Mechanik

Schwingungen

PHYSICS EXPERIMENT

Gekoppelte Schwingungen

AUFZEICHNUNG UND AUSWERTUNG DER SCHWINGUNGEN ZWEIER GLEICHER, GEKOPPELTER PENDEL.

- Aufzeichnung der gleichphasigen Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer T_+.
- Aufzeichnung der gegenphasigen Schwingung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer T_-.
- Aufzeichnung einer gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung und Bestimmung ihrer Schwingungsdauer T sowie der Schwebungsdauer T_Δ.
- Vergleich der gemessenen Schwebungs- und Schwingungsdauer mit den aus den Eigenschwingungsdauern T_- und T_+ berechneten Werten.
- Bestimmung der Federkonstanten der Koppelfeder.

UE1050600

01/24 CW/UD

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Bei der Schwingung zweier gekoppelter Pendel wird Schwingungsenergie zwischen beiden Pendeln hin und her übertragen. Sind beide Pendel gleich und werden ihre Schwingungen so angeregt, dass sich zu Anfang ein Pendel in Ruhelage befindet, während das andere maximal ausgelenkt ist, so geschieht die Energieübertragung sogar vollständig. D.h. jeweils ein Pendel kommt vollständig zur Ruhe, während das andere mit maximaler Amplitude schwingt. Die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels oder allgemeiner zwischen zwei Zeitpunkten, an denen das Pendel mit minimaler Amplitude schwingt, wird als Schwebungsdauer T_Δ bezeichnet.

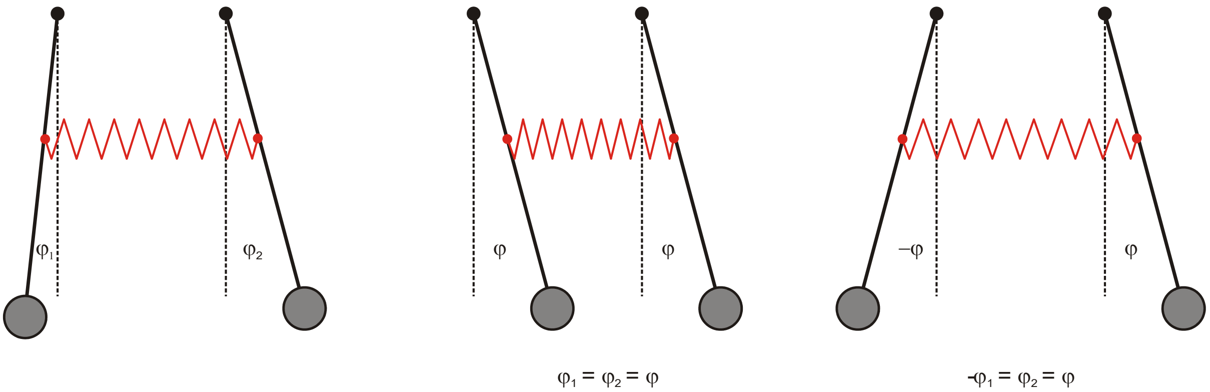
Die Schwingungen zweier gleicher, gekoppelter mathematischer Pendel lassen sich als Überlagerung zweier Eigenschwingungen beschreiben. Diese können beobachtet werden, wenn man die beiden Pendel zu gleichphasigen oder zu gegenphasigen Schwingungen anregt. Im ersten Fall schwingen die Pendel ohne Einfluss der Kopplung mit der Frequenz der ungekoppelten Pendel, im zweiten Fall schwingen sie bei maximalem Einfluss der Kopplung mit größerer Eigenfrequenz. Alle anderen Schwingungen sind als Überlagerungen dieser beiden Eigenschwingungen darstellbar.

Die Bewegungsgleichungen der Pendel haben (für kleine Auslenkwinkel φ_1 und φ_2) die Form:

$$\begin{aligned} L\cdot\ddot{\varphi}_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\ L\cdot\ddot{\varphi}_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

g: Fallbeschleunigung, L: Pendellänge, k: Kopplungskonstante

Fig. 1: Allgemeine (links), gleichphasige (Mitte) und gegenphasige Schwingung (rechts) zweier gekoppelter Pendel



Für die (zunächst willkürlich eingeführten) Hilfsgrößen $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ und $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ ergeben sich daraus die Bewegungsgleichungen:

$$L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ = 0$$
$$L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- = 0 \qquad (2)$$

Deren Lösungen

$$\varphi_+ = a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t)$$
$$\varphi_- = a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \qquad (3)$$

mit den Kreisfrequenzen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ und } \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \qquad (4)$$

entsprechen den beschriebenen Eigenschwingungen bei gleich- oder gegenphasiger Anregung (es gilt $\varphi_+ = 0$ bei gegenphasiger und $\varphi_- = 0$ bei gleichphasiger Schwingung).

Die Auslenkungen der Pendel lassen sich aus der Summe bzw. der Differenz der beiden Hilfsgrößen berechnen und man erhält die Lösung

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)\right)$$
(5)

Hierbei sind die Parameter a_+, a_-, b_+ und b_- zunächst beliebige Größen, die sich aus dem Schwingungszustand der beiden Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnen lassen.

Am leichtesten ist der folgende Fall zu interpretieren, der angeregt wird, wenn Pendel 1 zum Zeitpunkt 0 aus der Nulllage um den Winkel φ_0 ausgelenkt und losgelassen wird, während Pendel 2 in Nulllage in Ruhe ist.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \qquad (6)$$

Nach mathematischer Umformung erhält man

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t)$$
$$\varphi_2 = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \qquad (7)$$

mit

$$\omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \qquad (8)$$

Dies entspricht einer Schwingung der beiden Pendel mit der gleichen Kreisfrequenz ω, wobei ihre Amplituden mit der Kreisfrequenz ω_Δ moduliert werden. Man bezeichnet eine solche Modulation als Schwebung. Im vorliegenden Fall kann sogar von einer maximalen Schwebung gesprochen werden, weil die Amplitude als Minimalwert Null erreicht.

GERÄTELISTE

2 Stabpendel mit Winkelaufnehmer @230 V
1000763 (U8404275-230)

oder

2 Stabpendel mit Winkelaufnehmer @115 V
1000762 (U8404275-115)

1 Schraubenfeder 3,9 N/m	1002945 (U15027)
2 Tischklemmen	1002832 (U1326)
2 Stativstangen, 1000 mm	1002936 (U15004)
1 Stativstange, 470 mm	1002934 (U15002)
4 Universalmuffen	1002830 (U13255)

2 Adapter BNC-Stecker / 4 mm Buchsen
1002750 (U11259)

2 Spannungssensoren 10 V 1021682 (UCMA-BT02)

1 Datenlogger

1 Software

Weitere Informationen zum digitalen Messen sind auf der Webseite des Experiments im 3B Webshop zu finden.

AUFBAU

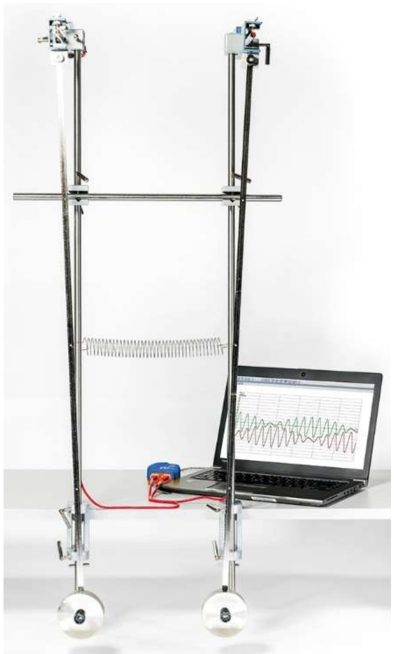


Fig. 2: Aufbau zur Aufzeichnung und Auswertung der Schwingungen zweier gleicher, gekoppelter Pendel

Der Aufbau ist in Fig. 2 dargestellt.

- Die 1000 mm langen Stativstangen im Abstand von ca. 15 cm mittels der Tischklemmen am Arbeitstisch befestigen.
- Kurze Stativstange waagerecht anbringen, um dem Aufbau mehr Stabilität zu verleihen.
- Winkelaufnehmer mit Hilfe der Universalmuffen am oberen Ende der vertikalen Stativstangen befestigen.
- Pendelmassen am unteren Ende der Pendelstäbe befestigen.

- Pendelstäbe in die Winkelaufnehmer einhängen (für die Nadeln der Pendelaufhängung sind Kerben in den Stangen der Winkelaufnehmer vorgesehen).
- Schraubenfeder in die Löcher an den Pendelstäben einhängen, welche ca. 40 cm von der Aufhängung entfernt sind.
- Die Adapter BNC-Stecker / 4 mm Buchsen auf die Winkelaufnehmer stecken und Spannungssensoren anschließen.
- Spannungssensoren an den Datenlogger anschließen.
- Beide Winkelaufnehmer mit Hilfe der Steckernetzgeräte an das Stromnetz anschließen.

DURCHFÜHRUNG

- Software starten und die Zeitverläufe der Spannungssignale beider Sensoren aufnehmen.

1. Aufzeichnung der gleichphasigen Schwingung

- Beide Pendel um den gleichen (kleinen) Winkel in gleicher Richtung auslenken und gleichzeitig loslassen.

2. Aufzeichnung der gegenphasigen Schwingung

- Beide Pendel um den gleichen (kleinen) Winkel in entgegengesetzter Richtung auslenken und gleichzeitig loslassen.

3. Aufzeichnung einer gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung

- Ggf. Anzahl der Messwerte erhöhen.
- Einen Pendelstab auslenken, den anderen in der Nulllage festhalten und beide gleichzeitig loslassen.

MESSBEISPIELE

1. Gleichphasige gekoppelte Schwingung

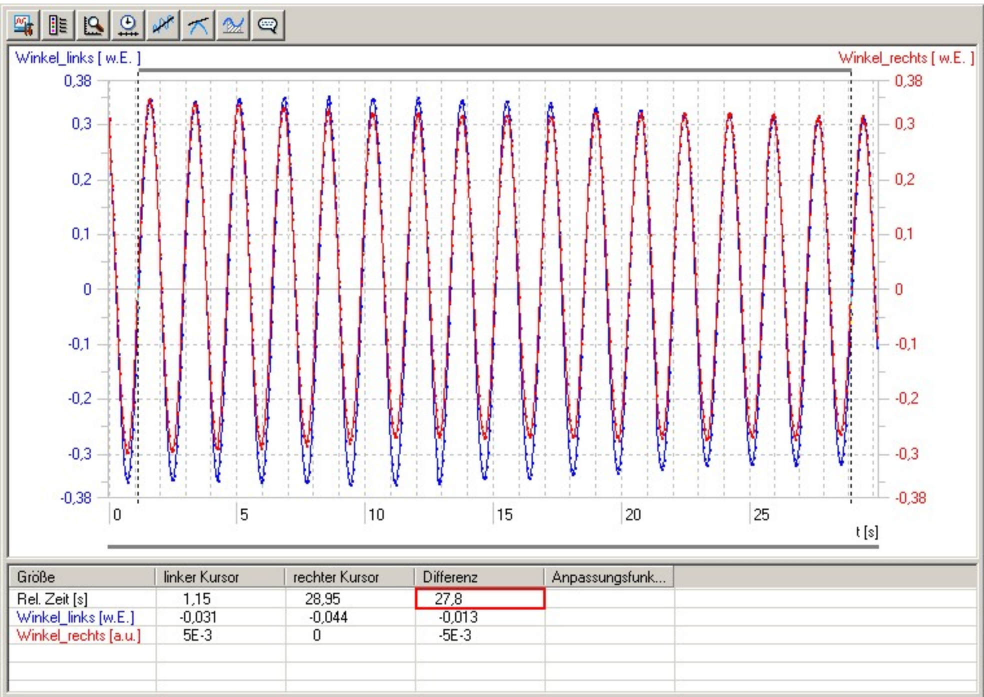


Fig. 3: Auslenkung-Zeit-Diagramm der gleichphasigen gekoppelten Schwingung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

2. Gegenphasige gekoppelte Schwingung

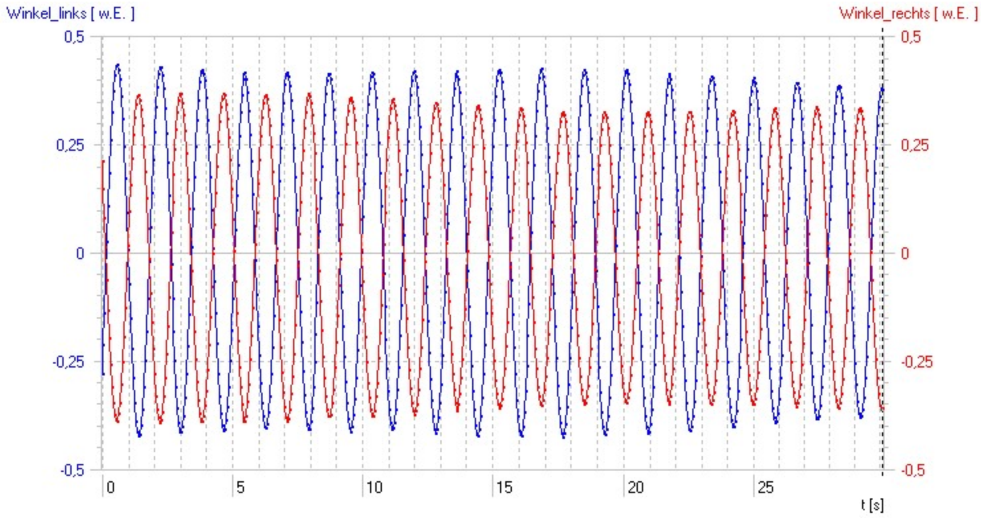


Fig. 4: Auslenkung-Zeit-Diagramm der gegenphasigen gekoppelten Schwingung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

3. Gekoppelte Schwingung mit maximaler Schwebung

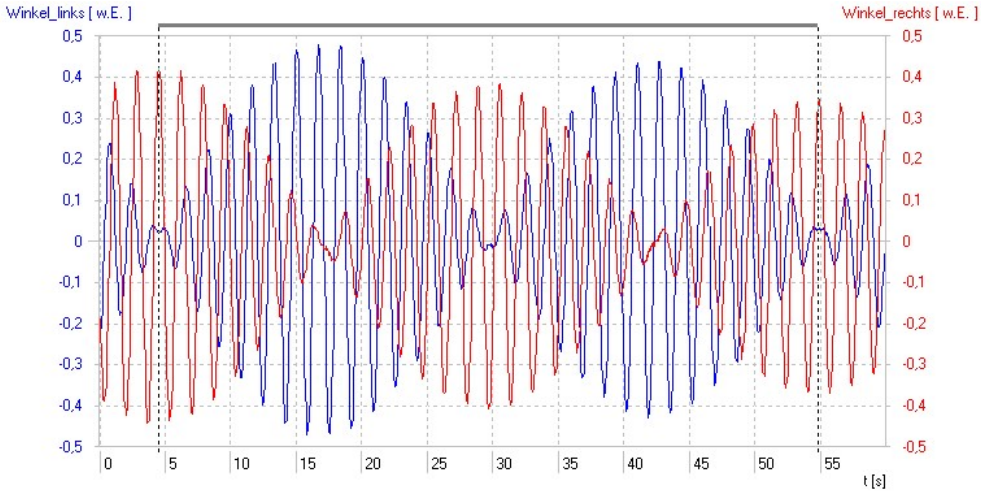


Fig. 5: Auslenkung-Zeit-Diagramm der gekoppelten Schwingung mit maximaker Schwebung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

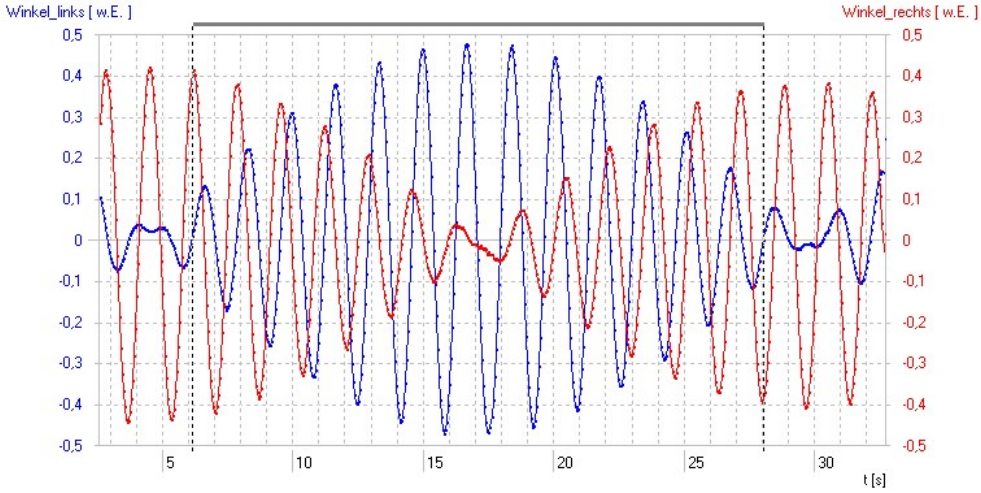


Fig. 6: Vergrößerte Darstellung einer Schwebungsperiode der gekoppelten Schwigung mit maximaler Schwebung (blau: linkes Pendel, rot: rechtes Pendel). Die Winkelskala ist nicht kalibriert

AUSWERTUNG

1. Bestimmung der Schwingungsdauer der gleichphasigen gekoppelten Schwingung

- Datensatz zur gleichphasigen Schwingung öffnen.
- Im Diagramm möglichst viele Schwingungsperioden eines Pendels mit den Cursorn einschließen, dazu beide Cursorn jeweils genau auf den Nulldurchgang einer steigenden Flanke setzen, damit eine ganze Zahl von Perioden eingeschlossen wird (vgl. Fig. 3).
- Den Zeitabstand der Cursor ablesen (Fig. 3, roter Kasten).

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Perioden ergibt die Schwingungsdauer

$$T_+ = \frac{27{,}8\ \text{s}}{16} = 1{,}737\ \text{s}$$

2. Bestimmung der Schwingungsdauer der gegenphasigen gekoppelten Schwingung

- Datensatz zur gegenphasigen Schwingung öffnen und in gleicher Weise vorgehen.

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Perioden ergibt die Schwingungsdauer

$T_- = 1{,}629$ s

3. Bestimmung der Schwingungsdauer der gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung

- Datensatz zur Schwingung mit maximaler Schwebung öffnen.
- Mit den Cursorn eine oder wenn möglich mehrere Schwebungsperiode(n) einschließen (vgl. Fig. 5) und den Zeitabstand der Cursor ablesen.

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Schwebungsperioden ergibt die Schwebungsdauer

$T_\Delta = 25$ s

- Skalierung der Zeitachse so ändern, dass eine Schwebungsperiode vergrößert dargestellt wird.
- Mit den Cursorn im Diagramm möglichst viele Schwingungsperioden eines Pendels innerhalb einer Schwebungsperiode (Zeit zwischen zwei Stillständen des Pendels in der Ruhelage) einschließen (vgl. Fig. 6) und den Zeitabstand der Cursor ablesen.

Der Quotient aus dem Zeitabstand der Cursor und der Anzahl der eingeschlossenen Perioden ergibt die Schwingungsdauer

$T = 1{,}685$ s

4. Vergleich der gemessenen Schwebungs- und Schwingungsdauer mit den aus den Eigenschwingungsdauern berechneten Werten

Für die Schwingungsdauer T der gekoppelten Schwingung mit maximaler Schwebung folgt aus (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1{,}681\ \text{s} \tag{9}$$

Dieser Wert ist mit dem Messwert $T = 1{,}685$ s zu vergleichen.

Auf ähnliche Weise errechnet man die Schwebungsdauer T_Δ. Allerdings ist zu beachten, dass diese üblicherweise als Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels in der Ruhelage definiert wird. Dies entspricht der Hälfte der Periodendauer des modulierenden Kosinusterms bzw. Sinusterms in (7).

$$T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26\ \text{s} \tag{10}$$

Dieser Wert ist mit dem Messwert $T_\Delta = 25$ s zu vergleichen.

Die Abweichung um etwa eine Sekunde vom Messwert mag auf den ersten Blick groß erscheinen, liegt aber in der empfindlichen Abhängigkeit von der Differenz der Eigenschwingungsdauern begründet. Schon eine Schwankung um vier Millisekunden, welche ungefähr im Bereich der in diesem Versuch maximal erreichbaren Messgenauigkeit für die Eigenschwingungsdauern liegt, geht mit einer Änderung der Schwebungdauer um eine Sekunde einher.

5. Bestimmung der Federkonstanten der Koppelfeder

Die Federkonstante der Koppelfeder D hängt mit der Kopplungskonstanten k wie folgt zusammen

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \tag{11}$$

(d: Abstand des Befestigungspunktes der Koppelfeder von der Aufhängung des Pendels).

Bei schwacher Kopplung ($k << g$) hat die Federkonstante nur einen geringen Einfluss auf die Schwingungsdauer der gegenphasigen Schwingung, aber einen großen Einfluss auf die Schwebungsdauer. Daher sollte für die Bestimmung der Federkonstanten eine Beziehung zur Schwebungsdauer benutzt werden, die man erhält, wenn man (4) in (8) einsetzt und nach k umformt.

$$k = 2 \cdot L \cdot \left(\omega_\Delta^2 - \omega_\Delta \cdot \omega_+\right) \tag{12}$$

Nun drückt man die Kreisfrequenzen durch Schwingungsdauern aus und setzt in (11) ein.

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_\Delta} + \frac{T_+{}^2}{T_\Delta{}^2}\right) = 3{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \tag{13}$$