

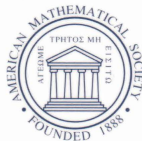
# CONTEMPORARY MATHEMATICS

294

## Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics

Proceedings of the Bariloche School  
January 10–21, 2000  
Bariloche, Patagonia, Argentina

Robert Coquereaux  
Ariel García  
Roberto Trinchero  
Editors



American Mathematical Society

## Selected Titles in This Series

- 294 **Robert Coquereaux, Ariel García, and Roberto Trincherro, Editors**, Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics, 2002
- 293 **Donald M. Davis, Jack Morava, Goro Nishida, W. Stephen Wilson, and Nobuaki Yagita, Editors**, Recent progress in homotopy theory, 2002
- 292 **A. Chenciner, R. Cushman, C. Robinson, and Z. Xia, Editors**, Celestial Mechanics, 2002
- 291 **Bruce C. Berndt and Ken Ono, Editors**,  $q$ -series with applications to combinatorics, number theory, and physics, 2001
- 290 **Michel L. Lapidus and Machiel van Frankenhuysen, Editors**, Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions, 2001
- 289 **Salvador Pérez-Esteve and Carlos Villegas-Blas, Editors**, Second summer school in analysis and mathematical physics: Topics in analysis: Harmonic, complex, nonlinear and quantization, 2001
- 288 **Marisa Fernández and Joseph A. Wolf, Editors**, Global differential geometry: The mathematical legacy of Alfred Gray, 2001
- 287 **Marlos A. G. Viana and Donald St. P. Richards, Editors**, Algebraic methods in statistics and probability, 2001
- 286 **Edward L. Green, Serkan Hoşten, Reinhard C. Laubenbacher, and Victoria Ann Powers, Editors**, Symbolic computation: Solving equations in algebra, geometry, and engineering, 2001
- 285 **Joshua A. Leslie and Thierry P. Robart, Editors**, The geometrical study of differential equations, 2001
- 284 **Gaston M. N'Guérékata and Asamoah Nkwanta, Editors**, Council for African American researchers in the mathematical sciences: Volume IV, 2001
- 283 **Paul A. Milewski, Leslie M. Smith, Fabian Waleffe, and Esteban G. Tabak, Editors**, Advances in wave interaction and turbulence, 2001
- 282 **Arlan Ramsay and Jean Renault, Editors**, Groupoids in analysis, geometry, and physics, 2001
- 281 **Vadim Olshevsky, Editor**, Structured matrices in mathematics, computer science, and engineering II, 2001
- 280 **Vadim Olshevsky, Editor**, Structured matrices in mathematics, computer science, and engineering I, 2001
- 279 **Alejandro Adem, Gunnar Carlsson, and Ralph Cohen, Editors**, Topology, geometry, and algebra: Interactions and new directions, 2001
- 278 **Eric Todd Quinto, Leon Ehrenpreis, Adel Faridani, Fulton Gonzalez, and Eric Grinberg, Editors**, Radon transforms and tomography, 2001
- 277 **Luca Capogna and Loredana Lanzani, Editors**, Harmonic analysis and boundary value problems, 2001
- 276 **Emma Previato, Editor**, Advances in algebraic geometry motivated by physics, 2001
- 275 **Alfred G. Noël, Earl Barnes, and Sonya A. F. Stephens, Editors**, Council for African American researchers in the mathematical sciences: Volume III, 2001
- 274 **Ken-ichi Maruyama and John W. Rutter, Editors**, Groups of homotopy self-equivalences and related topics, 2001
- 273 **A. V. Kelarev, R. Göbel, K. M. Rangaswamy, P. Schultz, and C. Vinsonhaler, Editors**, Abelian groups, rings and modules, 2001
- 272 **Eva Bayer-Fluckiger, David Lewis, and Andrew Ranicki, Editors**, Quadratic forms and their applications, 2000
- 271 **J. P. C. Greenlees, Robert R. Bruner, and Nicholas Kuhn, Editors**, Homotopy methods in algebraic topology, 2001

*(Continued in the back of this publication)*

# Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics

# CONTEMPORARY MATHEMATICS

---

294

## Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics

Proceedings of the Bariloche School  
January 10–21, 2000  
Bariloche, Patagonia, Argentina

Robert Coquereaux  
Ariel García  
Roberto Trinchero  
Editors



---

American Mathematical Society  
Providence, Rhode Island

## Editorial Board

Dennis DeTurck, managing editor

Andreas Blass    Andy R. Magid    Michael Vogelius

This volume contains the proceedings of a conference on Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics, held in Bariloche, Patagonia, Argentina, on January 10–21, 2000.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 16W30, 17B37, 20G42, 81R50, 46L87, 46L37, 81T40, 82B20, 81Txx, 18G60.

All photographs included in the volume are used with the permission of Ariel O. Garcia.

---

### Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics : proceedings of the Bariloche school, January 10–21, 2000, Bariloche, Patagonia, Argentina / Robert Coquereaux, Ariel Garcia, Roberto Trinchero, editors.

p. cm. — (Contemporary mathematics, ISSN 0271-4132 ; 294)

In English, with one contribution in French.

Includes bibliographical references.

ISBN 0-8218-2655-7 (alk. paper)

1. Symmetry (Physics)—Congresses. 2. Quantum groups—Congresses. 3. Geometric quantization—Congresses. 4. Mathematical physics—Congresses. I. Coquereaux, Robert. II. Garcia, Ariel, 1970– III. Trinchero, Roberto, 1956– IV. Contemporary mathematics (American Mathematical Society) ; v. 294.

QC174.17.S9 Q35 2002  
530.14'3—dc21

2002024651

---

**Copying and reprinting.** Material in this book may be reproduced by any means for educational and scientific purposes without fee or permission with the exception of reproduction by services that collect fees for delivery of documents and provided that the customary acknowledgment of the source is given. This consent does not extend to other kinds of copying for general distribution, for advertising or promotional purposes, or for resale. Requests for permission for commercial use of material should be addressed to the Acquisitions Department, American Mathematical Society, 201 Charles Street, Providence, Rhode Island 02904-2294, USA. Requests can also be made by e-mail to [reprint-permission@ams.org](mailto:reprint-permission@ams.org).

Excluded from these provisions is material in articles for which the author holds copyright. In such cases, requests for permission to use or reprint should be addressed directly to the author(s). (Copyright ownership is indicated in the notice in the lower right-hand corner of the first page of each article.)

© 2002 by the American Mathematical Society. All rights reserved.

The American Mathematical Society retains all rights  
except those granted to the United States Government.

Printed in the United States of America.

∞ The paper used in this book is acid-free and falls within the guidelines  
established to ensure permanence and durability.

Visit the AMS home page at URL: <http://www.ams.org/>

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1    07 06 05 04 03 02

## Contents

Foreword	ix
List of participants	xii
Symétries quantiques en physique théorique et en mathématiques	xxi
Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics	xxv
About finite dimensional Hopf algebras NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH	1
Lectures on differentials, generalized differentials and on some examples related to theoretical physics MICHEL DUBOIS-VIOLETTE	59
Modular invariants from subfactors JENS BÖCKENHAUER AND DAVID EVANS	95
The classification of subgroups of quantum $SU(N)$ ADRIAN OCNEANU	133
Uses of quantum spaces O. OGIEVETSKY	161
CFT, BCFT, ADE and all that J.-B. ZUBER	233

## Foreword

This volume contains the written counterpart of several lectures that were given in Bariloche, Argentina, January 10–21, 2000.

This school on “Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics” was probably the first mathematical meeting of the new century. It took place in Patagonia, at the beginning of the austral summer; it was therefore a summer school for many participants (but a winter school for the others!).

The organizers of the school want to thank all those who came and contributed to the success of the school: students, lecturers, secretaries . . . and special thanks to Prof. J. Stasheff who could not attend, but helped us to obtain partial funding from the NSF. The meeting received major support from the CIMPA (France), NSF (USA) and ANPCyT (Argentina), but also from the ICTP (Trieste, Italy), the CLAF (Brazil) and the CNRS (France).

Last but not least, we want to express our gratitude towards our respective laboratories, namely the Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche (CAB), and the Centre de Physique Théorique (CPT, Luminy, Marseille). Special thanks go to Madame M. Rossignol, from the administrative staff of CPT, who came to Bariloche and took care of money matters (fellowships, reimbursments, etc.) and to Gladys Campagno from CAB.

Two reports will be found at the beginning of this volume, one in English and one in French. The first was sent to NSF and the other to CIMPA, just after the school.

Both documents list the titles of the lectures given during the school (some more details are given in the French report). Here is the list of the main lecturers:

- N. Andruskiewitsch (Argentina),
- M. Dubois-Violette (France),
- D. Evans (Great Britain),
- A. Ocneanu (USA),
- O. Ogievetsky (France),
- N. Reshetikhin (USA),
- M. Rosso (France),
- A. Varchenko (USA),
- S. L. Woronowicz (Poland),
- J. B. Zuber (France).

Several participants also delivered talks:

- E. Batista - Topological geons in  $2 + 1$  dimensions.
- E. Buffenoir - Harmonic analysis on complex quantum groups.
- H. Figueroa - On the antipode of Kreimer’s Hopf algebra.

- P. Hajac - Quantum-group equivariant connections and Chern-Connes pairing for quantum-group quotients.
- W. Pusz - Quantum calculus on a classical space.
- E. Ragoucy - Connecting double Yangians, elliptic algebras and quantum groups.
- S. Saxe - A  $q$ -deformed Poincaré algebra in  $2 + 1$  dimensions and its representation theory.
- M. Socolovsky - On the topology of the symmetry group of the standard model.

The present volume contains the lectures given by N. Andruskiewitsch, M. Dubois-Violette, D. Evans, A. Ocneanu, O. Ogievetsky, and J. B. Zuber.

Gathering the following written material took much time and effort from the editors (not mentioning the time spent by the contributors themselves, to whom we address our warmest thanks), but we hope that it was worth doing it.





Nahuel Huapi Lake, Bariloche, Argentina

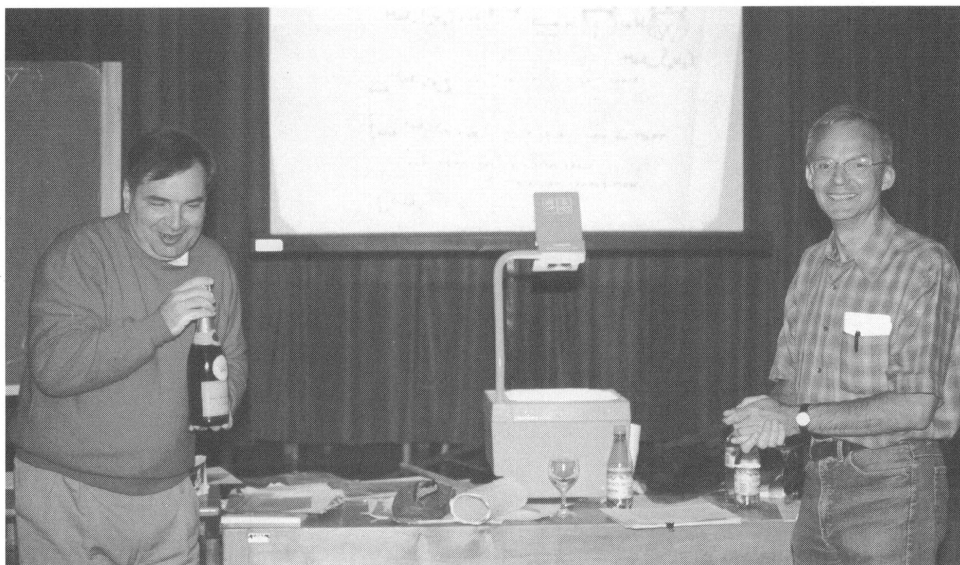
## List of participants

Name, First Name	Email	Institution, Country
Abadie, Beatriz	abadie@cmat.edu.uy	Montevideo, URUGUAY
Abadie, Fernando	abadie@cmat.edu.uy	Montevideo, URUGUAY
Andruskiewitsch, Nicolás	andrus@famaf.unc.edu.ar	Córdoba, ARGENTINA
Armas, Pablo	parmas@dm.uba.ar	Buenos Aires, ARGENTINA
Asaeda, Marta	asaeda@math.psu.edu	Penn State, U.S.A.
Barberis, María Laura	barberis@fis.uncor.edu	Córdoba, ARGENTINA
Barkallil, Abdelilah	abarkall@ulb.ac.be	Bruxelles, BELGIUM
Batista, Eliezer	ebatista@mtm.ufsc.br	UFSC, Florianopolis, BRASIL
Bellich, Humberto	belich@cbpf.br	CBPF, Rio de Janeiro, BRASIL
Bonechi, Francesco	francesco.bonechi@fi.infn.it	Firenze, ITALY
Buffenoir, Eric	buffenoi@lpm.univ-montp2.fr	Montpellier, FRANCE
Casini, Horacio	casini@cab.cnea.gov.ar	CAB-IB, ARGENTINA
Coquereaux, Robert	coque@cpt.univ-mrs.fr	CPT, Marseille, FRANCE
Cuba Castillo, Guillermo	gcubac@cbpf.br	CBPF, Rio de Janeiro, BRASIL
DiLuigi, Constanza	cdilui@dm.uba.ar	Buenos Aires, ARGENTINA
Doria, Celso Melchiades	cmdoria@mtm.ufsc.br	UFSC, Florianopolis, BRASIL
Dotti, Gustavo	gdotti@fis.uncor.edu	Córdoba, ARGENTINA
Dubois-Violette, Michel	patricia@qcd.th.u-psud.fr	Orsay, Paris, FRANCE
Evans, David	evansde@cardiff.ac.uk	Cardiff, U.K.
Fassarella, Lucio	fassarel@cbpf.br	CBPF, Rio de Janeiro, BRASIL
Fernandez, Victoria	victoria@venus.fisica.unlp.edu.ar	La Plata, ARGENTINA
Figuerola, Héctor	figo@cariari.ucr.ac.cr	COSTA RICA
García, Ariel	ariel@cab.cnea.gov.ar	CAB-IB, ARGENTINA
Graña, Matías	matiasg@dm.uba.ar	Buenos Aires, ARGENTINA
Guerra, Stefano	guerra@socrates.mat.unimi.it	Milano, ITALY
Hajac, Piotr	pmh@fm.sissa.it	Trieste, ITALY
Hassouni, Yassine	y-hassou@fsr.ac.ma	Rabat, MOROCCO
Heckenberger, Istvan	heckenbe@mathematik.uni-leipzig.de	Leipzig, GERMANY
Huerta, Marina	huerta@cabtep2.cnea.gov.ar	CAB-IB, ARGENTINA
Iglesias, Alberto	iglesias@grad.physics.sunysb.edu	Córdoba, ARGENTINA
Iglesias, Rodrigo	iglesias@mate.uncor.edu	U.S.A.
Iucci, Aníbal	aiucci@hotmail.com	La Plata, ARGENTINA
Jancsa, Patricia	jancsa@mate.uncor.edu	Córdoba, ARGENTINA
Juyumaya, Jesús	juyumaya@ictp.trieste.it	Trieste, ITALY
Laca, Marcelo	marcelo@frey.newcastle.edu.au	Newcastle, AUSTRALIA
Montani, Hugo	montani@cab.cnea.gov.ar	CAB-IB, ARGENTINA
Moura-Melo, Winder	winder@cbpf.br	CBPF, Rio de Janeiro, BRASIL
Muraki, Naofumi	muraki@iwate-pu.ac.jp	Iwate, JAPAN

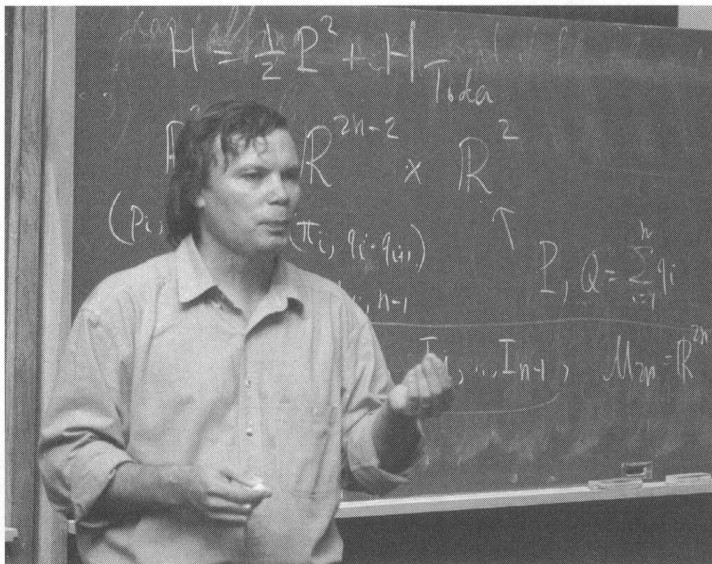
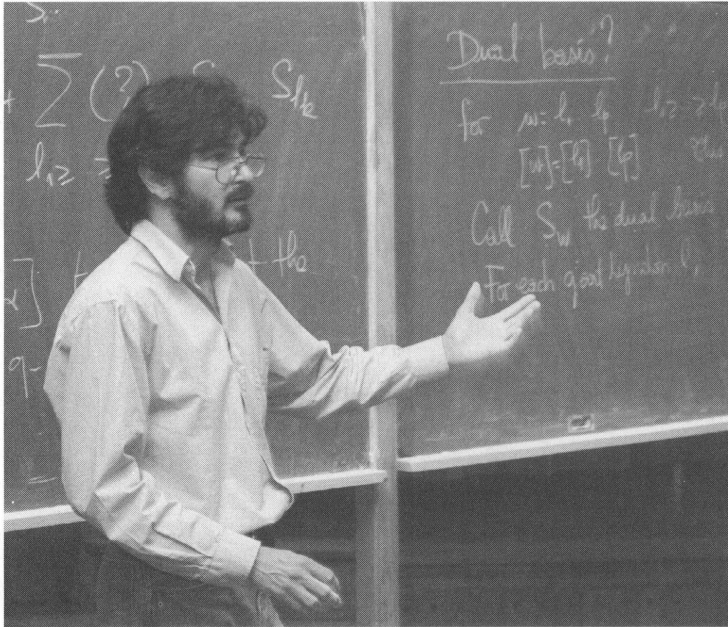
Name, First Name	Email	Institution, Country
Naón, Carlos	naon@venus.fisica.unlp.edu.ar	La Plata, ARGENTINA
Natale, Sonia	natale@mate.uncor.edu	Córdoba, ARGENTINA
Ocneanu, Adrian	adrian@math.psu.edu	Penn State, U.S.A.
Ogievetsky, Oleg	oleg@cpt.univ-mrs.fr	CPT, Marseille, FRANCE
Onofre, Rojas	or@atria.if.uff.br	UFF, Rio de Janeiro, BRASIL
Pusz, Wieslaw	wieslaw.pusz@fuw.edu.pl	Warsaw, POLAND
Ragoucy, Eric	ragoucy@lapp.in2p3.fr	LAPP, Annecy, FRANCE
Reshetikhin, Nicolai	reshetik@math.berkeley.edu	Berkeley, U.S.A.
Reula, Oscar	reula@fis.uncor.edu	Córdoba, ARGENTINA
Reznikoff, Sarah	sarah@math.berkeley.edu	Berkeley, U.S.A.
Rosso, Marc	rosso@math.u-strasbg.fr	Strasbourg, FRANCE
Sachse, Sebastian	sachse@ime.usp.br	IME, São Paulo, BRASIL
Salles, Mario Otavio	salles@ime.usp.br	IME, São Paulo, BRASIL
Schieber, Gil	schieber@if.ufrj.br	CPT, Marseille, FRANCE
Simring, Eric	simring@uclink4.berkeley.edu	Berkeley, U.S.A.
Socolovsky, Miguel	socolov@sisisa.podernet.com.mx	UNAM, Mexico, MEXICO
Szymanski, Wojciech	wojciech@frey.newcastle.edu.au	Newcastle, AUSTRALIA
Tahrie, El Hassan	tahrie@sciences.univ-oujda.ac.ma	Oujda, MOROCCO
Toppan, Francisco	toppan@cbpf.br	CBPF, Rio de Janeiro, BRASIL
Trincherro, Roberto	trincer@cab.cnea.gov.ar	CAB-IB, ARGENTINA
Varchenko, Alexandre	av@math.unc.edu	Chapell Hill, UNC, U.S.A.
Villanueva, David	david@ime.usp.br	IME, São Paulo, BRASIL
Woronowicz, Lech	slworono@fuw.edu.pl	Warsaw, POLAND
Zuber, Jean-Bernard	zuber@spht.saclay cea.fr	Saclay, Paris, FRANCE

**Secretaries:**

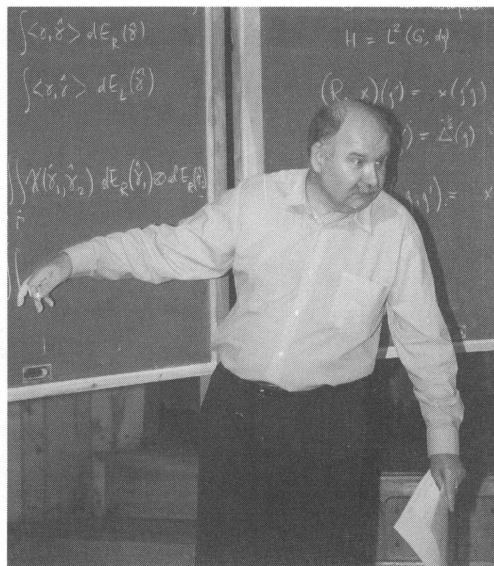
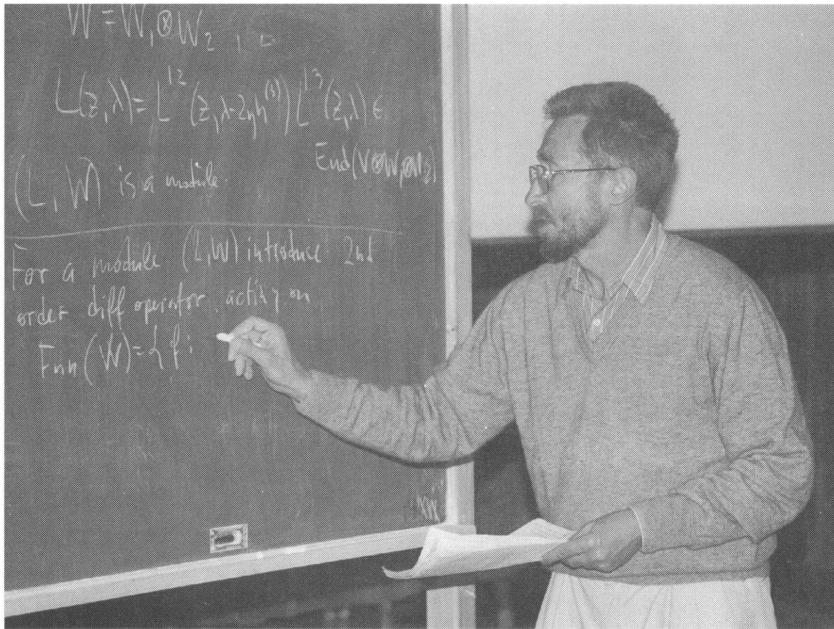
Campagno, Gladys	CAB, Bariloche, ARGENTINA
Rosignol, Michèle	CPT, Marseille, FRANCE



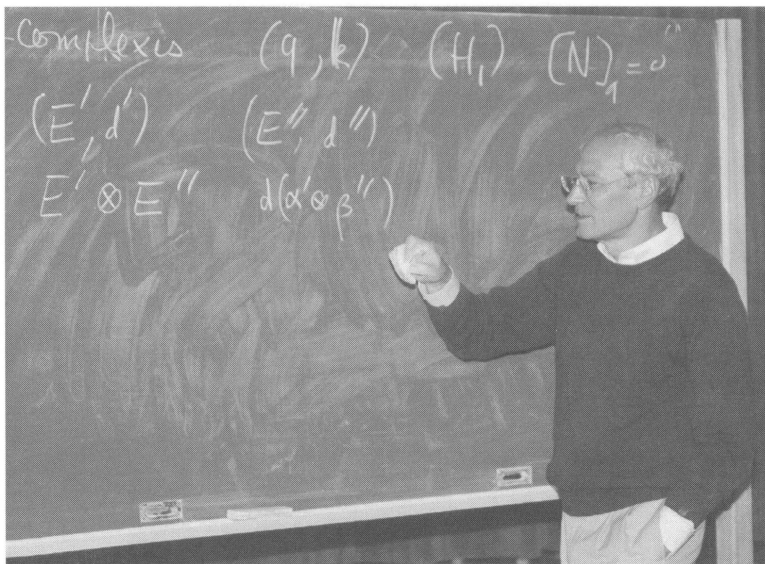
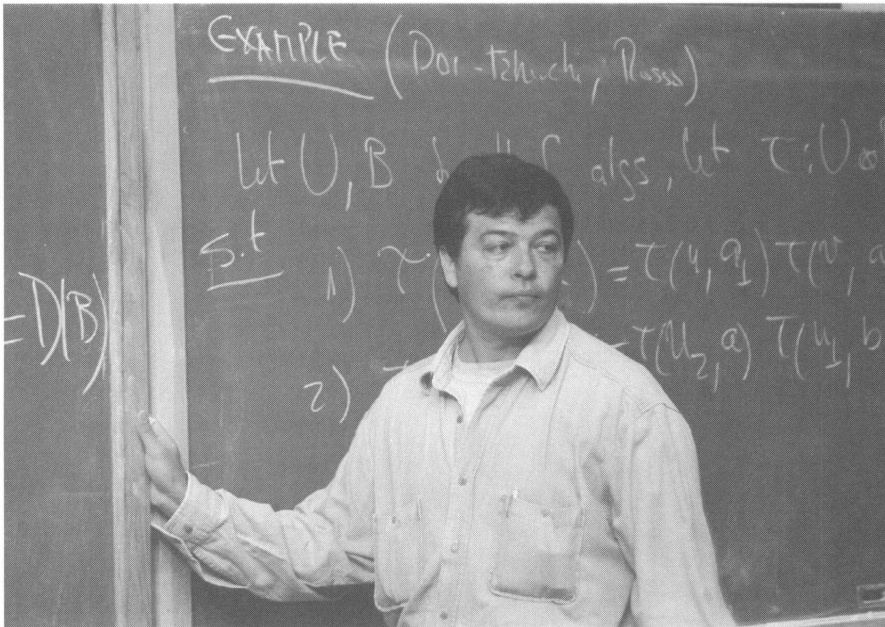
A. Ocneanu and J.-B. Zuber



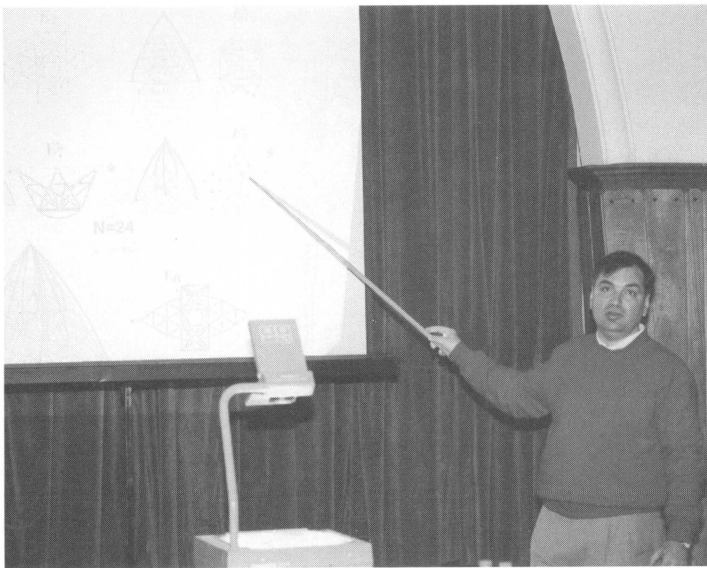
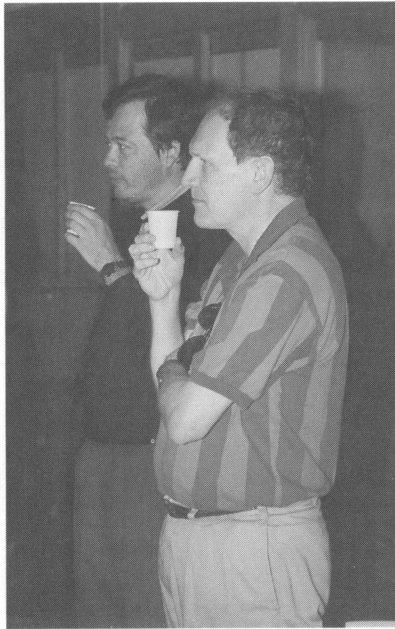
M. Rosso and N. Reshetikhin



A.Varchenko and S. L.Woronowicz

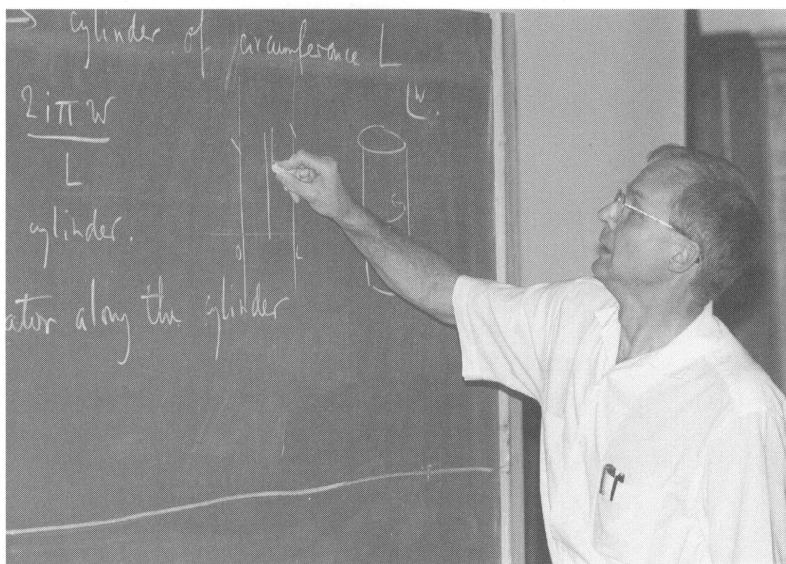
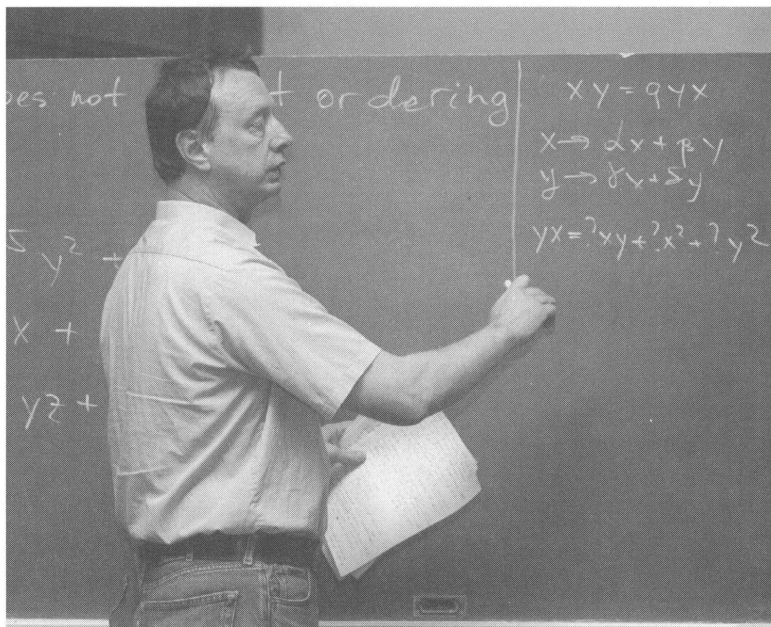


N. Andruskiewitsch and M. Dubois-Violette



D. Evans and A. Ocneanu





O. Ogievetsky and J.-B. Zuber

# Symétries quantiques en physique théorique et en mathématiques

Bariloche, Patagonie, Argentine

10-21 Janvier 2000

## Présentation générale

L'école de Bariloche qui s'est tenue en Argentine, en Janvier 2000 a réuni 68 participants, physiciens théoriciens ou mathématiciens (environ moitié-moitié) originaires de 15 pays différents. La majorité des stagiaires (40) sont venus de pays d'Amérique Latine; il faut signaler tout d'abord l'Argentine, bien sûr (22 participants dont 6 locaux), ainsi que le Brésil (12 participants) mais plusieurs scientifiques sont également venus du Chili, du Mexique, de Costa Rica et de l'Uruguay. Les autres participants se répartissent entre différents pays d'Europe (16 personnes, dont 8 français), les Etats Unis (4), l'Australie (2), le Japon (2) et le Maroc (3). Signalons également la participation, tant au niveau des professeurs que des stagiaires, d'un bon nombre de scientifiques originaires – tout au moins au niveau familial – de pays d'Europe de l'Est, mais travaillant le plus souvent, maintenant, dans d'autres pays (USA, France etc.) La majorité des participants avait un âge situé entre 30 et 45 ans, ce qui nous conduit à une moyenne d'âge assez jeune. Signalons aussi que 5 des stagiaires étaient des femmes, ce qui représente une participation féminine très sensiblement supérieure à celle généralement obtenue lors d'écoles ou de conférences consacrées aux sciences physiques ou mathématiques.

Le projet de cette école a été présenté en premier lieu au Conseil Scientifique du CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées) et a reçu l'approbation de ce dernier ainsi qu'une promesse de financement. Il s'agit donc d'une "école CIMPA". D'autres financements ont été, par la suite, obtenus par les organisateurs. L'école a été subventionnée essentiellement par le CIMPA (France), la NSF (USA) et l'ANPCyT (Argentine), et, à un niveau moindre, par l'ICTP (Trieste, Italie), le CLAF (Brésil), et le CNRS (France).

Il faut mentionner également l'aide logistique que les organisateurs ont reçu de leurs laboratoires respectifs, à savoir le Centre de Physique Théorique de Marseille (qui a pu dépêcher une secrétaire, Mme M. Rossignol), l'Instituto Balseiro et le Centro Atómico Bariloche. A noter aussi l'aide du professeur Jim Stasheff (University of North Carolina) en ce qui concerne l'obtention et la gestion des fonds NSF. L'ensemble des crédits obtenus par les directeurs de l'école a permis de financer les voyages de 46 personnes (8 orateurs et 38 stagiaires) et de financer également le séjour de tous les participants sans exception. Notons que les capacités d'accueil

du Centro Atómico Bariloche ont grandement permis de minimiser les coûts en hôtellerie pure (5 participants seulement ont été logés dans un hôtel).

Le thème de l'école "Symétries quantiques en physique théorique et en mathématiques" est un sujet d'actualité, aussi bien en mathématiques qu'en physique. On sait que la découverte récente de toutes une classes d'algèbres de Hopf ("groupes quantiques") a relancé, en mathématiques pures, toute une gamme d'activités de recherche : tout d'abord en algèbre, bien entendu, mais aussi dans des thématiques voisines (topologie des variétés, mécanique, théorie des noeuds, systèmes dynamiques, algèbres d'opérateurs, théorie des nombres etc.). En physique, les groupes quantiques sont apparus tout d'abord dans l'étude des systèmes intégrables (méthode du scattering inverse) mais ils ont alors commencé à être utilisés dans de nombreuses autres disciplines : physique mésoscopique, théorie statistique, transitions de phase, théories conformes, théorie quantique des champs, théorie des cordes, particules élémentaires etc.

Les organisateurs ont fait appel à des spécialistes internationaux et leur ont demandé de donner un cours jettant les bases de la théorie des groupes quantiques tout en réservant une partie de leur temps pour présenter quelques résultats récents. L'école de Bariloche étant effectivement une école, les différents orateurs ont été priés de consacrer une partie importante de leur temps de parole à un travail pédagogique d'exposition. Les professeurs ont su apporter un éclairage tout à fait personnel aux différentes notions qu'ils ont présentées. Les organisateurs sont également heureux de noter que la plupart des orateurs ont profité de cette rencontre de Bariloche pour présenter, à l'issue de leurs cours respectifs, plusieurs résultats originaux, souvent encore non publiés.

Les différents professeurs ont évidemment choisi des points de départ différents pour présenter les notions de symétries quantiques, points de départ qui reflètent leur préoccupation propres : certains ont centré leur cours sur une approche basée sur l'analyse (au sens mathématique du terme), d'autres sur la géométrie, d'autres ont préféré une approche purement algébrique, d'autres enfin sont partis des modèles physiques (théories conformes en particulier) pour introduire le sujet.

### Contenu des cours

La liste des orateurs était la suivante :

N. Andruskiewitsch (Argentine), M. Dubois Violette (France), D. Evans (Grande Bretagne) , A. Ocneanu (USA), O. Ogievetsky (France) N. Reshetikhin (USA), M. Rosso (France), A. Varchenko (USA), S. L. Woronowicz (Pologne) et J. B. Zuber (France).

L'école a duré deux semaines et chacun des orateurs a donné un total de 5 heures de cours réparti sur trois cours distincts.

Le descriptif suivant est un résumé, un peu plus technique, du contenu des différents cours.

- N. Andruskiewitsch : Algèbres de Hopf de dimension finie.

Résumé : Tour d'horizon de ce qu'on sait de la classification et des propriétés des algèbres de Hopf de dimension finie. Une construction particulière faite à l'aide de la donnée d'un module de Yetter-Drinfeld a été particulièrement étudiée. De nombreux exemples ont été donnés.

- M. Dubois Violette : Propriétés homologiques et cohomologiques des algèbres non commutatives (en particulier les algèbres de Hopf).

Résumé : Après avoir rappelé un certain nombre de faits connus concernant les complexes différentiels (en particulier la cohomologie de Hochschild d'une algèbre non commutative à valeur dans un bimodule), l'orateur a étudié la généralisation de ces concepts au cas  $d^N = 0$  ( $N > 2$ ). Ces cohomologies généralisées ont été alors utilisées pour l'étude d'espaces de tenseurs irréductibles possédant des symétries décrites par des diagrammes d'Young quelconques (le cas usuel se limitant aux tenseurs complètement antisymétriques).

- D. Evans : Interpretation des théories de champs conformes en terme de sous-facteurs et d'algèbres de Von Neumann.

Résumé : Les propriétés d'invariance modulaire des théories de champs conformes ont été interprétées en termes de théorie des opérateurs : systèmes de bimodules, facteurs et sous facteurs.

- A. Ocneanu : Classification des symétries quantiques de type  $SL(3)$ .

Résumé : L'orateur a d'abord décrit un travail datant d'environ cinq ans "Path on Dynkin diagrams, ADE, quantum group symmetries, Platonic solids and singularities" où les symétries de l'espace des chemins sur les diagrammes de Dynkin avaient été classifiés et reliées d'une part aux représentations de groupes quantiques aux racines de l'unité, et, d'autre part, aux théories de champs conformes possédant une symétrie quantique de type  $SL_q(2)$ . Par la suite, le professeur Ocneanu a présenté (pour la première fois) la classification concernant le cas  $SL(3)$ . Cette classification retrouve, tout en la précisant et en la complétant, les résultats obtenus, grâce à des motivations physiques, par Di Francesco et Zuber. Une liste de graphes généralisant les diagrammes de Dynkin ADE a été donnée. Cette liste apparait (poster couleur fourni par le Pr. Ocneanu) sur la page web dédiée à l'école de Bariloche. Voir <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~coque/Bariloche2000.html>

- O. Ogievetsky : Matrices R perturbatives et non perturbatives.

Résumé : Le cours a débuté avec un exposé décrivant la méthode d'obtention des matrices R quantiques par quantification des matrices r classiques et a continué par une discussion des triplets de Belavin-Drinfeld. Les propriétés des espaces quantiques (algèbres quadratiques) associées à la décomposition spectrale des matrices R (tordues par transposition tensorielle) ont alors été étudiées. Pour terminer, l'orateur s'est attaché à une discussion du cas où les groupes quantiques ne peuvent pas être obtenus par déformation (ou par twist) des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie. Une classification des algèbres de Hopf, ni commutatives, ni co-commutatives, mais possédant la même série de Poincaré que celle de l'algèbre classique des fonctions sur le groupe  $GL(3)$  a été obtenue par l'auteur et exposée lors de cette école pour la première fois. L'orateur a également abordé les sujets suivants : formes réelles des algèbres de Hopf et algèbres  $q$ -multilinéaires.

- N. Reshetikhin : Systèmes intégrables classiques et quantiques.

Résumé : Après une introduction générale sur le thème des variétés symplectiques et des variétés de Poisson, l'orateur a présenté la méthode de quantification par déformation formelle, la méthode utilisant des idéaux

de déformation ainsi que les cas d'intégrabilité au sens de Liouville (et une généralisation à un cas dit dégénéré). Il a montré comment les systèmes intégrables classiques sont reliés aux feuilles symplectiques des groupes de Lie-Poisson et comment cette construction se généralise au cas des systèmes intégrables quantiques.

- M. Rosso : Point de vue combinatoire sur les groupes quantiques.

Résumé : L'orateur a tout d'abord décrit la structure de l'algèbre (de Hopf) des battages de carte sur un espace vectoriel et le concept de "mots de Lyndon". Il a alors construit un analogue quantique de l'algèbre des battages de cartes (algebra of quantum shuffles) et montré comment récupérer, à partir de cette notion, la sous algèbre de Borel de toutes les algèbres enveloppantes quantiques obtenues usuellement par déformation. Un sous-produit de cette construction concerne l'obtention de formules totalement explicites pour les matrices R universelles.

- A. Varchenko : Groupes quantiques dynamiques.

Résumé : Toute équation K-Z (Knizhnik-Zamolodchikov) généralisée peut être reliée à la donnée d'une surface de Riemann avec un certain nombre de points marqués. Dans le cas de la sphère, les conditions d'intégrabilité correspondantes conduisent à l'équation de Yang-Baxter "classique", dont la quantification conduit à l'équation de Yang-Baxter et aux groupes quantiques (algèbres de Hopf quadratiques quasi-triangulaires). Dans le cas du tore, l'équation obtenue, "équation classique de Yang-Baxter dynamique", conduit, après quantification, à l'équation de Neveu-Felder et aux groupes quantiques dynamiques. Les groupes quantiques elliptiques peuvent alors être obtenus naturellement et étudiés. Après une description de ce qui précède, l'orateur a montré l'existence de relations existant avec l'étude des fonctions spéciales ( $q$ -Lame, Mac Donald etc ).

- S.L. Woronowicz : Groupes quantiques non compacts et opérateurs unitaires multiplicatifs.

Résumé : L'orateur a montré que toute l'information contenue dans un groupe quantique de matrices (en particulier celle reliée à sa structure de  $C^*$  algèbre) pouvait être codée dans un opérateur particulier "l'opérateur de Skandalis", lequel doit en particulier satisfaire une identité pentagonale. L'exemple du groupe quantique "az+b" a été étudié en détails.

- J.B. Zuber : CFT, BCFT, ADE and all that.

Résumé : Le cours de J.B. Zuber avait pour but de présenter certaines particularités qu'on rencontre en physique dans l'étude des théories de champs conformes de dimension 2. Les mots clefs de son cours sont les graphes (ceux de Dynkin, et certaines généralisations de ces derniers). L'étude des fonctions de partition invariantes modulaires, conduisent, dans le cas des théories conformes affines de type  $SL(2)$ , à une classification ADE déjà obtenue il y a plusieurs années. Dans le cas de  $SL(3)$  une classification est connue mais les graphes correspondants et leur interprétation mathématique est encore "Terra Incognita" (voir cependant le cours d'A. Ocneanu à cette école). Une relation entre ces classifications et l'étude des théories de champs conformes en présence d'une frontière a été également décrite.

# Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics

Bariloche, Patagonia, Argentina  
January 10-21, 2000

## Final Report NSF Grant INT-9979435

The workshop took place at the Instituto Balseiro and Centro Atómico Bariloche from January 10 to 21, 2000. There were 68 participants from 15 countries, the majority (41) from Latin America, 16 from Europe, 4 from the US, 3 from Marocco, 2 from Australia and 2 from Japan. There were five women, well above average for a meeting of this sort. The scientific range of the participants ran from graduate students to post-docs to young researchers on up to leading theoreticians.

The workshop received major support from the CIMPA (France), the NSF and the ANPCyT (Argentina), and also from the ICTP (Trieste, Italy), the CLAF (Brazil) and the CNRS (France). This provided accomodations for all participants and travel support for 8 lecturers and 38 other participants. The facilities at the Centro Atómico Bariloche provided accomodations at bargain rates.

The theme, “Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics”, is at the cutting edge of research in both mathematics and physics. The discovery some 15 years ago of quantum groups (a special class of Hopf algebras) has led to an ongoing torrent of activity in algebra but also in topology (manifold and knot theories), mechanics, dynamical systems, operator theory and even number theory. In physics, quantum groups first appeared in integrable systems but now appear also in statistical mechanics, conformal field theory, quantum field theory and more.

The organizers invited international specialists to give a course each on the basics of relevant aspects of quantum group theory leading up to their recent results. The workshop was thus in major part a ‘school’ providing exposition for the training of the next generation of researchers. The various lecturers provided significantly different points of view: from analysis, geometry, algebra and physical models, especially conformal.

The lecturers were N. Andruskiewitsch (Argentina), M. Dubois Violette (France), D. Evans (UK), A. Ocneanu (USA), O. Ogievetsky (France), N. Reshetikin (USA), M. Rosso (France), A. Varchenko (USA), S. Woronowicz (Poland), and J. B. Zuber (France).

Each gave a series of lectures, 5 hours in all, as follows:

- N. Andruskiewitsch: Finite dimensional Hopf algebras.

- M. Dubois Violette: Homological and cohomological properties of non-commutative algebras.
- D. Evans: Interpretation of conformal field theories in terms of sub-factors of von Neumann algebras.
- A. Ocneanu: Classification of quantum symmetries of type  $SL(3)$ .
- O. Ogievetsky: Perturbative and non-perturbative R-matrices.
- N. Reshetikin: Classical and quantum integrable systems.
- M. Rosso: The combinatorial point of view on quantum groups.
- A. Varchenko: Dynamical quantum groups.
- S. Woronowicz: Non-compact quantum groups and multiplicative unitary operators.
- J.B. Zuber: CFT, BCFT, ADE and all that.

## Selected Titles in This Series

*(Continued from the front of this publication)*

- 270 **Jan Denef, Leonard Lipschitz, Thanases Pheidas, and Jan Van Geel, Editors**, Hilbert's tenth problem: Relations with arithmetic and algebraic geometry, 2000
- 269 **Mikhail Lyubich, John W. Milnor, and Yair N. Minsky, Editors**, Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology, 2001
- 268 **Robert Gulliver, Walter Littman, and Roberto Triggiani, Editors**, Differential geometric methods in the control of partial differential equations, 2000
- 267 **Nicolás Andruskiewitsch, Walter Ricardo Ferrer Santos, and Hans-Jürgen Schneider, Editors**, New trends in Hopf algebra theory, 2000
- 266 **Caroline Grant Melles and Ruth I. Michler, Editors**, Singularities in algebraic and analytic geometry, 2000
- 265 **Dominique Arlettaz and Kathryn Hess, Editors**, Une dégustation topologique: Homotopy theory in the Swiss Alps, 2000
- 264 **Kai Yuen Chan, Alexander A. Mikhalev, Man-Keung Siu, Jie-Tai Yu, and Efim I. Zelmanov, Editors**, Combinatorial and computational algebra, 2000
- 263 **Yan Guo, Editor**, Nonlinear wave equations, 2000
- 262 **Paul Igodt, Herbert Abels, Yves Félix, and Fritz Grunewald, Editors**, Crystallographic groups and their generalizations, 2000
- 261 **Gregory Budzban, Philip Feinsilver, and Arun Mukherjea, Editors**, Probability on algebraic structures, 2000
- 260 **Salvador Pérez-Esteve and Carlos Villegas-Blas, Editors**, First summer school in analysis and mathematical physics: Quantization, the Segal-Bargmann transform and semiclassical analysis, 2000
- 259 **D. V. Huynh, S. K. Jain, and S. R. López-Permouth, Editors**, Algebra and its applications, 2000
- 258 **Karsten Grove, Ib Henning Madsen, and Erik Kjær Pedersen, Editors**, Geometry and topology: Aarhus, 2000
- 257 **Peter A. Cholak, Steffen Lempp, Manuel Lerman, and Richard A. Shore, Editors**, Computability theory and its applications: Current trends and open problems, 2000
- 256 **Irwin Kra and Bernard Maskit, Editors**, In the tradition of Ahlfors and Bers: Proceedings of the first Ahlfors-Bers colloquium, 2000
- 255 **Jerry Bona, Katarzyna Saxton, and Ralph Saxton, Editors**, Nonlinear PDE's, dynamics and continuum physics, 2000
- 254 **Mourad E. H. Ismail and Dennis W. Stanton, Editors**,  $q$ -series from a contemporary perspective, 2000
- 253 **Charles N. Delzell and James J. Madden, Editors**, Real algebraic geometry and ordered structures, 2000
- 252 **Nathaniel Dean, Cassandra M. McZeal, and Pamela J. Williams, Editors**, African Americans in Mathematics II, 1999
- 251 **Eric L. Grinberg, Shiferaw Berhanu, Marvin I. Knopp, Gerardo A. Mendoza, and Eric Todd Quinto, Editors**, Analysis, geometry, number theory: The Mathematics of Leon Ehrenpreis, 2000
- 250 **Robert H. Gilman, Editor**, Groups, languages and geometry, 1999
- 249 **Myung-Hwan Kim, John S. Hsia, Yoshiyuki Kitaoka, and Rainer Schulze-Pillot, Editors**, Integral quadratic forms and lattices, 1999
- 248 **Naihuan Jing and Kailash C. Misra, Editors**, Recent developments in quantum affine algebras and related topics, 1999

For a complete list of titles in this series, visit the  
AMS Bookstore at [www.ams.org/bookstore/](http://www.ams.org/bookstore/).



## Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics

Robert Coquereaux, Ariel García, and Roberto Trinchero, Editors

This volume presents articles from several lectures presented at the school on “Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics” held in Bariloche, Argentina. The various lecturers provided significantly different points of view on several aspects of Hopf algebras, quantum group theory, and noncommutative differential geometry, ranging from analysis, geometry, and algebra to physical models, especially in connection with integrable systems and conformal field theories.

Primary topics discussed in the text include subgroups of quantum  $SU(N)$ , quantum ADE classifications and generalized Coxeter systems, modular invariance, defects and boundaries in conformal field theory, finite dimensional Hopf algebras, Lie bialgebras and Belavin-Drinfeld triples, real forms of quantum spaces, perturbative and non-perturbative Yang-Baxter operators, braided subfactors in operator algebras and conformal field theory, and generalized ( $d^N$ ) cohomologies.

ISBN 0-8218-2655-7



9 780821 826553

CONM/294

AMS on the Web  
[www.ams.org](http://www.ams.org)