



Mechanikai alapismeretek I. (statika)

1. előadás

Az erő fogalma, ábrázolása, az erő felbontása, közös metszéspontú és szétszórt síkbeli erőrendszer eredője, síkbeli erőrendszer egyensúlyozása egy, kettő és három erővel

Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék

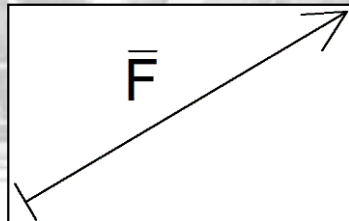
1. Az erő fogalma

1.1 Az erő

Az erő egy képzelt fogalom, amellyel a különböző testek mechanikai kölcsönhatásának nagysága, mértéke jellemezhető. Tehát az erő *nagysággal*, *iránnyal* és *hatásvonallal* jellemezhető vektor segítségével ábrázolható mennyiség.

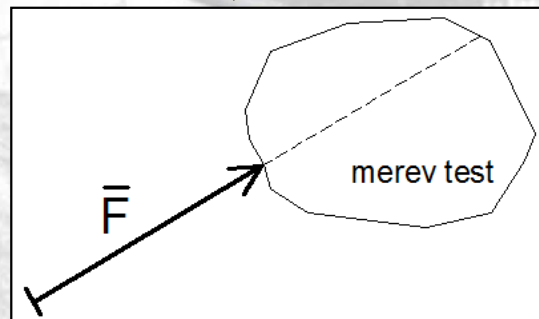
Az erő jele: F (Force)

Az erő mértékegysége: newton [N], illetve ennek prefixumai [kN, mN]



1. ábra. Az erő ábrázolása [Szabó I. G. 2012]

Ha egy merev testre adott erő hat, akkor a test ugyanakkora erővel ellenáll. (Newton – hatás – ellenhatás törvénye)

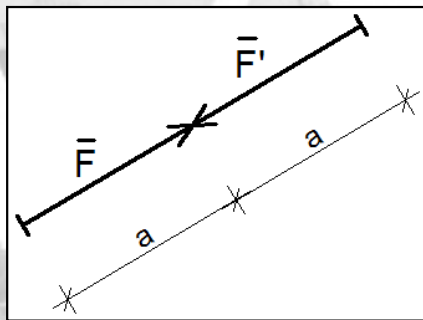


2. ábra. Newton hatás-ellenhatás törvénye [Szabó I. G. 2012]

1.2 A statikának három alapvető axiómája fogalmazható meg

1. axióma: Két erő egyensúlyára vonatkozó tétel

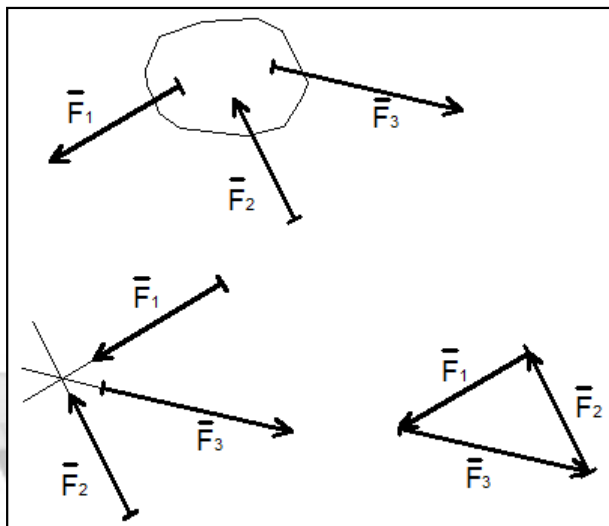
Két erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a hatásvonalai egy egyenesbe esnek, nagyságuk megegyezik, irányuk pedig ellentétes.



3. ábra. Két erő egyensúlya (I. axióma) [Szabó I. G. 2012]

2. axióma: Három erő egyensúlya

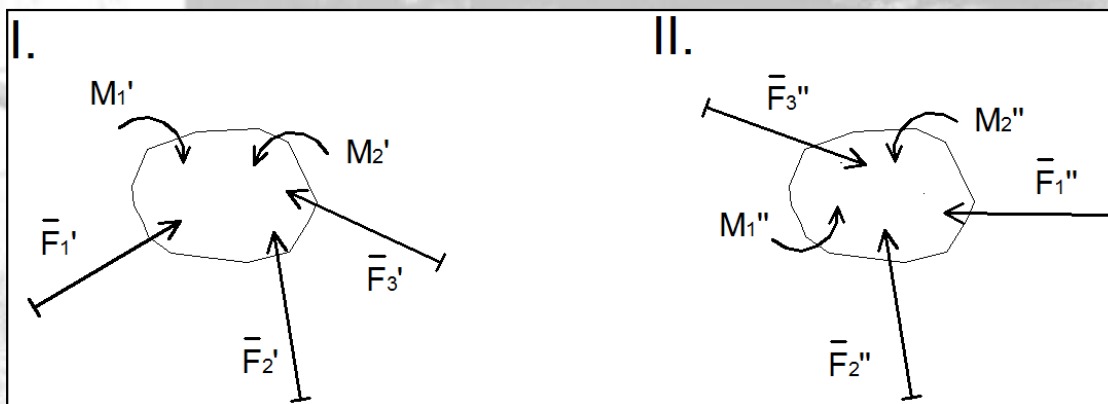
Három erő akkor és csak is akkor van egyensúlyban, ha közös metszéspontúak és vektoraikból nyílfolytonos, zárt vektorháromszög szerkeszthető.



4. ábra. Három erő egyensúlya (II. axióma) [Szabó I. G. 2012]

3. axióma: Eredő erőrendszer egyensúlya

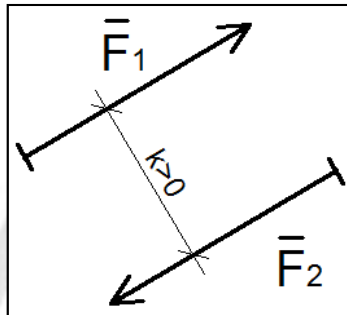
Ha egy egyensúlyban lévő erőrendszerhez hozzáadunk egy másik önmagában is egyensúlyban lévő erőrendszert, akkor az így kapott eredő erőrendszer is egyensúlyban lesz.



5. ábra. Eredő erőrendszer egyensúlya (III. axióma) [Szabó I. G. 2012]

1.3 Az erőpár

Két párhuzamos, de egymással ellentétes irányú az abszolút nagyságukat tekintve egyenlő erőt erőpárnak nevezünk.



6. ábra. Az erőpár [Szabó I. G. 2012]

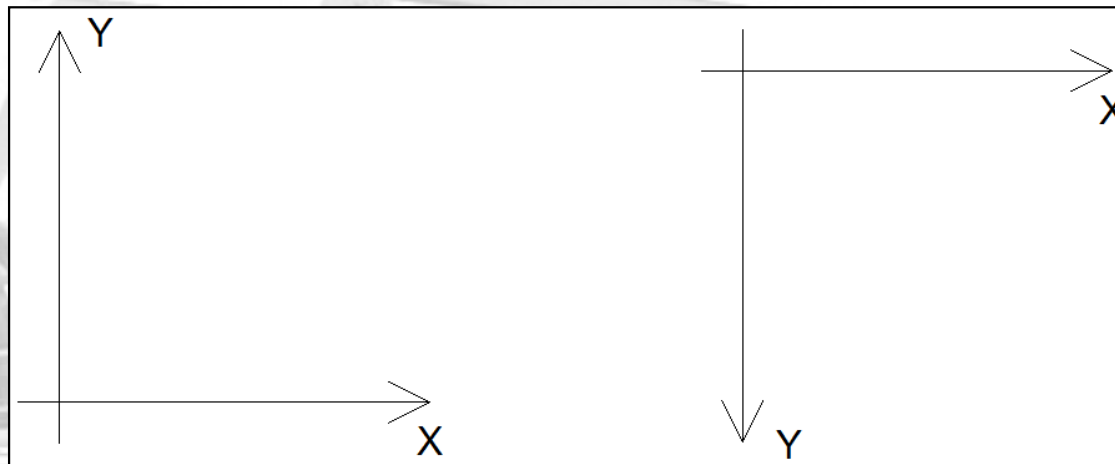
$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \bar{F}$$

1.4 Síkbeli erőrendszer

Ha egy adott – általában a statikában használatos „X–Y” – síkban elhelyezünk egy erőt, azt *nagysága*, *hatásvonala* és *iránya* fogja jellemezni (az erő vektormennyiség).

Ahhoz, hogy ezt az erőt egyértelműen jellemezni tudjuk, szükséges az elhelyezése a matematikából is jól ismert Descartes–koordinátarendszerben.

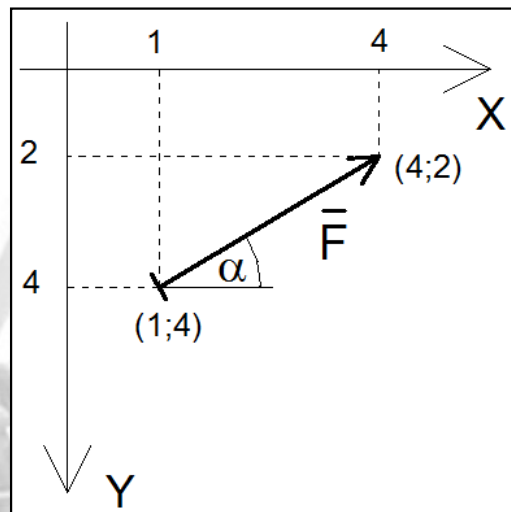
A matematikai és a mechanikai koordinátarendszerek között a különbség a függőleges „ Y ” tengely irányultságában rejlik. A mechanikában általunk használt koordinátarendszer függőleges tengelye megegyezés szerint lefelé pozitív, míg a vízszintes tengely jobbra kap pozitív előjelet.



7. ábra. Matematikai és mechanikai koordinátarendszer [Szabó I. G. 2012]

E koordinátarendszerben elhelyezett erő természetesen tetszőleges állású és irányú lehet. Abban az esetben, ha az erő iránya nem azonos sem a vízszintes „ X ”, sem a függőleges „ Y ” tengely irányával, akkor az irányultság jellemezhető az erőnek akár az „ X ”, akár az „ Y ” főiránnyal bezárt szögértékével (α).

Ennek az „ F ” nagyságú vektornak a kezdő és végpontja koordinátákkal megadható, minek következtében az erő már rendelkezik fog egyértelműen meghatározható nagysággal is.

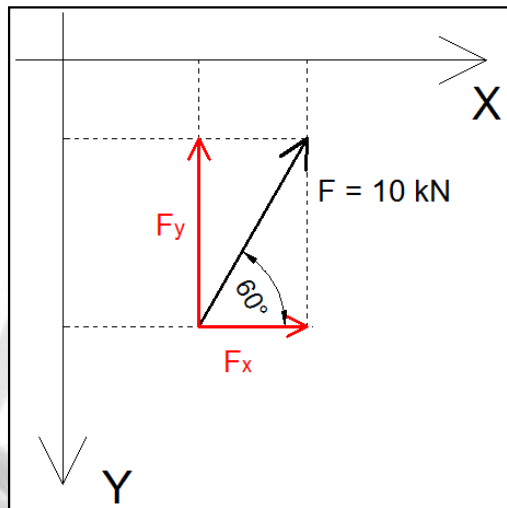


8. ábra. Az erő elhelyezése koordináta-rendszerben [Szabó I. G. 2012]

1.5 Az erő felbontása, vetülete

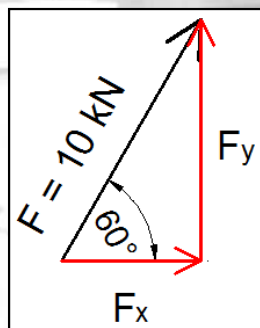
Ha ismerjük ennek az adott „ F ” erőnek a hatásvonalát, az irányát és a nagyságát, valamint azt, hogy egyik, vagy másik főtengellyel milyen szöget zár be, akkor felbonthatjuk az erőt „ X ” és „ Y ” irányú összetevőire (komponenseire).

A következő rövid feladat egy adott $F=10$ kN nagyságú erő felbontását szemlélteti:



9. ábra. Az erő felbontása [Szabó I. G. 2012]

szögfüggvények alapján:



10. ábra. Az erő felbontása [Szabó I. G. 2012]

$$\sin 60^\circ = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = \sin 60^\circ \cdot F$$

$$F_y = 0,8660 \cdot 10 \text{ kN} = 8,66 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = \cos 60^\circ \cdot F$$

$$F_x = 0,5 \cdot 10 \text{ kN} = 5 \text{ kN} (\rightarrow)$$

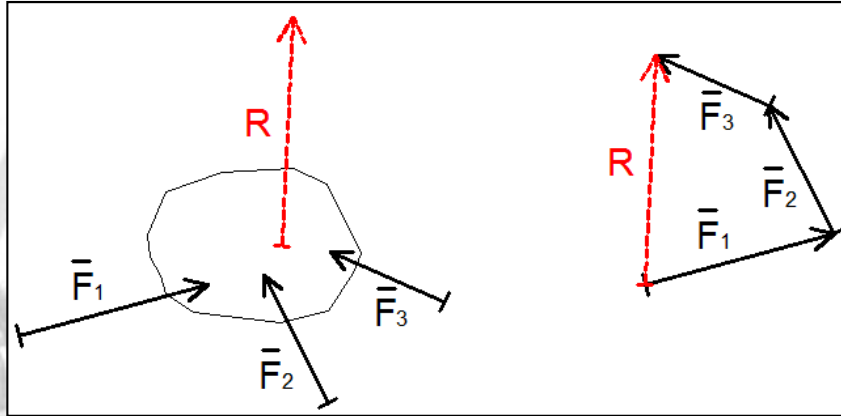
Az erő összegzése Pitagorasz-tétel alapján:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



1.6 Az eredő erő

Az eredő erő, azaz erő, ami az adott erőrendszer hatásvonalával azonos hatást fejt ki a szilárd testre. Egy adott erőrendszer helyett működtetjük az eredő erőt.



11. ábra. Az eredő erő [Szabó I. G. 2012]

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

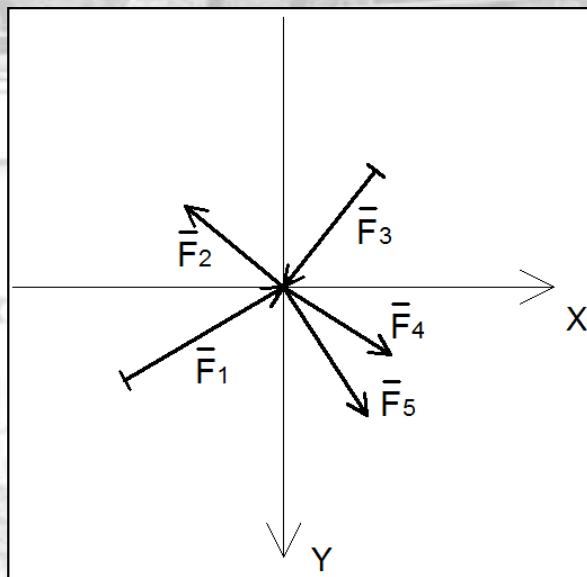
2. Közös metszéspontú erőrendszer eredője

2.1 Az erők elhelyezése

A már korábban említett Descartes–koordinátarendszerben helyezzük el az erőket.

Célszerű, hogy:

- a koordinátarendszer kezdő pontja (origója) essen egybe a közös metszésponttal,
- az erők „ X – Y ” síkban helyezkedjenek el,
- az „ X – Y ” síkra merőleges „ Z ” tengely felénk mutasson.

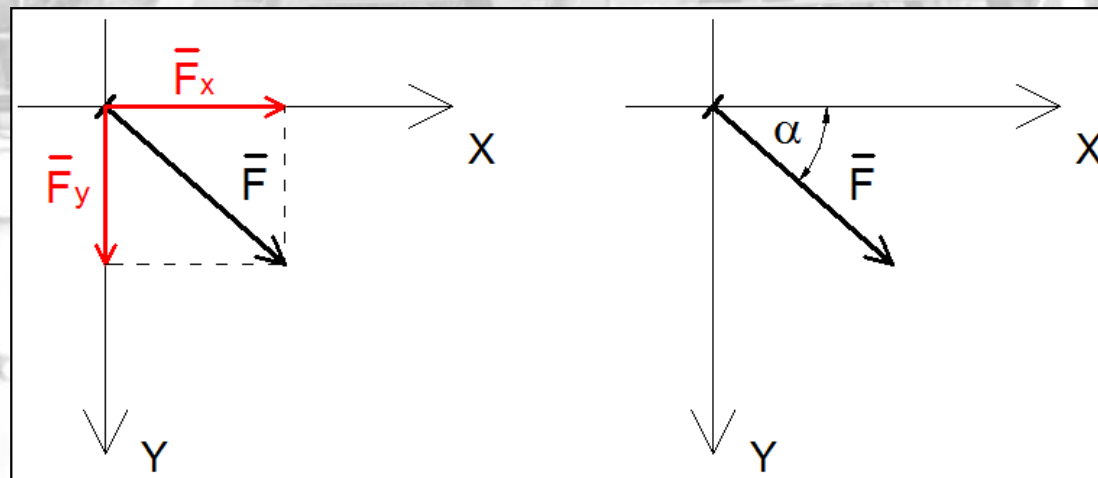


12. ábra. A közös metszéspont elhelyezése az origóban [Szabó I. G. 2012]

Az egyes erők jellemezhetők nagysággal, hatásvonallal és iránnyal. Ennek következtében az F_1, F_2, \dots, F_n erőket jellemezhetjük $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, \dots, F_{nx}, F_{ny}$ koordinátákkal. Ezek segítségével egyértelműen meghatározhatók a síkbeli erők.

A másik megoldás a síkban polárkoordinátás (térben hengerkoordinátás) megadás. Ebben az esetben az egyes erőket az „ X ” fő tengely és az adott erő (vektor) által bezárt α szög (polárszög) jellemzi.

A megoldások egyenértékűek!



13. ábra. Síkbeli erők megadásának két módszere [Szabó I. G. 2012]

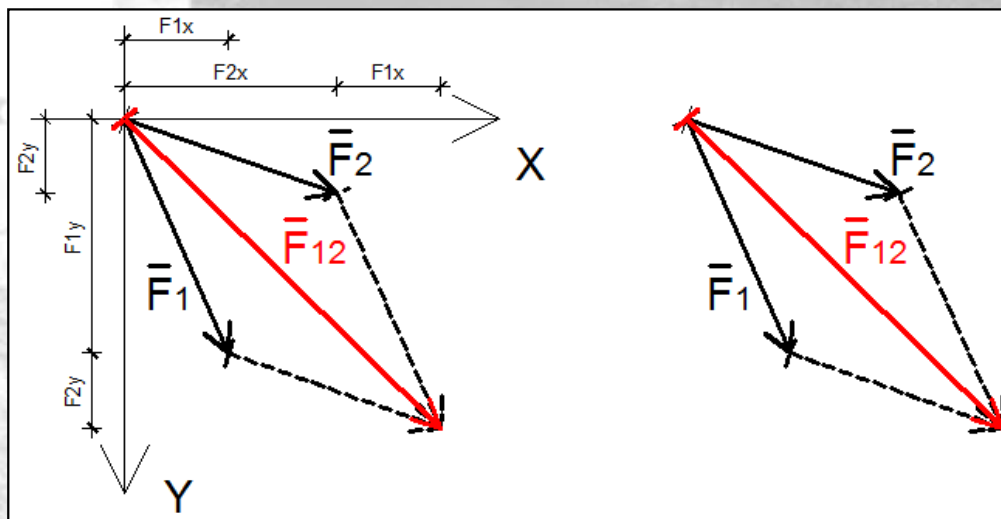
2.2 Az erővektorok összeadása

Az összeadás történhet számítással (numerikusan) vagy szerkesztéssel (grafikusan) is.

Két vektor összege:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_{1xi} + F_{1yj} + F_{2xi} + F_{2yj} = \\ &= (F_{1x} + F_{2x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y})\mathbf{j} = F_{12xi} + F_{12yj} \end{aligned}$$

Az alábbi ábrán az F_1 és F_2 vektorok grafikus összegzése látható az ún. paralelogramma módszerrel. Az adott F_1 és F_2 erők egymás végpontjába való eltolásának eredményeképp egy paralelogramma alak formálódik, melynek a hosszabb átlója megadja a két erő (F_1 és F_2) összegének F_{12} nagyságát, hatásvonalát és irányát.



14. ábra. Az erők összegzése paralelogramma módszerrel [Szabó I. G. 2012]

A fentiek alapján három vagy több erő is összegezhető!

$$F_{1n} = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

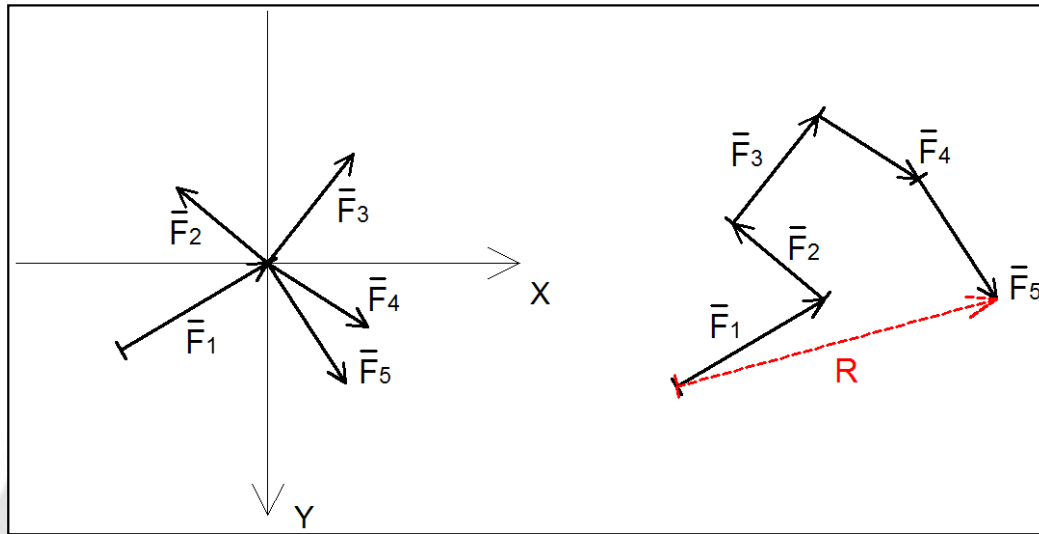
Az összegzés eredménye egy F_{1n} vektor, amelynek a koordinátáit a megfelelő koordináták összegei is megadják:

$$F_{1nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_{1ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

Grafikusan:

n számú vektort bármilyen sorrendben nyíl folytonosan egymás után rajzoljuk, majd az első vektor kezdőpontját összekötjük az utoljára felrajzolt vektor végpontjával, megkapjuk az eredő vektort.



15. ábra. Erők összegzése grafikusán [Szabó I. G. 2012]

Erőrendszerek egyenértékűsége:

Két erőrendszert egyenértékűnek nevezünk, ha egyazon merev testre hatva ugyanazt a hatást (mechanikai hatást) fejtik ki, azaz a merev test mozgását ugyanúgy változtatják meg.

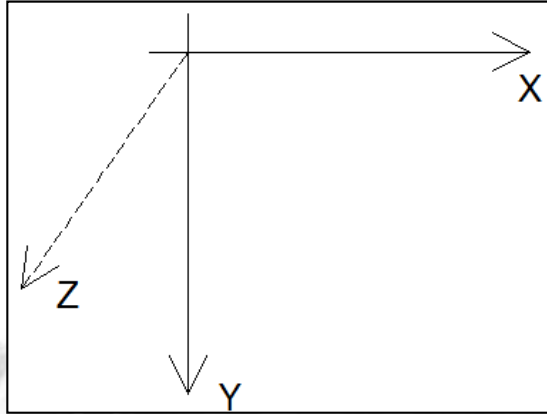
Erőrendszer egyensúlya:

Az erőrendszert egyensúlyi erőrendszernek nevezzük, ha az erőrendszer eredője zéruserő.

$$F_1, F_2, \dots, F_n = 0$$

3. Szétszórt síkbeli erőrendszer eredője

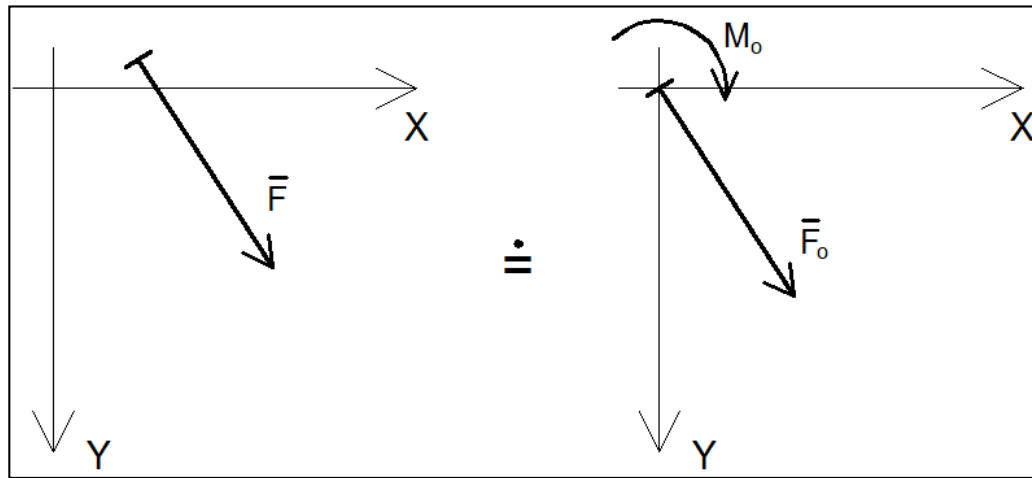
Előírás, hogy az „ X ” és az „ Y ” fő tengelyek az erők síkjába kerüljenek, továbbá, hogy a „ Z ” tengely „ránk mutasson”.



16. ábra. Koordináta-rendszer felvétele [Szabó I. G. 2012]

Az általános, vagy másképp szétszórt síkbeli erőrendszer annyiban különbözik a közös metszéspontú erőrendszertől, hogy az általános helyzetű erők hatásvonalai nem egy meghatározható „közös” pontban metszik egymást.

Ha meg akarjuk határozni a szétszórt síkbeli erők eredőjét, akkor első lépésben szükséges azok megadása egy erő- és egy nyomatékvektorral.



17. ábra. Általános helyzetű erő redukálása az origóra [Szabó I. G. 2012]

Az „ F ” erő origóra való redukálása alatt értjük, ha az „ F ” erőt helyettesítjük az origón átmenő „ F_0 ” erővel és az „ M_0 ” nyomatékkal. Ilyenkor az „ F_0 ” erőt *társerőnek*, az „ M_0 ” nyomatékot *társnyomatéknak* nevezzük.

Ezen elv alapján végtelen számú elemet tartalmazó *dinámrendszer* is redukálható az origóra.

$$F_1, F_2, \dots, F_n, M_1, M_2, \dots, M_m = F_0, M_0$$

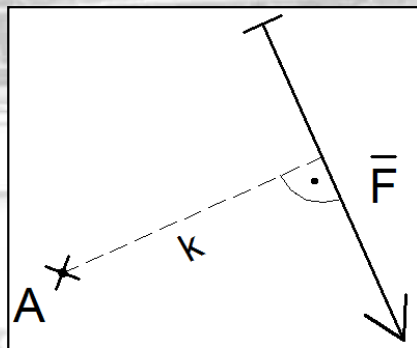
3.1 Nyomaték (forgatónyomaték)

Ha adott a síkban egy meghatározott nagyságú, hatásvonalú és irányú erővektor, valamint egy helyhez rögzített fix pont, akkor az erő hatásvonala és a pont között meghatározható egy merőleges távolság. E merőleges távolság (erőkar) és az erő nagyságának szorzataként határozható meg a nyomaték nagysága.

A nyomaték jele: M

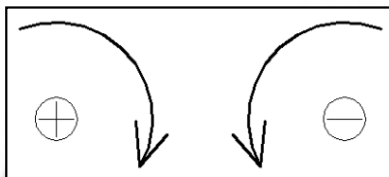
Számítása: $M = \bar{F} \cdot k$

Mértékegysége: kNcm, kNm



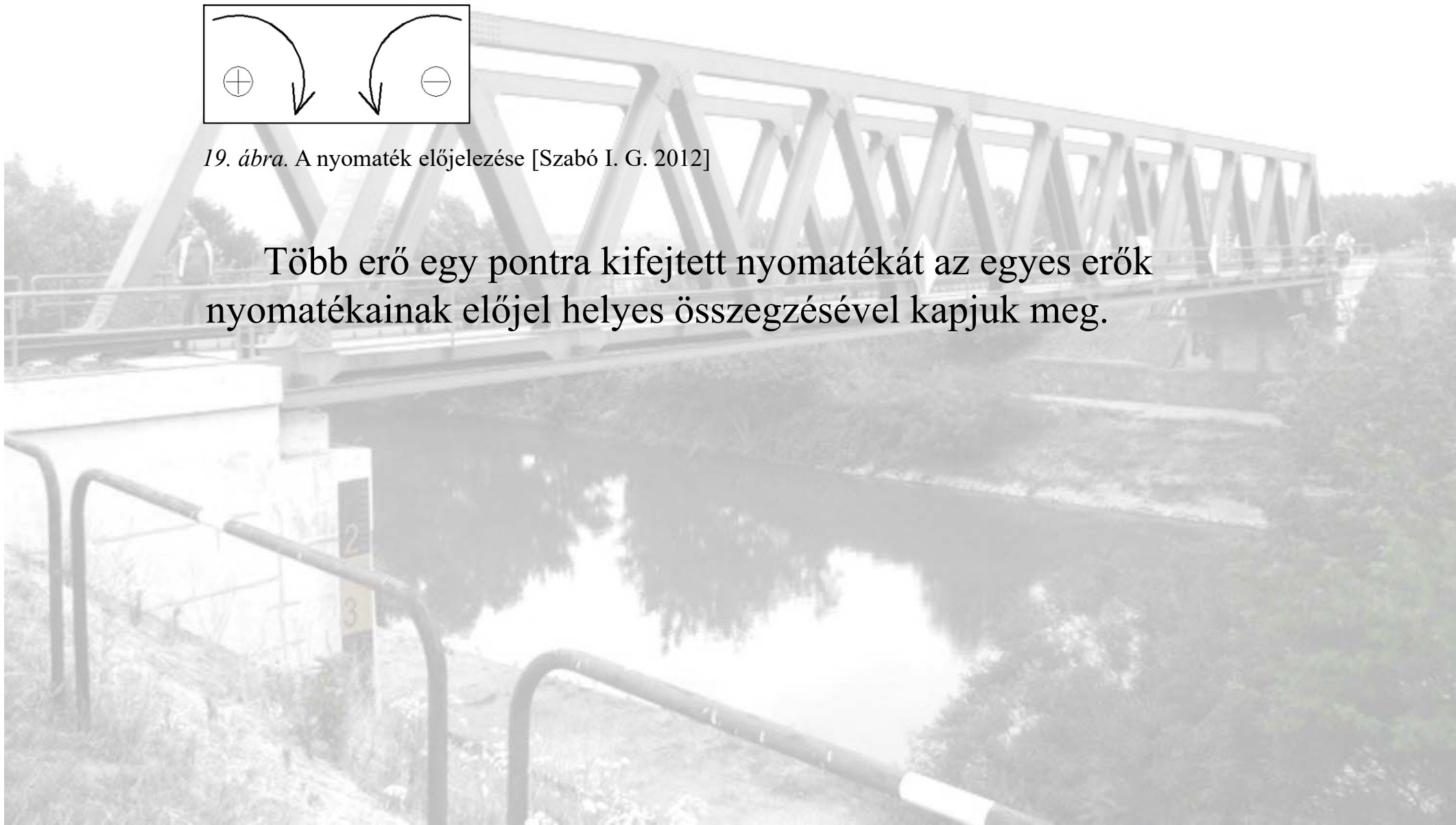
18. ábra. Nyomaték [Szabó I. G. 2012]

A nyomaték előjel nélküli mennyiség. Az előjelezés csupán megegyezés alapján történik! Az óramutató járásával megegyező forgásirányt pozitívnak (+), az ellenkező forgásirányt negatívnak (-) tekintjük.



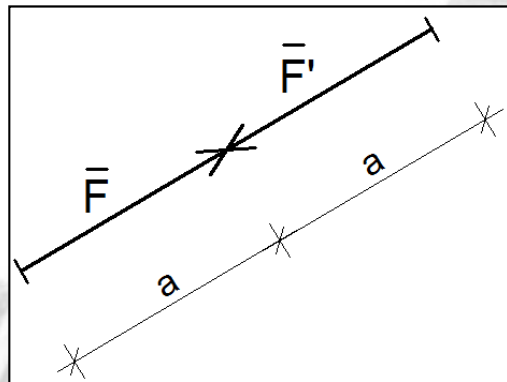
19. ábra. A nyomaték előjelezése [Szabó I. G. 2012]

Több erő egy pontra kifejtett nyomatékát az egyes erők nyomatékainak előjel helyes összegzésével kapjuk meg.



4. Szétszórt síkbeli erőrendszer egyensúlyozása egy erővel

Egy adott hatásvonalú, adott nagyságú és adott irányú erő egyensúlyozása vele azonos hatásvonalú, azonos nagyságú, de ellentétes irányú egyetlen erővel is lehetséges. (I. axióma)

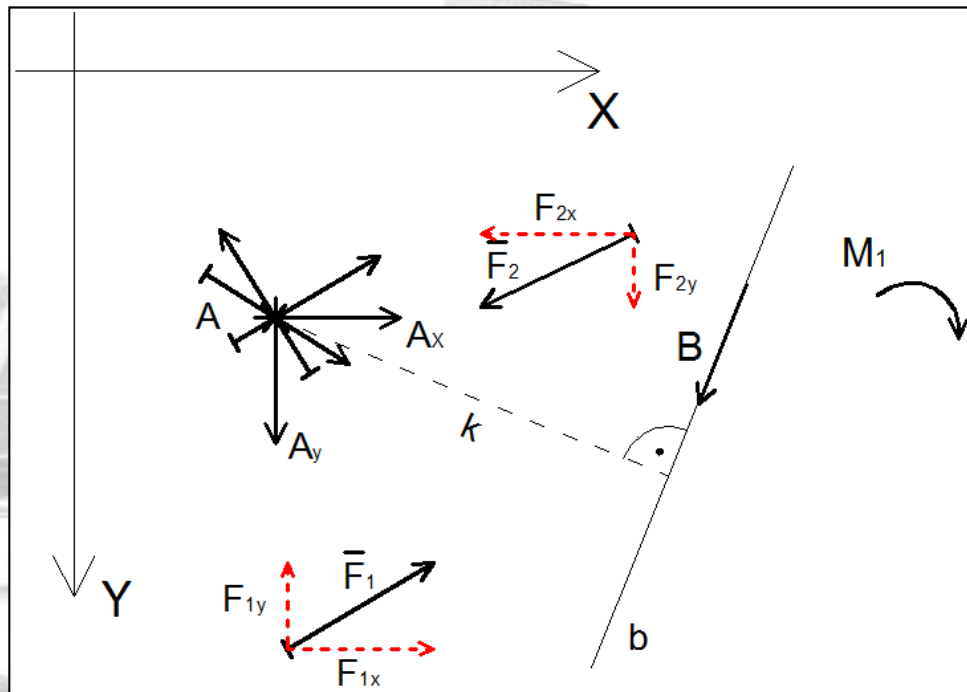


20. ábra. Két erő egyensúlya [Szabó I. G. 2012]

Amennyiben több erő alkot egy erőrendszert, akkor az egyensúlyozás megoldása két lépésre bontható. Első lépésben az eredő erő hatásvonalát, nagyságát és irányát szükséges meghatározni, majd csak ezután következhet az eredő erő, s ez által a teljes erőrendszer kiegyensúlyozása.

5. Szétszórt síkbeli erőrendszer egyensúlyozása két erővel

Bármely általános helyzetű síkbeli *dinámrendszer* egyensúlyozható egy adott helyzetű „A” ponton átmenő „A” erővel és egy adott „b” egyenesre illeszkedő „B” erővel, akkor, ha az „A” pont nincs rajta a „b” egyenesen.



21. ábra. Dinámrendszer egyensúlyozása adott ponton átmenő és adott hatásvonalú erővel [Szabó I. G. 2012]

$$(F_1, F_2, \dots, F_n, M_1, M_2, \dots, M_m, A, B) = 0$$

„ A ” ponton keresztül végtelen számú irányba mutathat erő, de bármelyik irányba mutató erő felbontható „ A_x ” és „ A_y ” komponensre. A fenti egyenletben így három skaláris ismeretlen van: „ A ” erőnek „ X ” és „ Y ” irányú összetevője („ A_x ” és „ A_y ”), valamint a „ B ” erőnek előjeles nagysága.

Ha egy erőrendszer egyensúlyban van, akkor a sík bármely pontjára felírt nyomatékösszegnek nullának kell lennie!

„ A ” pontra írunk egyenletet, akkor az „ A ” erő komponensei („ A_x ” és „ A_y ”) nem lesznek benne, hiszen hatásvonalukon rajta van az „ A ” pont (mindkét esetben az erőkar nulla). Az így kapott egyenletben egy ismeretlen lesz: a „ b ” hatásvonalú „ B ” erő. Ha kiszámítottuk „ B ” erő nagyságát, akkor ezután „ B ” erőt fel kell bontani komponenseire, majd egymástól független vetületi egyenletek segítségével már az „ A_x ” és „ A_y ” komponensek is számíthatók.

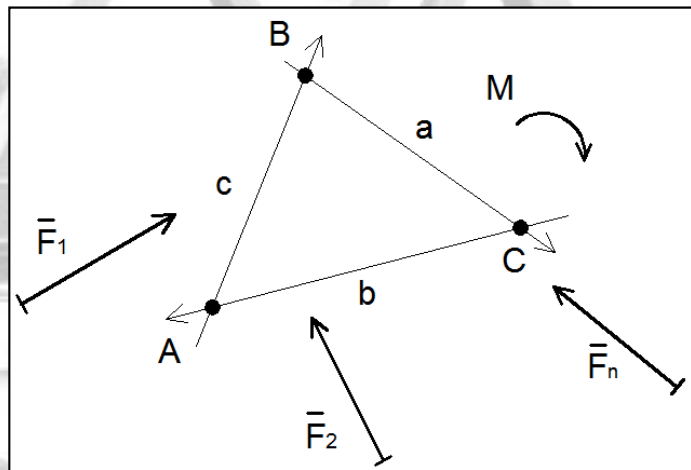
$$\sum M_i^A = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

6. Szétszórt síkbeli erőrendszer egyensúlyozása két erővel

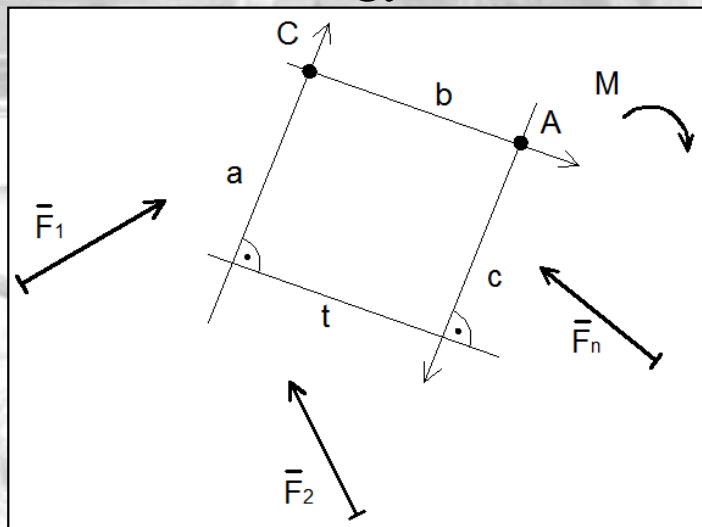
Három erővel való egyensúlyozás esetén általában a három egyensúlyozó erő hatásvonala adott. A három adott hatásvonal közül válasszuk ki bármelyiket. A kiválasztott erő *főpontjának*, a másik két hatásvonal metszéspontját nevezzük. Erre a főpontra a *Ritter-módszer* szerint a nyomatéki egyenletet felírva egyértelműen meghatározhatjuk az erő nagyságát és irányát.



22. ábra. Egyensúlyozás három adott hatásvonalú erővel [Szabó I. G. 2012]

A megoldás második lépése, hogy egy újabb nyomatéki egyenlet segítségével (melyet egy másik főpontra írunk fel) meghatározunk még egy erőt. A két erő ismeretében már rátérhetünk a vetületi egyenletekre, s ezek segítségével meghatározhatjuk a harmadik erőt, de ha lehetséges választhatjuk az a megoldást is, hogy felírunk egy harmadik nyomatéki egyenletet.

A harmadik nyomatéki egyenlet alkalmazása csak abban az esetben lehetséges, ha két hatásvonal nem párhuzamos egymással. Ha mégis párhuzamosak, akkor a párhuzamos hatásvonalakra merőleges „ t ” tengelyre felírt vetületi egyenletből célszerű számolni.



23. ábra. Dinámrendszer egyensúlyozása három adott hatásvonalú erővel, ha két hatásvonal párhuzamos [Szabó I. G. 2012]

Felhasznált irodalom

SIPTÁR TIBOR, MARSAY ISTVÁN: *Mechanika módszertani útmutató és példatár.* Pollack Mihály Műszaki Főiskola Építőipari Kar, Pécs, 1978.

SZABÓ IMRE GÁBOR: *Mechanika I. (statika). Példatár és módszertani útmutató.* Pécs, 2012.

