

# 过程控制原理应用I

(检测技术与过程控制原理)

**主讲人：安剑奇 教授**

中国地质大学（武汉） 自动化学院

2020年10月

# 第5章 被控过程特性及其 数学模型



# 第5章 被控过程特性及其数学模型

---

---

- 5.1 被控过程的特性
- 5.2 被控过程的数学模型
- 5.3 解析法建立过程的数学模型
- 5.4 实验辨识法建立过程的数学模型
- 5.5 本章小结

## 5.1 被控过程的特性

---

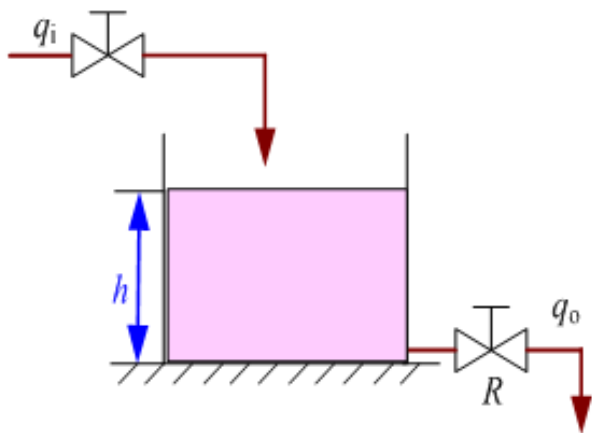
---

- 只有了解和掌握被控过程动态特性才能合理设计控制方案
- 被控过程一般可划分为自衡特性与无自衡特性，单容特性与多容特性，振荡与非振荡特性等
- 以被控过程阶跃响应将典型的工业过程动态特性分为4类：
  - 自衡的非振荡过程
  - 无自衡的非振荡过程
  - 自衡的振荡过程
  - 具有反向特性的过程

## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 自衡的非振荡过程

- 在原平衡状态出现干扰时，无需外加任何控制作用，被控过程能够自发地趋于新的平衡状态



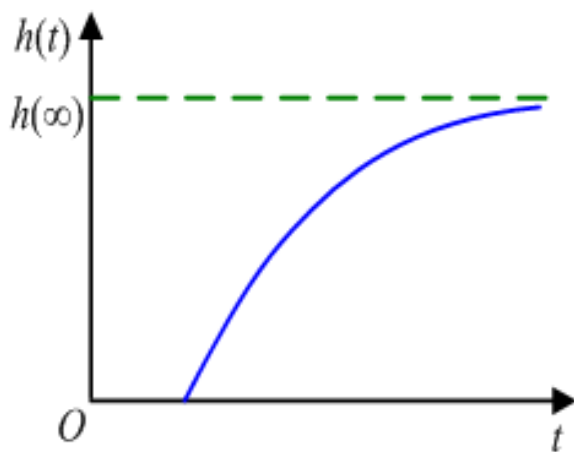
具有自衡特性的液位过程

- 当进料等于出料时，过程处于平衡状态
- 增大进料阀开度，进料量发生阶跃响应，进料量大于出料量，液位上升
- 液位上升导致出料阀静压增大，出料增加，使液位上升速度减慢
- 最终进料等于出料，液位趋于新的平衡

## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 自衡的非振荡过程

- 自衡非振荡：阶跃输入信号作用下，输出响应曲线能没有振荡地从一个稳态趋向于另一个稳态



自衡非振荡过程的响应曲线

## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 自衡的非振荡过程传递函数

□ 具有纯滞后的一阶惯性环节:

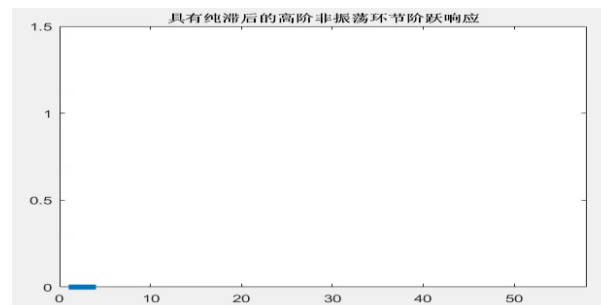
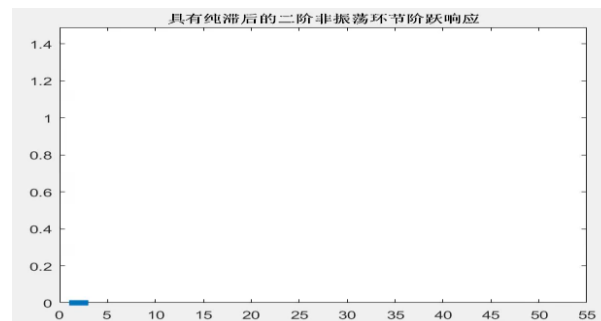
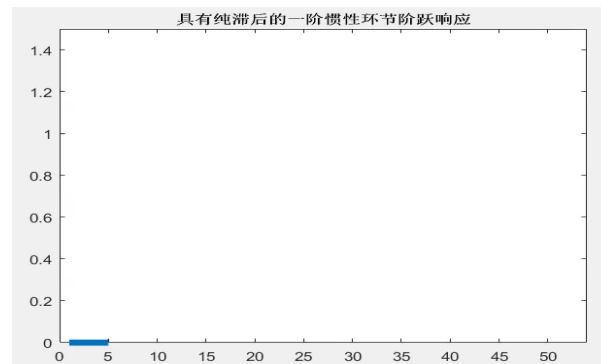
$$G_0(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

□ 具有纯滞后的二阶非振荡环节:

$$G_0(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s}$$

□ 具有纯滞后的高阶非振荡环节:

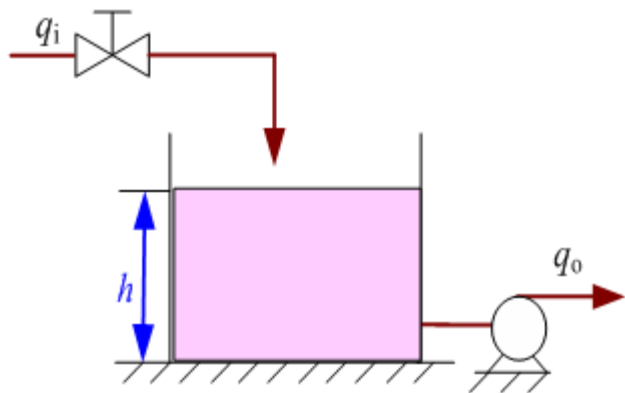
$$G_0(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} e^{-\tau s}$$



## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 无自衡的非振荡过程

□ 无自衡：在原平衡状态出现干扰时，当没有外加任何控制作用时，被控过程不能重新到达新的平衡状态



具有无自衡特性的液位过程

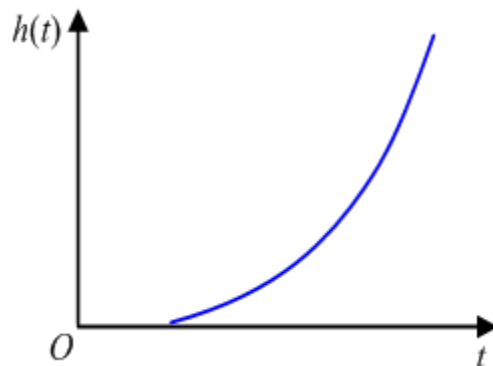
- 抽水机的出料量不随液位的变化而变化，泵的转速不变，出料量恒定
- 当进料量大于出料量，液位会一直上升，直至溢出
- 当进料小于出料，液位会一直降低，直至抽干，无法到达平衡



## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 无自衡的非振荡过程

- 无自衡非振荡：阶跃输入信号作用下，输出响应曲线会没有振荡地从一个稳态一直上升或下降，不能达到新的稳态



无自衡非振荡过程的响应曲线

## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 无自衡的非振荡过程

- 具有纯滞后的一阶积分环节:

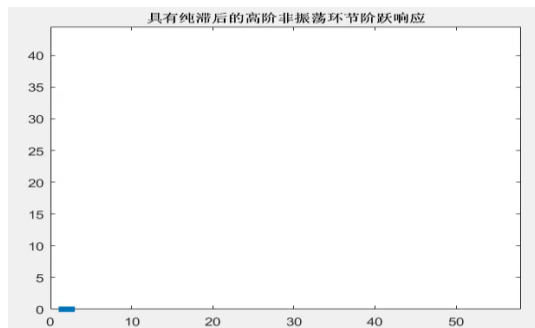
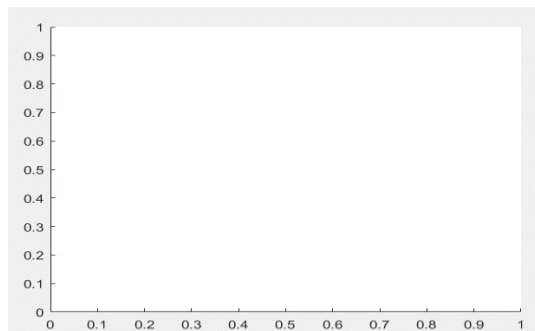
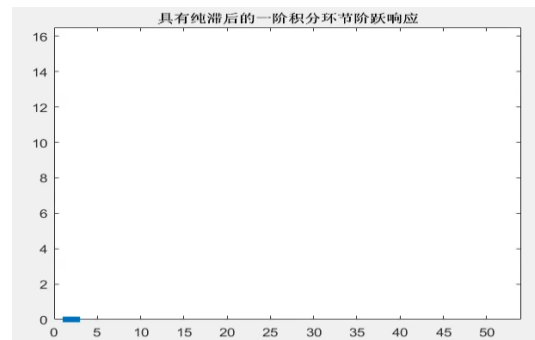
$$G_0(s) = \frac{1}{T_S} e^{-\tau s}$$

- 具有纯滞后的二阶非振荡环节:

$$G_0(s) = \frac{K}{T_1 s (T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$$

- 具有纯滞后的高阶非振荡环节:

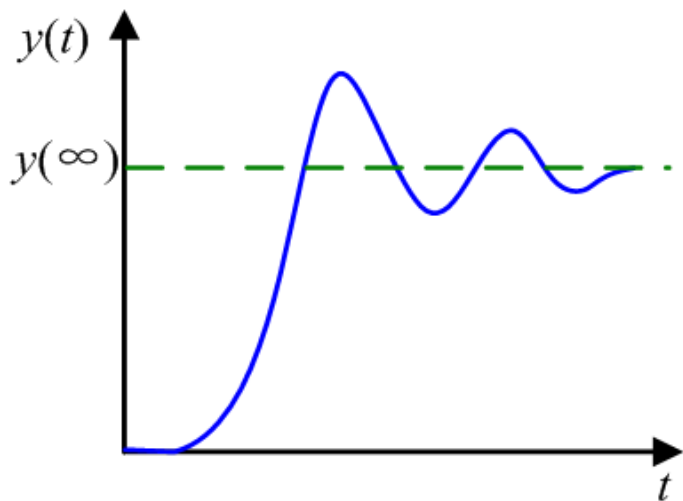
$$G_0(s) = \frac{K}{T_1 s (T s + 1)^{n-1}} e^{-\tau s}$$



## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 自衡的振荡过程

□ 自衡振荡：阶跃输入信号作用下，输出响应曲线呈现衰减振荡特性，最终被控过程趋于新的稳态值



有自衡的振荡过程

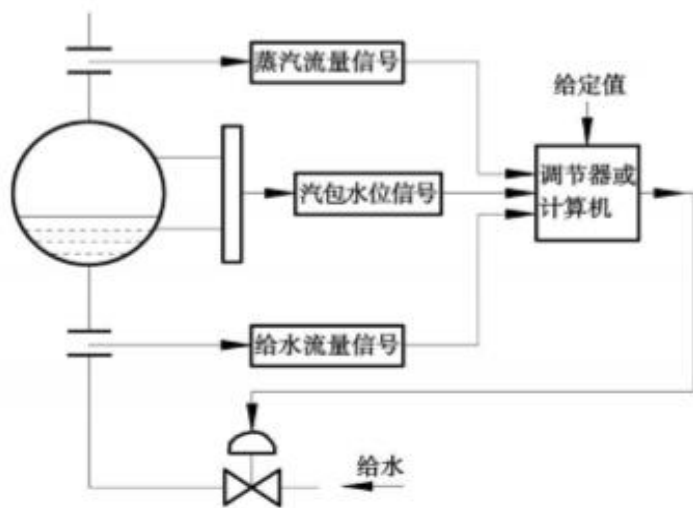
$$G_0(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} e^{-\tau s}, (0 < \xi < 1)$$

- 一个处于平衡状态的弹簧系统，当受到外力作用时，会不断做减幅振荡，最后会再次处于平衡状态

## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 具有反向特性的过程

- 阶跃信号作用下，过程输出先降后升或先升后降，即过程响应曲线在开始的一段时间内变化方向与以后的变化方向相反



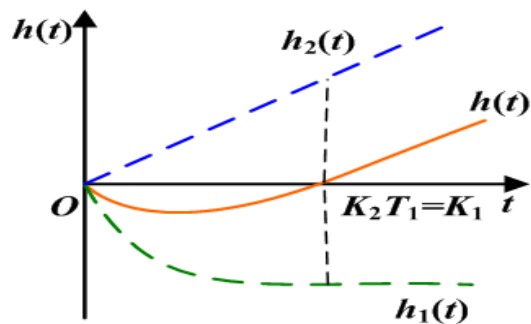
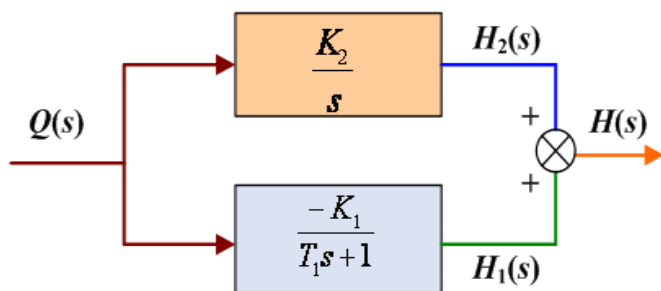
锅炉燃烧-给水系统

- 计算机给阀门信号，冷水进入汽包进行加热，产生水蒸气
- 水蒸气流量信号、汽包水位信号、给水流量信号进入计算机进行控制

## 5.1 被控过程的特性

### ➤ 具有反向特性的过程

- ❑ 冷水进入量大于蒸汽负荷量，水位逐渐上升，如图中 $h_2(t)$
- ❑ 冷水进入影响水中气泡量，减少沸腾，使水位下降，如图中 $h_1(t)$
- ❑ 二者叠加，最终的曲线如图中 $h(t)$



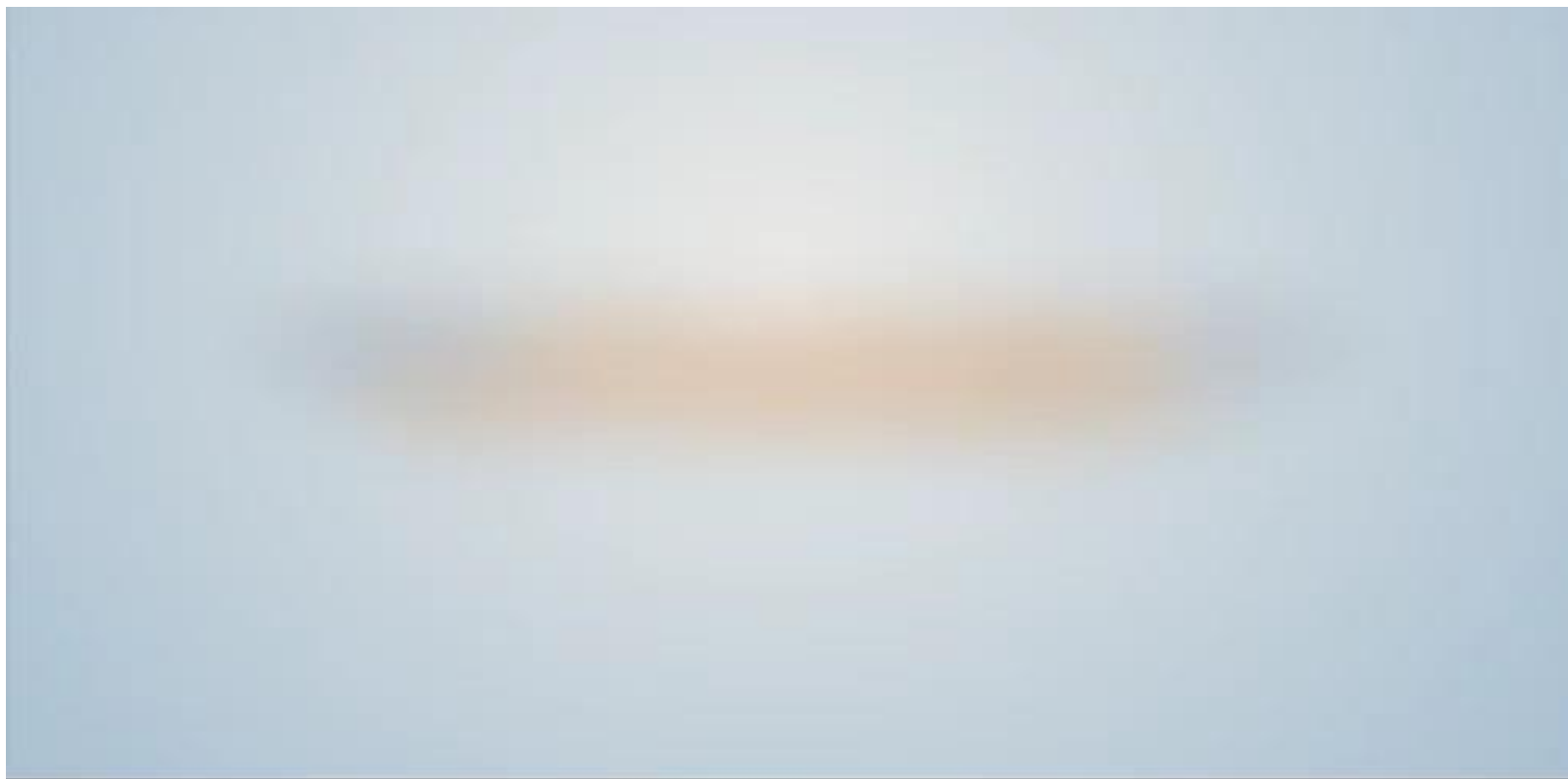
- ✓  $\frac{k_2}{s}$ : 冷水量对水位的直接影响
- ✓  $\frac{-k_1}{T_1s+1}$ : 冷水量影响水中气泡量，使水位发生变化

- ✓ 蓝虚线: 正向积分特性
- ✓ 绿虚线: 反向惯性特性
- ✓ 橙实线: 反向特性

## 5.1 被控过程的特性

---

---



# 第5章 被控过程特性及其数学模型

---

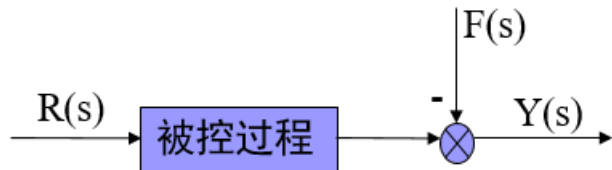
---

- 5.1 被控过程的特性
- 5.2 被控过程的数学模型
- 5.3 解析法建立过程的数学模型
- 5.4 实验辨识法建立过程的数学模型
- 5.5 本章小结

## 5.2 被控过程的数学模型

### ➤ 建立被控过程的数学模型的目的

- 设计过程控制系统，整定控制器参数
- 指导生产工艺及设备的设计
- 被控过程及新型控制策略的仿真分析和研究
- 工业过程的故障检测与诊断系统设计等



被控过程数学模型框图

- 描述输入变量和输出变量之间的关系
- 输入包括控制作用和干扰作用
- 输出变量为过程的被控变量



## 5.2 被控过程的数学模型

---

---

### ➤ 过程数学模型分类

- 按时间特性：连续和离散
- 按模型描述：传递函数、状态空间、微分方程和差分方程等
- 按过程类型：集中参数、分布参数和多级过程模型
- 按建模的输入信号：非周期函数、周期函数、非周期性随机函数和周期性随机函数建立的模型等
- 按运动特性：
  - 静态数学模型：描述过程稳态时的输入变量和输出变量之间的数学关系
  - 动态数学模型：描述输出变量与输入变量之间随时间而变化的动态关系

## 5.2 被控过程的数学模型

### ➤ 数学模型的表示形式

#### □ 用参量形式表示模型

- 微分方程

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + y(t) = b_m u^{(m)}(t - \tau) + \dots + b_1 u'(t - \tau) + b_0 u(t - \tau)$$

- 差分方程

$$a_n y(k - n) + \dots + a_1 y(k - 1) + y(k) = b_m u(k - m - d) + \dots + b_1 u(k - 1 - d)$$

- 传递函数

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n} e^{-\tau s}$$

- 脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d}$$

#### □ 用非参量形式表示模型：如曲线、数据表格等

## 5.2 被控过程的数学模型

### ➤ 过程建模的基本方法

- 白箱方法：解析法（机理演绎法）
- 黑箱方法：实验辨识法（系统辨识与参数估计方法）
- 灰箱方法：解析法与实验辨识相结合的混合方法

#### 1 解析法

- 根据内在机理，运用已知的静态和动态平衡关系，用数学推理建立模型
- 特点：在系统设计前完成数学模型推导，有利于系统方案的分析与设计
- 不足：对内在机理复杂，难以完全了解内部变化情况

## 5.2 被控过程的数学模型

### □ 实验辨识法

- 根据被控过程输入、输出的实验测试数据，通过过程辨识和参数估计建立过程的数学模型，确定模型结构和参数
- 特点：对于内在机理复杂的被控过程，比机理建模相对容易
- 缺点：受数据所对应工况的限制，模型往往难以对外推广

### □ 混合法

- 将机理演绎法和实验辨识法相结合来建立过程的数学模型
- 特点：比实验辨识法具有更好的推广能力，比机理模型简单

# 第5章 被控过程特性及其数学模型

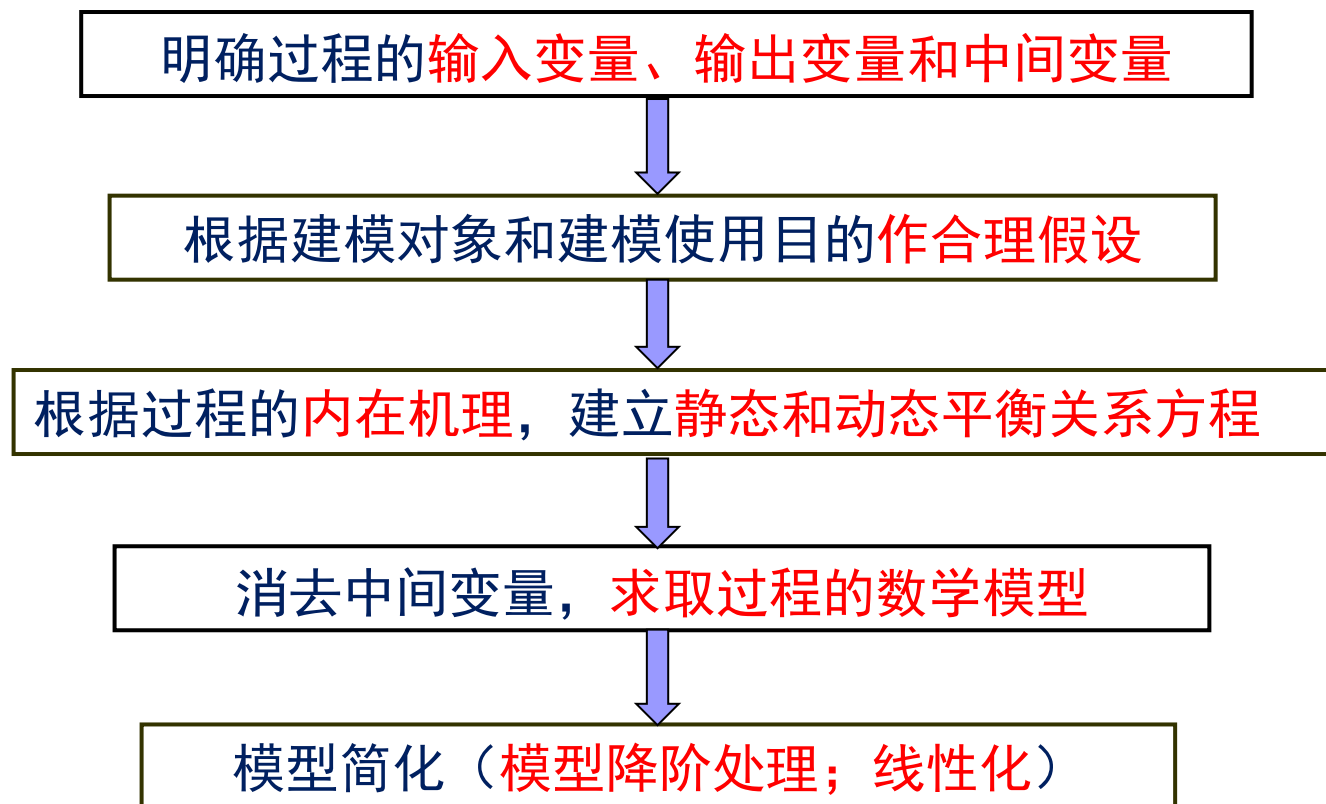
---

---

- 5.1 被控过程的特性
- 5.2 被控过程的数学模型
- 5.3 解析法建立过程的数学模型
- 5.4 实验辨识法建立过程的数学模型
- 5.5 本章小结

## 5.3 解析法建立过程的数学模型

### ➤ 解析法建模的一般步骤



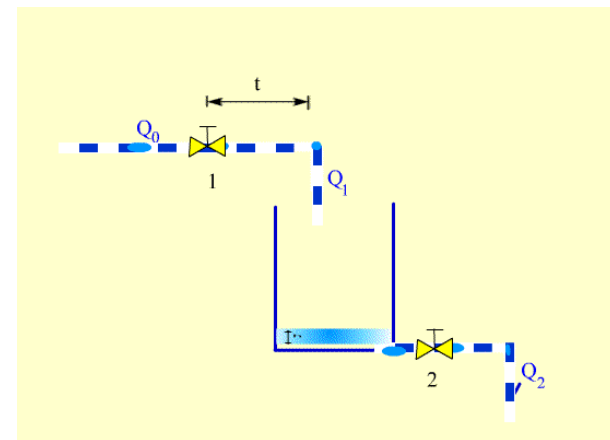
## 5.3 解析法建立过程的数学模型——单容过程

### ➤ 单容过程的建模

□ 单容过程：只有一个贮蓄容量的过程

#### ✓ 例5-1 单容液位过程

- 输入流量 $Q_1$ 通过阀门1的开度来改变，输出流量 $Q_2$ 通过阀门2的开度来改变
- 液位高度 $h$ 为被控量；
- 要求：试列写 $h$ 与 $Q_1$ 之间的数学表达式



单容液位过程

## 5.3 解析法建立过程的数学模型——单容过程

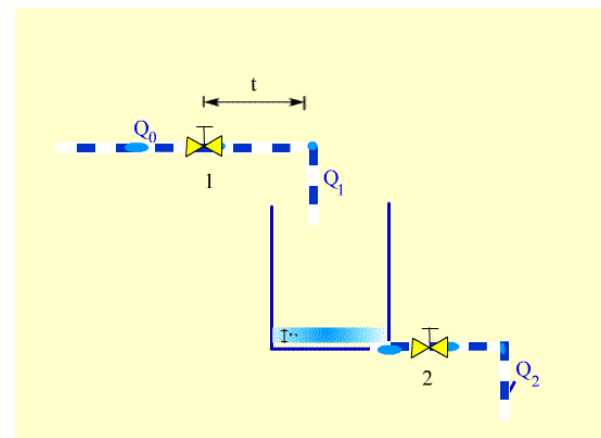
解：根据动态物料平衡关系：

$$q_1 - q_2 = A \frac{dh}{dt}$$

- ✓  $q_1 - q_2$  : 单位时间内水箱内流入与流出之差
- ✓  $A$  : 水箱截面积
- ✓  $\frac{dh}{dt}$  : 水箱内液体容量变化率

□ 表示为增量形式有： $\Delta q_1 - \Delta q_2 = A \frac{d\Delta h}{dt}$

□ 静态时： $q_1 = q_2$        $\frac{dh}{dt} = 0$





## 5.3 解析法建立过程的数学模型——单容过程

- 当  $q_1$  变化时, 液位随之变化, 出口静压发生变化,  $q_2$  也相应变化
- 假定  $q_2$  与  $h$  近似成线性正比关系, 与阀门2处液阻  $R_2$  成反比关系:

$$\Delta q_2 = \frac{\Delta h}{R_2}$$

- 综上:

$$\begin{cases} \Delta q_1 - \Delta q_2 = A \frac{d\Delta h}{dt} \\ \Delta q_2 = \frac{\Delta h}{R_2} \end{cases}$$

- 整理得:

$$R_2 A \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = R_2 \Delta q_1$$

## 5.3 解析法建立过程的数学模型——单容过程

□ 拉氏变换，得到传递函数形式

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{R_2As + 1}$$

□ 令：时间常数  $T = R_2A = R_2C$ ，放大系数  $K = R_2$ ，容量系数  $C = A$

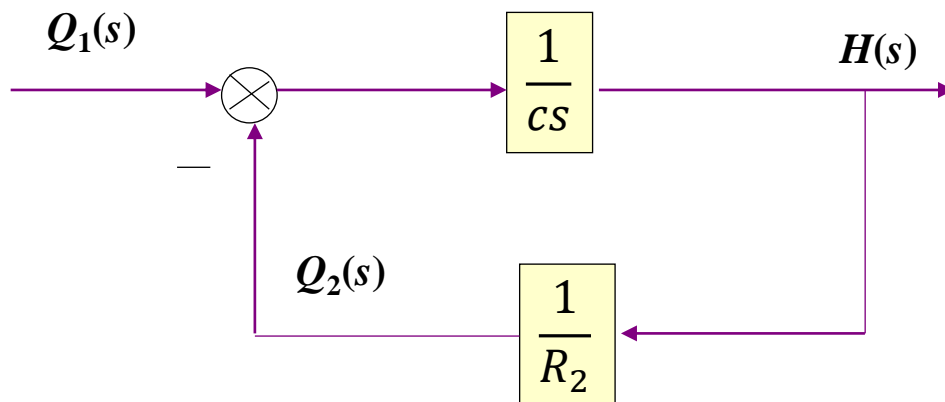
□ 则：

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{R_2As + 1} = \frac{K}{T + 1}$$

结论：单容自衡过程可以采用一阶惯性环节加以描述

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—单容过程

### ➤ 单容过程传递函数的结构方框图



- ✓  $\frac{1}{CS}$ : 水箱的输入量/输出量之间的动态平衡关系
- ✓  $\frac{1}{R_2}$ : 阀2的静压力关系

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—单容过程

推广1：考虑输入为液体体积流量为 $q_0$

- 当进水阀1的开度变化后，经长度为 $L$ 的管道进入水箱，使液位变化
- 设流经管道时间为 $\tau_0$ ，得具有纯时延的单容过程

$$R_2 A \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = R_2 \Delta q_0(t - \tau_0)$$

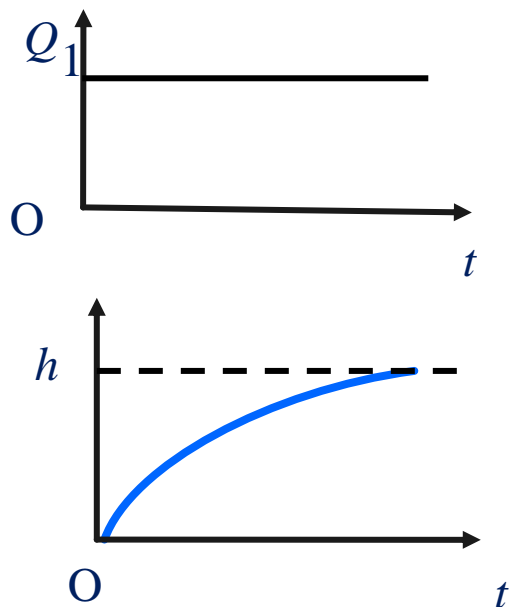
$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 A s + 1} e^{-\tau_0 s} = \frac{K_0}{T_0 s + 1} e^{-\tau_0 s}$$

其中， $T_0 = R_2 A$ ,  $K_0 = R_2$ ,  $C = A$ ,  $\tau_0$ 与 $L$ 有关

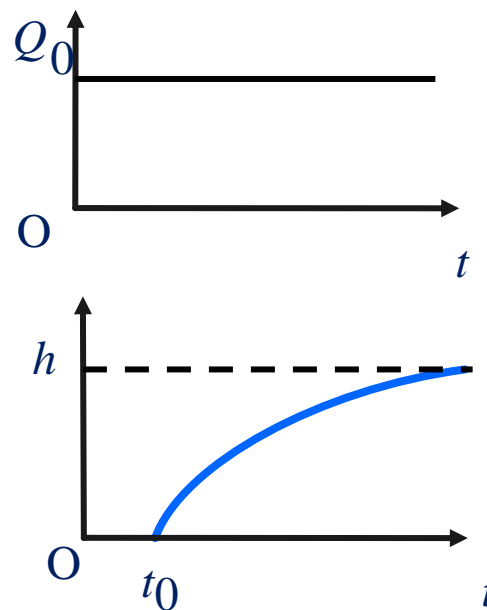
## 5.3 解析法建立过程的数学模型—单容过程

### ➤ 时域响应曲线

✓ 无时延自衡



✓ 有纯时延自衡



## 5.3 解析法建立过程的数学模型——单容过程

推广2：输出流量 $Q_2$ 通过泵来调节，液位变化，出口 $Q_2$ 不变

解：根据动态物料平衡关系

- 定量泵导致：

$$\Delta q_1 - \Delta q_2 = A \frac{d\Delta h}{dt}$$

- 整理后得到其增量化方程为： $\Delta q_2 = 0$

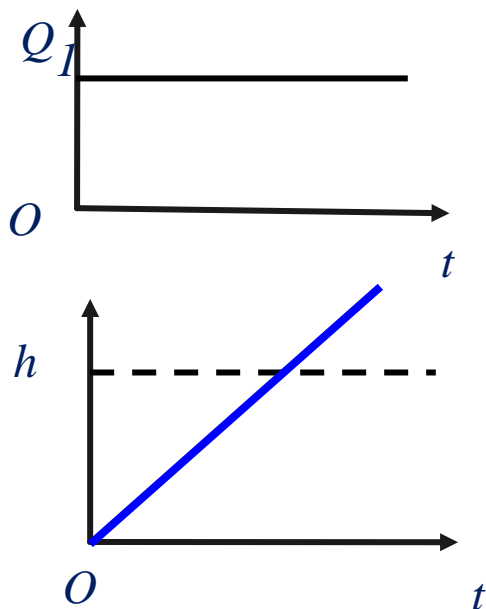
- 得到其传递函数为： $\Delta q_1 = A \frac{d\Delta h}{dt}$        $G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{Ts}$

结论：单容非自衡过程可以采用积分环节加以描述

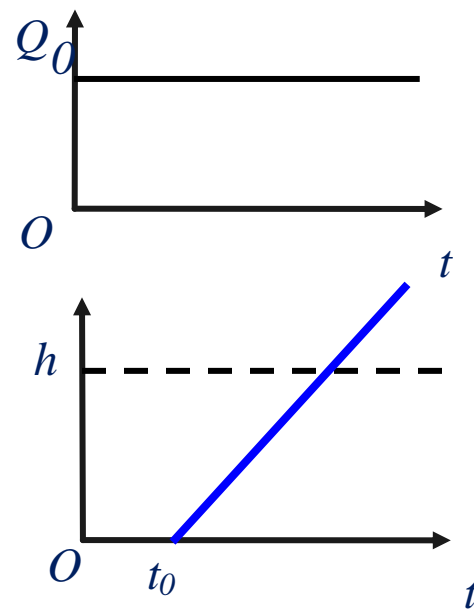
## 5.3 解析法建立过程的数学模型—单容过程

### ➤ 时域响应曲线

✓ 无纯时延非自衡



✓ 有纯时延非自衡



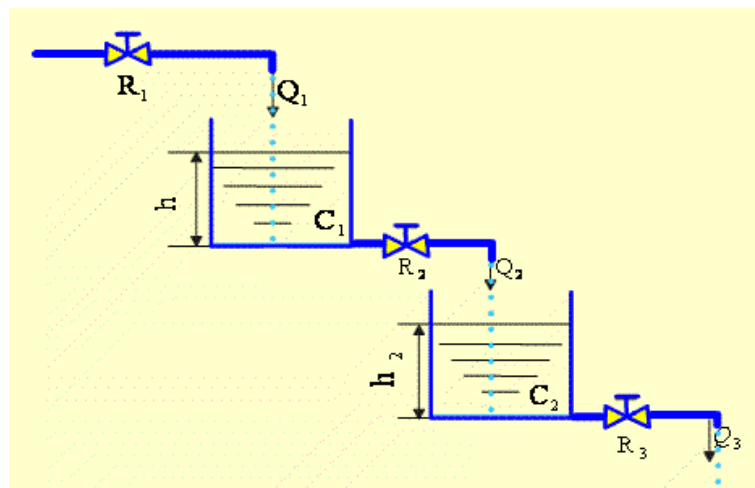
意义：进水量增加，出水量不变，液位会升高，直到溢出

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

➤ **多容过程**：由多个贮蓄容积组成的被控过程

### □ 例5-2 多容液位过程

- 分离式双容液位槽
- 输入量为 $Q_1$
- 输出量第二个液位槽的液位 $h_2$
- 假设：不计第一个与第二个液位槽之间管道所造成的时间延迟
- 试求 $h_2$ 与 $Q_1$ 之间的数学关系



双容液位过程



## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

解:

□ 水槽1:

$$\Delta q_1 - \Delta q_2 = C_1 \frac{d\Delta h_1}{dt}$$

□ 水槽2:

$$\Delta q_2 - \Delta q_3 = C_2 \frac{d\Delta h_2}{dt}$$

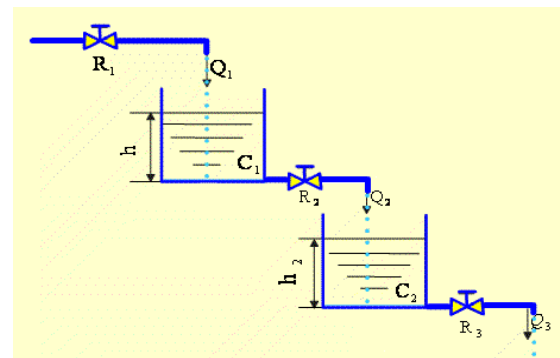
□ 阀2、3:

$$\Delta q_2 = \frac{\Delta h_1}{R_2} \quad \Delta q_3 = \frac{\Delta h_2}{R_3}$$

□ 令: 水槽1  $T_1 = R_2 A_1 = R_2 C_1$ , 水槽2  $T_2 = R_3 A_2 = R_3 C_2$ , 放大系数  $K = R_3$

□ 获得双容液位过程的传递函数为:

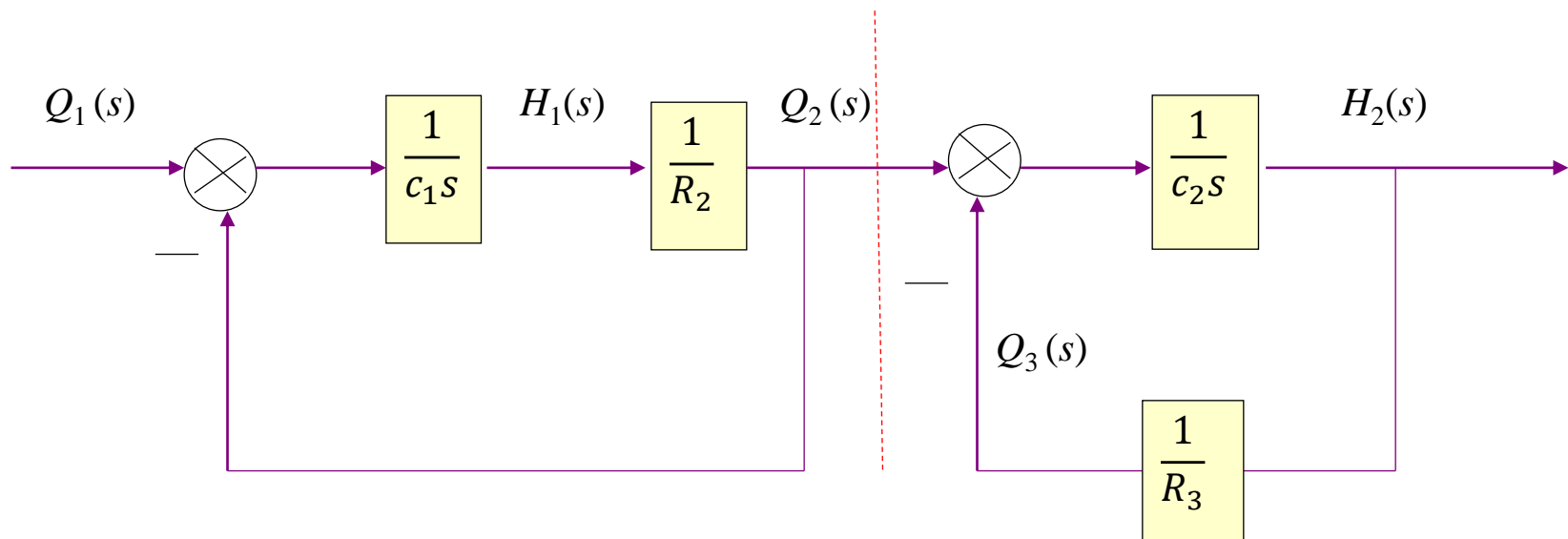
$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} \cdot \frac{H_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{R_3}{T_2 s + 1}$$



结论: 双容自衡过程可以采用二阶环节加以描述

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

### ➤ 多容过程数学模型方框图



- ✓  $\frac{1}{c_1 s}$ : 水槽1输入/输出的动态平衡关系
- ✓  $\frac{1}{R_2}$ : 阀2的静压力关系

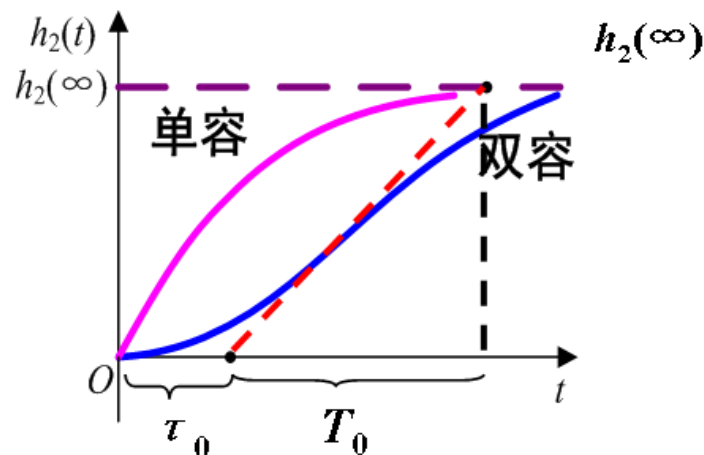
- ✓  $\frac{1}{c_2 s}$ : 水槽2输入/输出的动态平衡关系
- ✓  $\frac{1}{R_3}$ : 阀3的静压力关系

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

### ➤ 多容过程特性

- ❑ 双容两槽之间存在液体流通阻力，延缓了 $h_2$ 变化，导致一开始较慢，较单容过程时延大
- ❑ 容器的增加导致过程时间延迟增长
- ❑ 模型简化：采用单容过程近似

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_1(s)} \approx \frac{R_3}{T_0 s + 1} e^{-\tau_0 s}$$



双容过程的阶跃响应曲线

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

### ➤ 推广1: 考虑 $n$ 个水槽(容器)依次分离式连接

- 类推出多容过程( $n$ 个)的传递函数

$$G(s) = \frac{K_0}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots (T_ns + 1)}$$

- 若各个容器的容量系数相同, 各阀门的液阻也相同, 则

$$G(s) = \frac{K_0}{(T_0s + 1)^n}, T_1 = T_2 = \cdots T_n = T_0$$

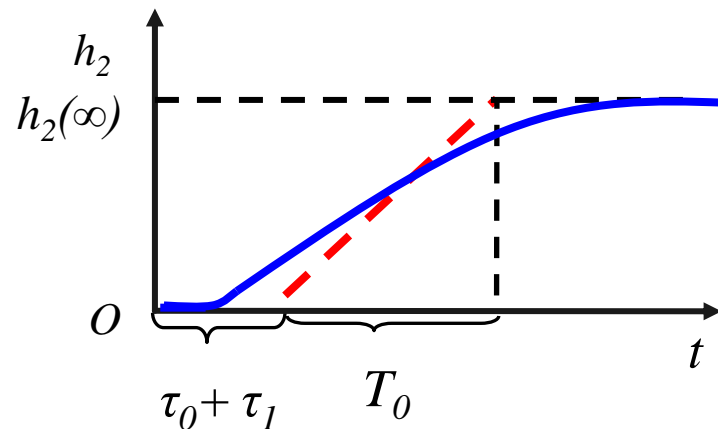
- 多容过程模型简化过程与双容过程简化为单容过程方法类似

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

### ➤ 推广2：考虑两水槽之间的管道长度带来的影响

- 阀2开度变化后，需流经长度为 $L$ 管道才能进入贮罐2，使液位 $h_2$ 发生变化
- 假设流经管道所需时间为 $\tau_1$ ，则具有纯时延多容过程传递函数为

$$G(s) = \frac{R_3}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau_1 s} \approx \frac{R_3}{(T_0s + 1)} e^{-(\tau_0 + \tau_1)s}$$



阶跃响应曲线

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

➤ 推广3：考虑输出液体体积流量为 $Q_3$ 通过泵来调节

□ 水槽1的液位高度变化，会对 $Q_2$ 产生影响

□ 水槽2的液位高度变化，不会对 $Q_3$ 产生影响

□ 解：根据多容过程类推关系：

$$G_1(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{T_1s + 1} = \frac{1}{R_2C_1s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{H_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{T_2s} = \frac{1}{c_2s}$$

□ 得到其传递函数为：

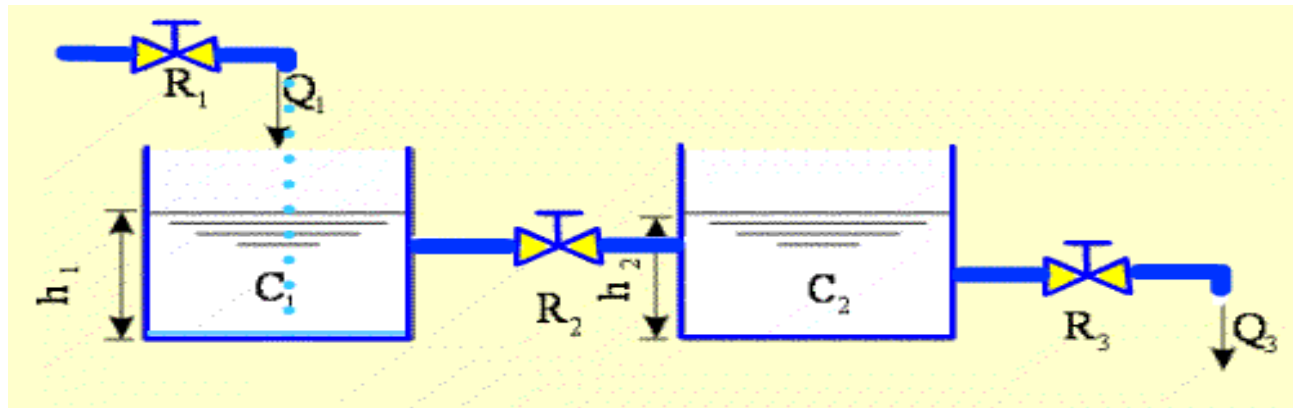
$$G(s) = \frac{Q_2(s) H_2(s)}{Q_1(s) Q_2(s)} = \frac{1}{T_1s + 1} \frac{1}{T_2s}$$

只要多容过程中存在一个无自衡环节则为无自衡多容过程

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

### 例6-3 串接并联式双容液位槽

□ 要求：试求 $h_2$ 与 $Q_1$ 之间的数学描述



并联式双容液位过程

## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

解：

- 水槽1  $\Delta q_1 - \Delta q_2 = C_1 \frac{d\Delta h_1}{dt}$
- 水槽2  $\Delta q_2 - \Delta q_3 = C_2 \frac{d\Delta h_2}{dt}$
- 阀2  $\Delta q_2 = \frac{\Delta h_1 - \Delta h_2}{R_2}$
- 阀3  $\Delta q_3 = \frac{\Delta h_2}{R_3}$
- 获得串联双容液位过程的传递函数为

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + T_{12})s + 1}$$

令：

- ✓ 水槽1的过程时间常数

$$T_1 = R_2 A_1 = R_2 C_1$$

- ✓ 水槽2的过程时间常数

$$T_2 = R_3 A_2 = R_3 C_2$$

- ✓ 过程的放大系数

$$K = R_3$$

- ✓ 水槽1与水槽2之间的关

联时间常数  $T_{12} = R_3 C_1$



## 5.3 解析法建立过程的数学模型—多容过程

□ 本过程的阶跃响应仍是单调上升的，传递函数可等效为

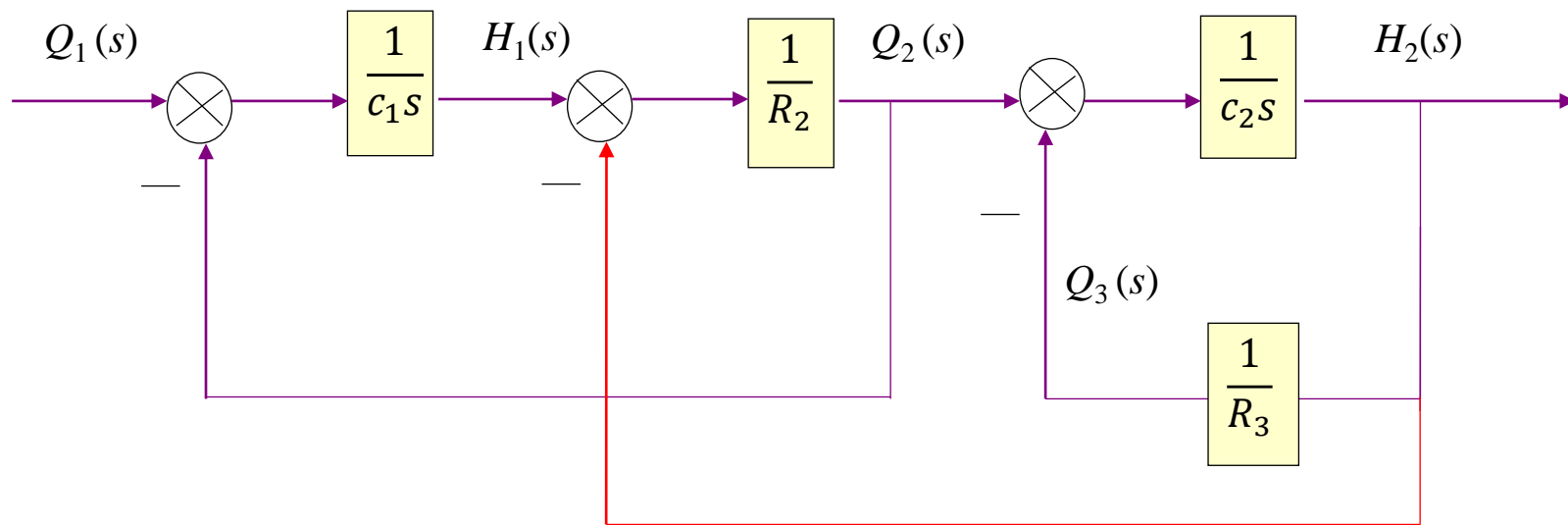
$$G(s) = \frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{K}{(T_A s + 1)(T_B s + 1)}$$

□ 等效时间常数为

$$T_A = \frac{2T_1 T_2}{(T_1 + T_2 + T_{12}) - \sqrt{(T_1 - T_2)^2 + T_{12}(T_{12} + 2T_1 + 2T_2)}}$$
$$T_B = \frac{2T_1 T_2}{(T_1 + T_2 + T_{12}) + \sqrt{(T_1 - T_2)^2 + T_{12}(T_{12} + 2T_1 + 2T_2)}}$$

## 5.3 解析法建立过程的数学模型

### ➤ 数学模型的结构方框图



✓ 红线：两水槽间的关联关系

# 第5章 被控过程特性及其数学模型

---

---

- 5.1 被控过程的特性
- 5.2 被控过程的数学模型
- 5.3 解析法建立过程的数学模型
- 5.4 实验辨识法建立过程的数学模型
- 5.5 本章小结

## 5.4.1 实验辨识法建模的基本步骤与方法

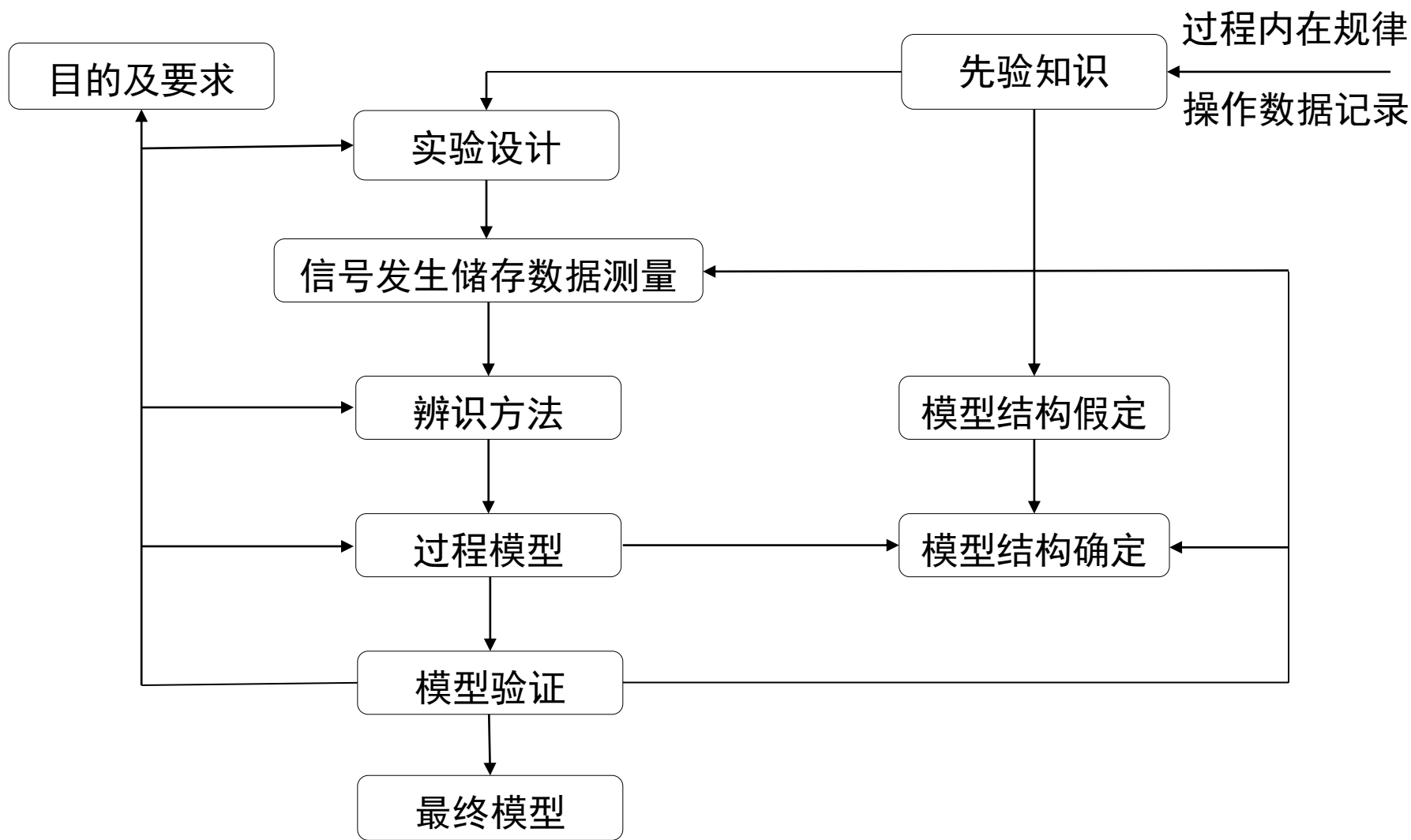
---

---

### ➤ 实验辨识法建模步骤

- 目的分析：分析数学模型的应用目的和相应要求
- 验前知识：来自对过程内在机理的了解和已有运行数据的分析结论
- 辨识方法：采用阶跃响应法，频率响应法，相关分析法等经典辨识法，或是最小二乘法，梯度校正法，极大似然法等现代辨识法
- 过程模型：采用参量形式，还是非参量形式描述
- 模型验证：自身验证或交叉验证
- 重复修正：若得到的模型不满足精度要求，则重新修正实验设计或模型结构，直到满足要求为止

## 5.4.1 实验辨识法建模的基本步骤与方法



## 5.4.2 响应曲线法辨识过程的模型

### ➤ 响应曲线法

- 通过测取阶跃响应或脉冲响应曲线辨识数学模型的方法
- 分类：阶跃响应曲线法、脉冲响应曲线法
- 原理：通过操作调节阀，使控制输入产生一个阶跃，将被控量响应曲线记录下来，求取过程输出与输入之间的数学关系

### ➤ 阶跃响应曲线法

- 根据阶跃响应确定一阶环节参数，需要确定的参数有两个：过程的放大系数 $k_0$ 和过程的时间常数 $T_0$

$$G_0(s) = \frac{k_0}{T_0s + 1}$$

## 5.4.2 响应曲线法辨识过程的模型

---

---

### ➤ 响应曲线法注意事项

- 试验测试前，被控过程应处于某一相对稳定的工作状态；
- 在相同条件下重复多次试验，以便能从多次试验结果中选取较接近的两个响应曲线作为分析依据，减少随机干扰的影响；
- 合理选择阶跃输入信号的幅度；
- 考虑到被控过程的非线性，分别对正、反方向的阶跃输入信号进行试验，并比较试验结果，以衡量过程的非线性程度

## 5.4.2 响应曲线法辨识过程的模型

### ➤ 响应曲线法

□ 对大多数过程而言，数学模型通常可近似为以下几种：

• 自衡特性过程：

$$✓ G_0(s) = \frac{k_0}{(T_0s+1)}$$

$$✓ G_0(s) = \frac{k_0}{(T_0s+1)} e^{-\tau s}$$

$$✓ G_0(s) = \frac{k_0}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$✓ G_0(s) = \frac{k_0}{(T_1s+1)(T_2s+1)} e^{-\tau s}$$

• 无自衡特性过程：

$$✓ G_0(s) = \frac{1}{T_0s}$$

$$✓ G_0(s) = \frac{1}{T_0s} e^{-\tau s}$$

$$✓ G_0(s) = \frac{k_0}{T_1s(T_2s+1)}$$



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---一阶环节

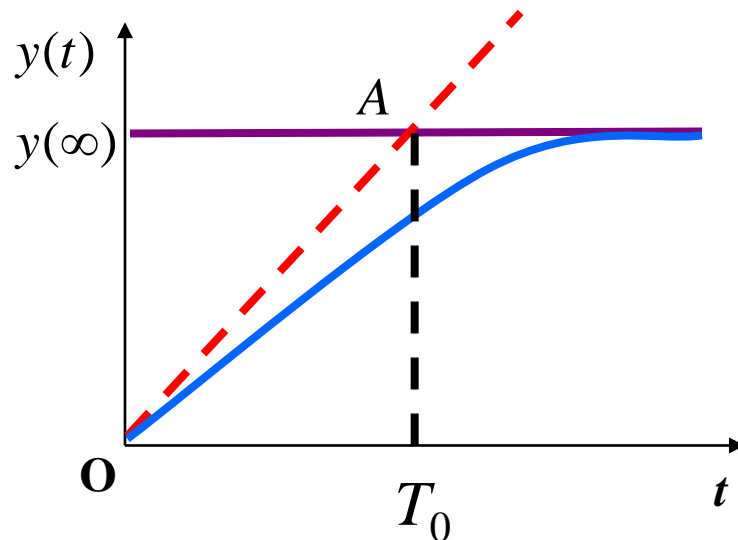
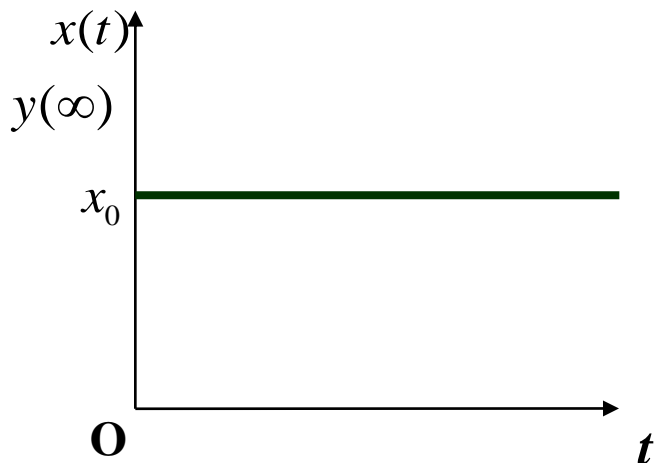
### ➤ 直角坐标图解法

□ 设阶跃输入变化量为 $x_0$ ，一阶无时延环节的阶跃响应为

$$y(t) = K_0 x_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \right)$$

□ 由阶跃响应曲线确定  $y(\infty)$ ，再由  $K_0 = y(\infty) / x_0$  确定  $K_0$

□ 在  $t=T_0$  处作切线，其与  $y(\infty)$  的交点所对应的时间为  $T_0$



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---一阶环节

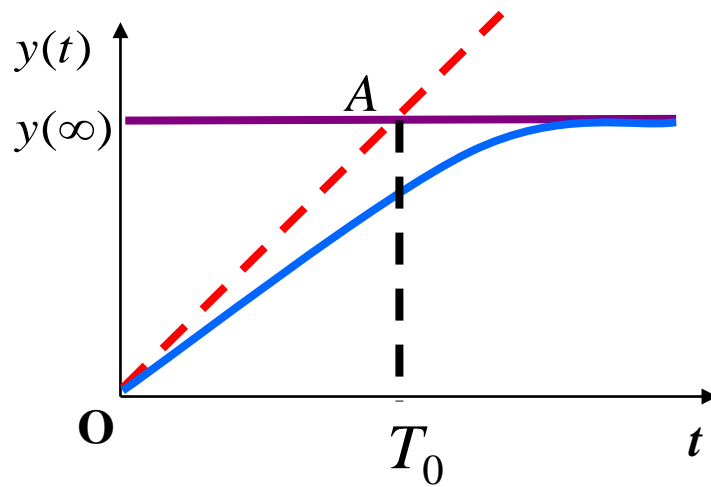
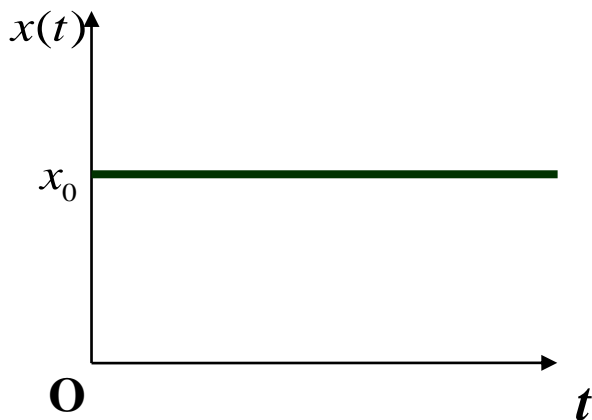
### ➤ 分析过程

• 趋于新的稳态:  $y(t)|_{t \rightarrow \infty} = y(\infty) = k_0 x_0$

•  $t = 0$ 时斜率:  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t \rightarrow 0} = \frac{k_0 x_0}{T_0}$

•  $T = T_0$ 时响应值:  $\left. \frac{k_0 x_0}{T_0} t \right|_{t=T_0} = k_0 x_0 = y(\infty)$

以  $\frac{k_0 x_0}{T_0}$  为斜率作切线,  
在  $t = T_0$  处与  $y(\infty)$  相交



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---一阶环节

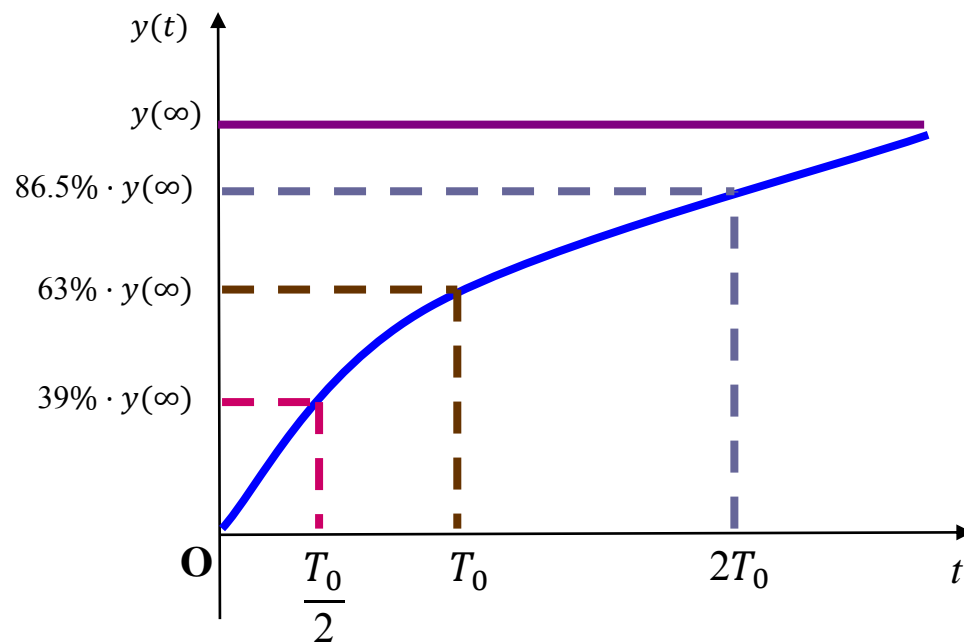
□ 由于  $t=0$  处，阶跃响应数值小，切线不易确定，采用三个典型点取值的平均来确定  $T_0$

$$y(t) = K_0 x_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_0}}\right) = y(\infty) \left(1 - e^{-\frac{t}{T_0}}\right)$$

$$\checkmark y\left(\frac{T_0}{2}\right) = 39\% \cdot y(\infty)$$

$$\checkmark y(T_0) = 63\% \cdot y(\infty)$$

$$\checkmark y(2T_0) = 86.5\% \cdot y(\infty)$$



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---一阶环节

### ➤ 半对数坐标图解法 (自学)

□ 趋于新的稳态:

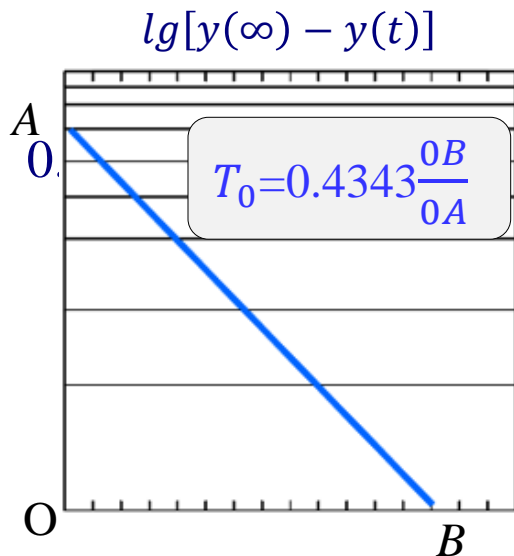
$$y(\infty) - y(t) = k_0 x_0 e^{-\frac{t}{T_0}}$$

□ 取自然对数:

$$\ln[y(\infty) - y(t)] = \ln k_0 x_0 - \frac{t}{T_0}$$

$$\ln y = \frac{\lg e}{\ln e} \lg = 2.3026 \lg y$$

$$\lg[y(\infty) - y(t)] = \ln k_0 x_0 -$$



✓ 优点: 可以判断模型结构

- 直线: 一阶无时延环节
- 非直线: 若  $t$  越大越趋于直线,  $t$  越小偏离程度越大则为二阶及以上环节或有时延环节
- 无规则: 测试存在干扰

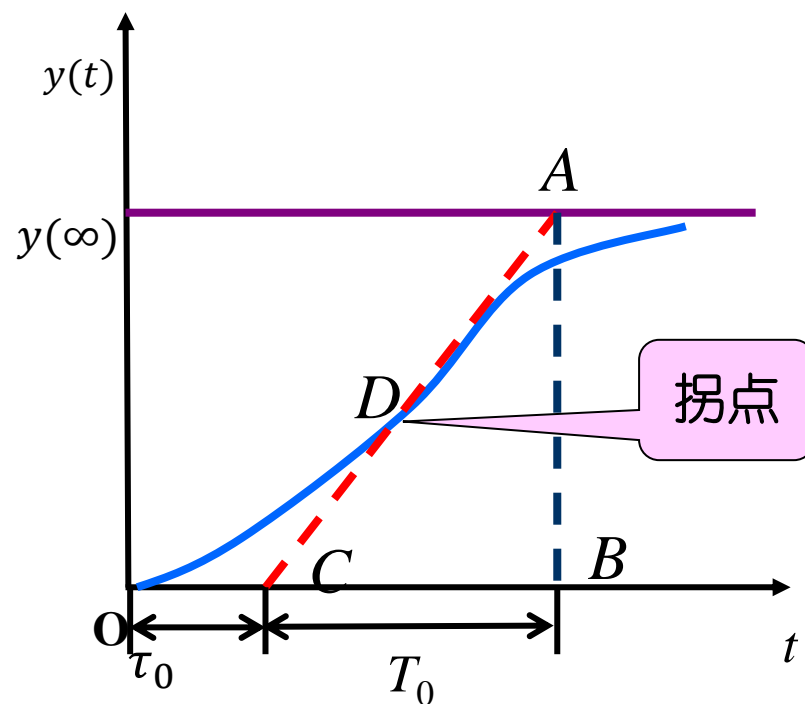
## 5.4.2 阶跃响应曲线法---带纯滞后的一阶环节

### ➤ 一阶环节带纯滞后的传递函数

$$G_o(s) = \frac{k_0}{T_0s + 1} e^{-\tau_0 s}$$

#### □ 确定 $T_0$ 和 $\tau_0$ 的图解法 (如图)

- ✓ 在  $t=0$  时斜率几乎为零, 之后斜率逐渐增大, 达到某点 (称为拐点) 后斜率又逐渐减小, 曲线呈现S形状
- ✓ 可以用一阶纯滞后环节近似



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---带纯滞后的一阶环节

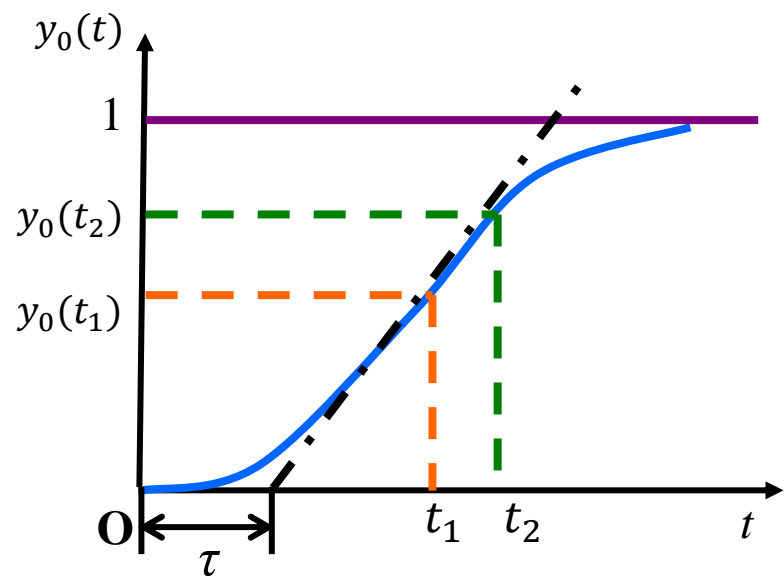
➤ 算法确定  $T_0$  和  $\tau_0$

□ 转换  $y(t)$  为相对值:  $y_0(t) = y(t)/y(\infty)$

$$\Rightarrow y_0(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0 \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau_0}{T_0}} & t \geq \tau_0 \end{cases}$$

□ 选取两个不同的时间点:

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0(t_1) = 1 - e^{-\frac{t_1-\tau_0}{T_0}} \\ y_0(t_2) = 1 - e^{-\frac{t_2-\tau_0}{T_0}} \end{cases}$$



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---带纯滞后的一阶环节

□ 取自然对数:

$$\begin{cases} \ln[1 - y_0(t_1)] = -\frac{t_1 - \tau_0}{T_0} \\ \ln[1 - y_0(t_2)] = -\frac{t_2 - \tau_0}{T_0} \end{cases}$$

□ 联立求解:

$$\begin{cases} T_0 = \frac{t_2 - t_1}{\ln[1 - y_0(t_1)] - \ln[1 - y_0(t_2)]} \\ \tau_0 = \frac{t_2 \ln[1 - y_0(t_1)] - t_1 \ln[1 - y_0(t_2)]}{\ln[1 - y_0(t_1)] - \ln[1 - y_0(t_2)]} \end{cases}$$

## 5.4.2 阶跃响应曲线法---二阶环节

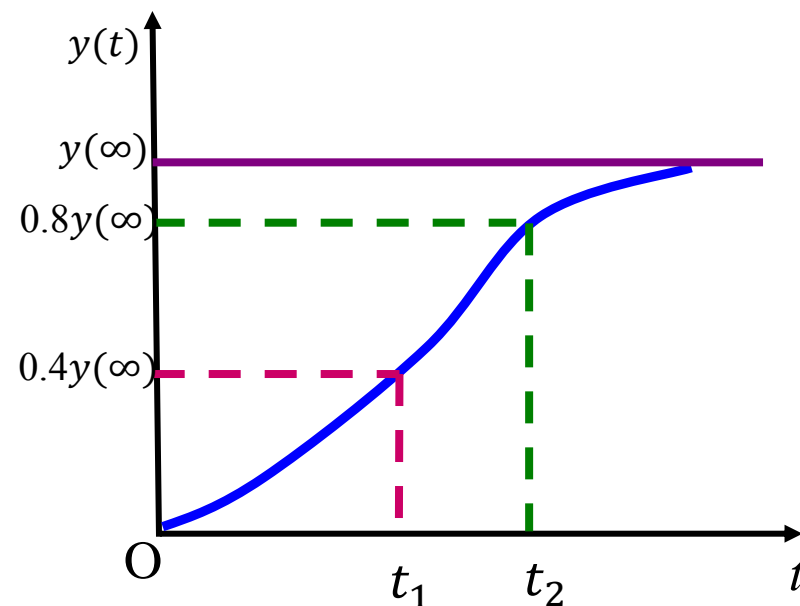
### ➤ 二阶环节的传递函数

$$G_o(s) = \frac{k_0}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

□  $k_0$  的确定方法与一阶环节相同

□ 时间常数  $T$  一般采用两点法

□  $0.32 < \frac{t_1}{t_2} < 0.46$





## 5.4.2 阶跃响应曲线法---二阶环节

解:

$$\begin{cases} y(t_1) = 0.4y(\infty) \\ y(t_2) = 0.8y(\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_2}} = 0.6 \\ \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_2}} = 0.2 \end{cases}$$

近似解为:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 \approx \frac{1}{2.16}(t_1 + t_2) \\ \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \approx (1.74 \frac{t_1}{t_2} - 0.55) \end{cases}$$

## 5.4.2 阶跃响应曲线法---纯滞后二阶环节

### ➤ 二阶环节带纯后的传递函数

$$G_o(s) = \frac{k_0}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s}$$

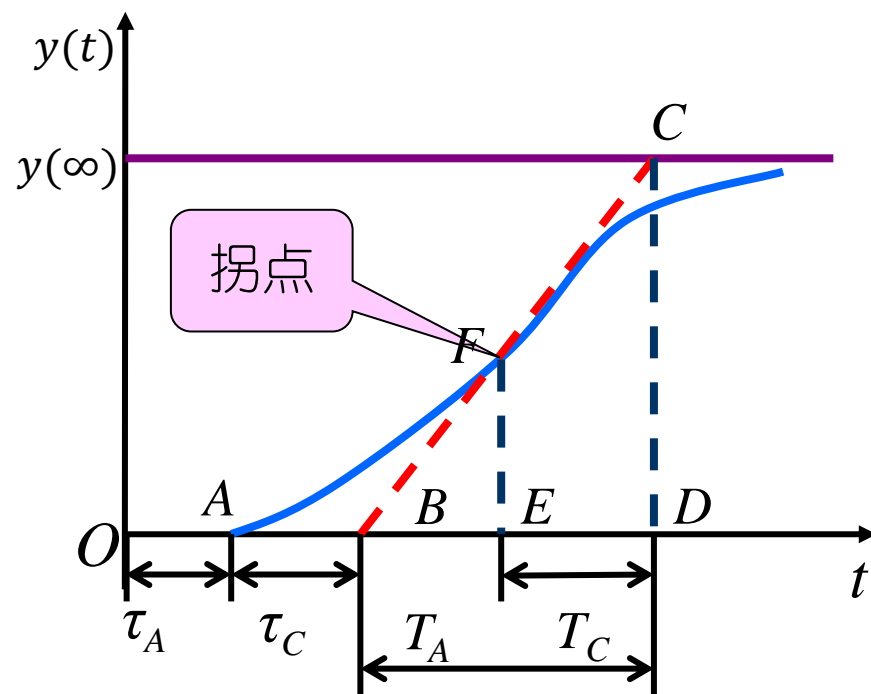
□  $k_0$ 的确定方法与一阶环节相同

□ 纯滞后时间为:

$$\tau_0 = \tau_A + \tau_C$$

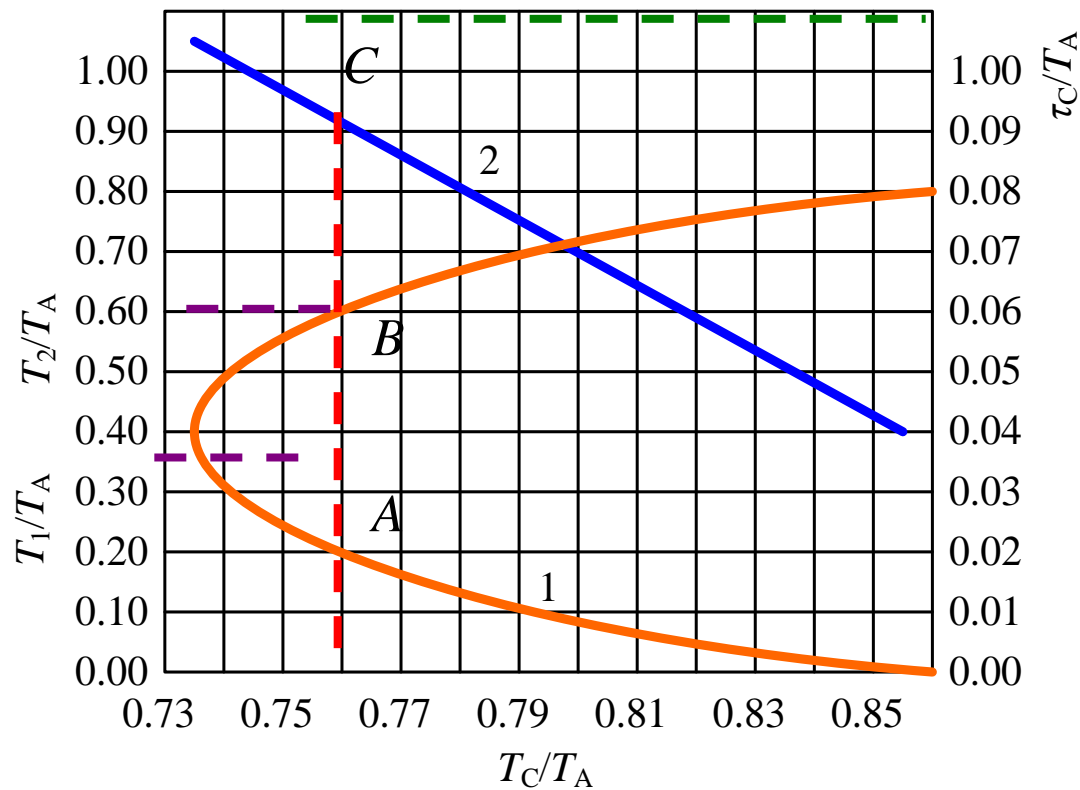
□ 计算时间常数为

$$\begin{cases} T_C = T_1 + T_2 \\ \frac{T_A}{T_C} = (1+x)x^{\frac{x}{1+x}} \\ x = \frac{T_1}{T_2} \end{cases}$$



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---纯滞后二阶环节

➤ 根据  $A$  和  $B$  计算时间常数，根据  $C$  验证切线是否过拐点

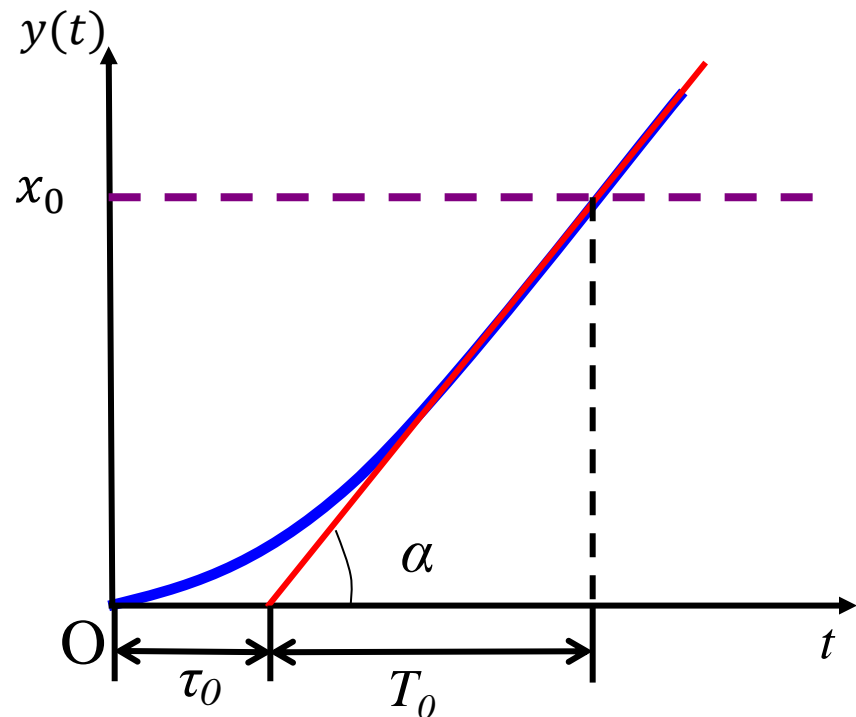


## 5.4.2 阶跃响应曲线法---一阶无自衡环节

### ➤ 一阶无自衡的传递函数

$$G_0(s) = \frac{1}{T_0 s} e^{-\tau s}$$

$$T_0 = \frac{x_0}{\tan \alpha}$$



## 5.4.2 阶跃响应曲线法---二阶无自衡环节

### ➤ 二阶无自衡的传递函数

$$G_0(s) = \frac{k_0}{T_1 s(T_2 s + 1)} e^{-\tau_0 s}$$

✓ 微分方程为：
$$T_1 \frac{d}{dt} \left[ T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \right] = x(t - \tau)$$

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow T_1 T_2 \frac{dy'(t)}{dt} + T_1 y'(t) = x(t - \tau)$$

✓ 传递函数转换为：
$$\frac{Y'(s)}{X(s)} = \frac{1}{T_2 s + 1} e^{-\tau s}$$

✓ 采用两点法计算时间常数：

$$y'(t_i) \approx \frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t} = \frac{y(t_i) - y(t_i - 1)}{\Delta t}, i = 1, 2, \dots, n$$

## 5.4.2 脉冲响应曲线法

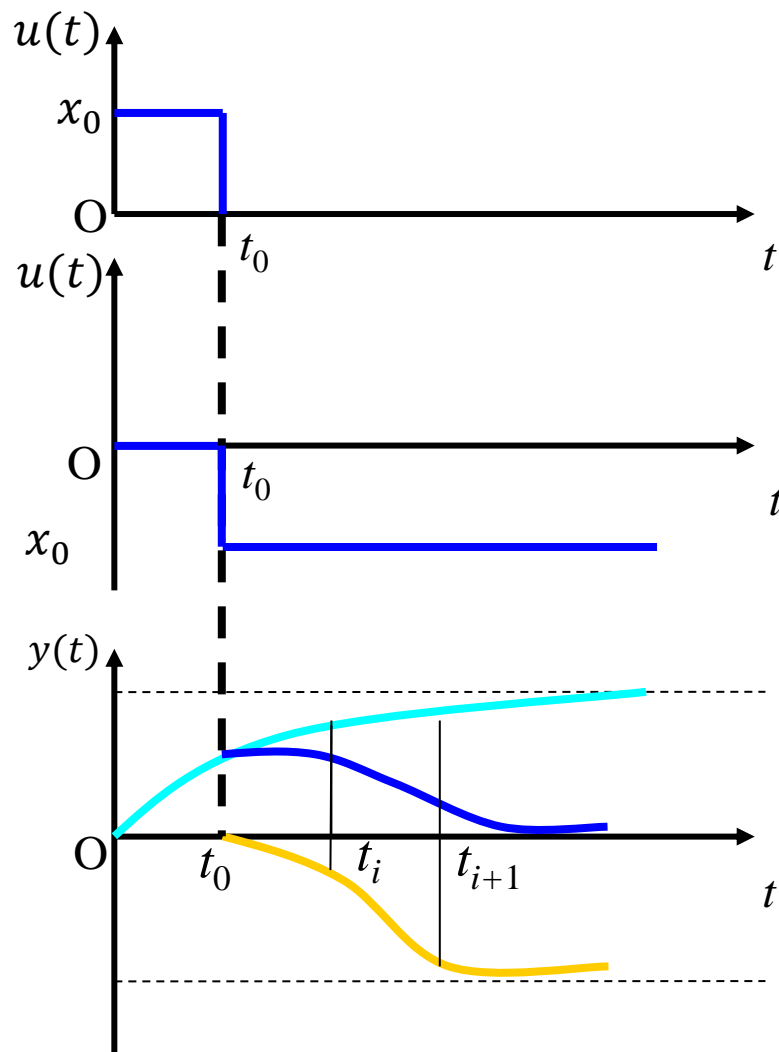
### ➤ 脉冲响应曲线法

- 正常工作上，施加一个脉冲输入，测被控量变化曲线，估计参数
- 不允许有较长时间和较大幅度输入变化，防被控量变化超过允许范围

深蓝线： $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$   
 $= y_1(t) - y_1(t - t_0)$

浅蓝线： $y_1(t)$

黄线： $y_2(t)$



## 5.4.3 最小二乘法辨识过程的模型

---

---

- 《系统辨识》课程重点讲述

## 5.5 本章小结

---

---

- 被控过程建模基本理论，包括数学模型分类及构建方法
- 分析工业生产中被控过程特性
- 数学建模的三种基本方法
- 单容和多容过程的机理建模步骤
- 典型实验辨识法的基本原理和实现方法



# 作业

---

---

➤ 2.1、2.3、2.8、2.9、2.11

# 致谢

---

---

- 感谢研究生彭佳佳、尹枫、郑文国、江博涛等同学参与本PPT的制作
- PPT中部分图片和视频来自互联网，感谢原作者的制作