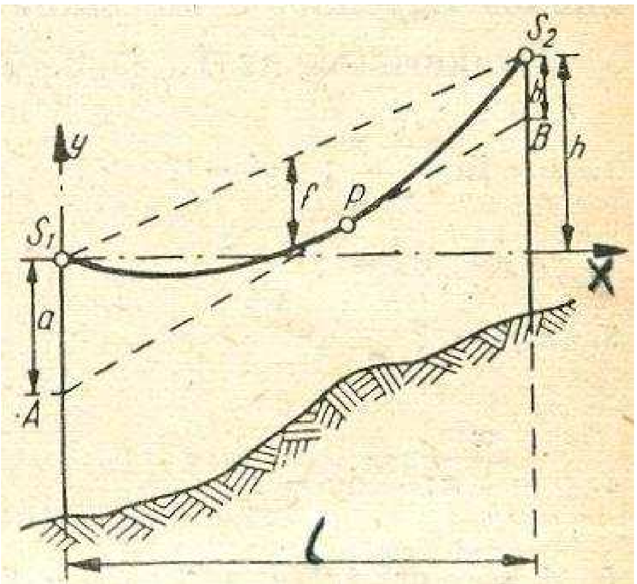
Parabolikus kötél / kábel belógásának meghatározása méréssel

Az [1] munkában találkoztunk az alábbi feladattal, ahol csak a megoldást közölték, annak levezetése nélkül.
A feladat:



1. ábra – [1]

Egy nagyfeszültségű távvezeték $\boldsymbol{y = \alpha + \beta x + \gamma x^2}$ paraboláját a következő mérési adatok határozzák meg:
~ $\boldsymbol{l}$ feszítőköz,
~ az $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ oszlopfejek $\boldsymbol{h}$ magasságkülönbsége;
teodolittal meghatározzuk a parabola $\boldsymbol{P}$ pontbeli érintőjét, mely az oszlopokat $\boldsymbol{A}$, ill. $\boldsymbol{B}$ pontban metszi, és lemérjük az $\boldsymbol{S_1A = a}$ és $\boldsymbol{S_2B = b}$ távolságokat – 1. ábra.
Határozzuk meg

a.) a parabola egyenletét, valamint
b.) a parabola $\boldsymbol{f}$ belógását!

<u>Megoldás:</u>

A parabola egyenlete:

$$y(x) = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 \ , \qquad (1)$$

ahol $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ meghatározandó állandók. Az $\boldsymbol{y(0) = 0}$ feltételből (1) - gyel:

$$0 = \alpha + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0^2 \rightarrow \alpha = 0 \ ; \qquad (2)$$

majd (1) és (2) - vel:

$$y(x) = \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 \ . \qquad (3)$$

Az ***y(l) = h*** feltételből (3) - mal:

$$h = \beta \cdot l + \gamma \cdot l^2 \rightarrow \beta = \frac{h}{l} - \gamma \cdot l \ . \qquad (4)$$

Most (3) és (4) - gyel:

$$y(x) = \left(\frac{h}{l} - \gamma \cdot l \right) \cdot x + \gamma \cdot x^2 \ . \qquad (5)$$

Most térjünk rá a belógás számítására! A ***b*** belógás az 1. ábra szerint:

$$b(x) = \frac{h}{l} \cdot x - y(x) \ ; \qquad (6)$$

majd (5) és (6) - tal:

$$b(x) = \frac{h}{l} \cdot x - \left(\frac{h}{l} - \gamma \cdot l \right) \cdot x - \gamma \cdot x^2 = \gamma \cdot l \cdot x - \gamma \cdot x^2 \ . \qquad (7)$$

Az ábra alapján világos, hogy a belógásnak maximuma van;
~ a maximum helye a

$$\frac{db(x)}{dx} = 0 \qquad (8)$$

feltételből:

$$\gamma \cdot l - 2 \cdot \gamma \cdot x_m = 0 \rightarrow x_m = \frac{l}{2} \ ; \qquad (9)$$

~ a maximum nagysága (7) és (9) szerint:

$$b(x_m) \equiv f = \gamma \cdot l \cdot x_m - \gamma \cdot x_m{}^2 = \gamma \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \gamma \cdot \frac{l^2}{4} = \gamma \cdot \frac{l^2}{4} \ ,$$

tehát:

$$f = \gamma \cdot \frac{l^2}{4} \ , \qquad (10)$$

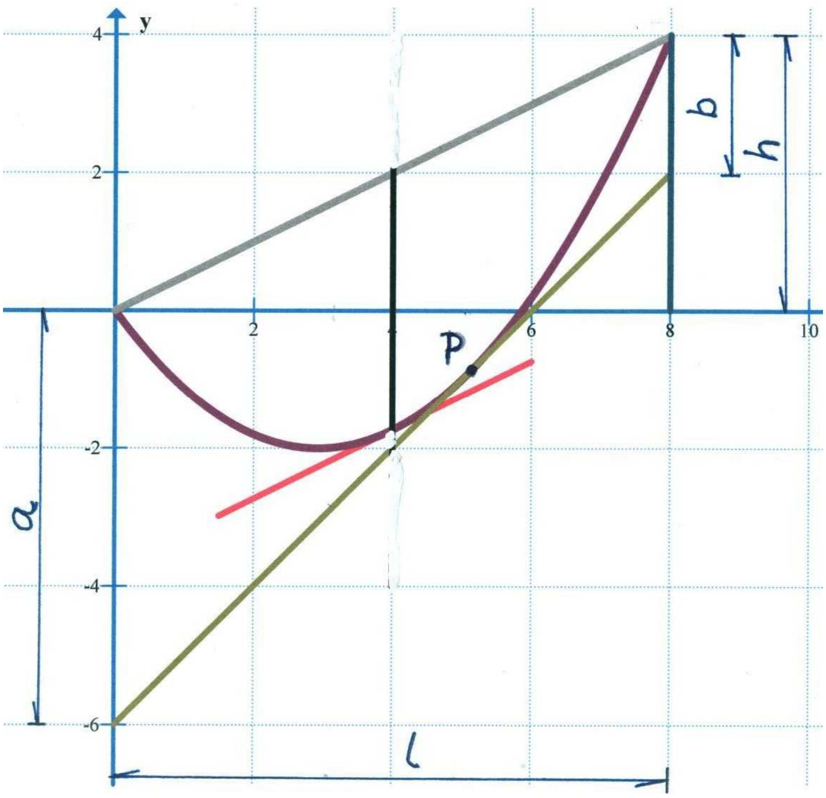
innen:

$$\gamma = 4 \cdot \frac{f}{l^2} \ . \qquad (11)$$

Ezután (5) és (11) - gyel:

$$y(x)=\left(\frac{h}{l}-4\cdot\frac{f}{l}\right)\cdot x+4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x^2\ . \qquad (12)$$

A következő feladatrész: ***f*** - et kifejezni a többi állandóval.
Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

A 2. ábra adatai: ***l = 8 m; h = 4 m; a = 6 m; b = 2 m.***

A számítás azon alapul, hogy a parabola és az érintő egyenes ***P*** pontbeli érintkezése során fennáll, hogy

$$\left.\begin{aligned} y^{\text{érintő}}(x_P)&=y^{\text{parabola}}(x_P)\ ,\\ \frac{dy^{\text{érintő}}(x_P)}{dx}&=\frac{dy^{\text{parabola}}(x_P)}{dx}\ .\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Először felírjuk az érintő egyenes egyenletét. A 2. ábra alapján:

$$y^{\text{érintő}}(x)=\frac{h+a-b}{l}\cdot x-a\ . \qquad (14)$$

Az egyenes meredeksége mindenhol ugyanaz, így a ***P*** pontban is:

$$\frac{dy^{\text{érintő}}\left(x_P\right)}{dx}=\frac{h+a-b}{l}\ . \qquad (\ 15\ )$$

A parabola érintőjének iránytangense általában, (12) - ből:

$$\frac{dy^{\text{parabola}}\left(x\right)}{dx}=\frac{h}{l}-4\cdot\frac{f}{l}+8\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x\ . \qquad (\ 16\ )$$

A parabola érintőjének iránytangense a ***P*** pontban, (16) - ból:

$$\frac{dy^{\text{parabola}}\left(x_P\right)}{dx}=\frac{h}{l}-4\cdot\frac{f}{l}+8\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P\ . \qquad (\ 17\ )$$

Most (13 / 2), (15) és (17) szerint:

$$\frac{h+a-b}{l}=\frac{h}{l}-4\cdot\frac{f}{l}+8\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P\ ,$$

innen rendezéssel:

$$x_P=\frac{4\cdot f+a-b}{l}\cdot\frac{l^2}{8\cdot f}=\frac{4\cdot f+a-b}{8\cdot f}\cdot l\ ,$$

tehát:

$$x_P=\frac{4\cdot f+a-b}{8\cdot f}\cdot l\ . \qquad (\ 18\ )$$

Majd (12), (13 / 1) és (14) - gyel:

$$\frac{h+a-b}{l}\cdot x_P-a=\left(\frac{h}{l}-4\cdot\frac{f}{l}\right)\cdot x_P+4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P{}^2\ .$$

Ezt rendezve:

$$\frac{h}{l}\cdot x_P+\frac{a-b}{l}\cdot x_P-a=\frac{h}{l}\cdot x_P-4\cdot\frac{f}{l}\cdot x_P+4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P{}^2\ ;$$

$$\frac{a-b}{l}\cdot x_P-a=-4\cdot\frac{f}{l}\cdot x_P+4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P{}^2\ ;$$

$$\frac{4f+a-b}{l}\cdot x_P-a=4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P{}^2\ ;$$

$$\frac{4f+a-b}{l}\cdot x_P-4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot x_P{}^2=a\ ;$$

most (18) - cal is:

$$\frac{4f+a-b}{l}\cdot\frac{4\cdot f+a-b}{8\cdot f}\cdot l\ -4\cdot\frac{f}{l^2}\cdot\left(\frac{4\cdot f+a-b}{8\cdot f}\cdot l\ \right)^2=a\ ;$$

$$\frac{\left(4f+a-b\right)^2}{8\cdot f}-\frac{\left(4f+a-b\right)^2}{16\cdot f}=a\ ;$$

$$\frac{\left(4f+a-b\right)^2}{16\cdot f}=a\ ;$$

tovább alakítva, rendezve:

$$\left[4f+\left(a-b\right)\right]^2=16\cdot a\cdot f\ ;$$

$$16\cdot f^2+8\cdot f\cdot\left(a-b\right)+\left(a-b\right)^2=16\cdot a\cdot f\ ;$$

$$16\cdot f^2+8\cdot a\cdot f-8\cdot b\cdot f+\left(a-b\right)^2=16\cdot a\cdot f\ ;$$

$$16\cdot f^2-8\cdot a\cdot f-8\cdot b\cdot f+\left(a-b\right)^2=0\ ;$$

$$16\cdot f^2-8\cdot f\cdot\left(a+b\right)+\left(a-b\right)^2=0\ ;$$

a kapott másodfokú egyenletet a megoldó - képlettel megoldva:

$$f_{1,2}=\frac{8\cdot\left(a+b\right)\pm\sqrt{\left[8\cdot\left(a+b\right)\right]^2-4\cdot 16\cdot\left(a-b\right)^2}}{2\cdot 16}\ ;$$

$$f_{1,2}=\frac{8\cdot\left(a+b\right)\pm 8\cdot\sqrt{\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2}}{2\cdot 16}\ ;$$

$$f_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2}}{4}\ ;$$

most elvégezzük a gyök alatti mennyiség átalakítását:

$$\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2=\left[\left(a+b\right)+\left(a-b\right)\right]\cdot\left[\left(a+b\right)-\left(a-b\right)\right]=\left(2\cdot a\right)\cdot\left(2\cdot b\right)=4\cdot a\cdot b\ ,$$

amivel az előző egyenlet így alakul:

$$f_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{4\cdot a\cdot b}}{4}\ ;$$

$$f_{1,2}=\frac{a+b\pm 2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{4}\ ;$$

$$f_{1,2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b\pm 2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{2}\ ;$$

$$f_{1,2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{a\cdot b}\right)\ ;$$

most az előjelekről kell döntenünk: minthogy ***a* = *b*** esetén a „ – ” előjel ***f*** - re ***0*** - t adna, és mivel ***f*** nem zérus, ezért a „+” előjel választandó; azaz az utolsó képletből:

$$\underline{\underline{f=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{a\cdot b}\right)}}\;. \qquad (19)$$

Ez megegyezik az [1] - ben levezetés nélkül közölt végeredménnyel.

A 2. ábra példájának adataival, (19) - ből:

$$\underline{f}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6+2}{2}+\sqrt{6\cdot 2}\right)\ \mathrm{m}=\left(2+\sqrt{3}\right)\ \mathrm{m}=\underline{3{,}732050808\ \mathrm{m}}\,.$$

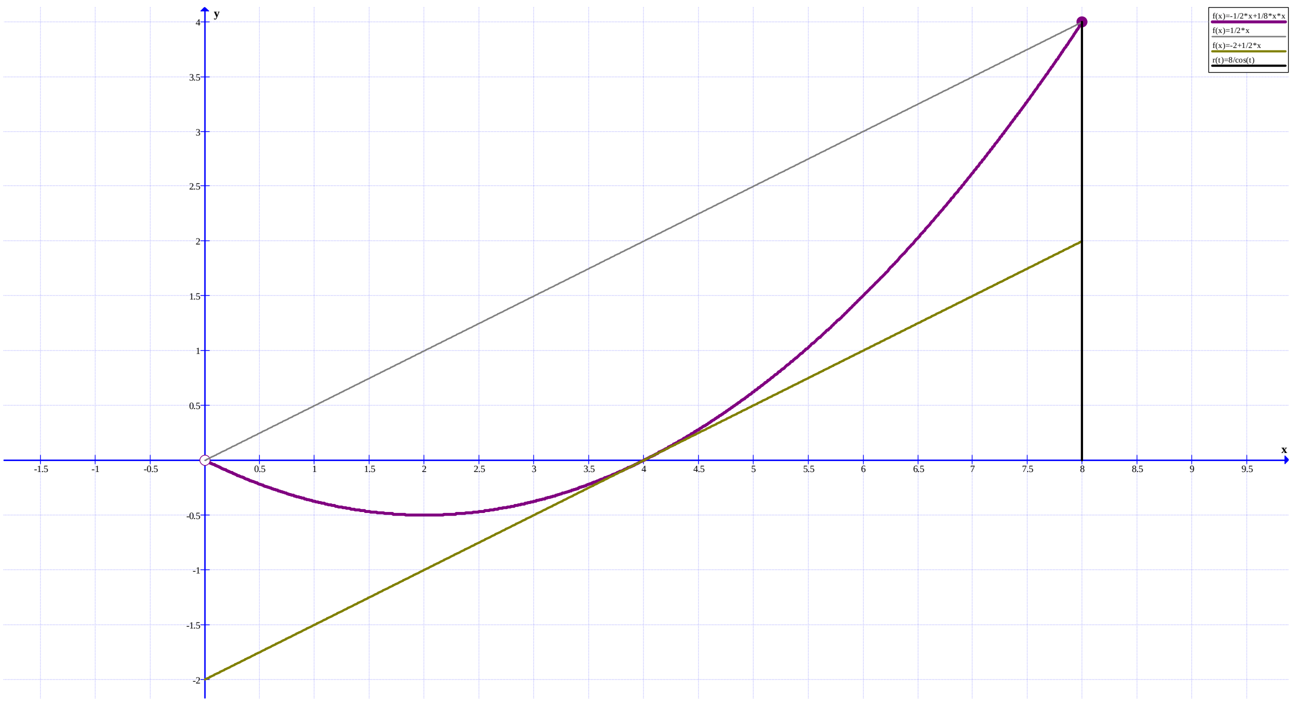
Ez megegyezik a 2. ábráról – a ***Graph*** segítségével – leolvasható értékkel.

Még nézzük meg a már említett ***a* = *b*** speciális esetet! Ekkor (18), (19) - cel:

$$\underline{x_P\big|_{a=b}}=\frac{4\cdot f}{8\cdot f}\cdot l=\underline{\frac{l}{2}}\ ,$$

$$\underline{f\big|_{a=b}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b+b}{2}+\sqrt{b\cdot b}\right)=\underline{b=a}\ .$$

Ezt az esetet a 3. ábra szemlélteti, ***l* = 8 m, *h* = 4 m, *a* = *b* = 2 m** adatokkal.



3. ábra

Megjegyzések:

M1. Ez egy érdekes feladat, a meglepően szép (19) eredménnyel.
Ez úgy fogalmazható meg, hogy a belógás a mért ***a*** és ***b*** mennyiségek számtani és mértani középértékének számtani közepe – [2].

M2. A (19) eredményt [2] - ben *Grütter - féle összefüggés*nek nevezik.
Ennek további változatai alkalmasak a belógás építés közbeni beállítására, illetve már meglévő kábelszakasz belógásának ellenőrzésére – [2].

Irodalom:

[1] – ***R. Rothe***: Matematika gépészmérnökök számára
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.

[2] – ***Perneczky Géza***: Szabadvezetékek feszítése
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Sződliget, 2013. január 16.