“Integración numérica”

Planeación didáctica del tema

<table>
<tr><th>Tópicos</th><th>INTEGRACIÓN NUMÉRICA</th></tr>
<tr><td>Temas</td><td>Métodos de Newton- Cotes
Regla del Trapecio
Fórmula de 1/3
Fórmula de 3/8</td></tr>
<tr><td>Objetivos específicos</td><td>Proponer solución a situaciones que involucren la síntesis y/ o acumulación como efecto del producto de una variable independiente, en un intervalo [a, b].
Tomar decisiones fundamentadas sobre la elección de métodos típicos de solución, desde el reconocimiento de un método analítico y/o en su caso, a las fórmulas de integración numérica de la familia Newton-Cotes.
Implementar las fórmulas de la Regla del Trapecio, Simpson 1/3 y Simpson 3/8.
Emplear software indicado y/o en su caso diseñar programas especializados para hacer corridas, y estimar el concepto de error.
Interpretar resultados en el contexto del problema.</td></tr>
<tr><td>Niveles de comprensión</td><td>
<table>
<tr><th>Niveles</th><th>Evidencia de aprendizaje</th></tr>
<tr><td>1. Reproducción de conocimiento</td><td>Reproduce el concepto de integral definida.
Ubica detalles de áreas bajo la curva para fenómenos simples.
Analiza características del fenómeno descrito como área bajo la curva.
Evidencia de aprendizaje 4.1, 4.2, 4.3</td></tr>
<tr><td>2. Aplicación básica de habilidades y conceptos</td><td>Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un fenómeno.
Aplica un método numérico en una aplicación rutinaria.
Clasifica una serie de etapas y elige por un método numérico.
Escribe una explicación de un tópico para otros alumnos.
Evidencia de aprendizaje 4.4</td></tr>
<tr><td>3. Desarrollo de un plan o una secuencia de pasos lógicos</td><td>Explica y conecta ideas, usando evidencia que lo sustenten.
Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un caso.
Cita evidencia y desarrolla un argumento lógico para hacer conjeturas.</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td></td><td>Resuelve el problema y analiza escenarios distintos.
Evidencia de aprendizaje 4.5, 4.6</td></tr>
<tr><td>4. Pensamiento matemático (razonamiento y abstracción)</td><td>Sintetiza ideas en nuevas representaciones (elaborar pseudocódigo, diagrama de flujo y programa en código).
Evidencia de aprendizaje 4.7a
Escribe el código fuente y presenta el ejecutable- Ingeniería en Computación
Evidencia de aprendizaje 4.7b
Realiza un análisis comparativo: Ingeniería Civil, Industrial, Mecánica, Eléctrica- Electrónica:
Evidencia de aprendizaje 4.7b</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Recursos digitales:</td><td>Ejecutables elaborados por integrantes del proyecto PAPIME
Regla del Trapecio
Fórmula de 1/3
Fórmula de 3/8

Videos elaborados para el proyecto
Nivel 1 - https://youtu.be/Z3C341IMMx4
1er Caso - https://youtu.be/Oyj7euLTP_I
2do caso - https://youtu.be/N47KX1qoIPU
3er caso - https://youtu.be/SrVDxL1p430
4to caso - https://youtu.be/rbyEVNSvUoY

De apoyo:
www.math.tamu.edu/~tom https://.kiffe/Tools/quadj.html
https://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html
http://demonstrations.wolfram.com/NumericalIntegrationExamples/
https://www.geogebra.org/m/ptVCr8rH</td></tr>
<tr><td>Test de reposición</td><td>Ponte a prueba</td></tr>
<tr><td>Tema para participación en foro</td><td>Opcional: Diseñar una infografía ¿Cómo identificar en un evento práctico/fenómeno cuándo derivar o cuándo integrar?</td></tr>
<tr><td>Encuesta de satisfacción</td><td>Preguntas de reflexión</td></tr>
<tr><td>Referencias bibliográficas</td><td>- Apostol T. M. (1967) Cálculo volúmen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverté, Barcelona.
- Chapra S.C. & Canale R.P. (2010). Numerical Methods for Engineers. McGraw Hill, U.S.</td></tr>
</table>

	- Forsythe A., Keenan T., Organick R., Stenberg W. (1973). *Lenguajes de diagramas de flujo. Técnicas de Computación.* Limusa, México - Kharab A. & Guenther R.B. (2012). *An Introduction to Numerical Methods. A MATLAB Approach*. Taylor & Francis Group, U.S. - Nieves Hurtado A. & Domínguez Sánchez F.C. (2014). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. Grupo Editorial Patria. México. - Sears & Zemansky. (2009). *Física Universitaria, Volumen 1.* Addison-Wesley. México. - Schiavone P., Coutanda C., Mioduchawski A. (2002). *Integral Methods in Science and Engineering*, Birkhauser, Boston - Tricomi, F.G. & Baker C.C.H. (2002). *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods*, Birkhauser, Boston.

Contenido

Presentación

La integración numérica constituye una herramienta para aproximar numéricamente el valor de integrales definidas de difícil cálculo o cuya solución no se puede lograr mediante medios analíticos. Su importancia resulta en sus aplicaciones, tales como, el cálculo de la capacidad de un lago a partir de datos topográficos, la fuerza ejercida por el aire sobre las alas de un avión, la distancia recorrida a partir de un tacómetro, por mencionar algunos de ellas.

Las intenciones educativas del presente texto, son las de presentar actividades de aprendizaje, a partir de escenarios concretos en el campo de la ingeniería, que le permitan al estudiante formalizar conceptos de integración numérica, tomar decisiones en el momento de resolver un problema real y/o abstracto, y emplear algoritmos, aplicando o diseñando software necesario.

El texto está organizado por niveles de aprendizaje, del uno al cuatro, en donde se entremezclan cápsulas explicativas sobre la naturaleza de la integración numérica con la presentación de solución de problemas, paso a paso, que se describen con modelos matemáticos, principalmente, aquellos que se presentan en el desempeño profesional.

Consecuentemente, en cada nivel, existen actividades de aprendizaje interactivas que coadyuvan al desarrollo de habilidades de razonamiento matemático y estrategias de solución en un entorno de ingeniería, con ejercicios, ligas a sitios de internet e incluso, se proporciona software didáctico, para hacer más significativo y efectivo el aprendizaje.

Cada nivel tiene un propósito, tal es el caso que el nivel 1, está referido a la adquisición del conocimiento. En este nivel el estudiante requiere recordar sus conocimientos previos y ubicar en forma concreta fenómenos proclives a ser tratados con Métodos Numéricos. El nivel 2 trata del uso de conceptos y habilidades cognitivas que permitan la aplicación de la integración numérica.

El nivel 3, tiene una orientación estratégica para razonar acerca de los algoritmos, y para tomar decisiones en la solución de problemas, es un nivel de análisis y síntesis. Finalmente, el nivel 4, va hacia el diseño, tiene una orientación en la que el estudiante use lo que ha aprendido, no solo en la asignatura de Métodos Numéricos, también en otros contextos académicos y externos, que se refleje en su creación.

Las actividades aquí presentes constituyen un apoyo a la docencia, cuyo diseño también favorece el trabajo colaborativo en un intento de emular el futuro profesional y, por tanto, conduzcan a que el estudiante valore la importancia del conocimiento y su comportamiento ético y profesional.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos de esta sección son:

Proponer solución a situaciones que involucren la **síntesis y/ o acumulación** como efecto del producto de una sola variable independiente, en un intervalo [a, b].
Tomar decisiones fundamentadas sobre la **elección de métodos** típicos de solución, desde el reconocimiento de un **método analítico** y/o en su caso, a las fórmulas de **integración numérica** de la familia Newton-Cotes.
Implementar las fórmulas de la **Regla del Trapecio, Simpson 1/3 y Simpson 3/8**.
Emplear **software indicado** y/o en su caso **diseñar programas especializados** para hacer corridas, y estimar el **concepto de error.**
Interpretar resultados en el contexto del problema.

¿Qué vas a aprender?

A continuación, se presenta una explicación de los objetivos de aprendizaje.

En integración, para **proponer**, previamente, se requiere de un análisis y abstracción. Se trata de examinar a detalle una situación y/o fenómeno, y qué se desea, de tal forma que se distinguen sus componentes (variable independiente, dependiente, límites), se conocen sus características, se logra establecer la relación de los componentes, de lo cual, consecuentemente, se distingue si la propuesta de solución corresponde a realizar una integración.

Justamente, el análisis precede a la **síntesis**. Si el problema corresponde a relacionar situaciones aparentemente aislados, entonces, la integración consiste en la reunión racional de varios elementos dispersos, que permite comprender cómo funcionan estos, en un todo.

Una **integral,** como su nombre lo indica, expresa:

a) Una acción por la cual se forman las partes en un todo.
b) Una acción, a partir de la cual es posible completar, con las partes que le faltan, un todo.

Por eso, en una integral se realiza una generalización de una suma continua, encuadrada en el cálculo infinitesimal y en el análisis matemático, se obtiene una función (*llamada primitiva o elemental F(x)*) que permite comprender el fenómeno y/o situación en su totalidad.

La obtención de la función primitiva mediante la integración, se obtiene por dos alternativas: la analítica y la numérica.

La integración por medios analíticos consiste en emplear una fórmula exacta o una combinación de fórmulas que generan la primitiva sin margen de error.

La integración numérica se constituye de una familia de algoritmos para estimar el valor numérico de *F*, mediante aproximaciones, de ahí su nombre.

La integración numérica es diferente de una integración analítica en dos sentidos:

Primero, como método numérico, proporciona una solución aproximada y no llega a una solución exacta, en este sentido, el análisis del error es un aspecto importante en la integración numérica.

Segundo, no produce una función elemental, en realidad produce un valor numérico de la primitiva, de ahí la necesidad de definir intervalos de inicio y fin.

La **elección** de un **método numérico o analítico** se debe a uno de los tres siguientes casos:

a. Una función continua, como puede ser un polinomio, una función exponencial y/o trigonométrica.

a. Una función continua complicada que es difícil o prácticamente, imposible integrar directamente. Por ejemplo, las funciones $e^{-x^2}, \frac{sen\,x}{x}, \frac{cosx}{x}, \sqrt{1-k^2sen^2x}$. en este tipo de casos se tendrían que abordar integrales dobles y triples.

b. Una función expresada en forma tabulada, en términos de contar con valores *x* y *f(x)* que son dados en un número discreto y finito de puntos, como resultado de un experimento, datos experimentales, de trabajo de campo o, en general, obtenidos de una investigación aplicada.

En el primer caso, la integración puede ser evaluada de manera analítica, esto es, empleando fórmulas de integración. En el segundo y tercer caso, no es posible llegar a obtener la integral de la función por medios analíticos. En el segundo caso, no se tiene una función primitiva elemental que las defina, y en el tercer caso, solo se cuenta con pares de coordenadas, sin conocer la función.

Las fórmulas de la **Regla del Trapecio, de Simpson 1/3 y de Simpson 3/8,** corresponden a tres métodos numéricos clásicos de integración definida. En los tres métodos, se requiere definir los límites de la integración, y que las distancias entre las variables independientes $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sean equidistantes. Asimismo, se emplea un polinomio de interpolación que aproxime la función *f* en un intervalo *[a, b]*.

Por ejemplo, en un experimento de determinar el alargamiento de una pieza mecánica cuando es sometida a cargas diferentes, se tabula el alargamiento para distintas fuerzas. Esto origina una tabla de dos columnas relacionadas con valores discretos (fuerza-alargamiento). Para estos casos, la integración numérica es la única opción viable de evaluación, ya que no se conoce la función representativa.

Las Reglas del Trapecio, de Simpson 1/3 y de Simpson 3/8 pertenecen a una familia de fórmulas llamadas Newton- Cotes (en honor a Isaac Newton y a Roger Cotes). La característica fundamental de estos métodos es que los datos independientes (abscisa) están divididos en secciones equidistantes. Se ajusta un polinomio de grado 1, 2 ó 3, de acuerdo el número de intervalos que tengan y también observando la gráfica que se obtiene de la tabulación de coordenadas.

Como nota histórica la ideación conceptual fue prevista por Euclides hace ¡3000 años AC!

Hay otra familia de métodos, que se emplean cuando se utilizan valores de $f(x)$ en abscisas desigualmente espaciadas, y que están determinadas por ciertas familias de polinomios ortogonales, llamados Fórmulas de Cuadratura Gaussiana.

Como método numérico, es indispensable **programar y/o usar un software** para las fórmulas de la Regla del Trapecio, de Simpson 1/3 y de Simpson 3/8, así como **reinterpretar** los resultados y el concepto de error.

Lo que debes saber antes de comenzar

El cálculo es una disciplina relacionada con el cambio.

Cuando se trata de estudiar una función *y=f(t)* que específica la posición, como una función de tiempo, la derivada proporciona el medio para obtener su velocidad.

$$v(t) = \frac{dy}{dt}$$

De manera contraria, si se proporciona la velocidad *v=f(t)* como una función del tiempo, la integración puede ser empleada para determinar su posición.

$$y = \int v dt$$

En este sentido, la integral es un mecanismo inverso a la derivada.

Asimismo, otra concepción, ubica a la integración, con el concepto de área entre una curva y un eje. La idea del cálculo de área bajo la curva es especialmente importante cuando la curva tiene un perímetro irregular de la región de la cual se desea obtener su área.

Bajo esta perspectiva, los problemas típicos de integración se relacionan con:

+ Si hay dos curvas o más, la integración representará el área entre la intersección de las curvas
+ Sólidos de revolución
+ Longitud de un arco
+ Centroides de figuras planas
+ Momentos de inercia de cuerpos planos

Para este tipo de problemas, se requieren las curvas delimitantes de área que, en realidad, son funciones de la variable de integración.

También, se necesita evaluar la integral mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, esto es, en un intervalo determinado [a, b].

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde la función *F(x)* es una primitiva de f: $\frac{dF}{dx} = f(x)$

La integración definida, matemáticamente, es una medida de un área bajo la curva. Es un concepto que puede ser usado para modelar y aproximar áreas, volúmenes y otras cantidades limitadas geométricamente, además, de fenómenos físicos que involucren las estructuras antes mencionadas (esto es, una multiplicación de *f(x)* por *dx*).

Autoevaluación diagnóstica

a. Encontrar $\int 3a^7x^6dx$

b. Una integral indefinida es

i. El conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función	ii. El conjunto de las infinitas no primitivas de una función	iii. La suma de las integrales que puede tener una función

c. Prueba si es correcta la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5}$$

Investiga y define

En el contexto de aplicaciones de la integral

a. ¿Qué es un sólido de revolución? ____
____

b. ¿Qué es la longitud de una curva?____
____

c. ¿Qué es un centroide de figura plana? ____
____

d. ¿Qué es un momento de inercia de un cuerpo plano? _____________________________

NIVEL 1

¿En qué situaciones se emplea la integración?

Cualquier fenómeno físico que tenga la estructura *A=x*y*, donde A, en este caso, representa un área, *x* representa el lado horizontal de la figura y *y*, el lado vertical. Si en lugar de *x*, se usa *dx*, que representa una distancia infinitesimal horizontal, y en lugar de *y*, se usa *f(x)*, la estructura resultante es:

$$A = f(x)dx$$

Sin embargo, para un fenómeno físico no es suficiente, se requiere sumar cierta cantidad de las estructuras $f(x)dx$.

Por lo que ahora, se transforma en

$$\int f(x)dx$$

Esta forma ya indica la suma de las áreas calculadas, no obstante, aún no son claros los límites de la suma, es decir; la suma es **indefinida.**

Esto aplicado a un fenómeno físico y/ o a una forma geométrica, no se adecua a la representación. Por ello, es necesario contar con los límites, inicial y final *[a, b]*, resultando finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esta representación, en matemáticas se conoce como **integral definida.**

A continuación, se presentan casos que distinguen cuándo emplear el concepto de integración.

1er caso. Aplicaciones a las leyes de Newton

Un ejemplo típico es conducir un automóvil en una carretera recta, con un conductor que está acelerando y frenando constantemente.

La segunda Ley de Newton se encarga de cuantificar el concepto de fuerza F. Indica que si conocemos F(t), la fuerza en función del tiempo, para movimiento rectilíneo, la segunda ley de Newton nos da a(t), la aceleración en función del tiempo:

$$F = \int m \frac{dv}{dt}$$

Donde las propiedades inerciales de un cuerpo se caracterizan por su masa m. La aceleración se obtiene al integrar la velocidad con respecto al tiempo $\frac{dv}{dt}$, lo cual indica que la aceleración de un cuerpo bajo la acción de un conjunto de fuerzas dado es directamente proporcional a la suma infinitesimal de la fuerza neta F.

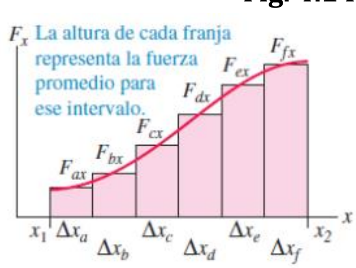
Nótese que la expresión $f(x)dx$, en este caso, permite obtener la primitiva en movimiento, como un producto de una función constante m por un segmento $\frac{dv}{dt}$.

2° caso. Trabajo efectuado por una fuerza variable

Considerando de nuevo el primer caso, con desplazamientos sobre la carretera de x_1 a x_2.

La gráfica de la componente *x,* con respecto a la fuerza F_x, en su componente en *x*, genera lo siguiente:

Fig. 4.1 Función de trabajo



La gráfica de la fuerza en función de la posición, muestra divisiones de desplazamientos Δx_i.

La multiplicación sucesiva de Δx_i por F_{xi}, genera la obtención sucesiva de las área de los rectángulos.

Esto permite obtener el trabajo (W) realizado por la fuerza de llevar el automóvil de un sitio x_1 a x_2.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Tres implicaciones se muestran con el ejemplo:

(a) En una gráfica de fuerza en función de posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por **el área bajo la curva** entre las posiciones inicial y final.

(b) El trabajo W es igual a la suma de los productos de las fuerzas variables F_x, por los desplazamientos infinitesimales dx.

(c) Se están **relacionando** dos conceptos aparentemente aislados, la fuerza F y el desplazamiento.

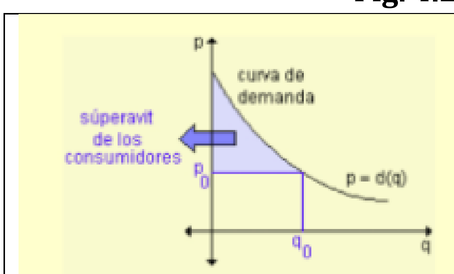
3er caso. Superávit de consumidores y productores

El mercado determina el precio al que un producto se vende. En un mercado en equilibrio, los consumidores compran la misma cantidad del producto que los fabricantes quieren vender.

La **relación** entre **la cantidad producida q** y el **precio p** se llama **demanda d.**

No obstante, algunos consumidores están dispuestos a gastar más por un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas esas personas aceptan pagar, se llama superávit de los consumidores.

Fig. 4.2 Relación cantidad-precio

	La curva representa a la demanda, donde se muestra la relación de cantidad de artículos q_0, con respecto al precio que los consumidores están dispuestos a pagar. En particular, el área sombreada en color lila, representa el superávit de los consumidores. Asimismo, el área bajo la recta $y = p_0$, muestra la demanda total de consumidores que realmente gastarán en el precio p_0 en equilibrio.

Existe una implicación:

(a) El superávit de los consumidores está dado por el área que se forma entre la intersección de dos curvas con el eje y: Una es la función de demanda y la otra es la recta del precio en equilibrio.

Se genera una función primitiva de demanda que representa la ganancia de consumidores

$$D = \int_0^{q_0} (q(x) - p_0)dq$$

La integración representa el área entre la intersección de las curvas.

4° caso. Momento estático y momento de inercia

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que podemos expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada momento de inercia, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa.

La palabra "momento" implica que la inercia depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia.

La integración tiene que ver directamente con la forma geométrica del objeto. Se obtiene el modelo que represente el área y se divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm, de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación, de modo que el momento de inercia se puede ver como

$$I = \int r^2 dm$$

Puedes encontrar más demostraciones interesantes en:
http://demonstrations.wolfram.com/NumericalIntegrationExamples/

¿Qué pasa si...?

EL RESULTADO DE INTEGRACIÓN SE UBICA EN EL PRIMER CUADRANTE

$$y = f(x)$$

El área de la región ashurada es $A = y * x$
Pero la suma de los rectángulos es

$$A = \int f(x)x$$

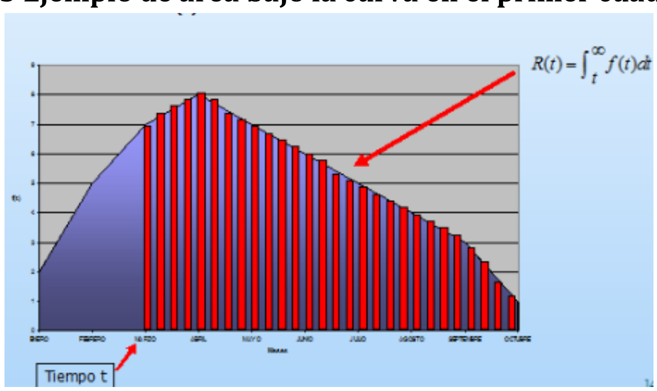
Si a *x,* se le asigna un valor infinitesimal $x \cong dx$.
En el caso de contar con un valor inicial a y b, entonces

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Esto en el primer cuadrante. Nótese que, *y* es positivo y que *x* es positivo, como el gráfico de la figura 4.3, el cual representa una función de fiabilidad que se emplea en la longevidad y fallos de equipos mecánicos que son sometidos a una prueba, a través de una variable continua de tiempo, en este sentido son ensayos de larga duración. El interés radica en la tasa de fallo.

En el ejemplo 4.3, las variables están acordes a la aplicación, en función del tiempo *f(t)*, y con límites ideales.

Fig. 4.3 Ejemplo de área bajo la curva en el primer cuadrante



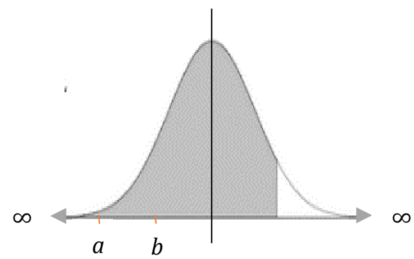
Así que el área A es **positiva**, recordando el Teorema Fundamental de Cálculo.

EL RESULTADO DE INTEGRACIÓN SE UBICA EN EL SEGUNDO CUADRANTE

¿Recuerdas el estudio de Probabilidad y Estadística?
La campana de Gauss o curva normal tipificada en la figura 4.2, en el segundo cuadrante, va de $-\infty$ hasta 0, donde continua en el primer cuadrante de 0 a ∞.

Se procede analizar el comportamiento del segundo cuadrante:

Fig. 4.4 Área bajo la curva normal tipificada



Aquí $\boldsymbol{y}$ es (+) y la diferencia de la integral es la siguiente

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$-b - (-a) = -b + a$$

Donde a es menor que b, es decir;

$$a < b$$

Pero, por lo que la diferencia

$$-b + a$$

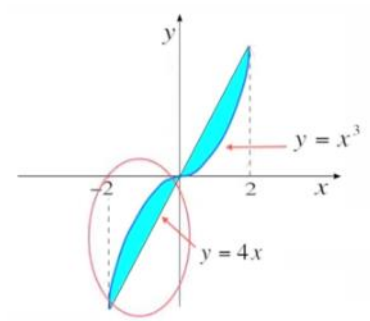
Es (+), así que el área de la integral es (+)

Esto es verdad, ya que el área de la curva de Gauss es uno, **positivo**.

EL RESULTADO DE INTEGRACIÓN SE UBICA EN EL TERCER CUADRANTE

El área de interés en la figura 4.5 es la sombreada y delimitada con el círculo.

Fig. 4.5 El cruce de dos funciones



El área bajo la curva en el tercer cuadrante se obtiene:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx$$

En un principio, da la impresión de que el área sería negativa por la ubicación en el cuadrante. Sin embargo, matemáticamente no lo es, dado que al valuar en el límite inferior tiene signo (-) y por Regla de Barrow:

Área del cruce de rectas en el tercer cuadrante= $\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right) \Big|_{-2}^{0}$

$$= \{0 - (4 - 8)\}$$
$$-4 + 8 = 4$$

El área exclusiva del tercer cuadrante es 4.
Ahora, considere ambas áreas, del primer y tercer cuadrante. Existe simetría, se podría decir que el área total es (2)(4)= 8.

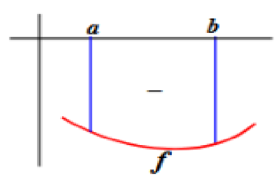
Esta interpretación es matemática, pero no necesariamente de un fenómeno físico. (Piense en la ganancia en un tiempo t_i, y pérdida de dinero en un tiempo t_{i+1}. Al final se tendría un resultado nulo, por lo que es importante analizar el problema y lo que se busca. Así, hay múltiples ejemplos).

De ahí la abstracción de este tema.

EL RESULTADO DE INTEGRACIÓN SE UBICA EN EL CUARTO CUADRANTE

En el cuarto cuadrante ocurre algo similar al tercer cuadrante

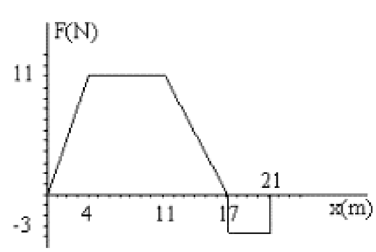
Fig. 4.6 Consideraciones área bajo la curva en el cuarto cuadrante



$$área = \int_a^b (-f)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Considérese el siguiente caso: La fuerza aplicada a un móvil de 2 kg de masa en función del desplazamiento. La figura 4.6 muestra la función del trabajo W, donde la velocidad inicial $v_0 = 0$, y posteriormente, es de 5 m/s que al llegar a la posición x=4, la fuerza se mantiene constante, aunque el móvil sigue avanzando. Después, la fuerza disminuye hasta la posición *x=17.* ¿Qué ocurre después?

Fig. 4.7 Trabajo ejercido sobre un móvil



$$y = f(x)$$

Después de la posición *x=17,* los resultados de *y* son negativos, mientras que los *dx* son positivos.

El concepto de área sigue siendo

$$A = y * x$$

Recuerde que y tiene signo negativo −, y *x* tiene signo +

$$(-) * (+) = (-)$$

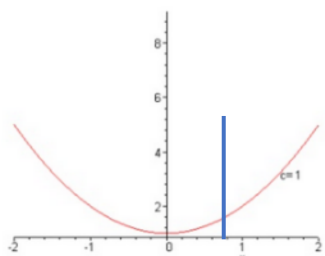
Entonces,

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

En la realidad, al momento de ejercer la fuerza, el móvil continúa avanzando por la inercia que trae.

RESULTADO DE INTEGRACIÓN IGUAL A CERO

Fig. 4.8 Límites coincidentes a y b



Este último caso, resulta en que los límites de integración *a* y *b* coinciden

$$a=b$$

La integral

$$A = \int_a^b f(x)dx = 0$$

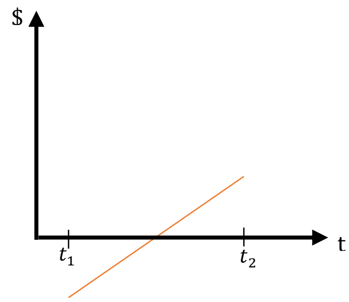
Evidencia de aprendizaje 4.1

De las siguientes preguntas, lee con atención lo que se te pide y elige la opción correcta. Nota: Antes de contestar, analiza y si tienes dudas regresa a las notas. Te sugerimos, usar papel y lápiz. Estamos seguros que encontrarás la respuesta correcta.

Suponga la curva del seno. Se desea obtener su área en el intervalo $[0,2\pi]$. ¿Qué sucede con el resultado de la integral definida en ese intervalo?

i. Se considera la simetría de la curva	ii. Se anula el resultado	iii. No es posible obtener el área

Ahora, suponga una empresa y sus ganancias en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, de acuerdo con el siguiente gráfico. La empresa, ¿ganó?, ¿perdió?, ¿qué ocurrió?

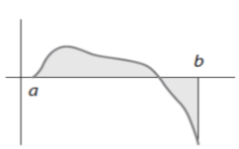
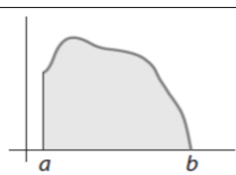
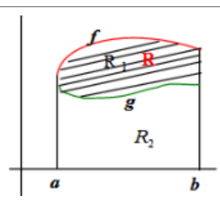


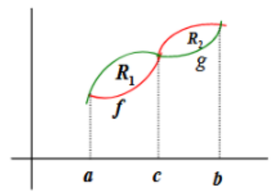
i. No ganó, ni perdió	ii. Perdió	iii. Ganó

Evidencia de aprendizaje 4.2

¿Cómo se procedería a evaluar el área bajo la curva de los siguientes casos, en el intervalo [a, b]?
Describe cómo se calcula el área de una región delimitada, ya sea por uno de estos casos y/o su combinación:

(a) La función y sus intersecciones con el eje de las abscisas,
(b) La función y su delimitación con dos rectas
(c) El área encerrada entre dos funciones

	4.2ª
	4.2b
	4.2c (área sombreada **R**)

	4.2d (área R_1 y R_2)

Evidencia de aprendizaje 4.3

1. Contesta las preguntas, y sube una imagen por cada gráfica que te soliciten. **Describe cada gráfica en términos del concepto de área bajo la curva**

El consumo del gas combustible en tu hogar suele partir de un tanque lleno.	4.3a ¿Cómo será la gráfica de la cantidad de gas contenida en el tanque en cada instante?
	4.3b ¿Cómo será la curva del gasto de gas?
	4.3c ¿Cómo se comporta la presión interna del tanque en este proceso?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate con tu profesor.

FORO DE DISCUSIÓN. Diseñar una infografía ¿Cómo identificar en un evento práctico/fenómeno cuándo derivar o cuándo integrar?

Ya puedes pasar al segundo nivel, en el cual conocerás tres métodos numéricos: Regla del Trapecio, Regla de Simpson 1/3 y Regla de Simpson 3/8. Se te presentará un caso, su análisis y el proceso de solución por los tres métodos.

NIVEL 2

Métodos de Newton- Cotes

La integración numérica busca estimar una integral definida

$$Y = \int_a^b f(x)dx$$

Tomando al intervalo [a, b], como dominio de la función.

Existen ocasiones, como ya se ha mencionado, que es imposible o muy difícil evaluar la integral definida mediante métodos analíticos. Teniendo en cuenta del cálculo que la integral *Y* representa el área de la región entre la curva *y=f(x),* el eje *x* y las líneas *x=a* y *x=b¸* se trata de determinar *Y* mediante el reemplazo de *f(x)*, por un polinomio de interpolación, o sea, reemplazar *f(x)* por *p(x)*.

Luego, se integra el polinomio al encontrar el área delimitada por los límites *x=a* y *x=b.* A este proceso se le llama *cuadratura gaussina*. Las reglas de integración numérica corresponden al grado del polinomio de interpolación: Los más importantes son aquellos de grado 1, 2 y 3.

Regla del Trapecio

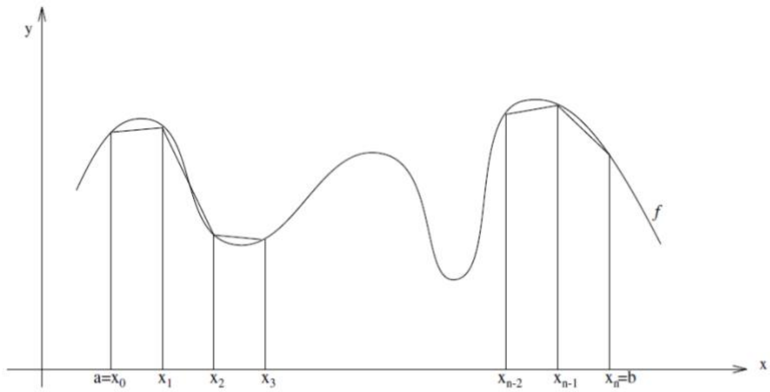
¿Recuerdas cómo obtener el área de un trapecio?

El método más simple de encontrar el área bajo la curva es la Regla del Trapecio.

El método se basa en aproximar *f(x)* por un polinomio lineal, por partes en donde se interpola *f(x)* en los nodos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.
Por ejemplo, se quiere evaluar la integral

$$Y = \int_a^b f(x)dx$$

Se comienza por dividir el intervalo [a, b], en "n" intervalos, cada uno con un paso h, igual para todos los subintervalos.



Donde

$$h = \frac{b-a}{n}$$

y,

$$x_i = a + ih \qquad\qquad i = 0,1,2,\dots,n-1$$

Ahora, se considera cada subintervalo

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

Se aproxima el área bajo la curva *f(x)* por un trapezoide de altura h y bases $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$. De manera que, el área del trapecio es:

$$A_{1/3} = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

El área total se extiende sobre el intervalo total [a, b] que es

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Al agrupar términos semejantes, se obtiene la fórmula

$$A_{total} = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

La agrupación de términos para la Regla del Trapecio, se debe a que se ha realizado una suma de n trapecios.

Una forma de escribir la Regla del Trapecio es así:

$$\boldsymbol{A_{total} = \frac{h}{2}[y_0 + y_n] + h\sum resto\ de\ las\ ordenadas}$$

Ejemplo. Usar la Regla del Trapecio para obtener la integral

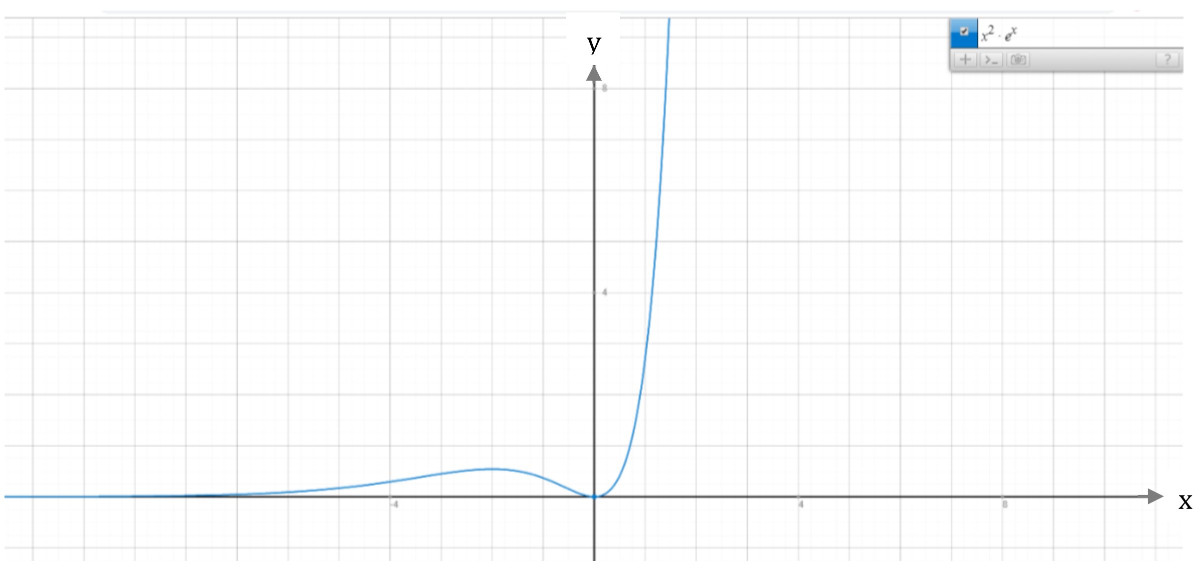
$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

Solución

$h = \frac{3-0}{6} = 0.5$, ya que se considera n=6 subintervalos

De aquí, h=0.5.

La gráfica de la función es:



En este caso, si se puede efectuar la integración por partes analíticamente. A continuación, se procede a calcular la integral, tanto analítica, como numéricamente.

El ejemplo consiste en contrastar los dos métodos: analítico vs numérico.

Mediante un enfoque analítico, se tiene la multiplicación de dos funciones- Integración por partes	Mediante un enfoque numérico, se procede a tabular en n subintervalos, respectando los límites de la integración.
$\int_0^3 x^2 e^x dx$ $\int u dx = uv - \int v du$ $u = x^2$	Se procede a generar un conjunto de puntos, aplicando que se tendrán 6 subintervalos de tamaño de paso *h=0.5*, que se aplica en *x*.

<table>
<tr>
<td>

$$du = 2xdx$$
$$dv = e^x dx$$
$$v = e^x$$

Lo que queda es:

$$x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

Se integra de nuevo por partes.

La aplicación en dos ocasiones de la integración por partes da por resultado

$$\boldsymbol{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x}$$

La evaluación de la integración en los límites es [0, 3].

El área bajo la curva es 98.42768

</td>
<td>

Se ha utilizado una hoja de cálculo, para obtener $\boldsymbol{f(x) = x^2e^x dx}$, en cada nodo o punto

i	X	f(x)
0	***0***	***0***
1	0.5	0.41218032
2	1	2.71828183
3	1.5	10.0838004
4	2	29.5562244
5	2.5	76.1405873
6	3	180.769832

$$A_{total} = \frac{h}{2}[y_0 + y_n] + h\sum resto\ de\ las\ ordenadas$$

Se aplica la fórmula de la Regla del Trapecio, siguiendo como guía el número de iteración para la asignación de “y”.

$A_{Trap} = \frac{0.5}{2}[0.41218032 + 180.769832 +$ 0.5(2.71828183+10.0838004+29.5562244+ 76.1405873)]

$$A_{Trap} = 104.6479$$

</td>
</tr>
</table>

Se cuentan con dos resultados el analítico, que es exacto, y el numérico que proporciona una aproximación al resultado analítico.

Se procede a estudiar el error, para dar continuidad al ejemplo.

Concepto de error

¿Cómo obtener información sobre la exactitud del resultado de la Regla del Trapecio?

a. Cuando se cuenta con los resultados, el analítico y el numérico, el porcentaje de error se obtiene al dividir el resultado analítico entre el numérico, y de ahí al generar un porcentaje.

Ejemplo. En el caso de $\boldsymbol{\int_0^3 x^2e^x dx}$**,** se tuvieron dos resultados

Analítico	Numérico

Área= 98.42768	$A_{Trap} = 104.6479$
$error = 1 - \frac{98.42768}{104.6479} * 100$ =5.94395% Esto significa que el resultado numérico presenta un error del 5.94%, con respecto al resultado analítico.	

b. En el caso en el que no se conozca el resultado exacto analítico, con el método numérico se pueden hacer corridas, mediante la modificación de *h*. Cuando se incrementa el número de trapezoides, y se observa que ya no hay una diferencia representativa entre dos corridas, se puede decir que se ha obtenido un resultado satisfactorio.

Ejemplo. En el caso de $\int_0^3 x^2 e^x dx$. Suponga que n=2

Solución

$$h = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$$

el cálculo, mediante la Regla del Trapecio da

X	**f(x)**
0	0
1.5	10.0838
3	180.7698

El área obtenida mediante la Regla del Trapecio:

$$A_{trap} = \frac{3}{4}[0 + 180.7698 + 1.5(10.0838)]$$

$$= 150.7030$$

Cuando el cálculo se realiza con *h=0.5*, el área total se acerca más al resultado analítico, como ya se había calculado:

$$A_{Trap} = 104.6479$$

Así que si *h=0.3,* la diferencia entre las dos áreas, con *h=0.5 y h=0.3*, es pequeña. En el caso de *h=0.3,* el área es

$$A_{Trap} = 100.6799$$

c. Sin embargo, se requiere de un tratamiento más formal para determinar el error por redondeo, el cual se basa en el Teorema Fundamental del Cálculo

$$A = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{2}$$

A partir de la serie de Taylor, como polinomio de aproximación, se genera

$$A_t = \frac{h}{2}[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2} f''(x_i) + \cdots]$$

Del desarrollo y manipulación algebraica, el error se da por

$$|\boldsymbol{E\_t}\,| = -\mathbf{1/12}\, \boldsymbol{f''(\xi)(b-a)^3}$$

Donde ξ, se encuentra en el intervalo que va desde a hasta b.
Cuando los puntos generan una curva donde existen líneas rectas, la Regla del Trapecio será idónea, ya que el error será muy cercano a 0.
Reflexiona, ¿por qué ocurre esto?

Ejemplo. Calcular el error por redondeo de la integral, mediante la Regla del Trapecio

$$\int_0^3 \frac{1}{x+4} dx$$

La fórmula dice: $|E\_t\,| = -1/12\, f''(\xi)(b-a)^3$

Solución

Se procede a calcular la segunda derivada de la función $\frac{1}{x+4}$.

$$y' = -\frac{1}{(x+4)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x+4)^3}$$

Se elige arbitrariamente un valor dentro de los límites de integración ξ, por ejemplo, *x=0*.

$$y''(0) = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}$$

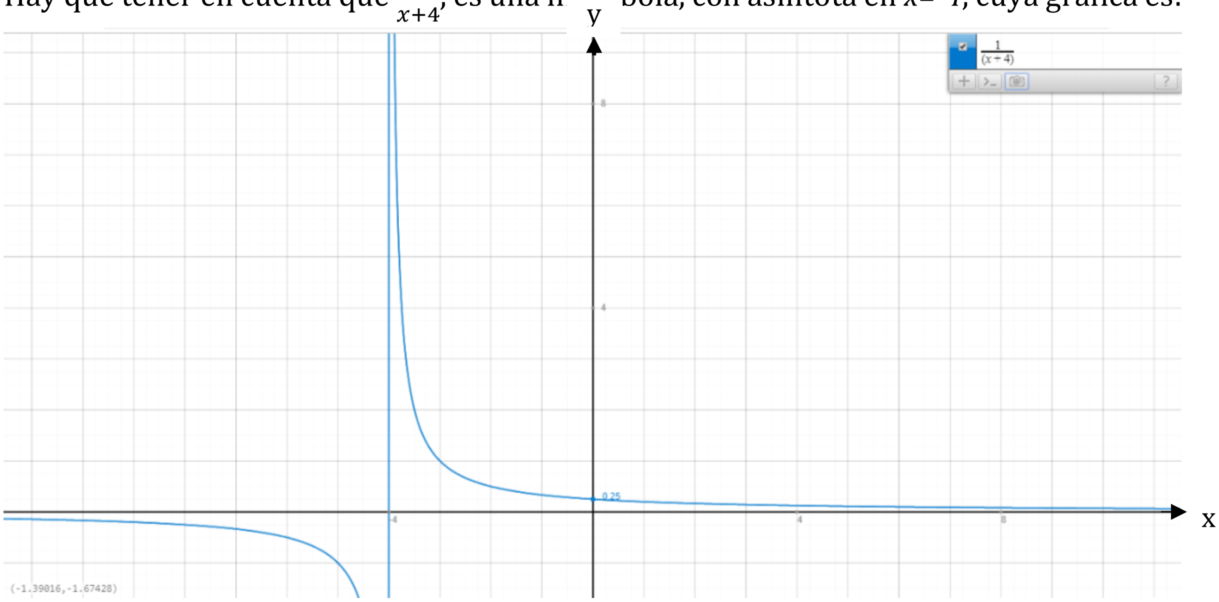
$$error_t = -\frac{1}{12}(\frac{1}{32})(3-0)^3$$

$$|error_t| = -\frac{27}{384}$$

Así que,

$$error_t \cong 0.0703$$

Hay que tener en cuenta que $\frac{1}{x+4}$, es una h bola, con asíntota en *x=-4*, cuya gráfica es:

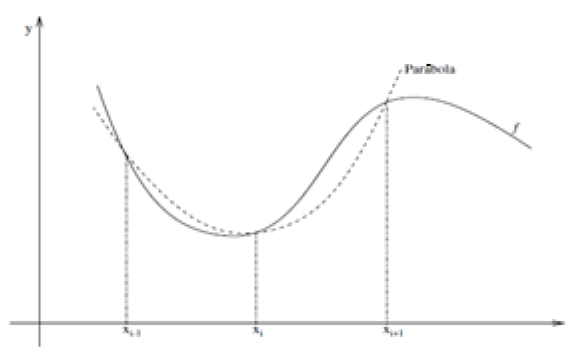


Los límites se encuentran en el intervalo [0. 3], que forman casi una línea recta, por eso el error obtenido en ese punto, no es significativo.

Regla de Simpson 1/3

Otra forma de obtener una estimación más precisa para una integral, se logra a través de usar polinomios de mayor grado, cuando se toman tres nodos de la función se aproxima a un polinomio de segundo grado, y en general, si se toman "n" nodos, se genera un polinomio de "n-1" grados.

En la Regla de Simpson 1/3 se toman tres puntos, lo cual genera un polinomio cuadrático sobre los puntos x_{i-1}, x_i y x_{i+1}.



La serie de Taylor permite generar la Regla de Simpson 1/3:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h[2y_0 + \frac{2^2}{2}\Delta y_0 + (\frac{2^3}{6} - \frac{2^4}{2})\Delta^2\, y_0]$$

Como $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, y $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$,

Se tiene que,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \cong h[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$\cong \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}$$

La siguiente expresión resumen la Regla de Simpson 1/3:

$$\boldsymbol{A_{1/3} = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2\sum ordenadas\ pares + 4\sum ordenadas\ impares}$$

Hay que tener en cuenta que el número de intervalos n sea PAR, ya que se ha tomado un número par de áreas elementales.

Ejemplo. Obtener el área bajo lo curva de la siguiente función, mediante la Regla de Simpson 1/3

$$\boldsymbol{\int_0^3 x^2 e^x dx}$$

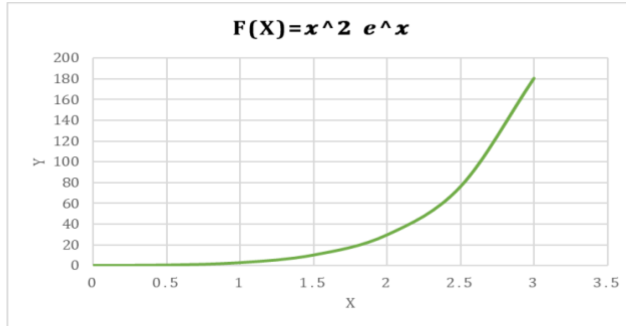
Solución

Se procede a calcular el área bajo la curva, mediante el método de Simpson 1/3, con un número de subintervalos, en este ejemplo n=6, para un dominio [0, 3], por lo que el paso n resulta ser *h=0.5.*

Se genera una tabulación con la función, asimismo, se puede visualizar el segmento de la gráfica que le corresponde:

i	X	f(x)
0	*0*	*0*
1	0.5	0.41218032
2	1	2.71828183
3	1.5	10.0838004
4	2	29.5562244

5	2.5	76.1405873
6	3	180.769832



Es importante, tener en cuenta que el número de intervalos es igual al número de puntos menos 1, esto es, dos intervalos estarán dados por 3 puntos. En el presente ejemplo, existen 6 intervalos, es par, con lo cual se puede emplear la regla de Simpson 1/3.

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{0.5}{3}[0 + 180.769832 + 2(2.71828183 + 29.5562244) + 4(0.41218032 + 76.1405873)$$

$$A_{\frac{1}{3}} = 98.6441$$

El error con respecto al resultado analítico corresponde al 0.2194%, lo cual muestra una mejora notable, en comparación con la fórmula del trapecio.

<u>Concepto de error</u>

La fórmula del error proviene de la cuarta derivada en el desarrollo de la serie de Taylor,

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6}[f(a) + 4\frac{f(a+b)}{2} + f(b) - \frac{f^4\xi}{2880}]$$

donde ξ, de forma similar a la Regla del Trapecio es un número que se encuentra en el intervalo [a, b].

El manipuleo algebraico genera el último término asociado al error:

$$error = \frac{f^4(\xi)}{2^5 90} \cdot 2^5 h^5$$

El error de truncamiento en la Regla de Simpson 1/3 se define por:

$$error = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Regla de Simpson 3/8

La fórmula del trapecio y las Reglas de Simpson 1/3 y 3/8 están diseñadas para los casos en los cuales los datos a integrar están espaciados de manera uniforme.

La Regla de Simpson 3/8 también requerirá tener definidos los límites de integración, con la diferencia de conectar 4 puntos, para formar un polinomio cúbico, esto es;

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_3(x)dx$$

En la Regla de Simpson 3/8, el área está dada por

$$A \cong (b-a) \cdot \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

De la expresión, el ancho corresponde a *(b-a),* mientras que la altura promedio, por el resto de la expresión: $\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$.

En forma sintética, la Regla de Simpson 3/8, puede escribirse como

$$\boldsymbol{A_{3/8} = \frac{3}{8} h[y_0 + y_n + 2 \sum \textit{ordenadas de orden múltiple de } 3 + 3 \sum \textit{resto de las ordenadas}}$$

Asimismo, se puede observar que los puntos internos tienen un peso de 3/8, y los externos de 1/8. Esta relación implicará que el intervalo sea un número múltiplo de 3 en áreas elementales, es decir; se requiere que el intervalo se subdivida en un múltiplo de 3 paneles (intervalo).

Debido a que los trapecios son más delgados, se podría considerar que habrá mayor exactitud en el resultado generado, con respecto al analítico. Sin embargo, esto no siempre será así, debido al comportamiento de la curva en ese rango de integración, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Obtener el área bajo la curva de la función, por medio de la Regla de Simpson 3/8.

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

Solución

De nuevo se tabulan los puntos, buscando que el intervalo sea un múltiplo de 3.

I	**X**	**f(x)**	
0	*0*	*0*	y_0
1	0.5	0.41218032	
2	1	2.71828183	
3	1.5	10.0838004	Ordenada múltiple de 3
4	2	29.5562244	
5	2.5	76.1405873	
6	3	180.769832	y_n

La tabulación obtenida en casos anteriores es válida, debido a que el número total de intervalos (6), es múltiplo de 3.

$$A_{3/8} = \frac{3}{8} h[y_0 + y_n + 2\sum \textit{ordenadas de orden múltiple de } 3 + 3\sum \textit{resto de las ordenadas}$$

$$A_{\frac{3}{8}} = 0.1875(527.419255)$$

$$A_{\frac{3}{8}} = 98.89111$$

El resultado ha perdido precisión, en comparación con el obtenido por la Regla de Simpson 1/3. Es importante generar una representación gráfica de los puntos, y observar el comportamiento de la función, en el intervalo de la integración.

Se elegirá la Regla del Trapecio para ajustar a una línea recta, la Regla de Simpson 1/3 a una parábola, y la Regla de Simpson 3/8, a una forma cúbica.

En el ejemplo, la forma del rango de integración asemeja a una parábola, por ello, la Regla de Simpson 1/3 alcanzó mejor exactitud.

Cabe mencionar que, cuando el comportamiento de la curva sea errático, en términos de contener segmentos rectos, parabólicos y cúbicos, se puede realizar una aplicación múltiple de los tres métodos numéricos. Asimismo, si se tiene un número de intervalo que no corresponde, por ejemplo, a la condición de múltiple de tres para la Regla del

Trapecio 3/8, se puede segmentar las áreas de integración y emplear, por ejemplo, Regla del Trapecio y Regla de Simpson 3/8.

Concepto de error

En la práctica de ingeniería, las fórmulas de la Regla del Trapecio, Regla de Simpson 1/3 y Regla de Simpson 3/8 bastan para la mayoría de las aplicaciones.

En el caso del error en la fórmula de la Regla de Simpson 3/8, está dado por;

$$\boldsymbol{error = -\frac{3}{80} \cdot h^5 f^{(4)}(\xi)}$$

El error de truncamiento requiere del cálculo de la cuarta derivada, y su aplicación en un punto ξ, que pertenezca al intervalo.

Se recuerda que el tamaño de paso, está dado por $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Ejemplos previos a las actividades de aprendizaje

Situación del problema y organización de la información…

La siguiente tabla representa el gasto instantáneo del petróleo crudo en un oleoducto (en miles de libras por hora). El flujo se mide a intervalos de 12 minutos.

Hora	6:00	6:12	6:24	6:36	6:48	7:00	7:12	7:24	7:36	7:48	8:00	8:12
Gasto	6.2	6.0	5.9	5.9	6.2	6.4	6.5	6.8	6.9	7.1	7.3	6.9

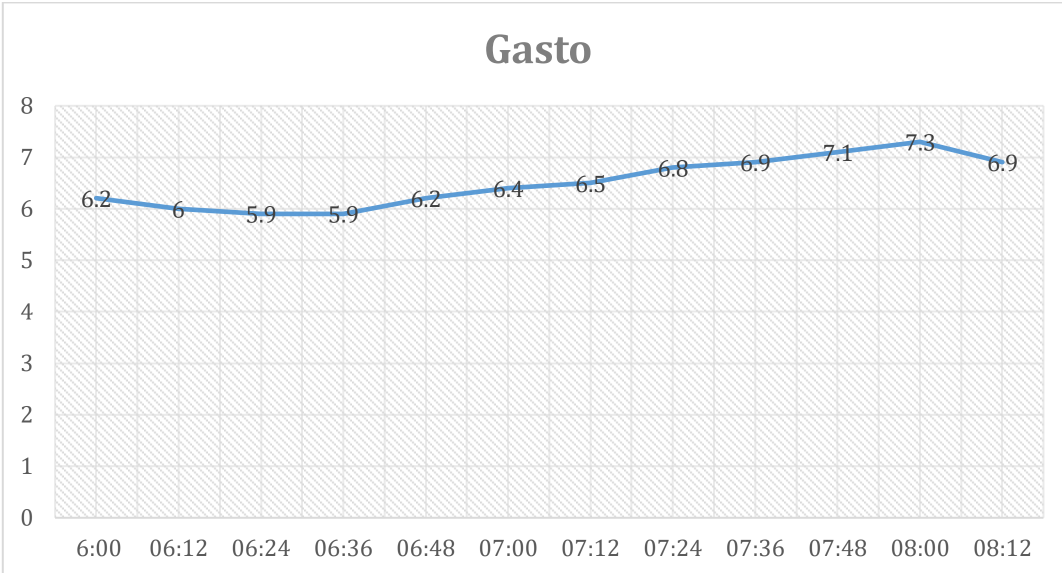
¿Cuál es la cantidad de petróleo bombeado durante 2 horas y 12 minutos?

Planteamiento del problema

Por gasto, se entiende el flujo de masa por unidad de tiempo, en este caso, miles de libras por hora. La tabla muestra un periodo de dos horas con 12 minutos, que están divididos en intervalos equidistantes de 12 minutos.

Lo anterior indica que no se efectúan de manera continua, sino que se tienen como restricciones experimentales, las mediciones con intervalos de tiempo regulares.

Estos puntos representan las coordenadas de una función **continua** del gasto, como una acumulación de cambios que sigue el flujo del combustible en el tiempo (Véase gráfico).



En la gráfica, entre los valores de un intervalo, para efectos del problema, es posible leer una serie infinita de datos, en donde el tiempo t corresponde a la variable independiente, y el gasto G, la variable dependiente:

$$f(t) = G$$

Las coordenadas finitas de la tabla corresponden a $f(t)$, por lo cual la herramienta matemática para responder a la pregunta sería:

1. Una aproximación polinomial a partir de la interpretación de Lagrange (interpolación)

2. Integración numérica definida para el rango establecido

Dado que los puntos de la tabla son valores puntuales y que el interés es conocer la cantidad de gasto acumulado, de tales cambios, en dos horas 12 minutos; no es posible multiplicar la coordenada correspondiente a 2 horas 12 minutos por el gasto correspondiente, más bien, el gasto acumulado (suma de los intervalos).

Además, el tiempo es una variable continua, no discreta, por lo tanto, la suma de intervalos requiere de una integración.

Construcción del modelo matemático…

El dato requerido es la cantidad total del petróleo bombeado, que se calcula al multiplicar el gasto por el tiempo. Sin embargo, se observa en la tabla que el gasto es variable, por tanto, los datos se podrían traducir en el siguiente modelo matemático:

$$\int_0^{2.2}(Gasto)dt, \text{ cuyas unidades serán lb/hr}$$

Para los límites de integración 2 horas 12 minutos, equivalen a 2.2 horas.

Los métodos numéricos de solución

Para estimar $\int_a^b f(x)dx$, los métodos de Newton- Cotes funcionan en dos pasos:

a. Se divide el intervalo [a, b] en n intervalos de igual amplitud, cuyos valores extremos son sucesivamente

$$x_i = x_0 + i(\frac{b-a}{n}), \text{ i=0, 1, 2, …, } n$$

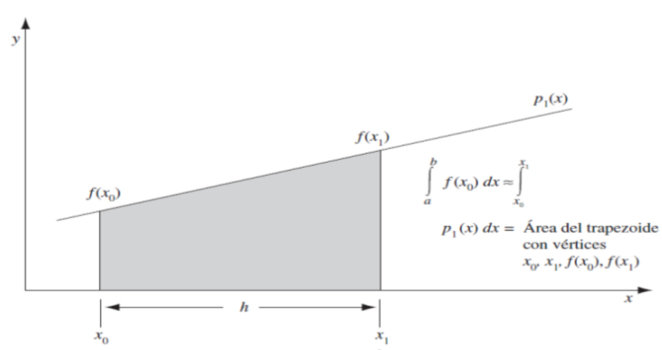
Para quedar en la nueva notación $x_0 = a$ y $x_n = b$

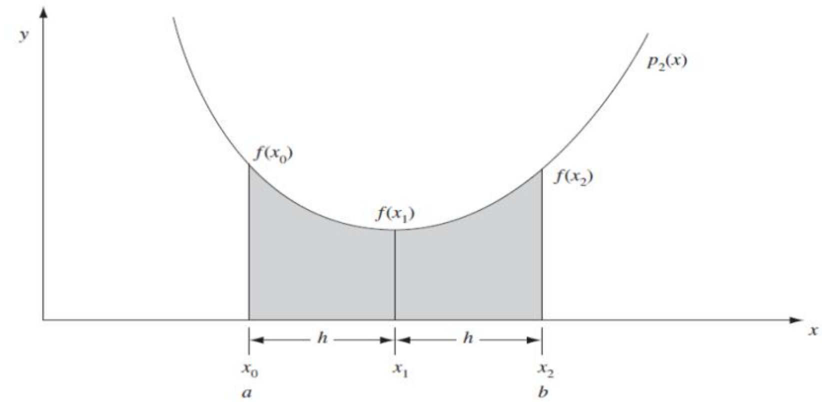
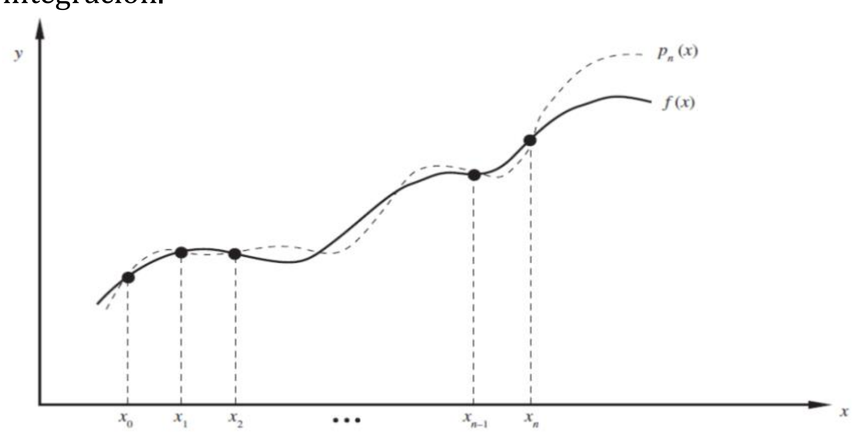
b. Se aproxima $f(x)$ por el polinomio de interpolación $p_n(x)$ de grado n, y se integra para obtener la aproximación de la integral.

Nótese que se obtendrán valores diferentes de la integral para distintos valores de n, como se verá con los tres métodos.

A continuación, se presentan las fórmulas de los tres métodos, donde h es la distancia entre los valores de x (abscisa equidistante).

Fig. 4.9 Representación esquemática de métodos de integración numérica

Regla del trapecio	La aproximación considera áreas de trapecios, y su fórmula generalizada es: 

	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(\Sigma resto\ de\ las\ ordenadas)]$
Fórmula Simpson 1/3	La aproximación se subdivide en tres intervalos, lo que ajusta a la curvatura de una parábola.  La fórmula generalizada es: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(\Sigma ordenadas\ pares) + 4(\Sigma ordenadas\ impares)]$ Nota: El total de intervalos debe ser par.
Fórmula Simpson 3/8	En esta fórmula, el intervalo de integración se vuelve a subdividir, lo que permite que el intervalo de interpolación, sea de grado tres, que ajusta a regiones no rectangulares de integración.  La fórmula generaliza es: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{ordenadas múltiplos de 3}) + 3(\Sigma \text{resto de ordenadas})]$

	Nota: El número de intervalos debe ser múltiple de 3.

Resolución por Regla del Trapecio

Se aplicará $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(\Sigma resto\ de\ las\ ordenadas)]$

Los datos que se tienen son:

Hora	Gasto
6:00	6.2
6:12	6.0
6:24	5.9
6:36	5.9
6:48	6.2
7:00	6.4
7:12	6.5
7:24	6.8
7:36	6.9
7:48	7.1
8:00	7.3
8:12	6.9

h, equivale a la distancia en el tiempo, 0.12 minutos, cuya conversión a horas es 0.2.

Entonces,

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx \frac{0.2}{2}[6.2 + 6.9 + 2(6 + 5.9 + 5.9 + 6.2 + 6.4 + 6.5 + 6.8 + 6.9 + 7.1 + 7.3)]$$

Observa que $y_0 = 6.2$, $y_n = 6.9$ y $\Sigma resto\ de\ las\ ordenadas$, equivalen a las mediciones intermedias entre la inicial y la final.

$$\int_0^{2.2} (Gasto)dt \approx 14.31$$

REVISA EL EJECUTABLE DE REGLA DEL TRAPECIO

Resolución por Simpson 1/3

Se recomienda que los datos discretos queden numerados de la siguiente forma:
Las ordenadas pares se eligen de acuerdo al subíndice par $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}$

i	Hora	Gasto	
x_0	6:00	6.2	
x_1	6:12	6.0	
x_2	6:24	5.9	Ordenada par
x_3	6:36	5.9	
x_4	6:48	6.2	Ordenada par
x_5	7:00	6.4	
x_6	7:12	6.5	Ordenada par

De este caso, se mantiene que h= 0.2

Asimismo, el número de intervalos es *n=11*

En principio, no se puede aplicar en forma directa la Regla de Simpson 1/3, porque el número total de intervalos **debe ser par**.

Sin embargo, se puede aplicar la Regla de Simpson 1/3 hasta el intervalo x_8, y luego la Regla de Trapecio para los intervalos restantes.

x_7	7:24	6.8	
x_8	7:36	6.9	Ordenada par
x_9	7:48	7.1	
x_{10}	8:00	7.3	
x_{11}	8:12	6.9	

El área aproximada hasta el intervalo x_8, es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(\Sigma ordenadas\ pares) + 4(\Sigma ordenadas\ impares)]$$

$$A_{1/3} \cong \frac{0.2}{3}[6.2 + 6.9 + 2(5.9 + 6.2 + 6.5) + 4(6 + 5.9 + 6.4 + 6.8)]$$

$$A_{1/3} \cong 10.04667$$

Ahora, para el resto de las ordenadas, se aplica la Regla del Trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(\Sigma resto\ de\ las\ ordenadas)]$$

$$A_{Trap} \cong \frac{0.2}{3}[6.9 + 6.9 + 2(7.1 + 7.3)]$$

$$A_{Trap} = 4.26$$

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx 10.04667 + 4.26$$

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx 14.30667$$

REVISA EL EJECUTABLE DE SIMPSON 1/3

Resolución por Simpson 3/8

La fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{ordenadas múltiplos de 3}) + 3(\Sigma \text{resto de ordenadas})]$$

La condición para emplear la Regla de Simpson 3/8, es que el número de **intervalos sea múltiplo de 3**.

	Hora	Gasto
x_0	6:00	6.2
x_1	6:12	6.0
x_2	6:24	5.9
x_3	6:36	5.9

En este ejemplo se tienen 11 intervalos, por lo que se aplica la Regla de Simpson 3/8 a 9 intervalos, el resto se considera del Regla del Trapecio.

Se mantiene que h= 0.2. Las ordenadas múltiples de 3, se eligen de acuerdo al subíndice x_3, x_6, x_9. Al final se tienen el resto de las ordenadas.

Para los 9 intervalos de x_0 a x_9, la Regla de Simpson 3/8 es:

x_4	6:48	6.2
x_5	7:00	6.4
x_6	7:12	6.5
x_7	7:24	6.8
x_8	7:36	6.9
x_9	7:48	7.1
x_{10}	8:00	7.3
x_{11}	8:12	6.9

$$A_{3/8} \cong 11.4525$$

Para el resto de los intervalos, se usará la Regla del Trapecio.

$$A_{Trap} \cong \frac{0.2}{2}[7.1 + 6.9 + 2(7.3)]$$

$$A_{Trap} = 2.86$$

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx 11.4525 + 2.86$$

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx 14.3125$$

<u>REVISA EL EJECUTABLE DE SIMPSON 3/8</u>

Interpretación de resultados…

Cada método ha ofrecido resultados cercanos

Regla del trapecio: 14.31
Fórmula de Simpson 1/3: 14.3067
Fórmula de Simpson 3/8: 14.3125

Los resultados son similares, pero ¿cuál es el que se podría escoger?

Cada fórmula de integración tiene una fórmula del error. Normalmente, por el polinomio de aproximación la Regla de Simpson 1/3 ofrece el mejor ajuste. En este ejemplo, se desconoce la función, ya que solo se cuenta con un conjunto de coordenadas.

No obstante, por el comportamiento de la curva, un polinomio de grado tres, ajusta mejor al área bajo la curva. El resultado de la Regla de Simpson 3/8, 14.3125 libras/hora representa el gasto aproximado del petróleo bombeado en 2 horas 12 minutos.

Otra forma de expresarlo es la siguiente; 14312.5 libras/hora es aproximadamente el gasto de fluido másico acumulado en una tubería u oleoducto, lo cual se puede considerar como un flujo grande.

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

Ejemplo

Situación del problema y organización de la información…

Te presentamos otro problema, cuyo objetivo educativo es el de mostrar cómo se aborda la aplicación de la integración con métodos analíticos y numéricos y la contrastación de ambos, mediante la aplicación del concepto de error.

Se tiene el siguiente caso, obtener la integral de la función $\int_{0}^{0.6} 2e^{-1.5x}dx$.

a. Resolver por medio de métodos analíticos
b. Usar la Regla del Trapecio
c. Usar alguna forma de Simpson para obtener mayor precisión
d. Para los incisos b. y c., encontrar el error relativo

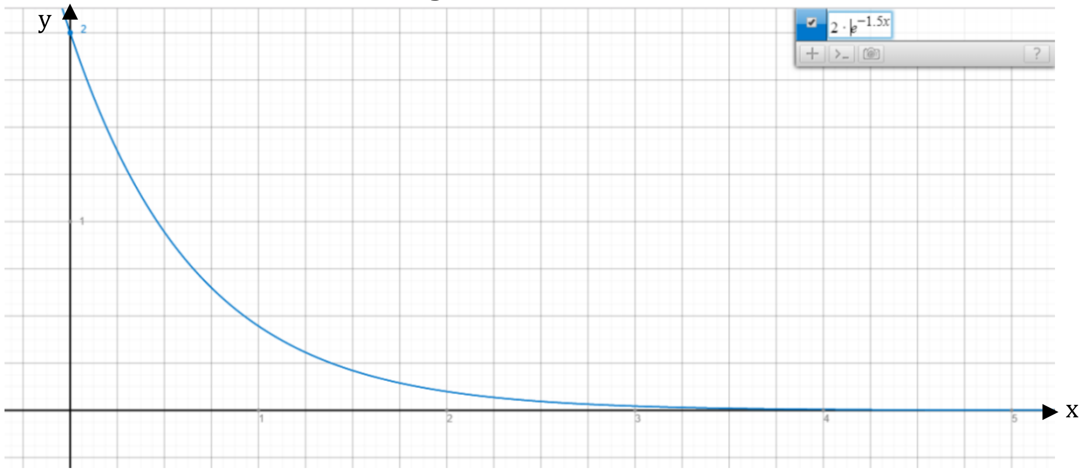
Planteamiento del problema

Se tiene una función exponencial que corta al eje Y, en el punto (0,2). Dado que su variable independiente x, tiene un valor negativo, será decreciente en todo su dominio.

Además, vale la pena recordar que no corta al eje X, es decir no tiene raíces, la función tiene forma cóncava y tiene una asíntota horizontal, como se puede apreciar en la siguiente gráfica (Fig. 4.10).

En este sentido, $x > 0$

Fig. 4.10 Gráfica de la función



Se trata de encontrar el área entre los límites x= 0 y x=0.6

El modelo matemático, solucionado por un método analítico…

Tomar en cuenta que $\int_{0}^{0.6} 2e^{-1.5x}dx$ es de la forma $\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}e^{cx}$

$$\int_{0}^{0.6} 2e^{-1.5x} = -\frac{2}{1.5}e^{-1.5x}|_{0}^{0.6}$$
$$= -0.542092 + 1.33333$$
$$= 0.79124$$

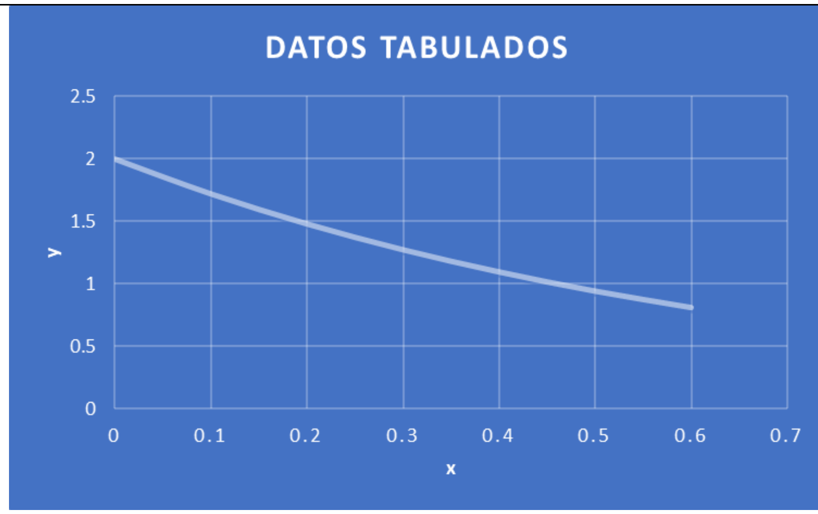
El modelo matemático, solucionado numéricamente por Regla del Trapecio…

Se requiere generar una tabulación con particiones uniformes del intervalo de integración para los valores de x, lo cual se genera fácilmente en Excel.

En una columna se ingresarán los valores con distancia 0.1 que se convertirán en el argumento de la función $2e^{-1.5x}$, en consideración, como se aprecia en la tabla que muestra el ingreso de la operación sobre la celda A4, con valor de 0.

X	F(x)	
A4= 0	=2*EXP(-1.5*A4)	

0.1	1.72141595
0.2	1.48163644
0.3	1.2752563
0.4	1.09762327
0.5	0.94473311
0.6	0.81313932



La fórmula de la Regla del Trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(\Sigma resto\ de\ las\ ordenadas)]$$

Donde $y_0 = 2$ y $y_n = 0.81313932$ La aplicación sobre los valores discretos es: $\frac{0.1}{2}\left[2+0.8131+2(1.7214+1.4816+1.2752+1.0976+0.9447)\right]=$ **0.792723473**

El modelo matemático, solucionado por Simpson 3/8...

Se elige Simpson 3/8 porque teóricamente se obtiene una mejor aproximación que con Simpson 1/3.

De nuevo se tomará en cuenta la tabulación arriba generada y se aplica la fórmula de Simpson 3/8:

X	$\int_0^{0.6} 2e^{-1.5x}dx$
A4= 0	=2*EXP(-1.5*A4)
0.1	1.72141595
0.2	1.48163644
0.3	1.2752563
0.4	1.09762327
0.5	0.94473311
0.6	0.81313932

$$\int_a^b xdx =$$

$$\frac{3h}{8}[y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{ordenadas múltiplos de 3}) + 3(\Sigma \text{resto de ordenadas})]$$

$$\left[2+0.8131+2(1.2752)+3(1.7214+1.4816+1.0976+0.9447)\right]$$

=0.791245434

Error de aproximación…

El error de aproximación, es una medida del ajuste o cálculo de una magnitud aproximada, con respecto al valor real o teórico que dicha magnitud tiene.

$$E_A = \frac{|Valor\ Real - Valor\ Aproximado|}{Valor\ Real}(100)$$

Se tiene lo siguiente:

Valor obtenido por método analítico	**0.79124**
Valor numérico por Regla del Trapecio	**0.79272**
Valor numérico por Simpson 3/8	**0.79124**

El cálculo del error aproximado con respecto a la Regla del Trapecio:

$$E_A = \frac{|0.79124 - 0.79272|}{0.79124}(100) = 0.1870\%$$

El cálculo del error aproximado con respecto a la fórmula de Simpson 3/8, y por el número de decimales:

$$E_A = \frac{|0.79124 - 0.79124|}{0.79124}(100) = 0\%$$

Interpretación de resultados…

Es sabido que el método analítico da un resultado, el cual por efectos de redondeo y porque generalmente maneja números irracionales tienen una aproximación mínima, es decir, no presentan un resultado enteramente puntual.

En el caso de los métodos numéricos y en particular los de la familia de Newton-Cotes, acotan el área de integración al inicio y al final, sumando el ancho del primero y último trapecio. Por su naturaleza son propios para aproximaciones, y el error es mayor que en el método analítico.

Las diferencias mostradas en los resultados indican lo siguiente:

La Regla del Trapecio toma en consideración los trapecios de ancho (h) infinitesimal en orden secuencial, lo que origina una aproximación burda, ya que suma tanto trapecios con ordenadas altas como trapecios con ordenadas bajas.

El método de Simpson 3/8, aunque mantiene la misma figura geométrica, tiene una aproximación mejor, ya que su recorrido no es secuencial, esto es, agrupa figuras con ordenadas similares, lo que disminuye el porcentaje de error. Lo anterior se refiere a que, agrupa todas las figuras con ordenadas bajas y después agrupa las figuras con ordenadas altas por lo que su porcentaje de error disminuye considerablemente.

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

AHORA ES TU TURNO…

Evidencias de Aprendizaje

Evidencia de aprendizaje 4.4

Lee con atención los casos y elige la respuesta correcta.

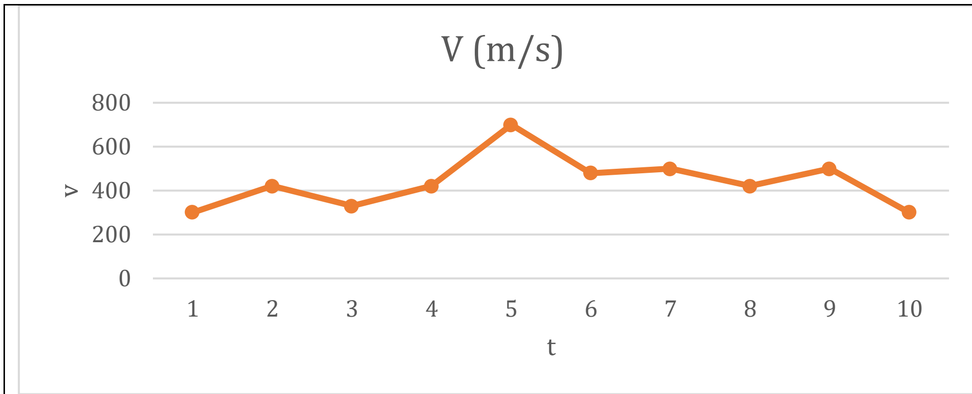
En la una institución educativa se está desarrollando un sistema para conseguir una mayor eficiencia energética en aeronaves no tripuladas (dron), con el fin de resguardar y vigilar las instalaciones de dicha institución.

Las pruebas efectuadas al dron se muestran en la siguiente tabla:

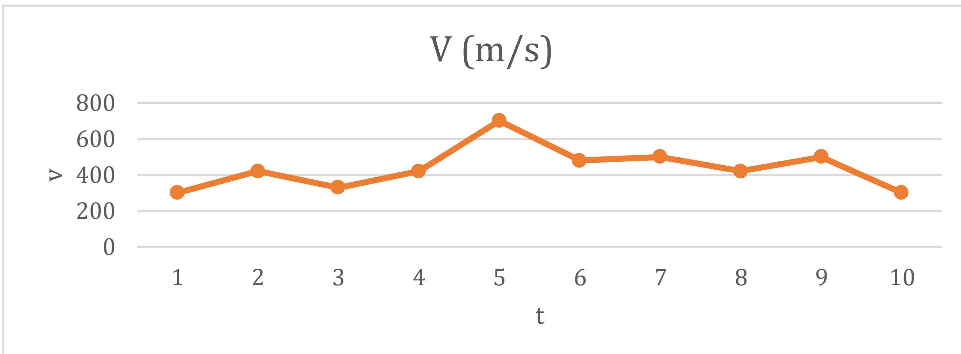
t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V (m/s)	300	360	330	420	510	480	360	420	420	300

4.4a Obtener la gráfica de la tabla anterior. Elige la opción correcta

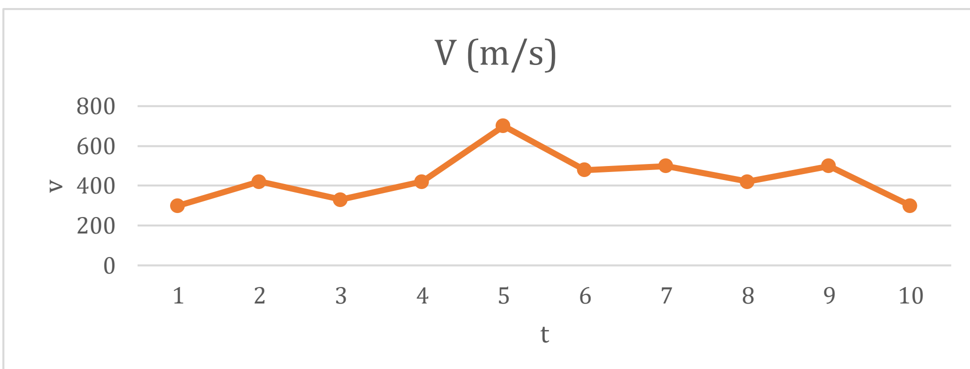
i.



ii.



iii.



Para calcular la velocidad del dron, se utilizó un control sobre el tacómetro integrado al mismo. En el experimento se anotaron medidas del tiempo en forma manual. Te volvemos a enseñar la tabla de tiempo.

t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
subíndices	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
	300	360	330	420	510	480	360	420	420	300

4.4b Utilizar el método de Simpson 3/8 para determinar la distancia recorrida por el dron. Elige la respuesta correcta.

i. $A_{3/8} = 3476.25\, metros$	ii. $A_{3/8} = 3650.2\ \ metros$	iii. $A_{3/8} = 3280.45\ \ metros$

De la gráfica obtenida por medio de la tabulación *t-vel*, observe las características geométricas de la misma. Se trata de obtener mayor exactitud de los cálculos. ¿En qué orden de aplicación de los métodos de integración numérica estudiados ajusta mejor con el comportamiento de la gráfica? Se sugiere revises la figura 4.6, de páginas anteriores.

4.4c Elige la respuesta correcta

i. Regla del Trapecio, Simpson 1/3, Simpson 3/8	ii. Regla del Trapecio, Simpson 3/8, Simpson 1/3	iii. Simpson 1/3, Regla del Trapecio, Simpson 3/8

Se deja al estudiante que realice la integración por secciones.

4.4d ¿Cómo le explicarías a tu compañero las razones de variaciones en los resultados de cada inciso del problema 4c?

BIENVENIDO AL NIVEL 3

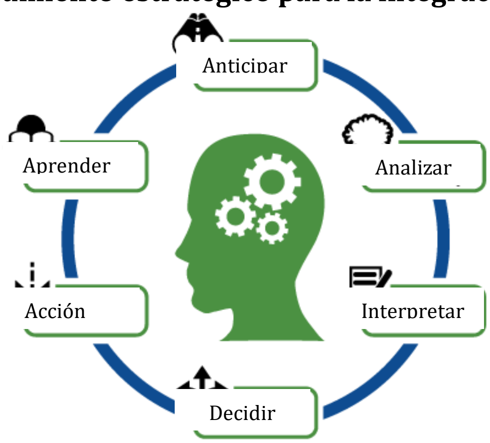
En el nivel 2, te percataste que se puede particionar el intervalo, de acuerdo con la geometría de la función que se forma en la gráfica. La estimación obtenida en la fórmula usualmente mejora en su precisión, si los intervalos son regulares, pero cuando no es así, se asumen los subintervalos que se determinan por el analista.

En este nivel se pone a prueba tu pensamiento estratégico. Se trata de plantear un fin, analizar los medios con los que se cuentan para llegar a este, y luego se les dispone de tal forma que faciliten el alcance, de la mejor manera posible, considerando también el concepto de error.

La estrategia debería involucrar una alternativa explícita, un método de solución, acerca de cómo abordar problemas.

En esta sección esperamos que emplees los conceptos vertidos en páginas anteriores y el desarrollo de tus habilidades, como lo muestra la figura 4.11.

Fig. 4.11 Pensamiento estratégico para la integración numérica

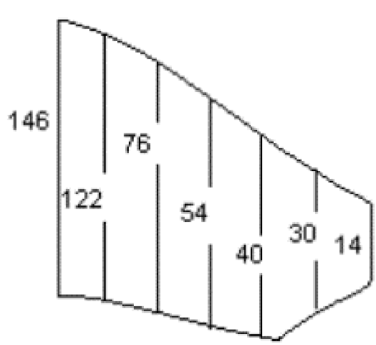


Presentaremos algunos ejemplos que pueden servirte como una base para el resolver exitosamente los problemas que se te presenten.
¡Éxito!

Ejemplos de aplicación

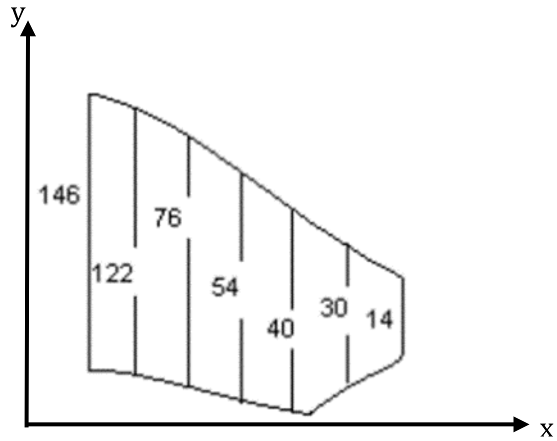
Situación del problema…

Una ciudad desea drenar y rellenar un pantano, cuya profundidad media es de 5 metros, ¿cuántos metros cúbicos de escombro se requerirán para ocupar el área, una vez que haya sido drenado el pantano.
A continuación, se presenta una imagen del pantano. De antelación, se sabe que h=20 metros.



Organización de la información…

Para el planteamiento del problema, considere lo siguiente:



Se trata de obtener el volumen, el cual estará dado por la obtención del área multiplicado por la profundidad.

Se tiene que existen 6 segmentos equidistantes, con h=20 metros. El pantano tiene distintas medidas de "y".

Construcción del modelo matemático…

En esta sección corresponde a decidir cuál de las fórmulas de integración numérica aproximará mejor al área del pantano.

Observar que el comportamiento gráfico del pantano forma rectas, por lo que la Regla del Trapecio, puede proporcionar una buena opción.

$$\boldsymbol{A_{trap} = \frac{h}{2}[y_0 + y_n] + h \sum resto\ de\ las\ ordenadas}$$

Aplicación de la Regla del Trapecio…

$$A_{trap} = \frac{20}{2}[146 + 14] + 20[122 + 76 + 54 + 40 + 30]$$
$$A_{trap} = 8040m^2$$

Ahora, se requiere calcular el volumen:

$$volumen = 8040 * 5$$

$$volumen = 40{,}200m^3$$

Interpretación de resultados…

Se requieren aproximadamente $40{,}200m^3$ de relleno sanitario para ocupar el volumen del volumen que antes ocupaba el pantano.

Ejemplo

Situación del problema…

Se desea diseñar un modelo de motor, y para ello, una empresa requiere determinar el trabajo para mover linealmente un objeto a 5 metros, mediante una prensa.
La fuerza requerida es

$$F(x) = 100x\sqrt{125 - x^3}$$

Obtener el trabajo, en kilogramos-metro.

Organización de la información…

Hay que recordar que el trabajo se define como la fuerza que se aplica sobre un cuerpo, para desplazarlo de un punto a otro.

El planteamiento del problema está dado en encontrar el producto de la distancia recorrida de un cuerpo, por la fuerza sobre ese cuerpo.

Además, hay que tener en cuenta que el cuerpo recorrerá una distancia de 5 metros, o sea, se encuentra en el intervalo [0, 5].

Construcción del modelo matemático…

Entonces, por definición

$$W = \int_0^5 F(x)\,dx$$

Donde, el desplazamiento está dado por *dx.* Al sustituir, el modelo es:

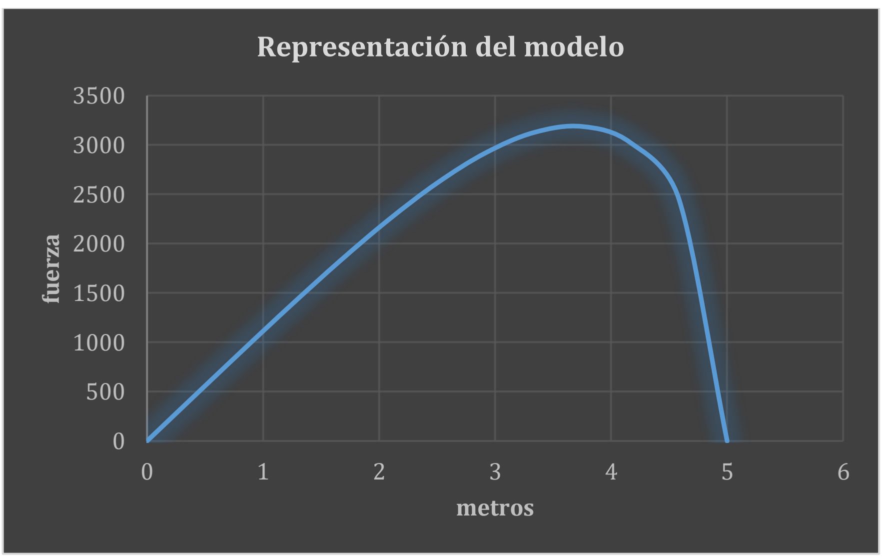
$$\int_0^5 (100x\sqrt{125 - x^3})dx$$

Existen tres implicaciones con el modelo. La primera, de acuerdo con su representación gráfica del modelo es que el área bajo la curva es continua, por lo que sí es posible realizar la integración.

La segunda, es que el dominio de la función va de $[-\infty, 5]$, ya que para valores superiores a 5, la función, ya no está definida, lo cual es consistente con el rango de integración de [0,5].

La tercera, por el comportamiento de la curva, se tienen como opciones la aplicación de uno de dos métodos: Regla de Simpson $1/3$ o Regla de Simpson $3/8$ que puede aproximar mejor la obtención del área bajo la curva. Sin embargo, el cálculo del error que implica la obtención de la cuarta derivada, no está definida para el intervalo de integración.

Por ello, es deseable contar con pasos relativamente pequeños para mejorar esta la obtención del trabajo.



Aplicación de la Regla de Simpson 3/8…

Por la condición del método, se requiere generar un intervalo múltiplo de 3, así que se propone usar 12 intervalos.

De ahí que h es:

$$h = \frac{5-0}{12} = \frac{5}{12}$$

Con el paso obtenido, se procede a tabular la función:

i	x	f(x)	
0	0	0	y_0
1	0.41666667	465.712682	
2	0.83333333	929.535787	
3	1.25	1386.5812	Múltiplo de 3
4	1.66666667	1828.55719	
5	2.08333333	2243.41005	
6	2.5	2614.56258	Múltiplo de 3
7	2.91666667	2919.40819	
8	3.33333333	3126.28574	
9	3.75	3187.84465	Múltiplo de 3
10	4.16666667	3023.69224	
11	4.58333333	2456.17798	
12	5	0	y_n

$$\boldsymbol{A_{3/8} = \frac{3}{8}h[y_0 + y_n + 2\sum ordenadas\ de\ orden\ múltiple\ de\ 3 + 3\sum resto\ de\ las\ ordenadas}$$

$$\boldsymbol{A_{3/8} = 10211.92445}$$

Interpretación de resultados…

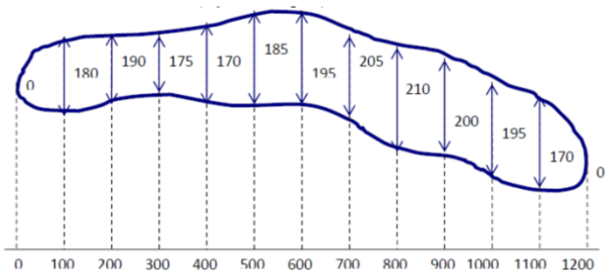
El trabajo que una fuerza realiza a lo largo de la trayectoria es aproximado a 10211.9244 Kg-metro, que refiere a que un kilogramo se ha movido un metro.

Se sugiere al lector que aplique la Regla de Simpson 1/3 y compare resultados.

Ejemplo

Situación del problema…

A continuación, se presenta la imagen de un socavón en una calle. Se ha reticulado la imagen, para distinguir la anchura, en centímetros, en puntos igualmente espaciados a lo largo de la calle.
El interés se centra en estimar el área en centímetros cuadrados, como una base para decidir el tiempo que tomará realizar el mantenimiento del pavimento.



Organización de la información…

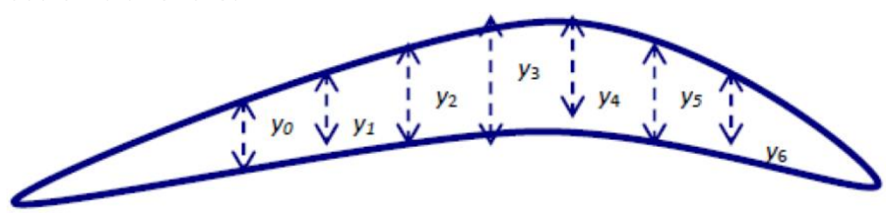
El problema trata con obtener el área del socavón. La figura es irregular, el inicio de la esquematización se encuentra en el punto x=0, y llega hasta x=1200 cm, equidistante con 12 intervalos y con distancias de 100 centímetros.

Tomando en cuenta la geometría del socavón se empleará la Regla de Simpson 3/8.
Se deja que el estudiante aplique la Regla de Simpson 3/8, e interprete el resultado ($\cong 212250 cm^2$).

Ejemplo

Situación del problema…

El diseño de un nuevo tipo de aeroplano requiere un tanque de gasolina de sección transversal constante en cada ala. En la figura, se muestra un esquema a escala de una sección transversal.



$y_0 = 4.6\ dm$
$y_1 = 4.9\ dm$
$y_2 = 5.5\ dm$
$y_3 = 5.8\ dm$
$y_4 = 6.1\ dm$
$y_5 = 6.1\ dm$
$y_6 = 6.4\ dm$

Adicionalmente, se tiene por condición que el tanque debe cargar, aproximadamente, 3000 kg. de gasolina cuya densidad es $0.68 kg/dm^3$. Se requiere estimar la longitud del tanque.

El espaciamiento horizontal es de 0.3dm.

Organización de la información…

Existe un concepto llamado sólido de Cavalieri, el cual menciona que si dos sólidos al ser cortados por planos paralelos producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen (Te invitamos a revisar el siguiente vínculo https://www.geogebra.org/m/ptVCr8rH).

Por definición, el volumen de un tanque es

$$V = \frac{m}{densidad}$$

Donde la masa equivale a 3000 kg de gasolina y la densidad es igual a $0.68kg/dm^3$ que resulta en:

$$V = \frac{3000}{0.68} = 4411.76471dm^3$$

Por otro lado, cualquier volumen es igual al área por su longitud:

$$V = A * l$$

En el problema se solicita la longitud, así que se requiere obtener el área.

Construcción del modelo matemático…

Se aplicará la Regla de Simpson 1/3:

$$\boldsymbol{A_{1/3} = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2\sum ordenadas\ pares + 4\sum ordenadas\ impares}$$

Asimismo, de $V = A * l$

$$l = \frac{V}{A}$$

Que permitirá calcular la longitud del tanque de gasolina.

Realización de operaciones…

$$\boldsymbol{A_{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{3}[4.6 + 6.4 + 2(5.5 + 6.1) + 4(4.9 + 5.8 + 6.1)]$$

$$\boldsymbol{A_{\frac{1}{3}}} = 101.4dm^2$$

Por otro lado,

$$l = \frac{4411.76471}{101.4}$$

$$l = 46.50852dm^2$$

Interpretación de resultados…

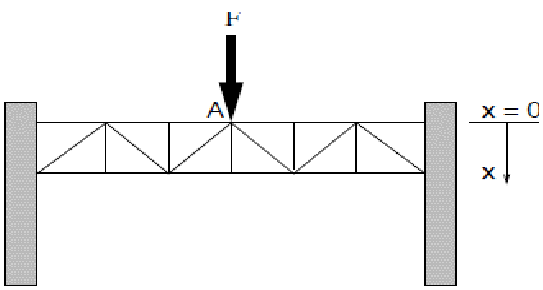
La longitud del tanque es $l = 46.50852dm^2$.

Actividades de aprendizaje

Evidencia de aprendizaje 4.5

Por los lineamientos de una prueba de laboratorio, una barra de suspensión no debe deformarse más de 4 cm, cuando se aplica una fuerza en kilonewtons en su parte central.

Se requiere saber el trabajo W, efectuado sobre la barra para su deformación máxima, de acuerdo a las siguientes lecturas en el laboratorio.



Antes de que se resuelva el siguiente caso, vale la pena recordar lo siguiente:

- 1 kg de fuerza es igual a 9.81 Newtons (N), o sea aproximadamente, 10 000N equivalen a un auto.

El trabajo W en ingeniería se define como: $W = f * d$, siendo f la fuerza aplicada al cuerpo y d, el desplazamiento del mismo, por efecto de la fuerza

Cantidad deformada x (cm)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4

Fuerza aplicada (KN)	0	1.44	2.91	4.42	5.91	7.42	9.04	10.71	13.22

4.5a Busca un libro de estructuras y explica la relación del problema con la integración numérica. Si requiere hacer un esquema para conectar tus ideas, adelante

Algunas recomendaciones son: Aplicación de la integración numérica para obtener la rigidez elástica de barras con sección variable, del autor F. Monroy- Miranda

4.5b El modelo matemático analítico del sistema para este problema es:

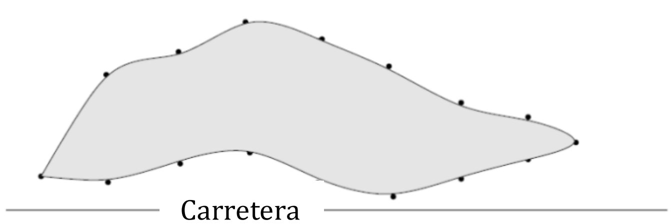
i. $W = \int_0^4 f(x)\,dx$	ii. $W = \sum_0^4 f(x)dx$	iii. $W = f * d$

4.5c El trabajo efectuado es:

i. W=48.09 KN-cm	ii. W=50.02 KN-cm	iii. W=46.9 KN-cm

Evidencia de aprendizaje 4.6

Una carretera en línea recta pasa a lo largo de un lago. Un agrónomo te contrata para conocer el área aproximada del lago, y tú resuelves el problema tomando diferentes medidas; las más cercanas y las más lejanas a la carretera en diferentes puntos, de acuerdo con la siguiente figura y tabla.



Segmentos a lo largo	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4

de la carretera									
Distancia a la orilla más cercana (km)	0.5	0.3	0.7	1	0.5	0.2	0.5	0.8	1
Distancia a la orilla más lejana (km)	0.5	2.3	2.2	3	2.5	2.2	1.5	1.3	1

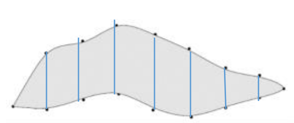
4.6 a Explica la tabla arriba definida

Estima el área del lago, eligiendo el método que consideres da la mejor aproximación.
4.6b Explica el objetivo del caso y cómo sugieres que se aborde el problema. Proporciona argumentos lógicos

4.6c Elige la respuesta correcta y más aproximada al caso

i. $A = 11.25\ km^2$	ii. $A = 12.93\ km^2$	iii. $A = 9.56 km^2$

4.6d ¿Cómo se calcularía la integral si en lugar de haber proporcionado la información que corresponde al perímetro del lago, se hubiesen proporcionado las distancias internas puntuales? Explica tu proceso de solución.



NIVEL 4.

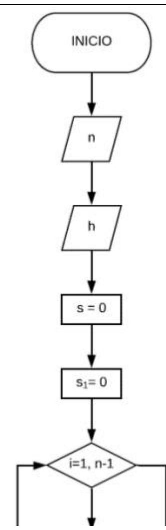
Tu proyecto

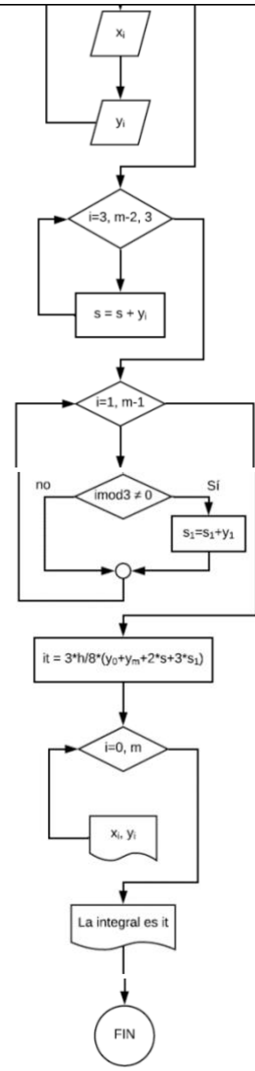
En este nivel se requiere de una investigación, tiempo para pensar y analizar las múltiples partes del problema.
Demanda de tu parte asertividad y perseverancia.
Se han generado un proyecto a desarrollar. Como base del mismo, a continuación, se presenta el pseudocódigo de Simpson 3/8.

El pseudocódigo de Simpson 3/8…

Un pseudocódigo es un lenguaje intermedio entre el lenguaje natural y el de programación, útil para la ordenación lógica de ideas:

4.12 Pseudocódigo y algoritmo del método de Simpson 3/8

1. Leer el número de datos (n) 2. Leer el ancho del paso (h) 3. Inicializar suma en cero (s=0) 4. Inicializar suma en cero ($s1 = 0$) 5. Leer datos x_i, y_i, para $i = 0\ a\ i = m$ 6. Sumar las ordenadas de acuerdo a $i =$ 3, hasta $i = m - 2$, en pasos de 3 7. Sumar las ordenadas de acuerdo a $i =$ 1, hasta $i = m - 1$, solo con la condición de que $i\ mod\ 3$, sea diferente de cero 8. Calcular la integral, de acuerdo a $it = \frac{3h}{8}(y_0 + y_m + 2s + 3s1)$ 9. Dibujar tabla de datos 10. Imprimir el valor de it 11. fin	



Evidencia de aprendizaje

Evidencia de aprendizaje 4.7

Proyecto

Tomar en cuenta la evidencia de aprendizaje 4.6 y con base en el problema ahí descrito, elaborar un programa de computadora en un lenguaje de uso general (el que tú conozcas) para resolver el caso en

Regla del Trapecio
Fórmula de Simpson 1/3
Fórmula de Simpson 3/8

Te sugerimos visites las siguientes páginas
www.math.tamu.edu/~tom https://.kiffe/Tools/quadj.html
https://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html

4.7a Construir el pseudocódigo y diagrama de flujo para los tres métodos (te recomendamos ampliamente usar la aplicación de lucid chart).

4.7b Generar el programa fuente y presentar el programa ejecutable para los tres métodos (Ingeniería en Computación)

4.7b Realizar una tabla comparativa con las características de los tres métodos, tomando en cuenta el concepto de error (Ingeniería Civil, Ingeniería Eléctrica Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecánica).

¿No te fue bien en alguno de los niveles?, ¿Crees que puedes mejorar su nivel de aprendizaje?, ¿simplemente quieres seguir experimentando?... Bienvenido a "**Ponte a prueba"**

Test de reposición

Bienvenido a la siguiente prueba sobre el tema "Integración numérica".
Lee con atención y contesta lo que se te solicite.

1. ¿Cuáles son las ventajas de usar las Reglas de Simpson, con respecto a la Regla del Trapecio?

2. Te encuentras explicando a tu compañero(a) que no fue a clase, acerca de la Regla del Trapecio (a) ¿Qué dirías de esta Regla y cómo usarla?, (b) ¿Qué dirías de su precisión?

3. Algunas integrales no pueden ser evaluadas mediante esquemas analíticos, en este sentido la integración numérica ofrece una manera práctica de aproximar los valores. Resolver las siguientes integrales por integración numérica.

   3.a Calcular aproximadamente la integral, mediante la Regla de Simpson 1/3, tomando 50 subintervalos.

$$\int_{2}^{3} \frac{1}{lnx} dx$$

4. El método de integración de Simpson 1/3, ¿a qué tipo de aproximación polinomial ajusta su curva?
   a. Una parábola
   b. Una línea recta
   c. Una curva de grado superior a dos

5. El método de Simpson, lleva su nombre en honor a su autor:
   a. Thomas
   b. Homer
   c. Orenthal James

6. El método del Trapecio utiliza el ancho de paso con valores iguales. Si los pasos fueran desiguales y se quiere una buena aproximación, ¿qué se tendría que hacer para obtener el valor de la integración?

a. Segmentar los intervalos de paso, agrupándolos por coincidencia
b. Interpolar generando mayor número de puntos
c. Considerar los pasos iguales y usar un único método

7. La figura geométrica a la cual se aproxima la fórmula de Simpson 1/3 se basa en la serie de:
   a. Taylor
   b. Fourier
   c. Laplace

8. La eficiencia del método de integración Simpson 3/8 está asociada al:
   a. Cálculo del error aproximado
   b. Número de iteraciones efectuadas
   c. Cálculo del error absoluto

9. La idea original para el cálculo de áreas irregulares fue sugerida en la antigüedad por:
   a. Euclídes
   b. Pitágoras
   c. Tales de Mileto

10. La Regla del Trapecio consiste en sumar las ordenadas de los extremos y_o y y_n, más dos veces la suma del resto de las ordenadas. Esta última suma se debe inicializar algorítmicamente en:
    a. Cero
    b. La primera ordenada
    c. La última ordenada

11. En el siguiente problema: La masa total de una barra de densidad variable está dada por

$$m = \int_0^l \rho(x) A(x) dx$$

Donde
$m = masa$,
$\rho = densidad$,
$A(x) = área$ de la sección transversal
$x = distancia$, a lo largo de la barra
$l = longitud$ de la barra

Se pretende calcular la masa total para una barra de 12 metros de longitud. Determinar qué método numérico permite la mejor precisión posible:

a. Simpson 3/8
b. Simpson 1/3
c. Trapecio

12. Con relación a la pregunta 8, observe la siguiente tabla:

$x\ (m)$	0	2	4	6	8	10	12
$\rho\ (\frac{gr}{cm^3})$	4	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
$A\ (cm^2)$	100	103	106	110	120	133	150

a. ¿Cuál es la variable independiente?

i. $x\ (m)$	ii. $\rho\ (\frac{gr}{cm^3})$	iii. $A\ (cm^2)$

b. Se observa que la integral requiere un producto que contempla $\rho(x)A(x)dx$. Nótese primero que, son funciones y el producto escalar no procede. Segundo, $m * \frac{gr}{cm^3} * cm^2 = \frac{m*gr}{cm}$, lo cual no tiene un sentido, por la conversión de unidades, además, que no se trata de un cálculo discreto, sino continuo. Lo anterior, implica que se requiere de una integración anidada. Determina el procedimiento que resuelve este problema.

i. $\int_0^l \rho(x)\left[\int_0^l A(x)dx\right]$	ii. $\int_0^l A(x)\left[\int_0^l \rho(x)dx\right]$	iii. $\int_0^l d(x)\left[\int_0^l A(x)\rho(x)dx\right]$

13. ¿Cuál de las siguientes funciones no es de solución compleja?
    i. Una función monovalente de 5° grado
    ii. Una función trascendente conteniendo elementos trigonométricos y logarítmicos
    iii. Una función de varias variables

14. Se desea construir un área de esparcimiento en un parque, cuyo contorno corresponde con la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}(4 + \cos(6\theta))^2$$

Mediante uno de los dos métodos de Simpson, encontrar el área de dicha zona, que servirá para determinar la compra de cajas de adoquín. (Nota, dado que se está tratando con coordenadas polares, los límites de integración están dados en radianes, tome un ciclo completo). El área aproximada está cercana a 51.83627878 unidades cuadradas.

Preguntas de reflexión

Lee con atención las preguntas, y contesta lo que se te pide.

1. ¿Cuáles fueron las principales ideas o conceptos matemáticos que aprendieron durante el desarrollo de la unidad?

2. ¿Qué preguntas tienes aún sobre los métodos usados en la unidad?

3. Describe un error o malinterpretación que algún compañero tuvo con el estudio de este tema.

4. ¿Qué nuevo vocabulario aprendiste? Genera una oración con esos términos.

5. ¿Qué fortalezas y debilidades notas de esta forma de evaluar el aprendizaje?

6. ¿Qué TIC emplearon para el desarrollo del proyecto?

7. ¿Los problemas propuestos son modelos reales que te preparan para tu futuro profesional?

Rúbrica de evaluación

La rúbrica que a continuación se presenta, se orienta a evaluar el aprendizaje en términos de qué tan profundo se ha comprendido el contenido presentado, con el fin de interactuar con este en forma exitosa.

Comprende 4 niveles de comprensión. El nivel 1, se orienta a la reproducción y memorización de un hecho, término, principio, concepto, así como a la ubicación de detalles. Puede llegar hasta la solución de problemas rutinarios no complejos.

El nivel 2 trata con la aplicación de habilidades y conceptos. Se trata de organizar y mostrar información. Interpretar gráficos, resumir, identificar las ideas principales, explicar relaciones. Hacer uso de la información, del conocimiento conceptual que conlleva a seleccionar el procedimiento básico apropiado para una tarea dada, tomar decisiones y resolver.

El nivel 3, es una naturaleza estratégica. Requiere razonamiento o desarrollo de un plan o secuencia de pasos para aproximarse al problema, requiere toma de decisiones. Se trata de hacer justificaciones en cada etapa de resolución de problemas y de presentar evidencia de lo mismo.

El nivel 4, tiene que ver con la creación. Puede ser una investigación y/o aplicación de un problema del mundo real. Requiere tiempo para investigar y para resolver problemas no rutinarios. La resolución del problema requiere visualizar múltiples condiciones, además de hacer manipulaciones no rutinarias. Sintetizar información en forma interdisciplinaria, ya sea con contenidos, áreas, fuentes, etc.

La rúbrica se presenta por niveles.

Para el nivel 1 el estudiante debe cumplir con 8 metas de aprendizaje para acceder al nivel 2.
Si el estudiante cumple hasta un mínimo de 5 puntos accede al nivel 2 con las recomendaciones pertinentes que realice el profesor.

Con un puntaje menor a 5, se le recomendará al alumno que afiance el nivel 1, y realice los problemas pertinentes del test de reposición.
Cada rubro tiene un valor de un punto.

Nivel de comprensión1	**Evidencia de aprendizaje**	**Puntaje**
Reproduce el concepto de integral definida	4.1	1
Ubica detalles de áreas bajo la curva para fenómenos simples	4.2a, 4.2b, 4.2c, 4.2d	4
Describe características del fenómeno descrito como área bajo la curva	4.3a, 4.3b, 4.3c	3

Con un puntaje igual o mayor a 4, el alumno puede continuar con el nivel 3.
Cada rubro tiene un valor de un punto.

Nivel de comprensión 2	**Evidencia de aprendizaje**	**Puntaje**
Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un fenómeno/situación	4.1a	1
Aplica un método numérico en una aplicación rutinaria	4.1b, 4.1d, 4.1e	3

Clasifica una serie de etapas y decide por un método numérico	4.1c	1
Escribe una explicación de un tópico para otros	4.1f, 4.1g	2

Con un puntaje igual o mayor a 4, el alumno puede continuar con el nivel 4. Cada rubro tiene un valor de un punto.

Nivel de comprensión 3	Evidencia de aprendizaje	Puntaje
Explica y conecta ideas, usando evidencia que lo sustente	4.5a, 4.6a	2
Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un caso	4.5b	1
Cita evidencia y desarrolla un argumento lógico para hacer conjeturas.	4.6b, 4.6d	2
Resuelve el problema y analiza escenarios distintos	4.5c, 4.6c	2

Nivel de comprensión 4	Evidencia de aprendizaje	Puntaje
Sintetiza ideas en nuevas representaciones	4.7a	3
Escribe el código fuente y presenta el ejecutable-Ingeniería en Computación	4.7b	1
Realiza un análisis comparativo: Ingeniería Civil, Industrial, Mecánica, Eléctrica-Electrónica	4.7b	1