Curvas, superficies e hipersuperficies de ángulo constante

Oscar Palmas
Facultad de Ciencias - UNAM, México

Universidad de Granada
8 de mayo de 2015

Apoyo de DGAPA-UNAM, PAPIIT IN113713

Plan de la charla

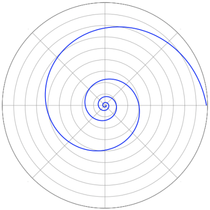
- Introducción.
- Curvas y superficies.
- El caso general.
- Dirección principal canónica.
- Curvatura media constante.

Nuestra intención es estudiar curvas, superficies e hipersuperficies que forman un ángulo constante con una dirección privilegiada en ciertas variedades.

Primeros ejemplos: Curvas

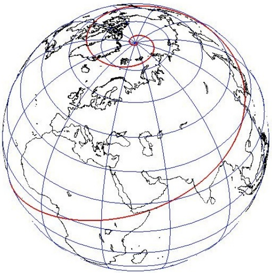
Los ejemplos obvios son las rectas, los planos y los hiperplanos en $\mathbb{R}^n$.

Un ejemplo mejor: La espiral logarítmica $r = ae^{b\theta}$ cumple que su vector tangente forma un ángulo constante con la dirección radial.



Primeros ejemplos: Curvas

Loxodromia. (Del gr. $\lambda o\xi o\zeta$, oblicuo, y $\delta\varrho o\mu o\zeta$, carrera).
f. Náut. Curva que en la superficie terrestre forma un mismo ángulo en su intersección con todos los meridianos, y sirve para navegar con rumbo constante.



Primeros ejemplos: Curvas

La hélice estándar mantiene un ángulo constante con la dirección vertical.

Primer ejemplo de clasificación: Superficies en $\mathbb{R}^3$

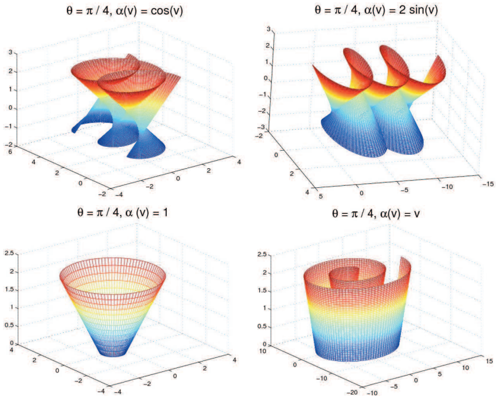
Teorema (Munteanu, Nistor, 2009)

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ forma un ángulo constante θ con la dirección fija e_3 si y sólo si es (un subconjunto abierto de) alguna de las siguientes:

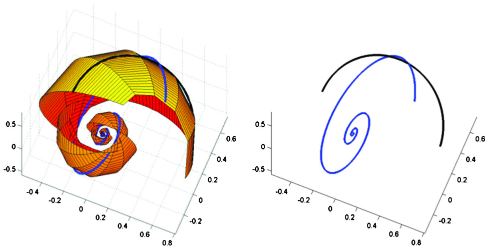
- $(u, v) \mapsto (u \cos\theta(\cos v, \operatorname{sen} v) + \gamma(v), u \operatorname{sen}\theta)$, con
$$\gamma(v) = \cos\theta \left(-\int_0^v \alpha(\tau) \operatorname{sen}\tau \, d\tau, \int_0^v \alpha(\tau) \cos\tau \, d\tau \right);$$
- el plano $x \operatorname{sen}\theta - z\cos\theta = 0$;
- un cilindro $\gamma \times \mathbb{R}$ sobre una curva γ en $\mathbb{R}^2$.

...y algunas figuras

(Munteanu, Nistor, 2009)



El propio Munteanu consideró el caso de superficies que forman un ángulo constante con el vector de posición, llamadas por él *superficies con pendiente constante*.



Subvariedades nulas

Una motivación más para el estudio de este tipo de objetos proviene de la importancia de las subvariedades nulas.

Definición

Sea $\bar{M}$ una variedad semi-riemanniana. Una subvariedad M de $\bar{M}$ es *nula* si la restricción de la métrica de $\bar{M}$ a M es degenerada.

Es claro que las superficies nulas en el espacio de Lorentz-Minkowski son precisamente aquellas superficies que forman un ángulo euclidiano constante $\theta = \pi/4$ con una dirección temporal fija.

Hipersuperficies con ángulo constante

Aunque hasta ahora sólo hemos mencionado los casos de curvas y superficies que forman un ángulo constante con una dirección constante o una dirección radial, podemos dar una definición general.

Definición

Sean X un campo vectorial en una variedad riemanniana $\bar{M}$ y $M \subset \bar{M}$ una hipersuperficie orientable. Decimos que M es una hipersuperficie con ángulo constante (relativa a X) si el ángulo entre X y un campo ξ normal a M es constante.

Nuestro primer problema

Este tipo de problemas ha sido abordado desde varios puntos de vista. En nuestro caso, nos planteamos:

Pregunta

Dada una variedad riemanniana $\bar{M}$, ¿qué tipo de campos X en $\bar{M}$ nos permiten extraer cierta información geométrica sobre las hipersuperficies con ángulo constante relativa a dichos campos?

Nuestro primer problema

Este tipo de problemas ha sido abordado desde varios puntos de vista. En nuestro caso, nos planteamos:

Pregunta

Dada una variedad riemanniana $\bar{M}$, ¿qué tipo de campos X en $\bar{M}$ nos permiten extraer cierta información geométrica sobre las hipersuperficies con ángulo constante relativa a dichos campos?

¿Campos paralelos? ¿Campos de Killing? ¿Otro tipo de campos?

Los campos que hemos estudiado

Definición

Sea $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ *una variedad riemanniana.*
Decimos que un campo vectorial X *en* $\bar{M}$ *es* *conforme cerrado* *si existe una función diferenciable* $\phi : \bar{M} \to \mathbb{R}$ *tal que*

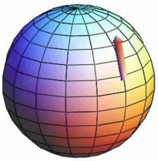
$$\bar{\nabla}_Y X = \phi Y$$

para todo campo Y *en* $\bar{M}$*.*

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$: Campos constantes y el campo de posición $X(p) = p$.
- En $\mathbb{S}^n$, sea X la proyección del campo constante e_{n+1} en $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre la esfera. Entonces

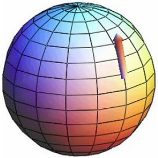
$$\nabla_Y X(p) = -\langle e_{n+1}, p\rangle Y.$$



Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$: Campos constantes y el campo de posición $X(p) = p$.
- En $\mathbb{S}^n$, sea X la proyección del campo constante e_{n+1} en $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre la esfera. Entonces

$$\nabla_Y X(p) = -\langle e_{n+1}, p\rangle Y.$$



Observemos que las curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ que mencionamos en la introducción corresponden precisamente a estos casos.

Propiedades de los campos conformes cerrados

Teorema (Montiel)

Sea $\bar{M}$ una variedad riemanniana que admite un campo X conforme cerrado que no sea idénticamente nulo. Entonces

- *El número máximo de ceros de X es 2;*
- *Fuera de los ceros de X, $\bar{M}$ es isométrica localmente a un producto alabeado (warped product) $(a, b) \times_\varrho N$, donde $\varrho = |X|$.*

Nuestras condiciones

Como nuestro análisis será local, podemos suponer de ahora en adelante que nuestra variedad es de la forma

$$\bar{M} = (a, b) \times_{\varrho} N.$$

En este caso, el campo conforme cerrado es $X = \varrho\, \partial_t$, con t la coordenada natural de (a, b).

Por ejemplo,

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{\text{polos}\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\cos\theta} \mathbb{S}^1.$$

Construcción de hipersuperficies con ángulo constante

Sea $\bar{M} = (a, b) \times_{\varrho} N$. Queremos construir funciones $F : N \to (a, b)$ cuya gráfica $\{ \ (F(p), p) \mid p \in N \ \}$ forme un ángulo constante con $X = \varrho\,\partial_t$.

Construcción de hipersuperficies con ángulo constante

Sea $\bar{M} = (a, b) \times_\varrho N$. Queremos construir funciones $F : N \to (a, b)$ cuya gráfica $\{ \, (F(p), p) \mid p \in N \, \}$ forme un ángulo constante con $X = \varrho \, \partial_t$.

Recordemos las siguientes definiciones.

Definición

Una función $F : N \to (a, b)$ es eikonal si la norma de su gradiente es constante:

$$|\operatorname{grad} F| = C.$$

Más en general, si $\varrho : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ es una función diferenciable, F es transnormal (con respecto de ϱ) si

$$|\operatorname{grad} F| = C \cdot (\varrho \circ F).$$

Teorema (Garnica, —,Ruiz)

Sea $\bar{M} = (a, b) \times_\varrho N$.
Una hipersuperficie conexa M tiene ángulo constante relativo a $\varrho\partial_t$ si y sólo si es un subconjunto abierto de

1. *Un cilindro de la forma $(a, b) \times N_0$, donde N_0 es una hipersuperficie de N; o bien*
2. *La gráfica de una función transnormal $F : N \to (a, b)$ con respecto de ϱ; es decir,*

$$|\operatorname{grad} F| = C \cdot (\varrho \circ F).$$

Teorema (Garnica, —,Ruiz)

Sea $\bar{M} = (a, b) \times_\varrho N$.
Una hipersuperficie conexa M tiene ángulo constante relativo a $\varrho\partial_t$ si y sólo si es un subconjunto abierto de

1. *Un cilindro de la forma $(a, b) \times N_0$, donde N_0 es una hipersuperficie de N; o bien*
2. *La gráfica de una función transnormal $F : N \to (a, b)$ con respecto de ϱ; es decir,*

$$|\operatorname{grad} F| = C \cdot (\varrho \circ F).$$

Sí, pero. . . ¿Cómo construir una función transnormal?

Proposición (Garnica, —, Ruiz)

Sea N una variedad riemanniana y $\varrho : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ una función diferenciable positiva. Además, sea $L \subset N$ una hipersuperficie orientable y L_ϵ una vecindad tubular de L tal que la función distancia d a L está bien definida en L_ϵ y es diferenciable in $L_\epsilon \setminus L$. Definimos $h : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ como

$$h^{-1}(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{d\sigma}{C\varrho(\sigma)}.$$

Entonces la función "distancia modificada" $F = h \circ d$ satisface

$$|\operatorname{grad} F| = C \cdot (\varrho \circ F).$$

en $L_\epsilon \setminus L$.

También mostramos el siguiente resultado de unicidad.

Proposición (Garnica, —, Ruiz)

Sea $F : N \to \mathbb{R}$ una función transnormal, es decir, F satisface

$$|\operatorname{grad} F| = C \cdot (\varrho \circ F).$$

Entonces F está dada localmente como en la proposición anterior, es decir, como una función distancia modificada.

Dirección principal canónica

Paralelamente al estudio de las hipersuperficies con ángulo constante, también hay otras hipersuperficies interesantes.

Definición

Dado un campo X en una variedad riemanniana $\bar{M}$ y una hipersuperficie $M \subset \bar{M}$, decimos que M tiene una dirección principal canónica (relativa a X) si la proyección de X sobre TM define una dirección principal de M.

Dirección principal canónica

Paralelamente al estudio de las hipersuperficies con ángulo constante, también hay otras hipersuperficies interesantes.

Definición

Dado un campo X en una variedad riemanniana $\bar{M}$ y una hipersuperficie $M \subset \bar{M}$, decimos que M tiene una dirección principal canónica (relativa a X) si la proyección de X sobre TM define una dirección principal de M.

Por ejemplo, las superficies de rotación en $\mathbb{R}^3$ tienen una dirección principal canónica relativa al campo paralelo al eje de rotación.

Ángulo constante y dirección principal canónica

Proposición

Sea $\bar{M} = (a, b) \times_\varrho N$. Si M es una hipersuperficie orientable de $\bar{M}$ que forma un ángulo constante θ con $X = \varrho\,\partial_t$, entonces M tiene una dirección principal canónica relativa a X.

De hecho, si A_ξ es el operador de forma de M, entonces

$$A_\xi T = -\cos\theta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,T,$$

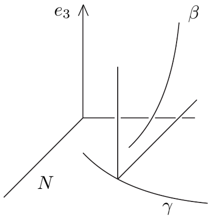
donde T es la proyección de ∂_t sobre TM y θ es el ángulo que forma X con un campo ξ normal a M.

Un ejemplo en $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$, sea N un plano horizontal, $\gamma = \gamma(s)$ una curva en N y $\eta(s) = \gamma''(s)/\|\gamma''(s)\|$. Dada una curva plana $\beta(t) = (f(t), g(t))$, la superficie M dada por

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + f(t)\eta(s) + g(t)e_3 \tag{1}$$

tiene dirección principal canónica relativa a e_3.



Como caso particular, si $\gamma(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s)$ y pedimos que la curvatura media se anule, obtenemos

$$f(t) = \cosh(\operatorname{senh}^{-1}(t)) + 1, \quad g(t) = \operatorname{senh}^{-1}(t),$$

que es la parametrización por longitud de arco de la catenaria y por tanto M es el catenoide en $\mathbb{R}^3$.

Como caso particular, si $\gamma(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s)$ y pedimos que la curvatura media se anule, obtenemos

$$f(t) = \cosh(\operatorname{senh}^{-1}(t)) + 1, \quad g(t) = \operatorname{senh}^{-1}(t),$$

que es la parametrización por longitud de arco de la catenaria y por tanto M es el catenoide en $\mathbb{R}^3$.

Este ejemplo sencillo muestra que no toda superficie con dirección principal canónica es una con ángulo constante.

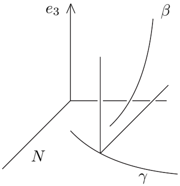
Ángulo constante y dirección principal canónica

En el caso de las hipersuperficies con dirección principal canónica logramos obtener condiciones necesarias y suficientes para su caracterización.
Para enunciar estas condiciones, sea $\bar{M}^{n+1}$ una variedad riemanniana, X un campo vectorial conforme cerrado en $\bar{M}$ y M una hipersuperficie orientable de $\bar{M}$ con campo normal ξ.

Teorema (Garnica, —, Ruiz)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- M tiene una dirección principal canónica respecto de X, es decir, la proyección T de X sobre TM es una dirección principal.
- El ángulo θ entre X y ξ es constante a lo largo de las direcciones tangentes a M y ortogonales a T.



Localmente, podemos suponer que $\bar{M}$ es isométrica a $(a, b) \times_\varrho N$. Denotamos por $h : M \to \mathbb{R}$ a la función altura de M, es decir, la restricción a M de la proyección natural $\pi : (a, b) \times_\varrho N \to (a, b)$. Si el ángulo $\theta \neq \pi/2$, podemos suponer también que M es la gráfica de una función $F : N \to (a, b)$.

Teorema

Bajo la notación anterior, las condiciones de la primera parte son equivalentes a:

- *Las curvas integrales de T son geodésicas en M.*
- *$|\operatorname{grad} h|$ es constante a lo largo de las curvas de nivel de h.*
- *$|\operatorname{grad} F|$ es constante a lo largo de las curvas de nivel de F.*

Para la construcción de ejemplos

Proposición

Sea $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\varrho} N$. *Sea* $F : N \to \mathbb{R}$ *una función transnormal respecto de una función* $b \geq 0$*; es decir, tal que*

$$\left|\operatorname{grad} F\right| = b \circ F. \tag{2}$$

Entonces la gráfica de F *tiene una dirección principal canónica relativa al campo* ∂_t.

"Recíprocamente",

Proposición

Sea $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\varrho} N$. *Si la gráfica de una función* $F : N \to \mathbb{R}$ *tiene una dirección principal canónica respecto del campo* ∂_t *y el ángulo* θ *entre* ∂_t *y el campo* ξ *normal a la gráfica siempre cumple* $\theta \neq \pi/2$, *entonces* F *es transnormal.*

La manera de construir estas gráficas es análoga al caso de ángulo constante.

Proposición

Sea N una variedad riemanniana, $L \subset N$ una hipersuperficie orientable de N y L_ϵ una vecindad tubular de L tal que la función d distancia a L está bien definida en L_ϵ y es diferenciable en $L_\epsilon \setminus L$. Además, sea $b : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva. Definimos una función invertible $h : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ como

$$h^{-1}(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{d\sigma}{b(\sigma)}.$$

Entonces la gráfica de $F = h \circ d$ es una hipersuperficie en $\bar{M} = (a, b) \times_\varrho N$ con dirección principal canónica.

Además, cualquier hipersuperficie con dirección principal canónica dada como la gráfica de una función transnormal F tiene esta forma.

Dos resultados para curvatura media constante

Proposición

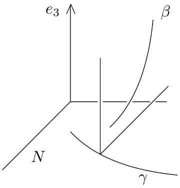
Sea M una hipersuperficie mínima en $\mathbb{R}^{n+1}$ que forma un ángulo constante con una dirección fija. Entonces M es (parte de) un hiperplano o (de) un cilindro sobre una hipersuperficie mínima en $\mathbb{R}^n$.

La demostración se basa en que una función eikonal, armónica no constante es lineal.

Dos resultados para curvatura media constante

Proposición

Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$ con dirección principal canónica respecto de un campo vectorial constante. Si M tiene curvatura media constante, entonces M es un subconjunto abierto de un hiperplano, de un cilindro o de una superficie de Delaunay.



Comentarios finales: El caso lorentziano

Si $\bar{M}$ es una variedad lorentziana y M es una hipersuperficie espacial de $\bar{M}$, existe un campo unitario temporal ξ normal a M. En este caso, si X es el campo conforme cerrado, pedimos adicionalmente que ambos campos estén en el mismo cono de tiempo ($\langle X, \xi \rangle < 0$), de modo que ahora θ denote el ángulo hiperbólico entre estos campos, es decir, θ satisface

$$\cosh\theta = -\left\langle \frac{X}{|X|}, \xi \right\rangle .$$

Con esta precisión, nuestros resultados siguen siendo válidos.

Más sobre el caso lorentziano

Si imponemos condiciones sobre la curvatura de la hipersuperficie, tenemos también resultados de caracterización como el siguiente.

Teorema (—, Ruiz)

Sea M una superficie temporal en una variedad lorentziana de dimensión 3 que forma un ángulo (hiperbólico) constante θ con un campo paralelo X. Si M es maximal, entonces es totalmente geodésica. Además, si $\theta \neq 0$, M también es plana.

Curvas, superficies e hipersuperficies de ángulo constante

Oscar Palmas
Facultad de Ciencias - UNAM, México

Universidad de Granada
8 de mayo de 2015

¡Gracias por su atención!