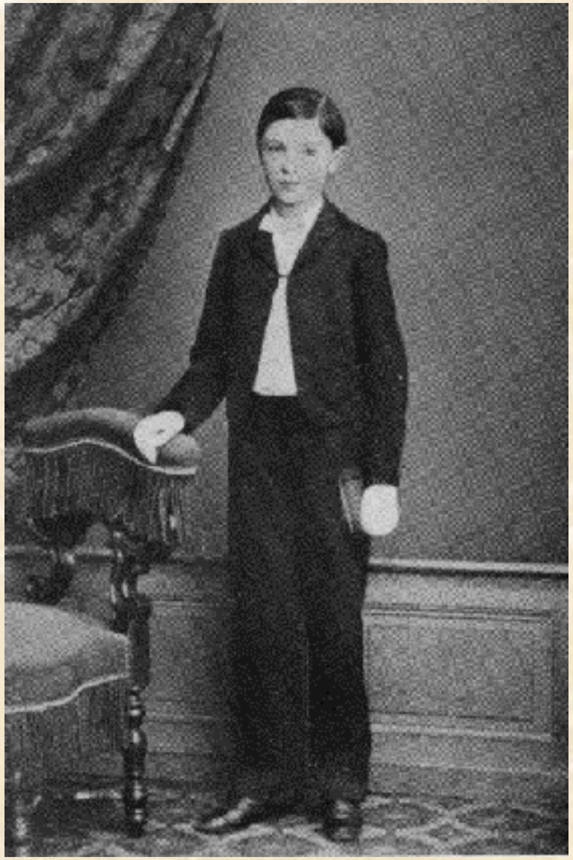
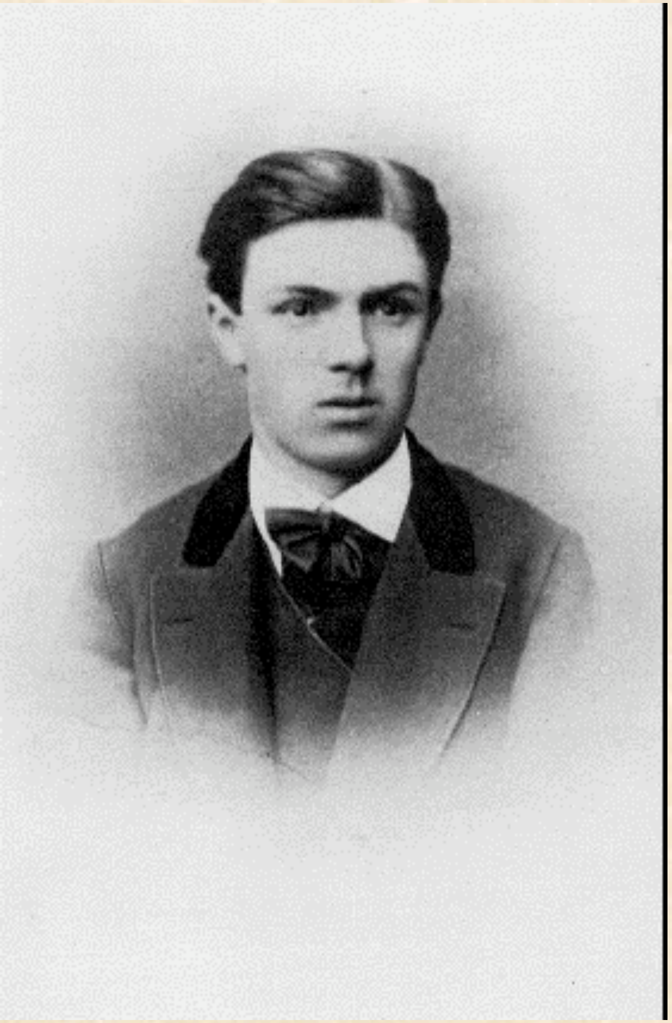
# Henri Poincaré
# et
# le monde non euclidien

1854 : naissance à Nancy

1871 : baccalauréat (0 en maths !!!)

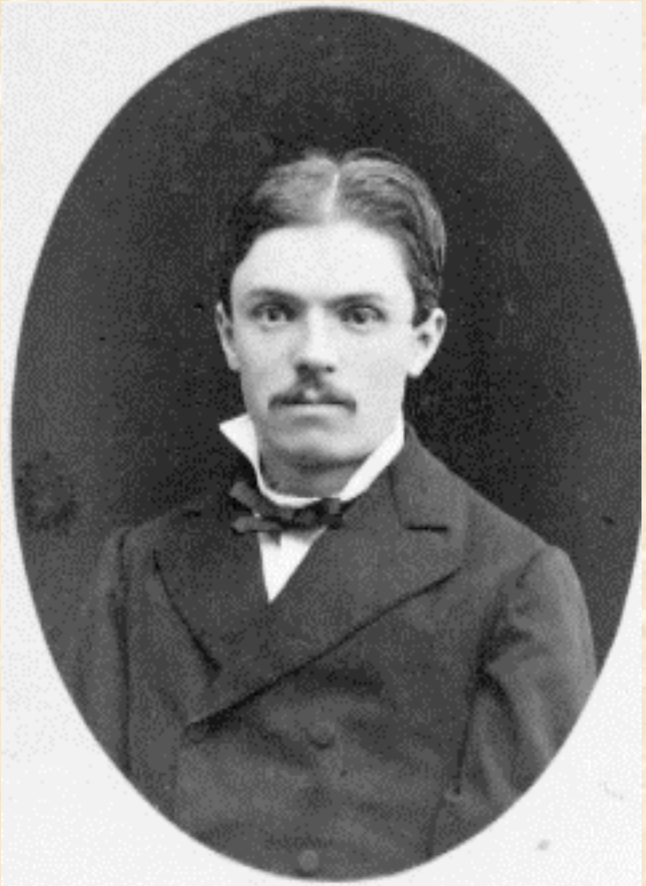


# 1873 : élève à Polytechnique



1879 :

Ingénieur des mines
Doctorat
Chargé de cours à Caen



Paris Mercredi 4 décembre

Monsieur

J'ai réuni toutes les remarques qu'il y a à faire sur les parties de votre travail que j'ai lues avec attention. Je persiste à croire que nous en ferons une bonne thèse; mais il me paraît indispensable de fondre la rédaction et de corriger toutes les erreurs de calcul ou les changements de notation qui le rendent presque illisible. Je vous fais donc renvoyer votre travail, espérant que vous pourrez le rapporter dans quelques jours quand vous viendrez à Paris. Pour ce qui

N° D'ORDRE
452.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.


PAR M. POINCARÉ,

[redacted]


---

1re THÈSE. — SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

**Soutenues, le 1879, devant la Commission d'Examen.**

---

MM. BOUQUET, *Président*,
OSSIAN BONNET, } *Examinateurs*.
DARBOUX, }

---


PARIS,

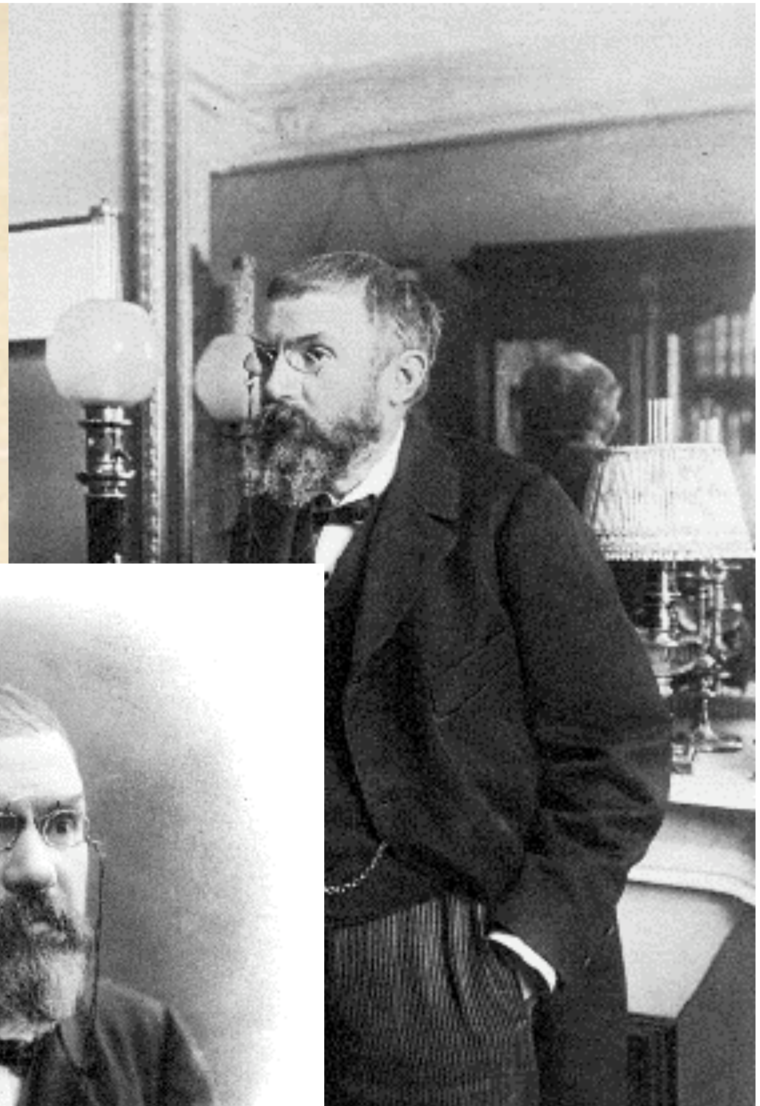
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

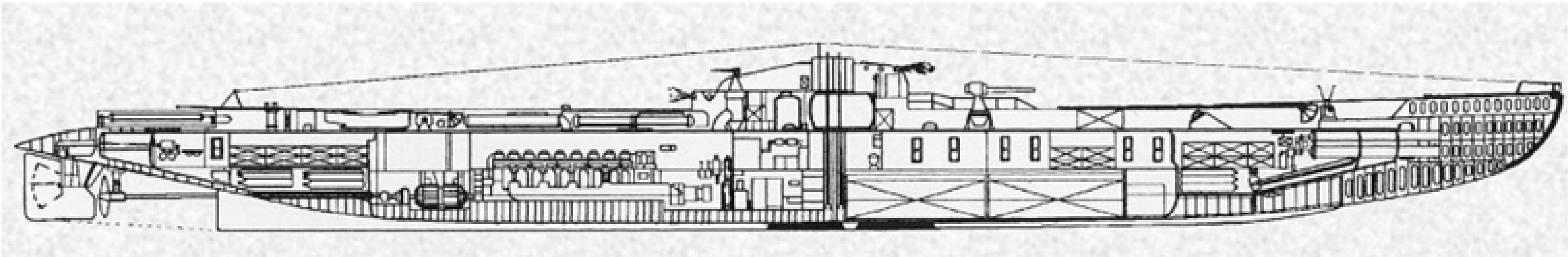
1879



1912

# Le sous-marin *Henri Poincaré*

Mis sur cale à Lorient le 1er mars 1927, sous le numéro Q140 (numéro de kiosque : FR118), le Henri Poincaré est un **sous-marin de 1ere classe de grande patrouille dit "1500 tonnes" de type *Redoutable***.
Cette série de sous-marins, la plus grande construite en France, comprenait 31 navires : *Redoutable, Vengeur, Pascal, Pasteur, Henri Poincaré, Poncelet, Archimède, Fresnel, Monge, Achille, Ajax, Actéon, Achéron, Argo, Prométhée, Persée, Protée, Pégase, Phénix, L'Espoir, Le Glorieux, Le Centaure, Le Héros, Le Conquérant, Le Tonnant, Agosta, Bévéziers, Ouessant, Sidi-Ferruch, Sfax* et *Casabianca*.



Le Henri Poincaré est lancé le 10 avril 1929, et entre **en service le 23 décembre 1931**. Au 1er semestre 1940, il est en carénage à Oran, à l'issue duquel on l'envoie à Bizerte, où il effectue en juin, avec le sous-marin *Centaure*, une patrouille dans le détroit de Messine. Le 10 avril 1941, en compagnie du *Fresnel* et de l'*Actéon*, il quitte Toulon pour Casablanca. Le 16 mai, il appareille pour Dakar, d'où il participe à diverses missions, avant de regagner Casablanca le 2 novembre.

Le 27 janvier 1942, il appareille avec le *Pascal* pour Oran, puis Toulon, où il arrive le 4 mars pour être envoyé en grand carénage à La Ciotat. Rentré à Toulon le 16 novembre, il est **sabordé dans la darse Nord du Mourillon** (coulé droit) le 27 novembre 1942. Il ne sera renfloué que l'année suivante en, juin 1943. Les Italiens s'en saisissent et le rebaptise FR118. Il ne sera toutefois jamais armé sous pavillon ennemi. Remorqué à Gênes le 2 septembre 1943, puis saisi, cette fois par les Allemands, il est **à nouveau sabordé à La Spézia le 9 septembre 1943**. Que devient-il après ? (Probablement découpé sur place).

# Le cargo «  Henri Poincaré  » (Chargeurs réunis)



Photo © Jacques Carney

**La coque du bâtiment d'essais et de mesures *Henri Poincaré* part de Brest pour son ultime voyage vers un chantier de démolition à Bombay (Inde), remorquée par le supply russe Neftegaz 62 (16 novembre 1993).**


1363 Henri Poincaré


Henri Poincare
Hobby-Fuchsia 2003

# *Poincare*

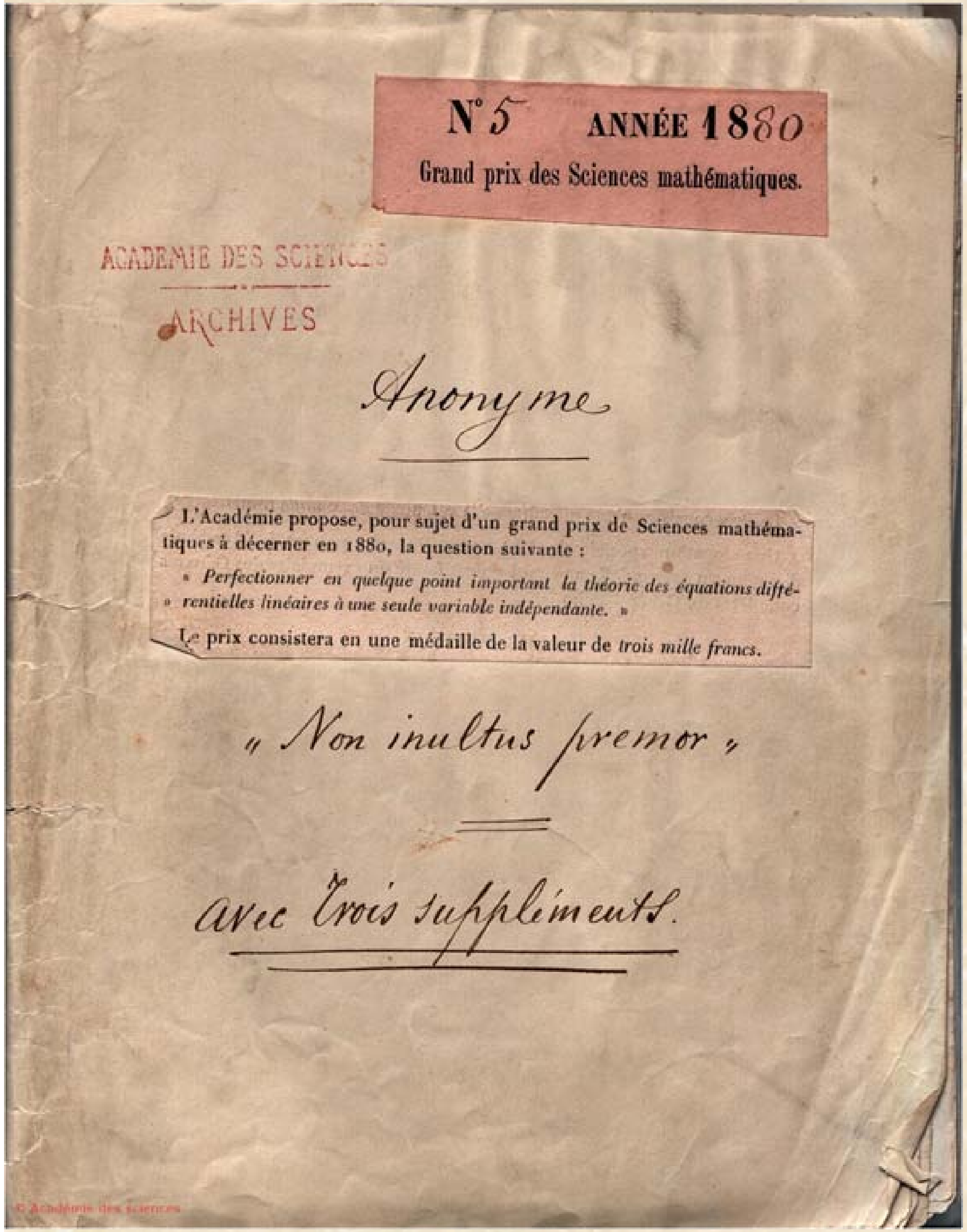
Enlargement from Lunar Orbiter photo LO5-M65.

Poincare (161E, 58S) is a 335 km wide impact basin with a well defined inner ring 180 km wide, and a suspected mare ridge ring about 70 km in diameter. Poincare's floor appears to be surfaced by smooth lava flows as do the floors of the nearby craters. The white dots at the bottom left of the image are defects from the chemical developing of the film on board the spacecraft.

# 1880 :

# Systèmes dynamiques

# Groupes fuchsiens


N° 5 ANNÉE 1880

Grand prix des Sciences mathématiques.

ACADÉMIE DES SCIENCES

ARCHIVES

Anonyme

L'Académie propose, pour sujet d'un grand prix de Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante :

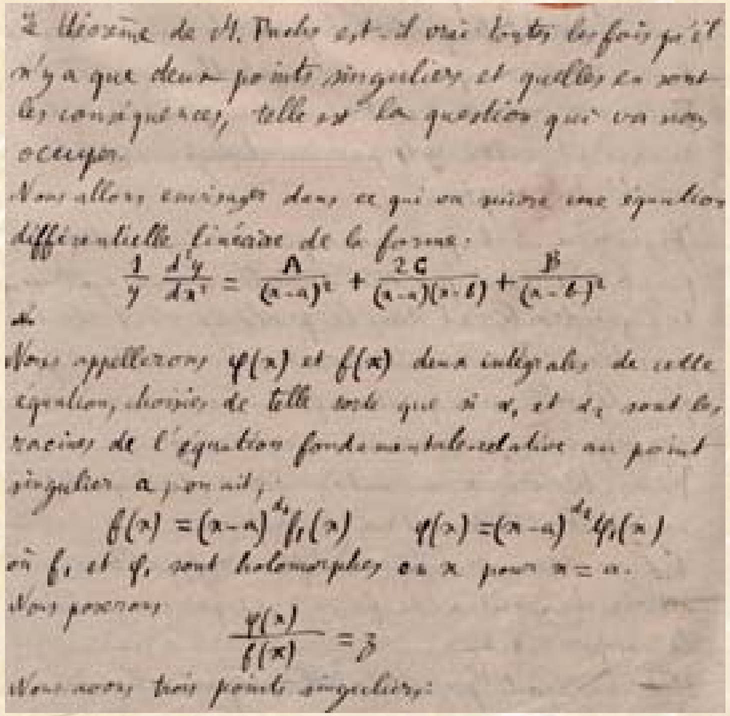
« *Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.* »

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs.*

« Non inultus premor »

avec trois suppléments.




Le théorème de M. Fuchs est-il vrai toutes les fois qu'il n'y a que deux points singuliers et quelles en sont les conséquences, telle est la question qui va nous occuper.

Nous allons envisager dans ce qui va suivre une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{2C}{(x-a)(x-b)} + \frac{B}{(x-b)^2}$$

Nous appellerons $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux intégrales de cette équation, choisies de telle sorte que si $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les racines de l'équation fondamentale relative au point singulier $a$, on ait :

$$f(x) = (x-a)^{\alpha_1} f_1(x) \qquad \varphi(x) = (x-a)^{\alpha_2} \varphi_1(x)$$

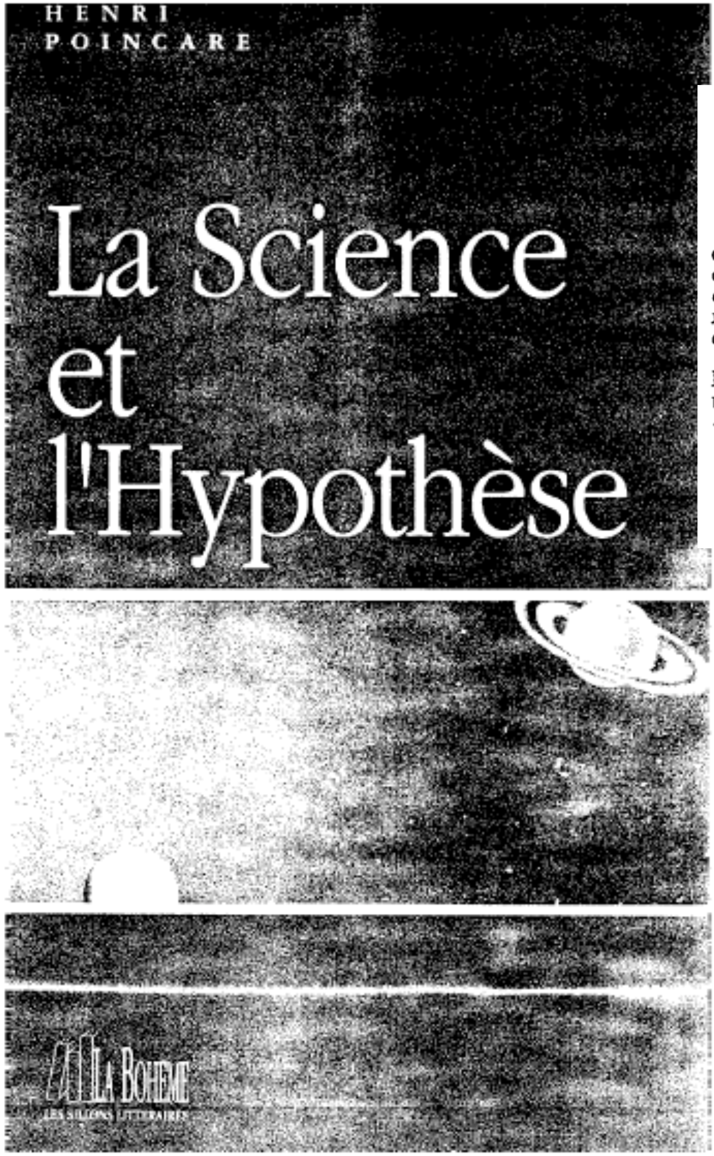
où $f_1$ et $\varphi_1$ sont holomorphes en $x$ pour $x = a$.

Nous poserons

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z$$

Nous avons trois points singuliers :

1902 **1887** : *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, Bulletin de la SMF*




**1892**

## CORRESPONDANCE
### SUR LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Monsieur le Directeur,

Permettez-moi de répondre à la lettre si intéressante de M. Mouret[1]; non que je désire avoir le dernier mot, car je n'ai pas la prétention de clore définitivement une discussion qui dure depuis plus de deux mille ans, mais parce que ce m'est une occasion de présenter quelques observations nouvelles.

J'ai cherché à faire ressortir le rôle important de l'expérience dans la genèse des notions mathématiques; mais j'ai voulu en même temps montrer que ce rôle est limité. Pour atteindre ce double but, les fictions de Riemann et de Beltrami, dont j'ai entretenu vos lecteurs, peuvent rendre quelques services; elles aident en effet l'imagination à rompre des habitudes créées par l'expérience journalière et qui sont tellement invétérées qu'elles semblent s'imposer à l'esprit avec nécessité.

Voici une de ces fictions qui me paraît assez amusante. Imaginons une sphère S et à l'intérieur de cette sphère un milieu dont l'indice de réfraction et la température soient variables. Dans ce milieu se déplaceront des objets mobiles; mais les mouvements de ces objets seront assez lents et leur chaleur spécifique

[1] Voyez la *Revue* du 1892, t. III page 39.

2e ANNÉE N° 23 15 DÉCEMBRE 1891

**1891**

REVUE GÉNÉRALE
# DES SCIENCES
PURES ET APPLIQUÉES
DIRECTEUR : LOUIS OLIVIER

## LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES

Toute conclusion suppose des prémisses; ces prémisses elles-mêmes ou bien sont évidentes par elles-mêmes et n'ont pas besoin de démonstration, ou bien ne peuvent être établies qu'en s'appuyant sur d'autres propositions, et comme on ne saurait remonter ainsi à l'infini, toute science déductive, et en particulier la géométrie, doit reposer sur un

maginable. Enfin au commencement du siècle et à peu près en même temps, deux savants, un Russe et un Hongrois, Lowatschewski et Bolyai établirent d'une façon irréfutable que cette démonstration est impossible; ils nous ont à peu près débarrassés des inventeurs de géométries sans postulatum; depuis lors l'Académie des Sciences ne reçoit plus guère

# LE MONDE NON EUCLIDIEN.

Supposons [...] un monde renfermé dans [un grand cercle] et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint [le cercle] où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon [du cercle] limite ; soit r la distance du point considéré au centre de [ce cercle]. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

*Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.*

*Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.*

*Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.*

*Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera [du cercle] limite.*

*Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.*

*Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher [du cercle] limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre [le cercle] limite.*

*Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. [...] Qu'on me permette pour abréger le langage, d'appeler un pareil mouvement déplacement non euclidien.*

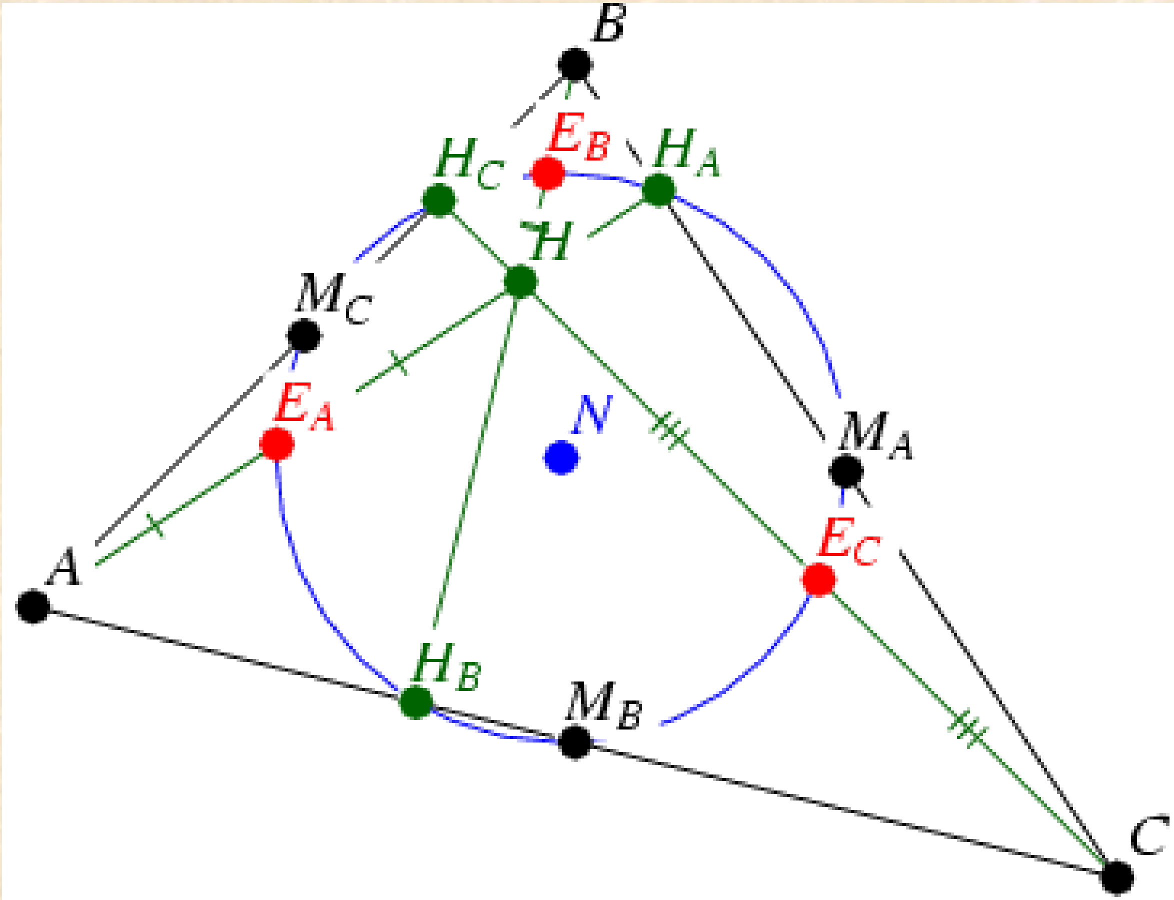
*Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous. [Si ces êtres imaginaires] fondent une géométrie, [...] ce sera la géométrie non euclidienne.*

***Théorème*** : Dans un triangle non euclidien,

- les trois bissectrices
- les trois médiatrices (si elles se rencontrent…)
- les trois médianes
- les trois hauteurs,

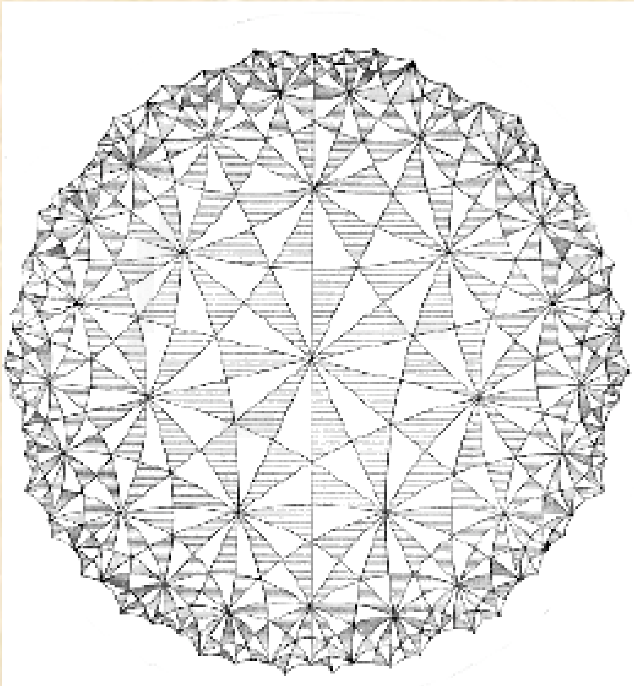
sont concourantes.

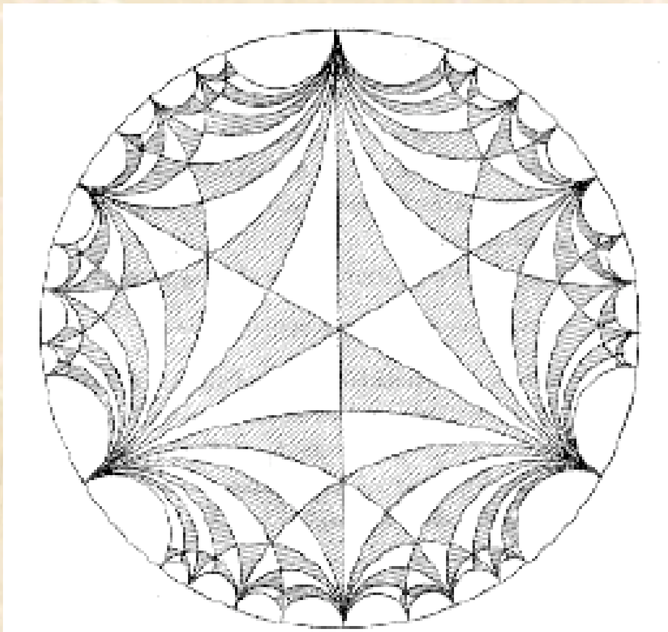
# Le théorème du cercle des 9 points en géométrie non euclidienne ?



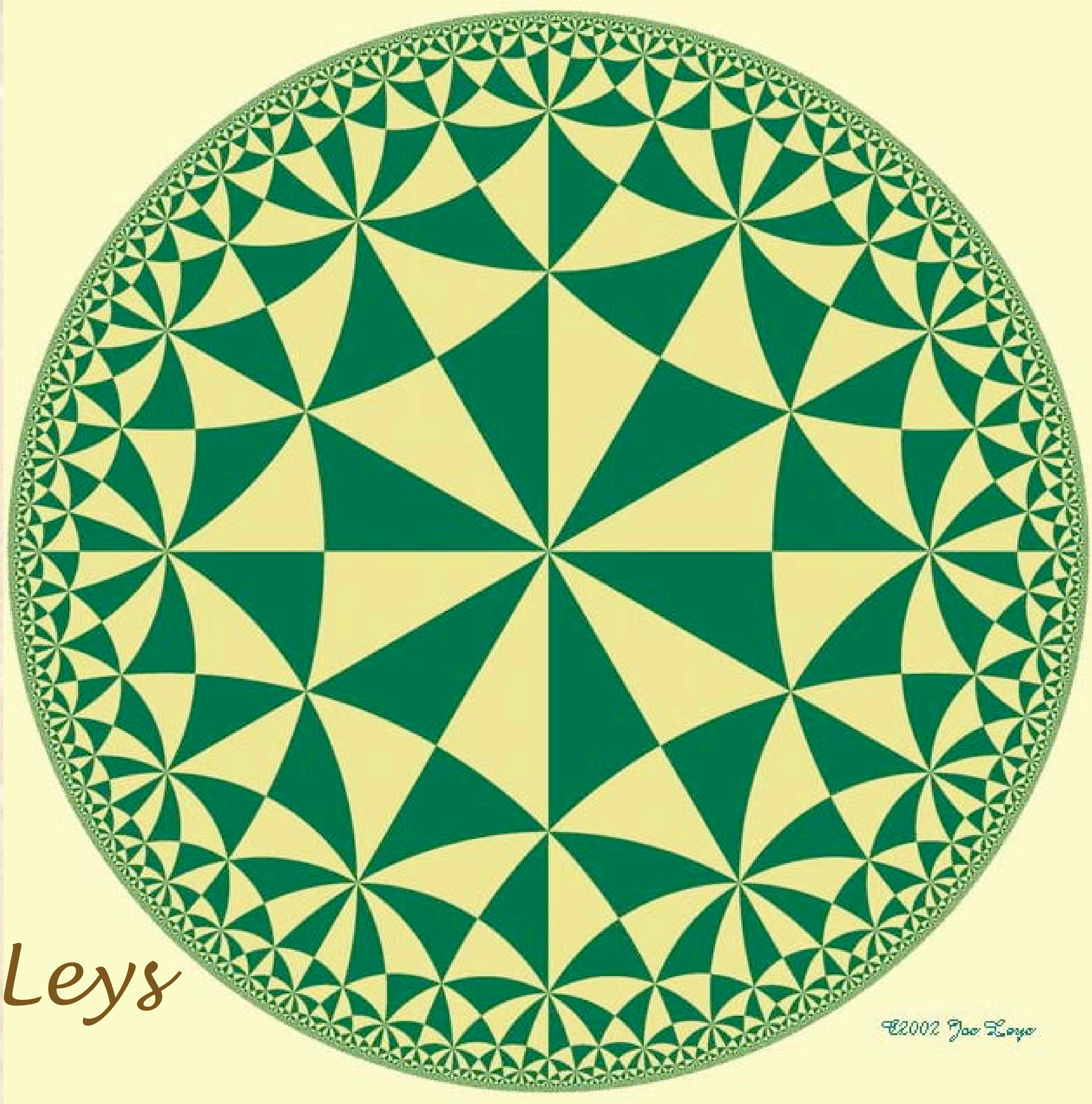
*Théorème :*

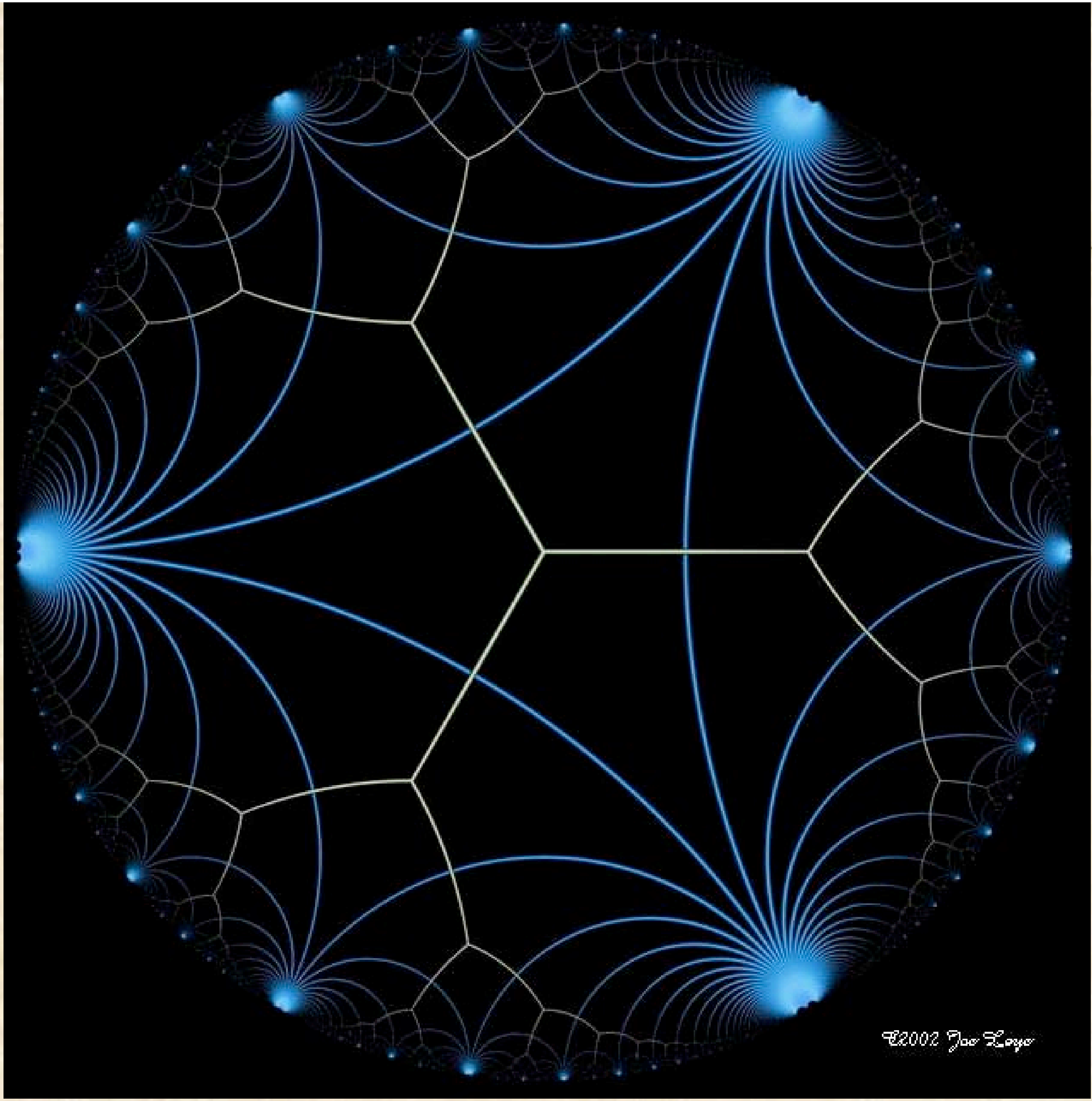
*Si les angles d'un polygone sont des diviseurs de $\pi$, les symétries par rapport aux côtés de ce polygone engendrent un groupe de réflexions qui permet de paver le plan non euclidien tout entier et sans chevauchement.*





# Jos Leys



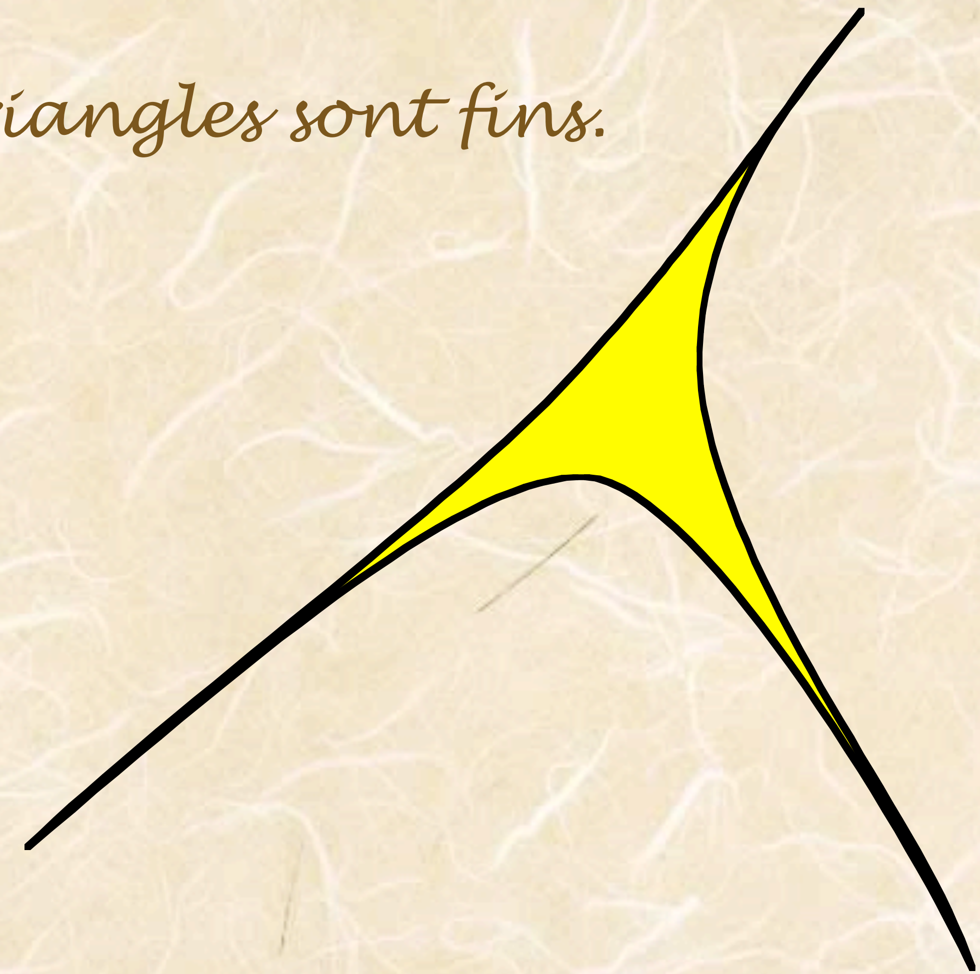

©2002 Jos Leys


©2002 Jos Leys

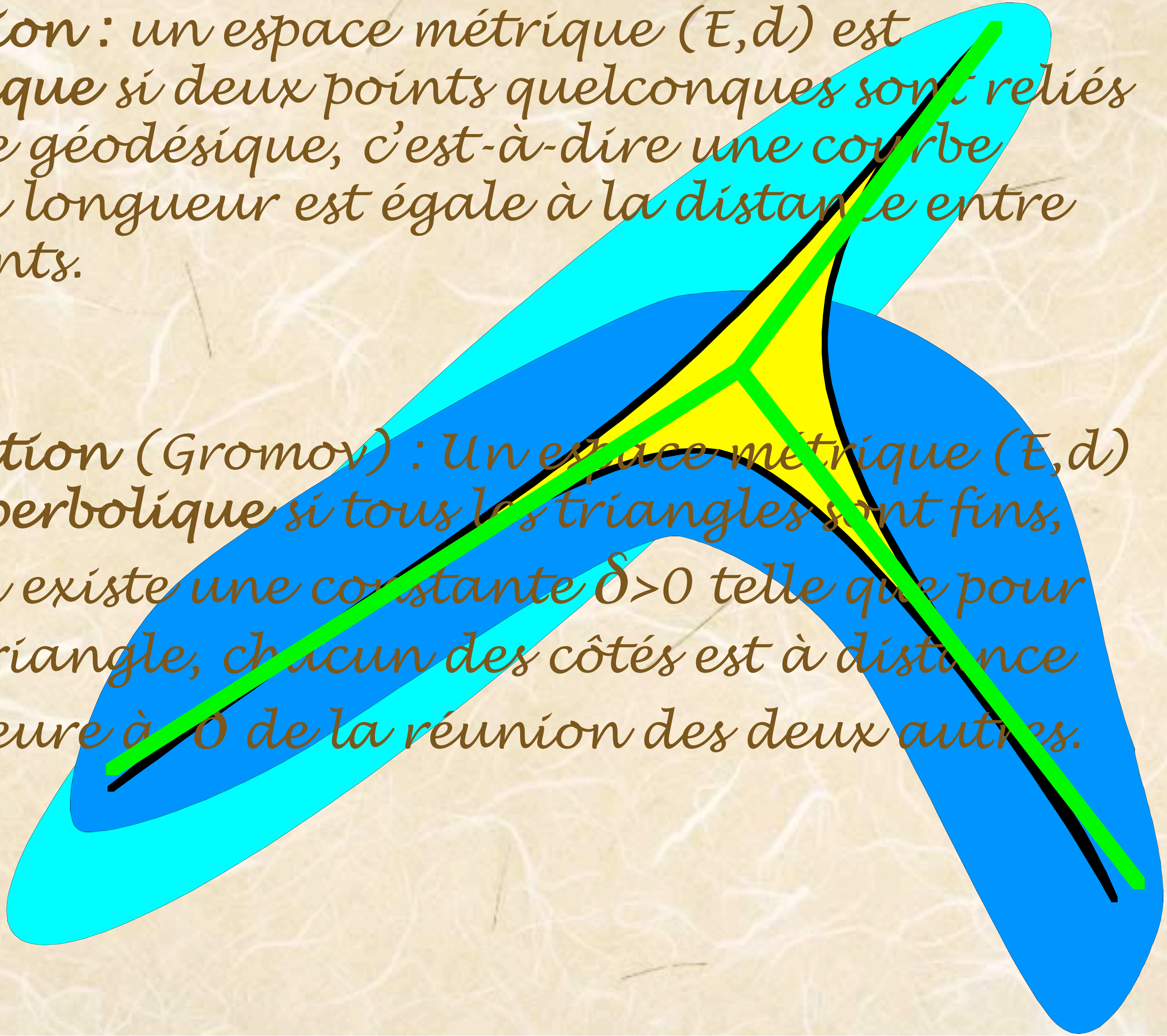
# Le disque de Poincaré
# est
# homogène et isotrope

**Théorème :**
Le rayon du cercle inscrit à un triangle est borné !

**Corollaire :** les triangles sont fins.

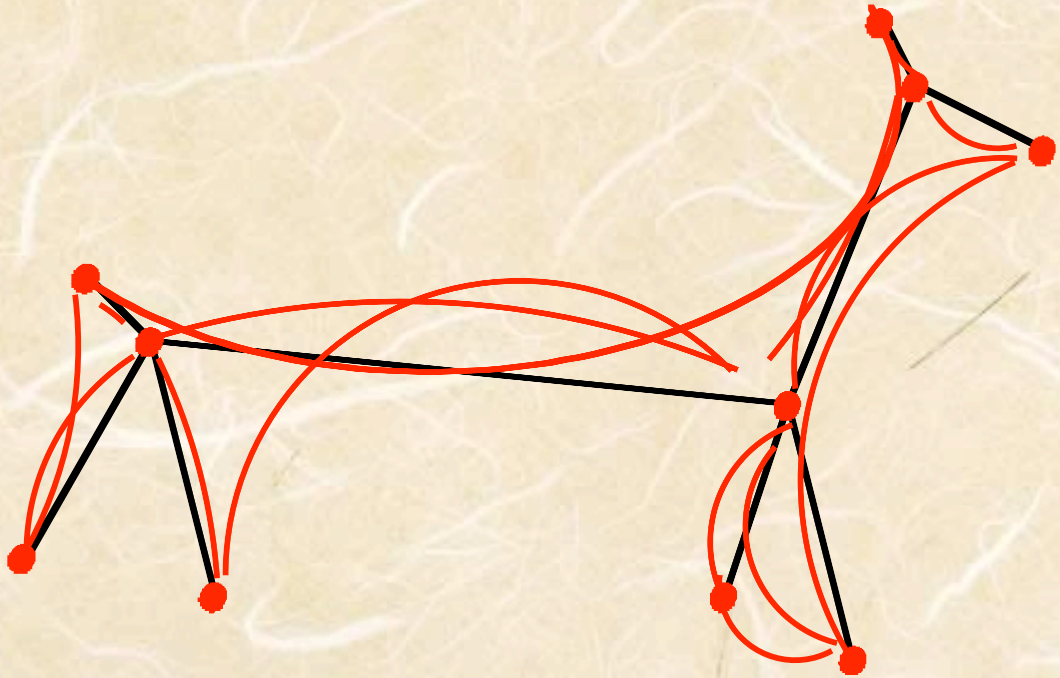


**Définition :** un espace métrique (E,d) est **géodésique** si deux points quelconques sont reliés par une géodésique, c'est-à-dire une courbe Dont la longueur est égale à la distance entre ces points.



**Définition** (Gromov) : Un espace métrique (E,d) est **hyperbolique** si tous les triangles sont fins, i.e. s'il existe une constante $\delta>0$ telle que pour tout triangle, chacun des côtés est à distance inférieure à $\delta$ de la réunion des deux autres.

Dans un espace métrique hyperbolique, un ensemble fini à n éléments peut être approché par un arbre avec une erreur logarithmique en n.



# Géométrie hyperbolique « à la Gromov »

- Groupes hyperboliques, groupes aléatoires
- Variétés à courbure négative
- Immeubles de Tits hyperboliques

unique vertex fixed by the whole of $I$, which we call the *center* of $\mathcal{T}_I$; see Figure 8.

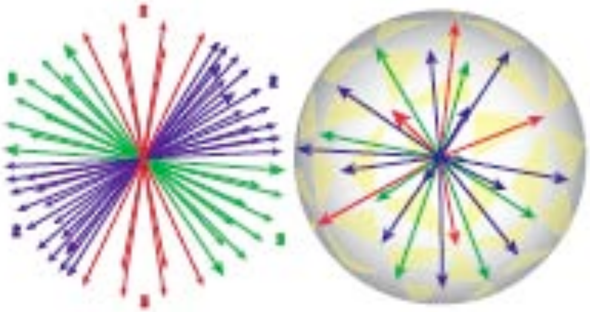
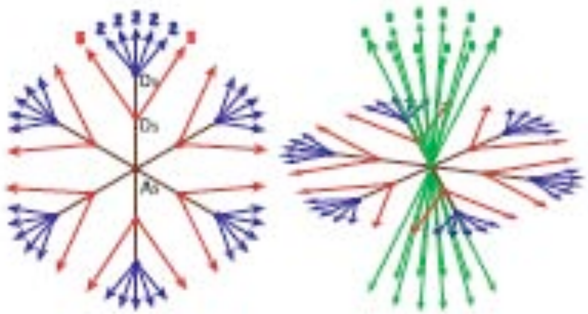


Figure 8. The $p > 5$-icosahedron.

In the next three pictures we consider what happens if $p \leq 5$. The icosahedron is the right part of each figure, and the left part is a zoom-in on the "horizontal" part of the right picture.

If $p = 5$, the six lines fixed by the six cyclic subgroups of order 5 (so-called *mirrors* of order 5) are separated from the center by fixed points of a copy of $D_3$ in $I$; see Figure 9.



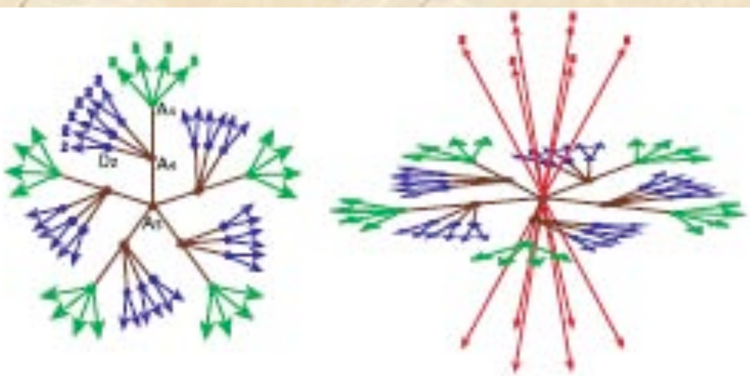


Figure 11. The dyadic icosahedron.

special status of the primes $p \leq 5$ will appear over and over again in the sequel.

## Application: $p$-adic Orbifolds

One can perform the previous construction starting from the other finite subgroups of $PGL(2, K)$ (such as $A_4, S_4$, etc.) to arrive at the full list of $p$-adic polyhedra. This is because the full list of finite subgroups of $PGL(2)$ over any field is known up to conjugation: over a field of characteristic zero such as $K$, the list is identical to that over the complex numbers; over a field of positive characteristic (which we will briefly touch upon later), there is Dickson's famous classification. In the end, all $p$-adic (or nonarchimedean) polyhedra can thus be explicitly drawn by the techniques from the previous section. They play a rôle in the construction of $p$-adic orbifolds and in classification results related to those.

de bonne heure de considérer la géométrie euclidienne comme *rigoureuse*.

Dans la géométrie non-euclidienne, il n'y a jamais, dans les figures, de similitude sans égalité. Par exemple, les angles d'un triangle équilatéral ne sont pas seulement différents de $\frac{2}{3}$ d'angles droit,

Fig. 6

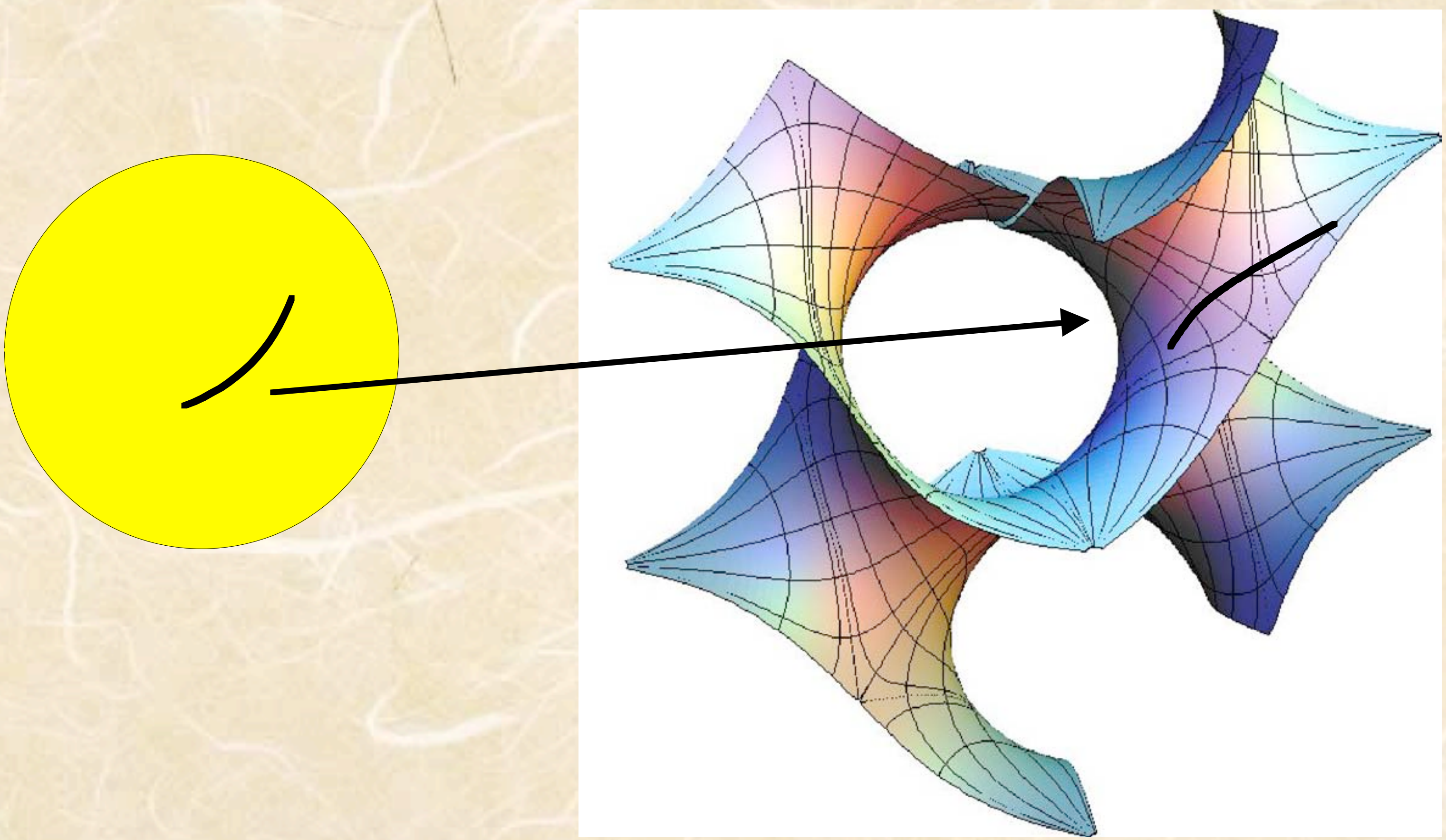
mais encore ils peuvent varier suivant la grandeur des côtés ; et, si les côtés croissent au delà de toute limite, ils peuvent devenir aussi petits que l'on voudra. Il y a donc déjà contradiction à vouloir *dessiner* la ressemblance d'un tel triangle au moyen d'un triangle plus petit. On peut seulement *indiquer* sa disposition générale. De cette manière, *l'indication* d'un triangle infini serait à la limite, celle-ci (fig. 7) :

Fig. 7

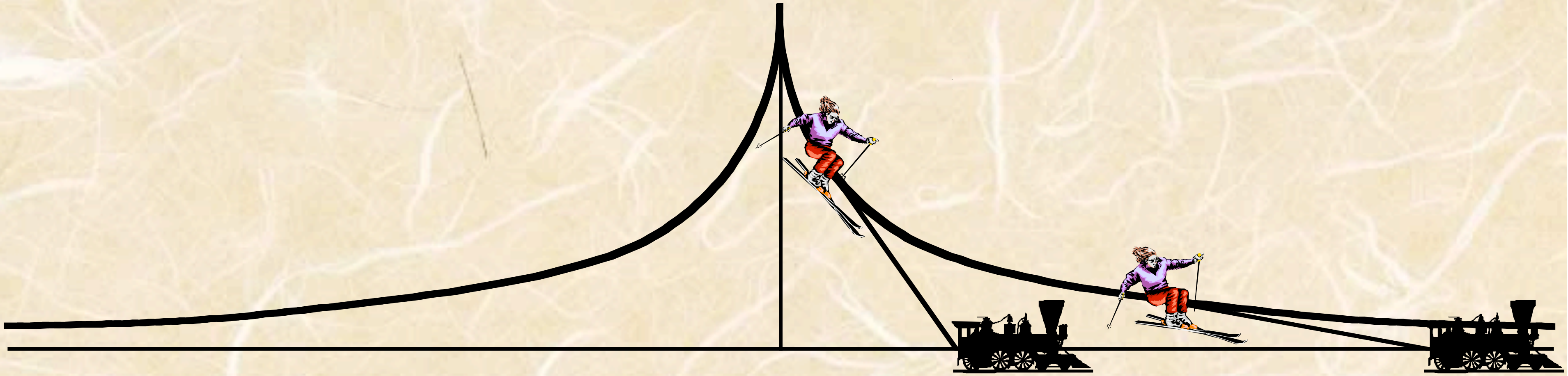
# Gauss à Schumacher

# 12 juillet 1831

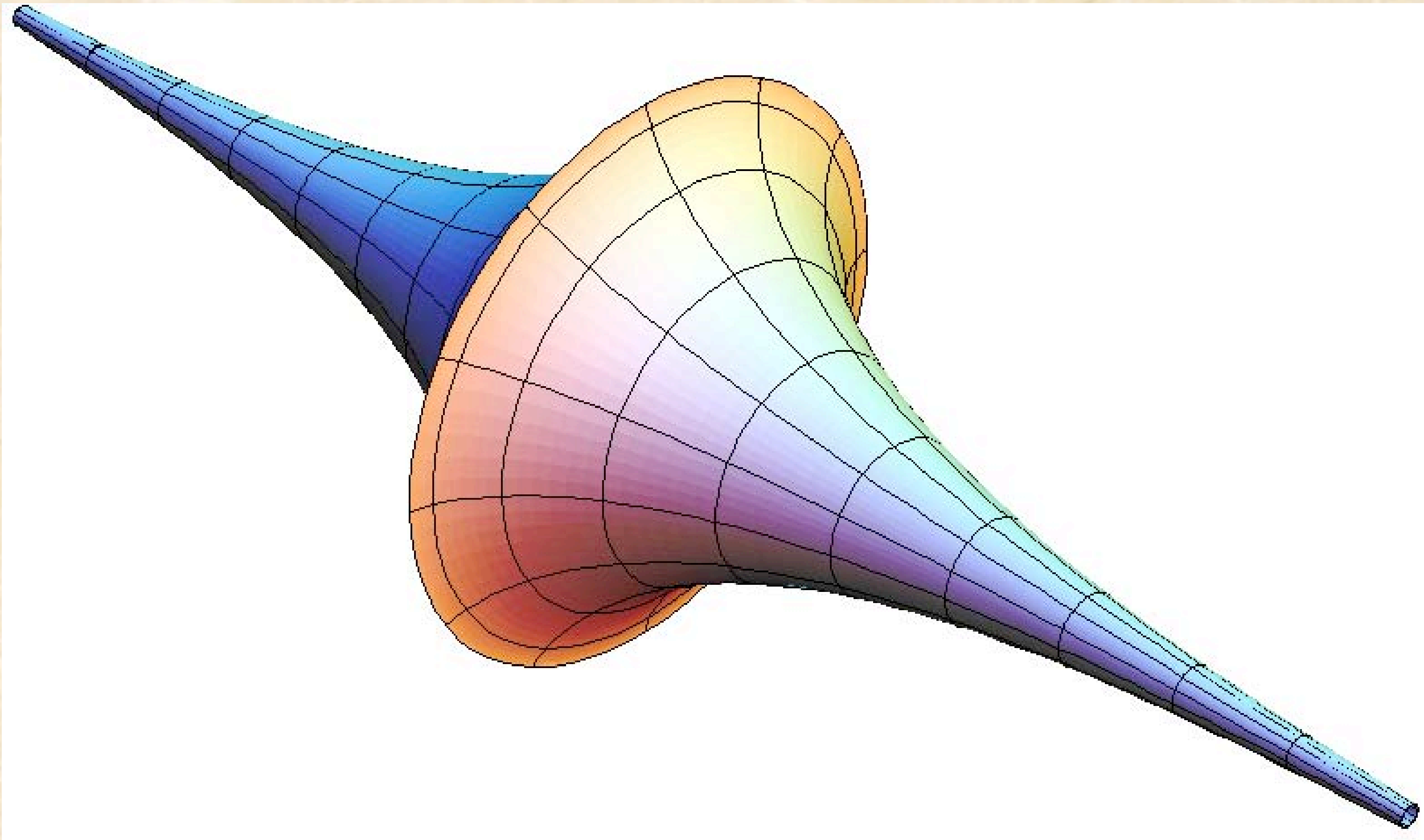
**Problème :** Est-il possible de plonger *isométriquement* le disque de Poincaré dans l'espace euclidien ?



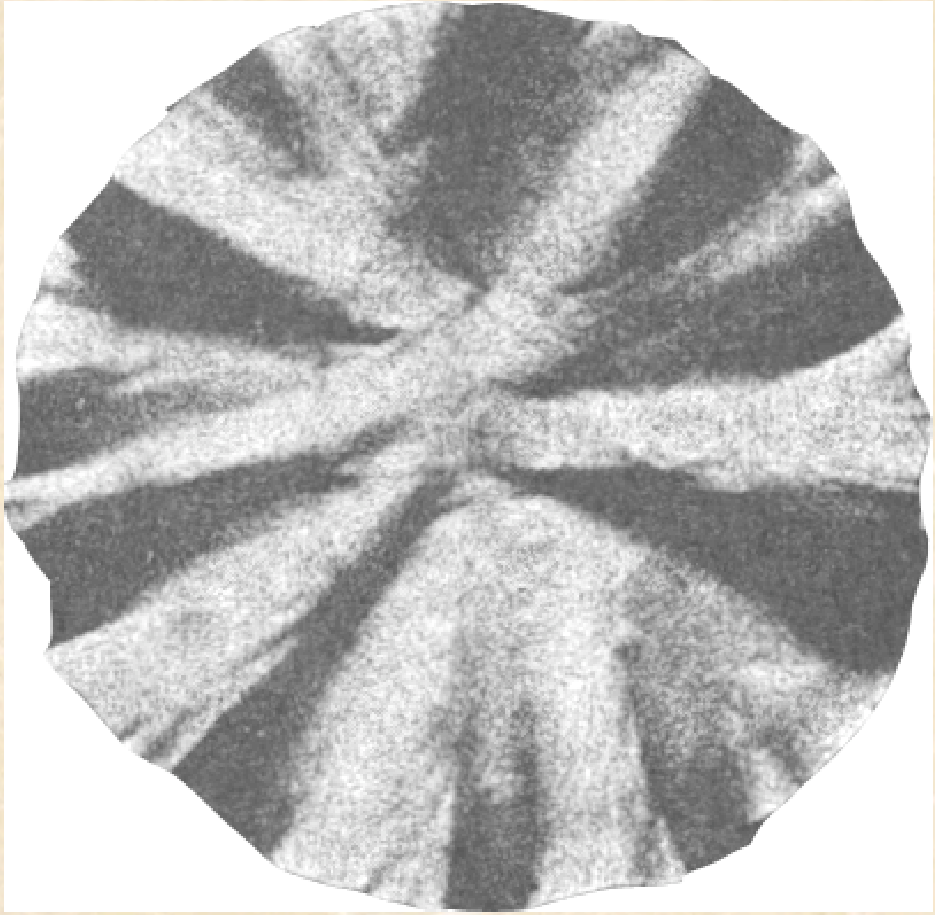
# Tractrice, courbe du chien



# Pseudosphère

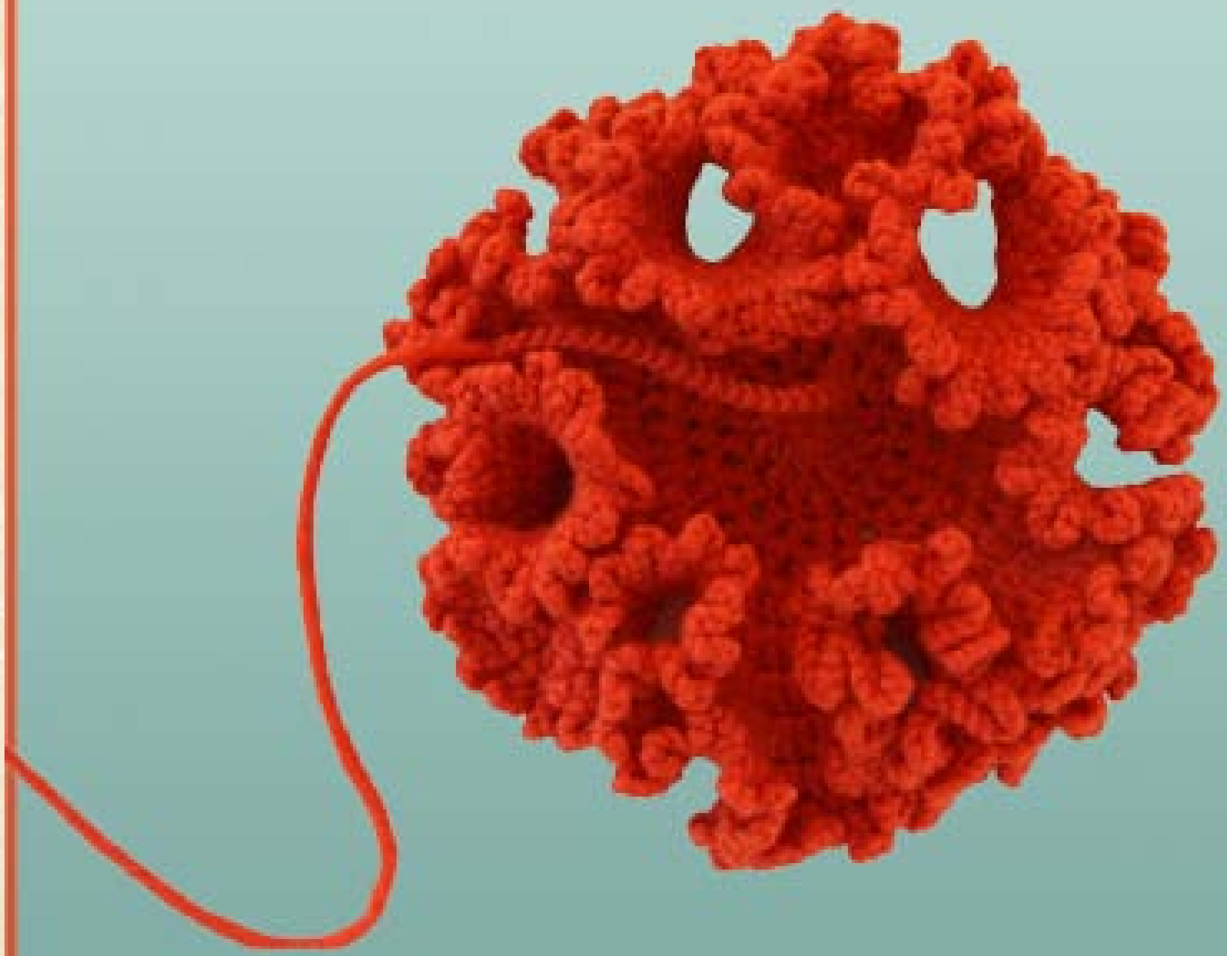


# Le modèle en papier de Beltrami



# *The institute for figuring*

http://www.theiff.org/



Close this window

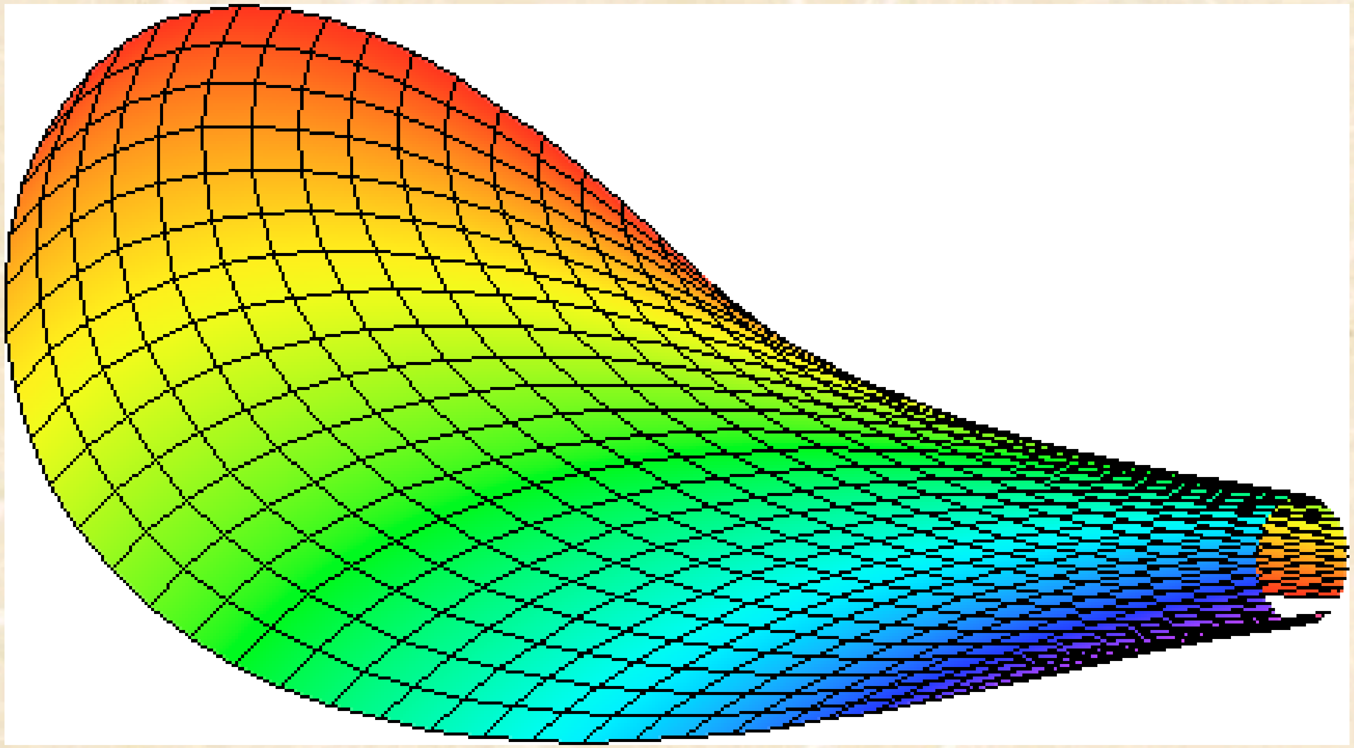
fig: THE INSTITUTE FOR FIGURING

## A GALLERY OF CROCHETED HYPERBOLIC MODELS
[IFF G-1]

.... This is the first step of the wrapping, which produces a double cylindrical form resembling a pair of pants. The next step involves wrapping the pantlegs up to meet the "waistline" which produces a double torus. This step, however, can only be done in four dimensions. Mathematicians can study such forms but they cannot be visualized in three-dimensional euclidean space.

*Théorème (Hilbert) :*

*Il n'y a pas de plongement (isométrique, de Classe $C^2$) du disque de Poincaré dans l'espace euclidien.*



Tchebitchev : Sur la coupe des vêtements (1878)

**Théorèmes :**
(Blanusa,Gromov)

Le disque de Poincaré se plonge isométriquementdans un espace euclidien de dimension 6, de manière infiniment différentiable.

(Nash)
Le disque de Poincaré se plonge isométriquement dans l'espace euclidien de dimension 3, mais seulement de manière une fois différentiable.

(Gromov)
Toute boule contenue dans le disque de Poincaré peut se plonger isométriquement dans l'espace de dimension 5 de manière infiniment différentiable.

**Question :**
le disque de Poincaré se plonge-t-il isométriquement dans un espace euclidien de dimension 4,
de manière infiniment différentiable ?

## Peut-on plonger le disque de Poincaré dans un espace euclidien de manière «naturelle» ?

On cherche un plongement

$p$: Disque $\longrightarrow$ Euclidien

tel que :

Pour tout déplacement (isométrie) $f$ de $D$,

il existe un déplacement $F$ de $E$ tel que

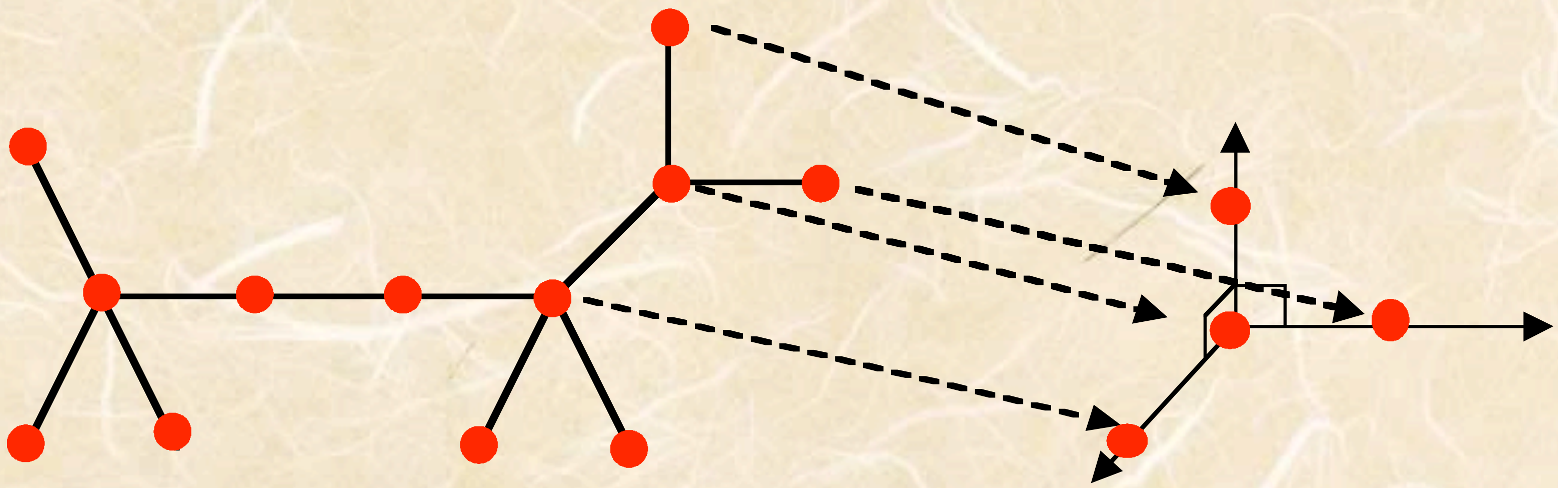
$p \circ f = F \circ p$.

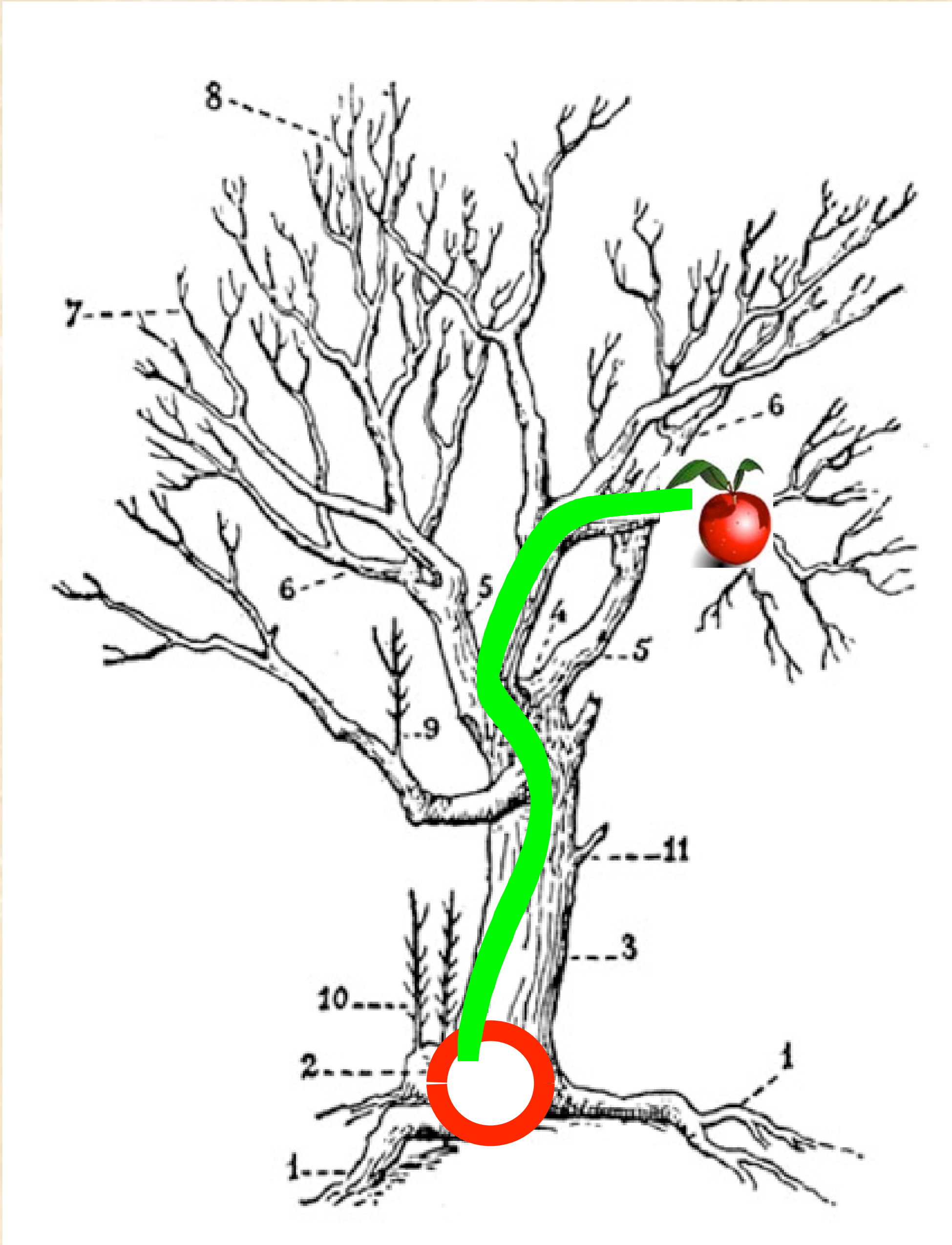
Réponse : Non ! Exercice…

**Théorème :**

*En revanche, il est possible de plonger le disque de Poincaré, de manière naturelle, dans un espace euclidien de dimension infinie (i.e. un espace de Hilbert).*

*Démonstration pour le cas d'un arbre :*






$\text{Arbre} \longrightarrow L^2(\text{Arbre})$

 $\longrightarrow 1$ 

*Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements esthétiques a priori ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester rigoureusement vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.*

*En d'autres termes, les axiomes de la géométrie […] ne sont que des définitions déguisées.*

On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie ; mais ce serait une erreur d'en conclure que la géométrie est une science expérimentale, même en partie. Si elle était expérimentale, elle ne serait qu'approximative et provisoire. [...]La géométrie ne serait que l'étude des mouvements des solides ; mais elle ne s'occupe pas en réalité des solides naturels, elle a pour objet certains solides idéaux, absolument invariables, qui n'en sont qu'une image simplifiée et bien lointaine. La notion de ces corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir.

Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « **groupe particulier** » ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. Seulement, parmi **tous les groupes possibles,** il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels.
L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus commode.

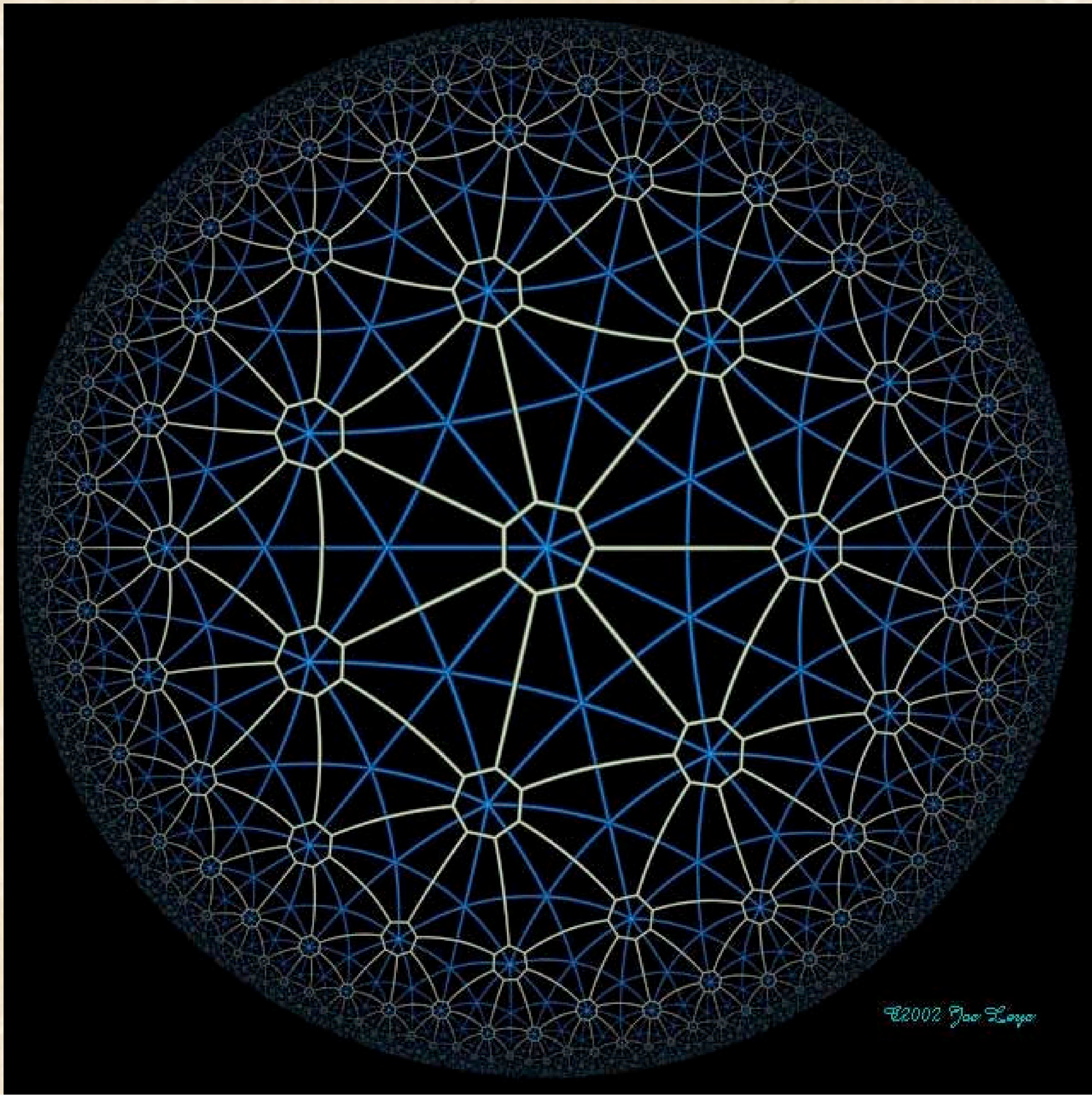
Une géométrie, c'est un groupe

Classer les groupes ?

Description des groupes de Lie simples
(Lie, Cartan, etc…)

Description géométrique des groupes engendrés par une partie finie ?

La majorité d'entre eux sont hyperboliques au sens de Gromov…


©2002 Jos Leys

Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je  n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi : je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver.