = x^3 - x + cx^2$