ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ – ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

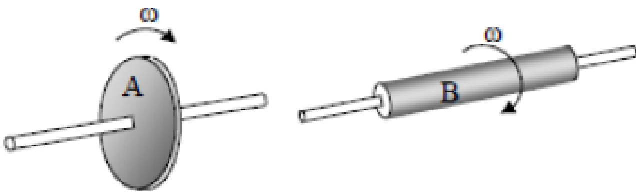
Ερώτηση 1

Ο κύλινδρος και ο δίσκος του σχήματος, έχουν την ίδια μάζα και περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. Ποιό σώμα θα σταματήσει πιο δύσκολα;

α) Το Α.

β) Το Β.

γ) Και τα δύο το ίδιο.



Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού εκφράζει την αδράνεια - αντίδραση στη στροφική του κίνηση, δηλαδή πόσο δύσκολα μεταβάλλεται η στροφική του κατάσταση κίνησης.

Επίσης γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα, υπολογίζεται από τη σχέση: $I = \sum mr^2$, όπου r είναι η απόσταση των στοιχειωδών μαζών του από τον άξονα περιστροφής. Έτσι, η ροπή αδράνειας ενός στερεού εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής του και συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένα είναι τα υλικά σημεία του από τον άξονα περιστροφής τόσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειάς του.

Έτσι στην περίπτωσή μας, ο δίσκος, που θα σταματήσει πιο δύσκολα είναι αυτός, που έχει τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας και αυτός είναι ο δίσκος Α, που έχει την πιο «απλωμένη» μάζα ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ερώτηση 2

Οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα y'y που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σε αυτόν. Πάνω στο δίσκο είναι στερεωμένο ένα υλικό σημείο μάζας m σε απόσταση x (x<R) από τον άξονα περιστροφής. Αν το υλικό σημείο μεταφερθεί και τοποθετηθεί στο άκρο του δίσκου, η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής y΄y:

α) μειώνεται.

β) μένει η ίδια.

γ) αυξάνεται.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των σωμάτων, που αποτελούν το σύστημα. Έτσι το σύστημα δίσκου - υλικού σημείου θα έχει ροπή αδράνειας: $I_{ολ}=I_δ+mr^2$, όπου r είναι η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

Στην αρχική κατάσταση, το υλικό σημείο είναι σε απόσταση x, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι ίση με: $I_{ολ}=I_δ+mx^2$.

Στην τελική κατάσταση, το υλικό σημείο είναι σε απόσταση R, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι ίση με: $I'_{ολ}=I_δ+mR^2$.

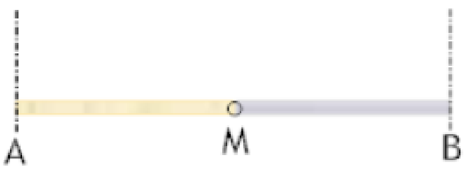
Επειδή, με βάση την εκφώνηση, το x είναι μικρότερο του R, συγκρίνοντας την αρχική και τελική τιμή της ροπής αδράνειας του συστήματος, προκύπτει ότι: $I'_{ολ}>I_{ολ}$,συνεπώς η ροπή αδράνειας του συστήματος αυξάνεται.

Ερώτηση 3

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια οριζόντια λεπτή ράβδος, που αποτελείται από δύο τμήματα, ίσου μήκους, κολλημένα στο μέσο Μ της ράβδου. Το αριστερό είναι ξύλινο ενώ το δεξιό σιδερένιο. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται είτε από το άκρο Α είτε από το Β. Για να θέσουμε πιο εύκολα σε περιστροφή τη ράβδο πρέπει να την στρέψουμε, γύρω από τον άξονα, που διέρχεται από το:

α) Α.

β) Β.



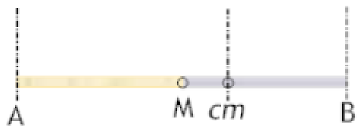
Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Από το Θεώρημα Steiner ($I_p=I_{cm}+Md^2$), αντιλαμβανόμαστε ότι όσο πιο κοντά είναι ο άξονας περιστροφής στο κέντρο μάζας (μικρότερο d), τόσο πιο μικρή είναι η ροπή αδράνειάς του και τόσο πιο εύκολα θα τίθεται σε περιστροφή.

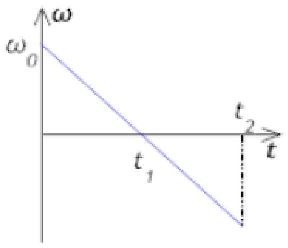
Επειδή η ράβδος δεν είναι ομογενής, το κέντρο μάζας της δεν θα είναι στο μέσον της Μ, αλλά σε κάποιο σημείο του τμήματος με την μεγαλύτερη πυκνότητα, δηλαδή κάπου δεξιότερα του μέσου Μ, στην περιοχή του σιδερένιου τμήματος.



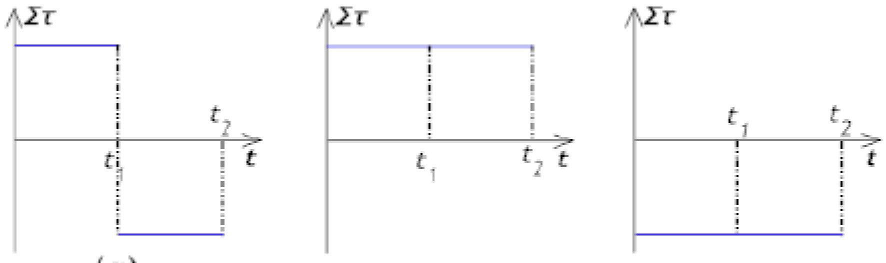
Έτσι το άκρο Β θα βρίσκεται πιο κοντά στο κέντρο μάζας cm, συνεπώς η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το Β θα είναι μικρότερη, κατά συνέπεια πιο εύκολη η περιστροφή της ράβδου.

Ερώτηση 4

Ένας οριζόντιος δίσκος, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Στο δίσκο ασκείται ροπή δύναμης μέτρου τ_F, οπότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος.



Η σωστή γραφική παράσταση της ροπής τ_F σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι το:



(α) (β) (γ)

Να επιλέξτε το σωστό διάγραμμα και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι η κλίση του διαγράμματος γωνιακής συχνότητας ω - χρόνου t, είναι ίση με την γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$, διότι: $a_{γων} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι: 1ον) η κλίση είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια από 0 έως t_2 και 2ον) η κλίση είναι αρνητική, διότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Κατά συνέπεια η γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$ είναι σταθερή και αρνητική.

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης $\Sigma\tau = I \cdot a_{γων} \Rightarrow \tau_F = I \cdot a_{γων}$, προκύπτει ότι η ροπή τ_F είναι ανάλογη της γωνιακής επιτάχυνσης. Συνεπώς η ροπή τ_F έχει σταθερή και αρνητική τιμή σε όλη τη διάρκεια από 0 έως t_2.

Συνεπώς το σωστό διάγραμμα είναι το γ.

Ερώτηση 5

Ένας ομογενής τροχός, με μικρό αριθμό ακτίνων και ένας ομογενής δίσκος, ίδιας ακτίνας R, μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο, ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους και είναι κάθετος στο επίπεδο του καθενός. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του (I_1) είναι μεγαλύτερη της ροπής αδράνειας του δίσκου ως προς το δικό του άξονα περιστροφής (I_2). Αρχικά τα δύο σώματα είναι ακίνητα και τη χρονική στιγμή t=0 αρχίζουμε να ασκούμε ταυτόχρονα στην περιφέρεια κάθε σώματος ίδια οριζόντια, εφαπτομενική, σταθερή κατά μέτρο δύναμη F. Θεωρήστε αμελητέες οποιεσδήποτε άλλες επιδράσεις ροπών. Για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού $(a^{(1)}_{γων})$ και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου $(a^{(2)}_{γων})$ ισχύει η σχέση:

α) $a_{γων}^{(1)} > a_{γων}^{(2)}$.

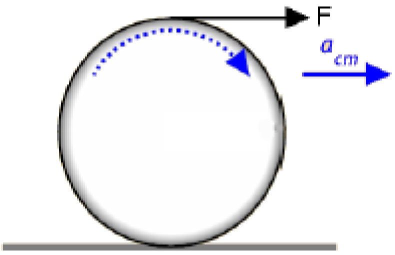
β) $a_{γων}^{(1)} < a_{γων}^{(2)}$.

γ) $a_{γων}^{(1)} = a_{γων}^{(2)}$.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η β.



Με βάση το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, η γωνιακή επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση: $a_{γων} = \frac{Στ}{I}$ (1).

Η μοναδική ροπή δύναμης είναι η ροπή της F, άρα:

$Στ = τ_F$. Επειδή η F έχει σταθερό μέτρο και είναι συνεχώς εφαπτόμενη στην περιφέρεια, ακτίνας R, η ροπή της και στις δύο περιπτώσεις θα είναι ίδια και ίση με:

$Στ_1 = Στ_2 = τ_F = F \cdot R$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $a_{γων} = \frac{F \cdot R}{I}$. Με βάση την σχέση αυτή προκύπτει ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας, εφόσον ο αριθμητής - ροπή δύναμης F, είναι σταθερός. Συνεπώς, επειδή σύμφωνα με την εκφώνηση, ο τροχός έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας (I_1) από αυτή του δίσκου (I_2), θα αποκτήσει μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση: $a_{γων}^{(1)} < a_{γων}^{(2)}$.

Ερώτηση 6

Ένας ομογενής δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με τη βοήθεια οριζόντιας σταθερής δύναμης F η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του. Ο δίσκος κινείται επιταχυνόμενος ομαλά προς τα δεξιά. Η φορά της στατικής τριβής, που δέχεται, από το οριζόντιο δάπεδο, έχει φορά:

α) ίδια με την F.

β) αντίθετη από την F.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

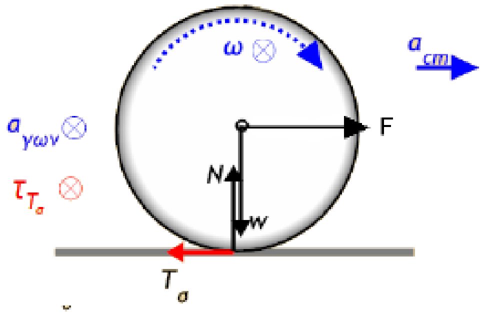
Σωστή απάντηση είναι η β.

Στο δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η οριζόντια δύναμη F και το κατακόρυφο βάρος w από τη γη στον άξονα, που περνούν από το κέντρο μάζας του, η κάθετη αντίδραση N του δαπέδου και η οριζόντια στατική τριβή $T_σ$, στο σημείο επαφής δίσκου - δαπέδου.

Παρατηρούμε ότι οι φορείς των F και w διέρχονται από τον άξονα περιστροφής, ενώ ο φορέας της N, διέρχεται και αυτός από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς η ροπή τους ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδενική: $\tau_F = \tau_w = \tau_N = 0$. Συνεπώς η μόνη ροπή δύναμης στο δίσκο είναι αυτή της στατικής τριβής, δηλαδή $\Sigma\tau = \tau_{T_σ}$ (1).

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, όταν γραφεί σε διανυσματική μορφή: $\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{a}_{γων}$, προκύπτει ότι η συνολική ροπή $\Sigma\vec{\tau}$ είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{γων}$.

Συνεπώς και με βάση την (1), και η ροπή $\vec{\tau}_{T_σ}$ της στατικής τριβής, θα είναι ομόρροπη της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{γων}$, η οποία στο σχήμα έχει φορά προς τα μέσα, διότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, άρα η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{γων}$, είναι ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$.



Για να συμβεί αυτό, πρέπει η φορά της στατικής τριβής στο σχήμα, να είναι προς τα αριστερά, δηλαδή η φορά της είναι αντίθετη από αυτήν της F.

Ερώτηση 7

Ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος, μάζας Μ και ακτίνας R, περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο Κ του δίσκου. Ένα μικρό σώμα, μάζας m, τοποθετείται πολύ κοντά στο κέντρο Κ και αρχίζει να ολισθαίνει αργά προς την περιφέρεια του δίσκου. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του μικρού σώματος προς την περιφέρεια, η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος - μικρό σώμα:

α) μειώνεται.

β) μένει σταθερή.

γ) αυξάνεται.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των σωμάτων, που αποτελούν το σύστημα. Έτσι το σύστημα δίσκου - μικρού σώματος θα έχει ροπή αδράνειας: $I_{ολ} = I_δ + mr^2$, όπου r είναι η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

Η αρχική απόσταση του σώματος από τον άξονα περιστροφής είναι περίπου μηδέν, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι περίπου ίση με τη ροπή αδράνειας του δίσκου: $I_{ολ} \simeq I_δ$.

Καθώς κινείται το σώμα, η απόσταση r αυξάνεται και στην τελική θέση, το σώμα είναι στη μέγιστη απόσταση R, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι ίση με: $I'_{ολ} = I_δ + mR^2$.

Συνεπώς, κατά τη διάρκεια της κίνησης του μικρού σώματος, η ροπή αδράνειας του συστήματος αυξάνεται.

Ερώτηση 8

Ένας ομογενής ξύλινος δίσκος (1) και ένας ομογενής μεταλλικός δακτύλιος (2) έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα. Αν I_1 και I_2 είναι αντίστοιχα η ροπή αδράνειας του δίσκου και του δακτυλίου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό τους, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους, τότε ισχύει η σχέση:

α) $I_1 < I_2$.

β) $I_1 = I_2$.

γ) $I_1 > I_2$.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Γνωρίζουμε ότι, μεταξύ σωμάτων ίδιας μάζας, η ροπή αδράνειας του σώματος εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής και συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένες είναι οι στοιχειώδεις μάζες του σώματος από τον άξονα περιστροφής, τόσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειας ($I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$).

Στο δακτύλιο όλες οι στοιχειώδεις μάζες του απέχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το κέντρο του, ενώ στον δίσκο οι στοιχειώδεις μάζες του απέχουν, από τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του, απόσταση, που κυμαίνεται μεταξύ 0 και R.

Συνεπώς ο δακτύλιος (με ροπή αδράνειας I_2) έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από το δίσκο (με ροπή αδράνειας I_1).

Ερώτηση 9

Μία ομογενής ξύλινη ράβδος (1) και μια ομογενής μεταλλική ράβδος (2) έχουν ίδιες διαστάσεις και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το μέσον τους και είναι κάθετος σ' αυτές. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

Αρχίζουμε να τις περιστρέφουμε ασκώντας οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου F_1 και F_2 αντίστοιχα στο άκρο τους και κάθετα στη ράβδο. Παρατηρούμε ότι οι δύο ράβδοι αποκτούν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση. Για τα μέτρα των δύο δυνάμεων ισχύει ότι:

α) $F_1 = F_2$.

β) $F_1 < F_2$.

γ) $F_1 > F_2$.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή το ξύλο έχει μικρότερη πυκνότητα από το μέταλλο, για ράβδους ίδιων διαστάσεων (άρα και ίδιου μήκους), μικρότερη μάζα έχει η ξύλινη, δηλαδή $M_1 < M_2$.

Από τη σχέση $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, προκύπτει ότι εφόσον οι δύο ράβδοι έχουν το ίδιο μήκος, η ροπή αδράνειάς τους είναι ανάλογη της μάζας τους, δηλαδή: $I_1 < I_2$ (1).

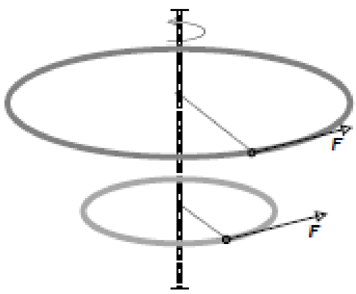
Απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει για την απαιτούμενη ροπή δύναμης (που σε κάθε περίπτωση έχει μοχλοβραχίονα $\frac{L}{2}$):

$\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F\frac{L}{2} = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F = \frac{2I_{cm}a_{\gamma\omega\nu}}{L} \Rightarrow F = \frac{2a_{\gamma\omega\nu}}{L}I_{cm}$, δηλαδή η απαιτούμενη δύναμη είναι ανάλογη της ροπής αδράνειας, όταν η γωνιακή επιτάχυνση και το μήκος των ράβδων είναι το ίδιο.

Συνεπώς, και με βάση την (1), η ξύλινη ράβδος (1) απαιτεί μικρότερη δύναμη απ' την μεταλλική (2): $F_1 < F_2$.

Ερώτηση 10

Δύο οριζόντιοι τροχοί Α και Β, με ακτίνες αμελητέας μάζας, έχουν την ίδια μάζα και όλη η μάζα τους είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιφέρειά τους. Ο τροχός Α έχει τη διπλάσια ακτίνα απ' τον τροχό Β. Οι δύο τροχοί μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός τροχού ως προς άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του: $I_{cm} = mR^2$.



Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρεια κάθε τροχού δύναμη F

α) $a_A < a_B$.

β) $a_A = a_B$.

γ) $a_A > a_B$.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

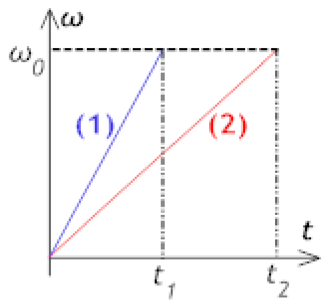
Από τη σχέση $I_{cm} = mR^2$, προκύπτει ότι, επειδή η μάζα τους είναι ίδια, η ροπή αδράνειας του τροχού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ακτίνας του. Επομένως, εφόσον απ' την εκφώνηση δίνεται για τις ακτίνες ότι: $R_A = 2R_B$, ο τροχός Α θα έχει τετραπλάσια ροπή αδράνειας από τον Β: $I_A = 4I_B$ (1).

Επειδή η ίδια δύναμη F ασκείται εφαπτομενικά, η ροπή της θα ισούται με: $\tau = F \cdot R$, συνεπώς θα είναι ανάλογη της ακτίνας: $\tau_A = 2\tau_B$ (2).

Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, υπολογίζεται από τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης: $a_{γων} = \frac{\Sigma\tau}{I}$. Έτσι εφόσον, σύμφωνα με τη (2), ο τροχός Α δέχεται διπλάσια ροπή (στον αριθμητή) και σύμφωνα με την (1), έχει τετραπλάσια ροπή αδράνειας (στον παρονομαστή), θα αποκτήσει τη μισή γωνιακή επιτάχυνση.

Ερώτηση 11

Δύο ομογενείς κύλινδροι (1) και (2), ίδιας μάζας M και ίδιας ακτίνας R, αρχίζουν να κατέρχονται κυλιόμενοι σε πλάγιο επίπεδο δεχόμενοι την ίδια επιταχύνουσα συνολική ροπή. Ο ένας εκ των δύο κυλίνδρων είναι συμπαγής και ο άλλος κούφιος.



Η γραφική παράσταση του μέτρου της γωνιακής τους ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κούφιος κύλινδρος είναι ο:

α) (1).

β) (2).

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης για κάθε κύλινδρο, εφαρμόζοντας τη σχέση ορισμού της γωνιακής επιτάχυνσης: $a_{γων} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ και τις πληροφορίες από το διάγραμμα που δίνεται.

Για τον 1ο κύλινδρο, η γωνιακή επιτάχυνση ισούται με την κλίση της ευθείας: $a_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0 - 0}{t_1 - 0} = \frac{\omega_0}{t_1}$.

Για τον 2ο κύλινδρο, η γωνιακή επιτάχυνση ισούται με την κλίση της ευθείας: $a_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0 - 0}{t_2 - 0} = \frac{\omega_0}{t_2}$.

Από το διάγραμμα ω - t βλέπουμε ότι $t_2 > t_1$, οπότε για τις γωνιακές επιταχύνσεις ισχύει: $a_1 > a_2$ (1).

Η εκφώνηση μας πληροφορεί ότι οι δύο κύλινδροι δέχονται την ίδια ροπή: $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ (2).

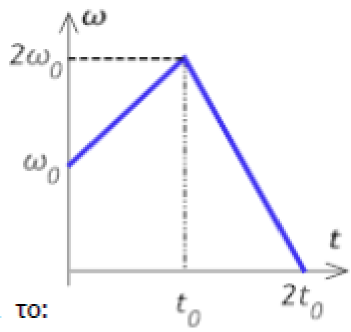
Απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει ότι: $\Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I = \dfrac{\Sigma\tau}{a_{\gamma\omega\nu}}$.

Εφαρμόζοντάς την στους δύο κυλίνδρους έχουμε: $I_1 = \dfrac{\tau}{a_1}$ και $I_2 = \dfrac{\tau}{a_2}$. Με βάση τώρα την (1) προκύπτει ότι: $I_1 < I_2$ (4).

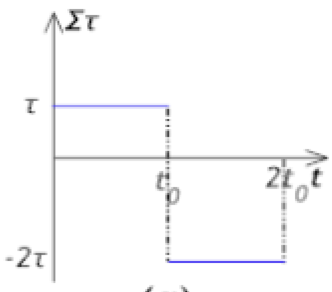
Όμως ο κούφιος κύλινδρος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από τον συμπαγή, διότι οι στοιχειώδεις μάζες, που τον συγκροτούν απέχουν τη μέγιστη δυνατή απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς ο κούφιος κύλινδρος είναι ο (2).

Ερώτηση 12

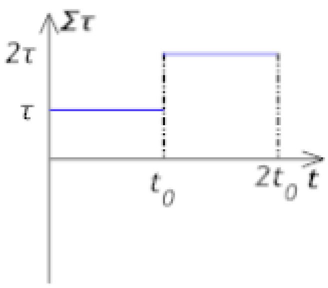
Ένας κατακόρυφος ομογενής κύλινδρος, στρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από τον άξονά του. Στον κύλινδρο ασκείται κατάλληλη ροπή δύναμης μέτρου τ_F, οπότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος.



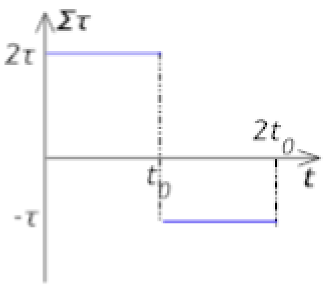
Η σωστή γραφική παράσταση της ροπής τ_F σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι το:



(α)



(β)



(γ)

Να επιλέξτε το σωστό διάγραμμα και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Από το διάγραμμα αντιλαμβανόμαστε ότι:

Από 0 έως t_0, ο κύλινδρος επιταχύνεται ομαλά με γωνιακή επιτάχυνση $a_1 = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{2\omega_0 - \omega_0}{t_0 - 0} = \dfrac{\omega_0}{t_0}$ (1),

από t_0 έως $2t_0$, ο κύλινδρος επιβραδύνεται ομαλά με γωνιακή επιτάχυνση $a_2 = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{0 - 2\omega_0}{2t_0 - t_0} = -\dfrac{2\omega_0}{t_0}$ (2).

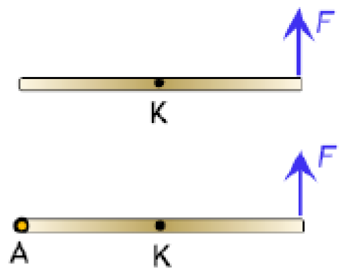
Απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης $\Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu}$ προκύπτει ότι:

από 0 έως t_0, $\tau_F = I \cdot a_1 \overset{(1)}{=} I\frac{\omega_0}{t_0}$ και από t_0 έως $2t_0$, $\tau_F = I \cdot a_2 \overset{(2)}{=} -2I\frac{\omega_0}{t_0}$, δηλαδή στο 2° στάδιο της κίνησης, η ροπή είναι αρνητική με διπλάσιο μέτρο.

Συνεπώς το σωστό διάγραμμα είναι το (α).

Ερώτηση 13

Στο σχήμα φαίνονται σε κάτοψη δύο όμοιες ομογενείς ράβδοι (1) και (2), που βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η ράβδος (1) είναι ελεύθερη ενώ η ράβδος (2) είναι στερεωμένη ακλόνητα στο αριστερό άκρο της Α. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.



Ασκούμε στο δεξιό άκρο τους την ίδια οριζόντια δύναμη F κάθετα σε κάθε ράβδο. Για τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων a_1 και a_2, που θ' αποκτήσουν αντίστοιχα οι δύο ράβδοι ισχύει:

α) $a_1 < a_2$.

β) $a_1 = a_2$.

γ) $a_1 > a_2$.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Γνωρίζουμε (σχολικό βιβλίο, σελ. 113) ότι ένα ελεύθερο σώμα με την επίδραση ροπής δύναμης, (το οποίο εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση) στρέφεται ως προς το νοητό άξονα, που διέρχεται απ' το κέντρο μάζας του.

Έτσι η ελεύθερη ράβδος (1), κατά τη στροφική κίνηση ως προς το κέντρο μάζας της Κ, δέχεται ροπή: $\tau_1 = F\frac{L}{2}$, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς το κέντρο μάζας της είναι: $I_1 = I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει για τη γωνιακή της επιτάχυνση: $a_1 = \frac{\tau_1}{I_1} = \frac{\frac{1}{2}FL}{\frac{1}{12}ML^2} \Rightarrow a_1 = 6\frac{F}{ML}$ (1).

Η ράβδος (2) στρέφεται ως προς το σταθερό άκρο Α.

Η ροπή, που δέχεται είναι: $\tau_1 = FL$ και η ροπή αδράνειάς της ως προς το άκρο Α, με βάση το Θεώρημα Steiner είναι ίση με: $I_2 = I_{cm} + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{3}ML^2$.

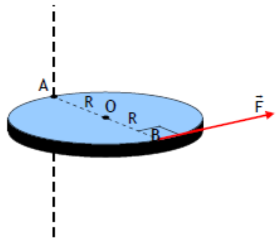
Εφαρμόζοντας πάλι το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει για τη γωνιακή της επιτάχυνση: $a_2 = \frac{\tau_2}{I_2} = \frac{FL}{\frac{1}{3}ML^2} \Rightarrow a_2 = 3\frac{F}{ML}$ (2).

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $a_1 > a_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ένας ομογενής και ισοπαχής δίσκος μάζας $M = 2\,kg$ και ακτίνας $R = 0{,}1\,m$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από ένα σημείο Α της περιφέρειάς του. Στο αντιδιαμετρικό σημείο Β ασκείται μια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 3\,N$, η οποία είναι συνεχώς εφαπτόμενη στο δίσκο και η διεύθυνσή της είναι επάνω στο επίπεδο που ορίζει ο δίσκος.



α) Να βρείτε το μέτρο της ροπής που προκαλεί η δύναμη και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

β) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ με την οποία στρέφεται ο δίσκος και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) Αφού η δύναμη έχει σταθερό μέτρο και είναι συνεχώς εφαπτόμενη στο δίσκο, θα ασκεί σταθερή ροπή, μέτρου:

$\tau = F \cdot L$ (3)

όπου L ο μοχλοβραχίονας της $\vec{F}$.

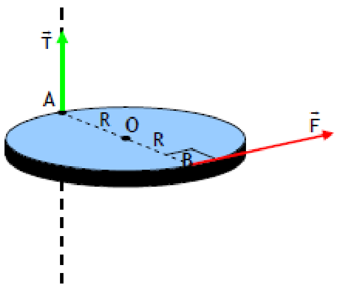
Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$L = 2R$ (4)

Θεωρώντας θετική την αριστερόστροφη φορά, από τις (3) και (4) βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της ροπής που ασκείται στο δίσκο:

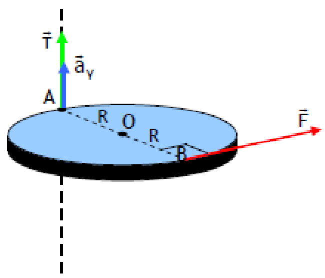
$\tau = F \cdot 2R \;\Rightarrow\; \tau = +0{,}6\,Nm$ (5)

Στο σχήμα φαίνεται η ροπή που ασκείται στο δίσκο:



β) Από τη (2) υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σταθερό άξονα περιστροφής του. Επειδή η απόσταση του άξονα περιστροφής από τον παράλληλο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του δίσκου είναι d=R, έχουμε:

$$I = I_{cm} + Md^2 \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 \;\Rightarrow\; I = \frac{3}{2}MR^2 \;\Rightarrow\; I = 0{,}03\,kgm^2 \qquad (6)$$



γ) Με αντικατάσταση των (5) και (6) στην (1) έχουμε:

$$0{,}6\,N \cdot m = 0{,}03\,kgm \cdot a_\gamma \;\Rightarrow\; a_\gamma = 20\,\frac{rad}{s^2}$$

Επειδή $a_\gamma > 0$, η αλγεβρική τιμή συμπίπτει με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης.

Επειδή η $\vec{\tau}$ είναι η μοναδική ροπή που ασκείται στο δίσκο, η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma$ θα είναι ομόρροπη με την $\vec{\tau}$:

Άσκηση 2

Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας $m=2kg$ και ακτίνας $R=0,1m$ περιστρέφεται αριστερόστροφα (δηλαδή με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού) χωρίς τριβές με γωνιακή συχνότητα $\omega_0=20\frac{rad}{s}$, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Από τη χρονική στιγμή t=0 και μετά ο δίσκος δέχεται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του δύο σταθερές κατά μέτρο δυνάμεις F_1 αριστερόστροφα και F_2 δεξιόστροφα, που τα μέτρα τους ικανοποιούν τη σχέση $F_1=5F_2$ και οι οποίες προσδίδουν στο δίσκο γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{γων}=40\frac{rad}{s^2}$. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2$. Να υπολογίσετε:

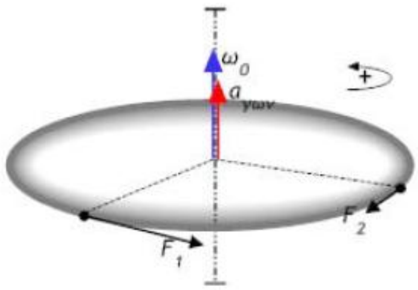
α) τα μέτρα των δύο δυνάμεων.

β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1=2 s.

Τη χρονική στιγμή t_1 καταργούμε ακαριαία τη δύναμη F_1, οπότε ο δίσκος σταματά τη χρονική στιγμή t_2.

γ) Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση.

δ) Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας ω - χρόνου t σε βαθμολογημένους άξονες, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t_2.



Λύση

α) Θα εφαρμόσουμε αρχικά το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το δίσκο, ώστε να υπολογίσουμε τη συνισταμένη των ροπών Στ:

$\Sigma\tau=I_{cm}\cdot a_{γων}\Rightarrow\Sigma\tau=\frac{1}{2}mR^2a_{γων}$ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε:

$$\Sigma\tau=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cdot0,1^2\cdot40\ N\cdot m\Rightarrow\Sigma\tau=0,4\ N\cdot m.$$

Θεωρώντας θετική φορά την αριστερόστροφη, έχουμε για τις αλγεβρικές τιμές των ροπών: $\Sigma\tau=\tau_{F_1}+\tau_{F_2}=F_1R-F_2R=(F_1-F_2)R$.

Με βάση την εκφώνηση, ισχύει για τα μέτρα των δυνάμεων ότι: $F_1=5F_2$, οπότε:

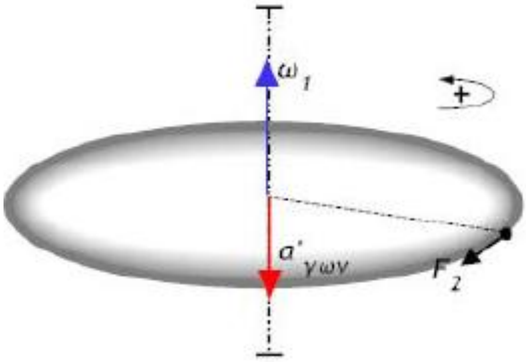
$\Sigma\tau=(5F_2-F_2)R=4F_2R$, και λύνοντας ως προς F_2 βρίσκουμε:

$F_2=\frac{\Sigma\tau}{4R}\overset{S.I.}{\Rightarrow}F_2=\frac{0,4}{4\cdot0,1}N\Rightarrow F_2=1\,N$. Και από την $F_1=5F_2\Rightarrow F_1=5\,N$.

β) Εφόσον ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, οπότε για την γωνιακή ταχύτητα ισχύει η εξίσωση: $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t$. Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1: $\omega_1 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = (20 + 40 \cdot 2)\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega_1 = 100\frac{rad}{s}$.

γ) Όταν καταργηθεί η F_1, ο δίσκος δέχεται την δεξιόστροφη F_2, η οποία τον επιβραδύνει. Η νέα συνισταμένη των ροπών, λοιπόν, θα είναι: $\Sigma\tau' = \tau'_{F_2} = -F_2R = -0.1\,N \cdot m$.

Για να βρούμε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση θα εφαρμόσουμε ξανά το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης:



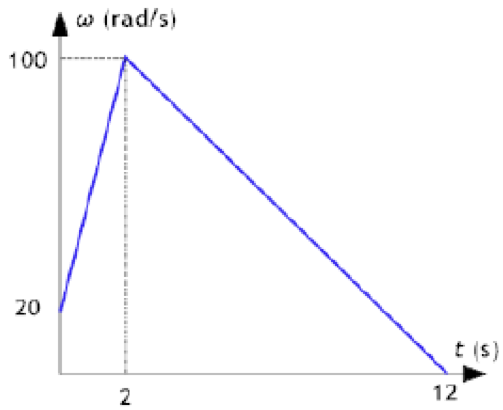
$\Sigma\tau' = I_{cm} \cdot a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau'}{\frac{1}{2}mR^2} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{-0{,}1}{0{,}1^2}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = -10\frac{rad}{s^2}$. Το πρόσημο (-) δείχνει ότι η νέα γωνιακή επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά της αρχικής.

δ) Θα βρούμε αρχικά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης μέχρι να σταματήσει, απ' την εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας, λαμβάνοντας υπόψη ότι η αρχική γωνιακή ταχύτητα της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή t_1: $\omega' = \omega_1 + \alpha'_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t$.

Όταν θα σταματήσει θα ισχύει: $0 = \omega_1 + a'_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = -\frac{\omega_1}{a'_{\gamma\omega\nu}} \overset{S.I.}{\Rightarrow} \Delta t = -\frac{100}{-10}s \Rightarrow \Delta t = 10\,s$.

Όμως η διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2, που θα σταματήσει, οπότε: $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = (2+10)\,s \Rightarrow t_2 = 12\,s$.

Έτσι σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση, που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Άσκηση 3

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ, μάζας M=0,6 kg και μήκους L=0,5 m, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α.

α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς της ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται απ' το άκρο Α.

Από την οριζόντια θέση αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο, να περιστραφεί γύρω απ' το άκρο Α.

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνσή της $a^{(0)}_{γων}$ τη στιγμή που την αφήνουμε ελεύθερη.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνσή της στη θέση όπου αυτή έχει στραφεί κατά γωνία φ, τέτοια ώστε $συνφ = 0,5$.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Κ, που είναι το κέντρο μάζας cm της ράβδου, στη θέση όπου αυτή έχει στραφεί κατά γωνία φ, τέτοια ώστε $συνφ = 0,5$.

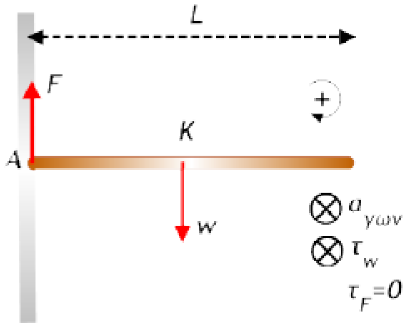
Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s².

Λύση

α) Η ράβδος στρέφεται γύρω από άξονα, κάθετο σ' αυτήν, που περνά από το άκρο Α (και όχι από το κέντρο μάζας της), οπότε η ροπή αδράνειάς της ως προς αυτόν τον άξονα αυτόν θα υπολογιστεί από το Θεώρημα του Steiner: $I_A = I_{cm} + Md^2$, όπου d είναι η απόσταση του άκρου από το cm , δηλαδή $d = \frac{L}{2}$. Συνεπώς:

$$I_A = I_{cm} + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = (\frac{1}{12} + \frac{1}{4})ML^2 = \frac{4}{12}ML^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{3}ML^2 \text{ (1)},$$

και αντικαθιστώντας στο S.I.: $I_A = \frac{1}{3}0,6 \cdot 0,5^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I_A = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.



β) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της w στο κέντρο μάζας της Κ και η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής της.

Για να υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση, όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση (τη στιγμή που την αφήνουμε ελεύθερη), εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της

Στροφικής Κίνησης: $\Sigma\tau_A = I_A \cdot a^{(0)}_{\gamma\omega\nu}$, θεωρώντας θετική φορά την προς τα μέσα.

Η ροπή της F ως προς το A είναι μηδέν, καθώς ασκείται στον άξονα περιστροφής, επομένως ροπή θα έχει μόνο το βάρος της ράβδου: $\Sigma\tau_A = \tau_w = w \cdot \frac{L}{2}$ (2) (ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι $\frac{L}{2}$).

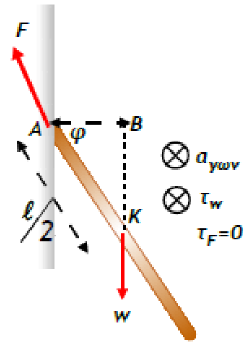
Αντικαθιστώντας τώρα στον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης τις (1) και (2), έχουμε:

$\cancel{M}g\frac{L}{2} = \frac{1}{3}\cancel{M}L^2 \cdot a^{(0)}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a^{(0)}_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L}$ και αντικαθιστώντας στο S.I.: $a^{(0)}_{\gamma\omega\nu} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,5}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow$

$a^{(0)}_{\gamma\omega\nu} = 30\ \frac{rad}{s^2}$.

γ) Στη θέση όπου η ράβδος έχει στραφεί κατά φ εφαρμόζουμε πάλι τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης. Η ροπή του βάρους είναι τώρα: $\Sigma\tau_A = \tau_w = w \cdot (AB)$.

Από το σχήμα βρίσκουμε ότι ο μοχλοβραχίονας (AB) είναι: $(AB) = (AK) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$, οπότε: $\Sigma\tau_A = \tau_w = w \cdot \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$ (3).



Αντικαθιστώντας τώρα στον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης τις (1) και (3), έχουμε: $\cancel{M}g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{3}\cancel{M}L^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L}\sigma\upsilon\nu\varphi$ (4).

Στην εκφώνηση δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,5$, οπότε αντικαθιστώντας στην (4) στο S.I. προκύπτει ότι: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,5}0,5\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 15\ \frac{rad}{s^2}$.

δ) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου, που απέχει r από τον άξονα περιστροφής, υπολογίζεται ως εξής:

$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$. Αλλά $\frac{d\omega}{dt} = a_{\gamma\omega\nu}$, οπότε: $\frac{d\upsilon}{dt} = r \cdot a_{\gamma\omega\nu}$ (5).

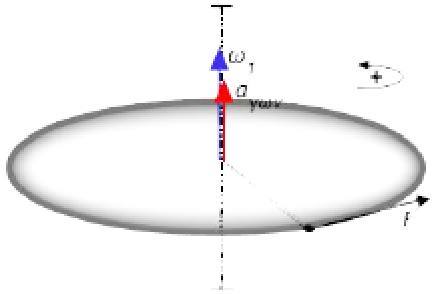
Αντικαθιστώντας στην (5) την απόσταση του σημείου K ($r_K = \frac{L}{2}$) και τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση στη θέση αυτή, που υπολογίστηκε στο (γ) ερώτημα, βρίσκουμε:

$\frac{d\upsilon_K}{dt} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{L}{2} = 15 \cdot 0,25\frac{m}{s^2} \Rightarrow \frac{d\upsilon_K}{dt} = 3,75\frac{m}{s^2}$.

Σχόλιο: Το φυσικό μέγεθος που υπολογίσθηκε στο ερώτημα δ "ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας", είναι αυτό που αναφέρεται στο Σχολικό σας Βιβλίο, στη σελίδα 121, 6η γραμμή ως γραμμική επιτάχυνση και σε άλλα έγκυρα επιστημονικά κείμενα αναφέρεται ως επιτρόχια επιτάχυνση.

Άσκηση 4

Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος ακτίνας R=0,1 m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και τη χρονική στιγμή t=0 δέχεται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του αριστερόστροφη δύναμη μέτρου $F_1 = 10\ \text{N}$ και η οποία του προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu} = 20\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.



Α. Να υπολογίσετε:

α) Τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β) Τη μάζα M του δίσκου.

γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1=5 s.

Β. Τη χρονική στιγμή t_1 καταργούμε ακαριαία τη δύναμη F_1.

δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που θα κάνει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2=15 s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) Θα υπολογίσουμε αρχικά τη ροπή της δύναμης F, η οποία έχει μοχλοβραχίονα την ακτίνα του δίσκου R: $\tau_F = FR \Rightarrow \tau_F = 10\cdot 0,1\ \text{N}\cdot\text{m} \Rightarrow \tau_F = 1\ \text{N}\cdot\text{m}$.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το δίσκο, ώστε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειάς του:

$$\Sigma\tau = I_{cm}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = I_{cm}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I_{cm} = \frac{\tau_F}{a_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow I_{cm} = \frac{1}{20}\text{kgm}^2 \Rightarrow I_{cm} = 0,05\ \text{kgm}^2.$$

β) Από τη σχέση που δίνει τη ροπή αδράνειας του δίσκου, υπολογίζουμε τη μάζα του:

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow M = \frac{2I_{cm}}{R^2} \Rightarrow M = \frac{2\cdot 0,05}{0,01}\text{kg} \Rightarrow M = 10\ \text{kg}.$$

γ) Εφόσον ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, οπότε για την γωνιακή ταχύτητα ισχύει η εξίσωση: $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu}\cdot t$. Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1: $\omega_1 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = (0 + 20\cdot 5)\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 100\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

δ) Μετά τη χρονική στιγμή t_1, που καταργείται η δύναμη F, ο δίσκος δε δέχεται ροπές, οπότε εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με την γωνιακή ταχύτητα ω_1, που είχε αποκτήσει. Έως τη χρονική στιγμή t_2 θα περιστρέφεται για διάρκεια: $\Delta t = t_2 - t_1 = (15-5)\text{s} = 10\ \text{s}$ και θα έχει διαγράψει γωνία στροφής $\Delta\theta = \omega_1\Delta t \Rightarrow \Delta\theta = 100\cdot 10\ \text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 1000\ \text{rad}$.

Επειδή σε κάθε περιστροφή διαγράφει γωνία 2π rad, ο αριθμός των περιστροφών είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi}\ \text{περιστροφές} \Rightarrow N = \frac{500}{\pi}\ \text{περιστροφές}.$$

Άσκηση 5

Μια ομογενής λεπτή δοκός ΚΑ, μάζας $M = 6kg$ και μήκους $L = 2m$, μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Κ. Στο άκρο Α της δοκού ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού $F = 10N$ κάθετα στη δοκό και η δοκός αρχίζει να περιστρέφεται αριστερόστροφα. Κατά την περιστροφή της δοκού υπάρχουν τριβές, που δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής μέτρου $\tau_T = 4Nm$. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, ως προς τον άξονα περιστροφής, κατά τη διάρκεια της περιστροφής της δοκού.

β) Τη ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της.

γ) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_{γων}$.

δ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κέντρου μάζας της, όταν η δοκός έχει διαγράψει $N = \frac{8}{\pi}$ περιστροφές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς άξονα κάθετο στη δοκό, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

Λύση

α) Η συνισταμένη των ροπών ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα της ροπής της F και της ροπής των τριβών: $\Sigma\tau_K = FL - |\tau_T| = (10 \cdot 2 - 4)Nm \Rightarrow \Sigma\tau_K = 16\ Nm$.

β) Εφόσον ο άξονας περιστροφής δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Steiner: $I_K = I_{cm} + Md^2$, όπου d είναι η απόσταση του άκρου Κ από το cm της, δηλαδή $d = \frac{L}{2}$. Συνεπώς:

$$I_K = I_{cm} + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} \Rightarrow I_K = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow I_K = \frac{1}{3}6 \cdot 2^2\ kgm^2 \Rightarrow I_K = 8\ kgm^2.$$

γ) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma\tau_K = I_K \cdot a_{γων} \Rightarrow a_{γων} = \frac{\Sigma\tau_K}{I_K} = \frac{16}{8}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{γων} = 2\frac{rad}{s^2}.$$

δ) Από τη σχέση του αριθμού περιστροφών, υπολογίζουμε τη γωνία στροφής: $N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = \frac{8}{\pi}2\pi\ rad \Rightarrow \theta = 16\ rad$.

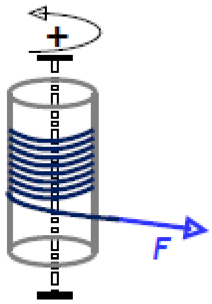
Εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, η δοκός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα, άρα από το νόμο της γωνιακής μετατόπισης $\theta = \frac{a_{γων}}{2}t^2$ θα βρούμε τη διάρκεια περιστροφής:

$$t = \sqrt{\frac{2\theta}{a_{γων}}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2}}\ s \Rightarrow t = 4\ s.$$

Τη στιγμή αυτή η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι: $\omega = a_{γων}t \Rightarrow \omega = 2\cdot 4\frac{rad}{s} = 8\frac{rad}{s}$.

Το κέντρο μάζας της δοκού διαγράφει κυκλική τροχιά με κέντρο το Κ και ακτίνα $\frac{L}{2}$, οπότε η γραμμική του ταχύτητα θα έχει μέτρο: $\upsilon_K = \omega\frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_K = 8\frac{2}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_K = 8\frac{m}{s}$.

Άσκηση 6



Ομογενής συμπαγής κύλινδρος ακτίνας $R = 0,05m$, μπορεί να στρέφεται (τριβές αμελητέες) γύρω από κατακόρυφο άξονα, που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Στην περιφέρειά του έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουμε να σύρουμε το άκρο του νήματος, ασκώντας εφαπτομενική δύναμη μέτρου $F = 1N$. Τη χρονική στιγμή $t = 4s$, ο κύλινδρος περιστρέφεται αριστερόστροφα και έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 20rad/s$. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

β) Τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας κυλίνδρου.

γ) Το μέτρο της γωνιακής μετατόπισης του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 4s$.

δ) Το μήκος του νήματος, που ξετυλίχθηκε μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 4s$, θεωρώντας ότι αυτό δεν ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

Λύση

α) Εφόσον η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα. Έτσι από την χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας, υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\omega = a_{γων}t \Rightarrow a_{γων} = \frac{\omega}{t} \Rightarrow a_{γων} = \frac{20}{4}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{γων} = 5\frac{rad}{s^2}.$$

β) Ο μοχλοβραχίονας της F είναι ίσος με την ακτίνα του κυλίνδρου, οπότε το μέτρο της ροπής της είναι ίσο με:

$$\tau_F = F\cdot R = 1N\cdot 0,05m = 0,05\ Nm.$$

Εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, για να βρούμε τη ροπή αδράνειας:

$$\Sigma\tau = I\cdot a_{γων} \Rightarrow I = \frac{\Sigma\tau}{a_{γων}} = \frac{0,05}{5}kgm^2 \Rightarrow I = 10^{-2}kgm^2.$$

γ) Το μέτρο της γωνιακής μετατόπισης (ή γωνία στροφής) του κυλίνδρου, θα υπολογιστεί από τη χρονική εξίσωση της κίνησης της:

$$\theta = \frac{a_{γων}}{2}t^2 \Rightarrow \theta = \frac{5}{2}16\ rad \Rightarrow \theta = 40\ rad.$$

δ) Το μήκος του νήματος d, που ξετυλίχθηκε από t=0 έως t=4 s, είναι ίσο με το αντίστοιχο τόξο $\widehat{s}$, που διέγραψε η περιφέρεια του κυλίνδρου.

Από τη γεωμετρία όμως γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου υπολογίζεται από τη σχέση: $\widehat{s} = R \cdot \theta$. Συνεπώς:

$$d = \widehat{s} = R \cdot \theta \Rightarrow d = 0,05 \cdot 40 m \Rightarrow d = 2\ m.$$

Άσκηση 7

Ο τροχός ενός αναποδογυρισμένου ποδηλάτου, αποτελείται από ομογενή στεφάνη αμελητέου πάχους, με μάζα M=1 kg και ακτίνα R=0,5 m, και τις ακτίνες του, μάζας m=0,02 kg η καθεμία και μήκους L=R=0,5 m. Ο τροχός στρέφεται αρχικά γύρω από τον άξονά του, στο κέντρο του, έχοντας γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0=100 rad/s.

Τη χρονική στιγμή t=0, "πατάμε" το φρένο, οπότε ο τροχός ακινητοποιείται με σταθερό ρυθμό σε t_1= 2 s.

Να υπολογίσετε:

α) τη ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

β) τον αριθμό των ακτίνων του τροχού.

γ) τον αριθμό των στροφών, που έκανε ο τροχός μέχρι να ακινητοποιηθεί.

δ) το μέτρο της δύναμης της τριβής, που εφαρμόστηκε από το φρένο στη στεφάνη.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της κάθε ακτίνας ως προς κάθετο σ' αυτήν άξονα διερχόμενο απ' το άκρο της: $I_a = \frac{1}{3}ML^2$, η ροπή αδράνειάς ολόκληρου του τροχού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από τον άξονά του είναι $I_{\tau\rho} = 0,8\ kgm^2$.

Λύση

α) Θεωρούμε ότι η στεφάνη αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, ..., των οποίων το άθροισμα ισούται με M. Επειδή το πάχος της στεφάνης είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα της R, όλες οι στοιχειώδεις μάζες απέχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας:

$I_\sigma = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... = m_1 R^2 + m_2 R^2 + ... = (m_1 + m_2 + ...)R^2 = MR^2$ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε:

$$I_\sigma = 3 \cdot 0,5^2 kgm^2 \Rightarrow I_\sigma = 0,75\ kgm^2.$$

β) Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας της στεφάνης και της ολικής ροπής αδράνειας των ακτινών: $I_{\tau\rho} = I_\sigma + I_{a,o\lambda}$. Άρα η ολική ροπή αδράνειας των ακτινών είναι:

$$I_{\tau\rho} = I_\sigma + I_{a,o\lambda} \Rightarrow I_{a,o\lambda} = I_{\tau\rho} - I_\sigma = (0,8 - 0,75) kgm^2 \Rightarrow I_{a,o\lambda} = 5 \cdot 10^{-2}\ kgm^2.$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ροπή αδράνειας της κάθε ακτίνας ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα διερχόμενο απ' το άκρο της είναι:

$$I_a = \frac{1}{3}mL^2 \Rightarrow I_a = \frac{1}{3}0,02\cdot 0,5^2\,kgm^2 = \frac{1}{6}10^{-2}\,kgm^2.$$

Για το πλήθος N των ακτίνων ισχύει:

$$N = \frac{I_{\alpha,o\lambda}}{I_a} \Rightarrow N = \frac{0,05}{\frac{1}{6}10^{-2}}\frac{kgm^2}{kgm^2\,/\,\text{ακτίνα}} \Rightarrow N = 30\ \text{ακτίνες}.$$

γ) Από τη χρονική στιγμή t=0 και μέχρι να ακινητοποιηθεί ο τροχός, τη χρονική στιγμή t_1=2 s, ο τροχός εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Έτσι από τη χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας, θα έχουμε:

$$0 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu}t_1 \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{\omega_0}{t_1} \overset{S.I.}{\Rightarrow} a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{100}{2}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -50\frac{rad}{s^2}.$$ Δηλαδή ο τροχός επιβραδύνεται ομαλά με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου: $|a_{\gamma\omega\nu}| = 50\frac{rad}{s^2}$.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη γωνία στροφής μέχρι να ακινητοποιηθεί αντικαθιστώντας στη χρονική της εξίσωση:

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2}t_1^2 \Rightarrow \theta_1 = (100\cdot 2 - \frac{50}{2}2^2)rad \Rightarrow \theta_1 = 100\ rad.$$ Έτσι ο αριθμός περιστροφών είναι: $N = \frac{\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{50}{\pi}$ περιστροφές

δ) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, για να βρούμε το μέτρο της ροπής της τριβής στη στεφάνη:

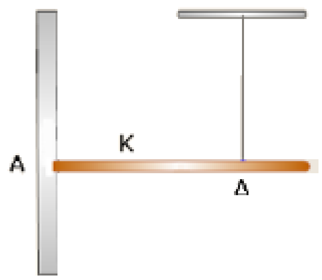
$$|\Sigma\tau| = I_{\tau\rho}\cdot a_{\gamma\omega\nu} \overset{S.I.}{\Rightarrow} |\tau_T| = 0,8\cdot 50Nm = 40\ Nm.$$

Ο μοχλοβραχίονας της τριβής είναι ίσος με την ακτίνα της στεφάνης, οπότε το μέτρο της τριβής είναι ίσο με:

$$|\tau_T| = T\cdot R \Rightarrow T = \frac{|\tau_T|}{R} = \frac{40\ Nm}{0,5\ m} \Rightarrow T = 80\ N.$$

Άσκηση 8

Μια ομογενής ράβδος, μάζας $M = 3kg$ και μήκους $L = 2m$, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, στηριζόμενη με το αριστερό άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση και δεμένη στο σημείο Δ στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος, του οποίου το πάνω άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Αν η τάση του νήματος είναι $T = 20\ N$, να υπολογίσετε:



α) την απόσταση του σημείου Δ, από το άκρο Α.

β) τη δύναμη στήριξης από την άρθρωση.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα, οπότε η ράβδος πέφτει στρεφόμενη γύρω από την άρθρωση. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σ' αυτήν άξονα διερχόμενο απ' το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή:

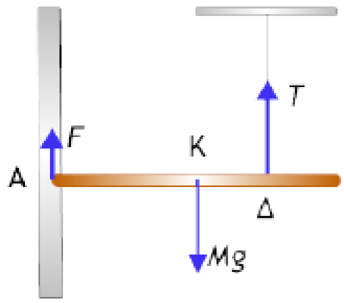
γ) της εκκίνησης.

δ) την οποία η ράβδος σχηματίζει με την αρχική θέση γωνία φ, τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$.

Λύση

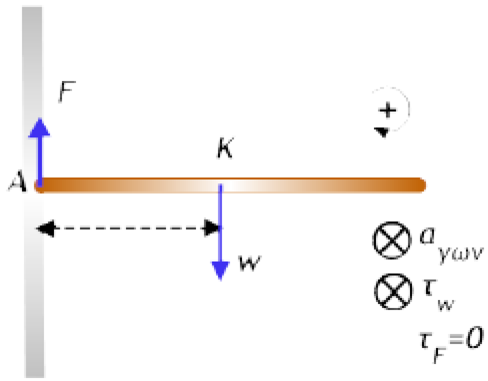
α) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της w=Mg στο κέντρο μάζας της Κ, η τάση του νήματος στο Δ και η δύναμη F από τον άρθρωση στο Α. Επειδή το βάρος και η τάση είναι κατακόρυφες, εφόσον ισορροπεί η ράβδος και η δύναμη F θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση (έτσι ώστε $\Sigma F_x=0$).



Εφόσον η ράβδος ισορροπεί στροφικά, θα ισχύει $\Sigma\tau_{(A)}=0$. Ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι $\frac{L}{2}$, και της τάσης Τ είναι x_Δ, οπότε θεωρώντας θετική φορά των ροπών την προς τα έξω, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T\cdot x_\Delta - Mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow x_\Delta = \frac{MgL}{2T} \Rightarrow x_\Delta = \frac{30}{20} m \Rightarrow x_\Delta = 1,5\ m.$$

β) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη Ισορροπίας για τις δυνάμεις στον κατακόρυφο άξονα:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T - Mg = 0 \Rightarrow F = Mg - T \Rightarrow F = (30-20)N \Rightarrow F = 10\ N.$$

γ) Τη στιγμή, που κόβεται το νήμα η ράβδος αρχίζει να εκτελεί στροφική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο με κέντρο την άρθρωση.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κάθετο άξονα περιστροφής, που περνά από το Α, θα υπολογιστεί από το Θεώρημα του Steiner: $I_A = I_{cm} + Md^2$, όπου d είναι η απόσταση του άκρου από το cm, δηλαδή $d = \frac{L}{2}$. Συνεπώς:

$$I_A = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)ML^2 = \frac{4}{12}ML^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{3}ML^2.$$

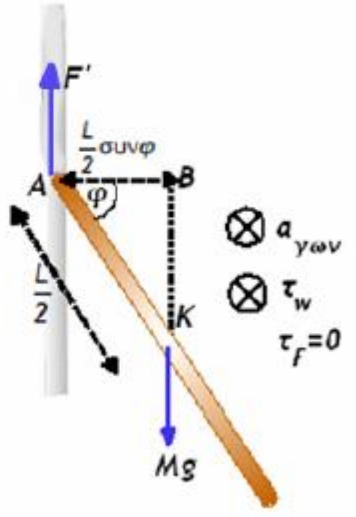
Οι δυνάμεις, που της ασκούνται είναι τώρα μόνο το βάρος της w=Mg και η δύναμη F' από τον άρθρωση, που τώρα πια έχει τυχαία διεύθυνση. Απ' αυτές, ροπή ως προς το Α κάνει μόνο το βάρος, το οποίο όμως έχει διαρκώς μεταβαλλόμενο μοχλοβραχίονα. Έτσι σε κάθε θέση θα έχουμε και διαφορετική επιτάχυνση, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης.

Στη θέση εκκίνησης, θεωρώντας θετική φορά την προς τα μέσα, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(A)} = I_A a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2} = \frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{30}{4}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 7,5\frac{rad}{s^2}.$$

δ) Απ' το σχήμα φαίνεται ότι όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντιο, ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι: $d=\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Έτσι εφαρμόζοντας και σ' αυτή τη θέση το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, έχουμε:



$$\Sigma\tau'_{(A)}=I_A a'_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow \cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{3}\cancel{M}L^2 a'_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu}=\frac{3g\sigma\upsilon\nu\varphi}{2L}\Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu}=\frac{30\cdot 0{,}8}{4}\frac{rad}{s^2}\Rightarrow$$

$$a'_{\gamma\omega\nu}=6\frac{rad}{s^2}.$$

Άσκηση 9

Ομογενής λεπτή ράβδος μήκους $L=1{,}5m$ και μάζας $M=4kg$ μπορεί να στραφεί χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο σε αυτήν στο άκρο της Ο. Ένα σωματίδιο, μάζας $m=2kg$, είναι στερεωμένο στο άλλο άκρο της Α. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνεται ελεύθερη, οπότε περιστρέφεται ως προς τον άξονα στο Ο σε κατακόρυφο επίπεδο.

Α. Να υπολογίσετε:

α) την ολική ροπή αδράνειας του συστήματος.

β) το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, ως προς τον άξονα στο Ο τη χρονική στιγμή t_1, που η ράβδος έχει διαγράψει γωνία φ, τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu\varphi=0{,}5$.

γ) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1.

Β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση του συνημιτόνου της γωνίας φ, που σχηματίζει η ράβδος με τον οριζόντιο ημιάξονα Οx, κατά την περιστροφή της από την αρχική οριζόντια θέση έως την κατακόρυφη θέση.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση

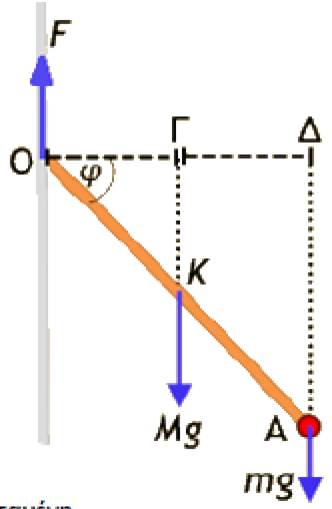
Α.

α) Η ράβδος στρέφεται γύρω από άξονα, κάθετο σ' αυτήν, που περνά από το άκρο Ο, που απέχει από το κέντρο μάζας της απόσταση $d=\frac{L}{2}$, οπότε η ροπή αδράνειας της ως προς αυτόν τον άξονα θα υπολογιστεί από το Θεώρημα του Steiner: $I_O=I_{cm}+M(\frac{L}{2})^2=\frac{1}{12}ML^2+M\frac{L^2}{4}\Rightarrow I_O=\frac{1}{3}ML^2$.

Η ροπή αδράνειας του σωματιδίου, ως προς τον ίδιο άξονα είναι: $I_m=m\cdot L^2$, καθώς απέχει απ' αυτόν απόσταση L.

Το σύστημα αποτελείται από τη ράβδο και το σωματίδιο, οπότε η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ροπών αδράνειας:

$$I_{ολ} = I_O + I_m = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 \Rightarrow I_{ολ} = (\frac{M}{3} + m)L^2 \Rightarrow I_{ολ} = 7,5\ kgm^2.$$



β) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής της, το βάρος της Mg στο κέντρο μάζας της K και το βάρος του σφαιριδίου mg στο άκρο της A.

Η F δε δημιουργεί ροπή, διότι διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.

Απ' το σχήμα βλέπουμε ότι ο μοχλοβραχίονας του βάρους της ράβδου είναι ο $(ΟΓ) = (ΟΚ)συνφ = \frac{L}{2}συνφ$ και ο μοχλοβραχίονας του βάρους του σφαιριδίου είναι ο $(ΟΔ) = (ΟΑ)συνφ = Lσυνφ$.

Θεωρούμε για τις ροπές θετική φορά την προς τα μέσα και υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα στο O:

$$Στ_{(O)} = τ_{Mg} + τ_{mg} = Mg(ΟΓ) + mg(ΟΔ) \Rightarrow Στ_{(O)} = Mg\frac{L}{2}συνφ + mgLσυνφ = gLσυνφ(\frac{M}{2} + m)$$

και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε:

$Στ_{(O)} = 10 \cdot 1,5 \cdot (2+2) \cdot συνφ \Rightarrow Στ_{(O)} = 60συνφ\ (S.I.)$ (1). Στην εκφώνηση δίνεται ότι συνφ=0,5, οπότε: $Στ_{(O)} = 60 \cdot 0,5 Nm = 30\ Nm$.

γ) Για να βρούμε τη γωνιακή επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1 εφαρμόζουμε στη θέση αυτή το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης:

$$Στ_{(O)} = I_{ολ} \cdot a_{γων} \Rightarrow a_{γων} = \frac{Στ_{(O)}}{I_{ολ}} \Rightarrow a_{γων} = \frac{30}{7,5}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{γων} = 4\frac{rad}{s^2}.$$

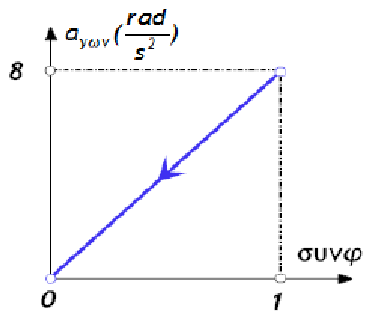
Β. Η ζητούμενη γραφική παράσταση προκύπτει αν υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση σε μια τυχαία θέση, εφαρμόζοντας στη θέση αυτή το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης.

$$a_{γων} = \frac{Στ_{(O)}}{I_{ολ}} \overset{(1)}{\Rightarrow} a_{γων} = \frac{60συνφ}{7,5} \Rightarrow a_{γων} = 8 \cdot συνφ\ (S.I.)\ (2).$$

Η σχέση (2) μας δείχνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι ανάλογη του συνφ, οπότε το διάγραμμα $a_{γων}$ - συνφ είναι ευθεία, που περνά από την αρχή των αξόνων.

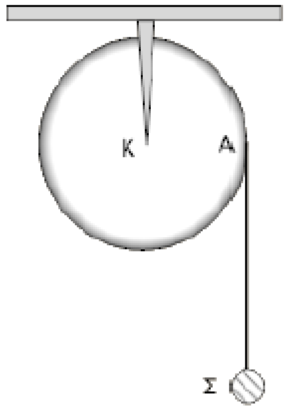
Στην αρχική οριζόντια θέση είναι: $συνφ_{αρχ} = συν0 = 1$, οπότε: $a_{γων} = 8\frac{rad}{s^2}$ και στην κατακόρυφη τελική θέση είναι: $συνφ_{τελ} = συν\frac{π}{2} = 0$, οπότε: $a_{γων} = 0\frac{rad}{s^2}$.

Με βάση τα παραπάνω, η γραφική παράσταση φαίνεται στο διάγραμμα.



Άσκηση 10

Μια ομογενής τροχαλία - δίσκος, μάζας Μ και ακτίνας $R = 0,25\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της χωρίς τριβές. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχει τυλιχθεί αβαρές μη εκτατό νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχει δεθεί σώμα Σ μάζας $m = 1\text{kg}$. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί, οπότε διαπιστώνουμε ότι μετά από χρόνο $t_1 = 0,5\text{s}$ έχει ξετυλιχθεί σχοινί μήκους $L = 0,25\text{m}$. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της επιτάχυνσης α του σώματος.

β) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_{γων}$ της τροχαλίας.

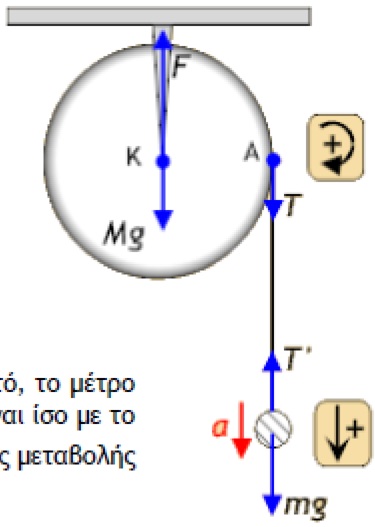
γ) τη ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας της και τη μάζα Μ της τροχαλίας.

δ) το μέτρο της δύναμης F, που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της: $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται από την τροχαλία είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος, άρα $L = x_Σ = 0,25\ \text{m}$.



Το σώμα Σ εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε εφαρμόζοντας τη χρονική εξίσωση για τη μετατόπισή του, έχουμε:

$$x_Σ = \frac{α}{2}t_1^2 \Rightarrow α = \frac{2x_Σ}{t_1^2} \Rightarrow α = \frac{2 \cdot 0,25}{0,5^2}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow α = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

β) Επειδή το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας και είναι μη εκτατό, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $υ_R$ των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας $υ_Σ$ του σώματος: $υ_R = υ_Σ$. Εξισώνοντας και τους ρυθμούς μεταβολής τους έχουμε:

$$\frac{dυ_Σ}{dt} = \frac{dυ_R}{dt} \Rightarrow α = \frac{d(ωR)}{dt} \Rightarrow α = \frac{dω}{dt}R \Rightarrow α = a_{γων}R \Rightarrow a_{γων} = \frac{α}{R} \Rightarrow a_{γων} = \frac{2}{0,25}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 8\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

γ) Το σώμα Σ δέχεται το βάρος του mg και την τάση T΄ του νήματος. Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνησή του, με θετική φορά την προς τα κάτω, και έχουμε:

$$ΣF = mα \Rightarrow mg - T' = mα \Rightarrow T' = m(g-α) \overset{S.I.}{\Rightarrow} T' = 8\ \text{N}.$$

Το αβαρές νήμα ασκεί στην τροχαλία και στο Σ ίσου μέτρου τάσεις, άρα: $T = T' = 8\ \text{N}$.

Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της Mg, η τάση T του νήματος και η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής. Απ' αυτές ροπή κάνει μόνο η T, διότι το βάρος Mg και η F διέρχονται από τον άξονα περιστροφής.

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για την τροχαλία, με θετική φορά την προς τα μέσα, έχουμε:

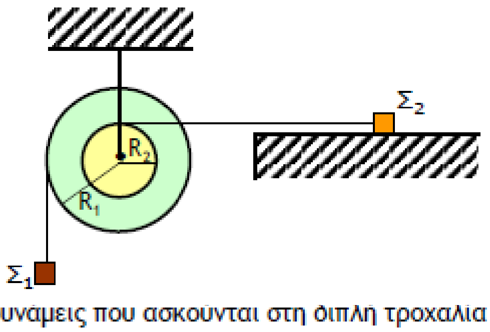
$$\Sigma\tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I_{cm} = \frac{\tau_T}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{T \cdot R}{a_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow I_{cm} = \frac{\cancel{8} \cdot 0,25}{\cancel{8}} \text{kgm}^2 = 0,25 \text{ kgm}^2 .$$

Απ' την εκφώνηση δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας: $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα της: $M = \frac{2I_{cm}}{R^2} \Rightarrow M = \frac{2 \cdot 0,25}{0,25^2} \text{kg} \Rightarrow M = 8 \text{ kg}$.

δ) Εφαρμόζουμε για την τροχαλία τη Συνθήκη μεταφορικής Ισορροπίας, επειδή δεν μετατοπίζεται: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - Mg - T = 0 \Rightarrow F = Mg + T \Rightarrow F = (8 \cdot 10 + 8)\text{N} \Rightarrow F = 88 \text{ N}$.

Άσκηση 11

Ένα σύστημα διπλής τροχαλίας αποτελείται από δύο ομογενείς λεπτούς δίσκους Α και Β με ακτίνες $R_1 = 0,2 \text{ m}$ και $R_2 = 0,1 \text{ m}$ αντίστοιχα. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ο άξονας αυτός, αποτελεί μέρος άρθρωσης, με την οποία το σύστημα είναι στερεωμένο ακλόνητα στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από τους δίσκους είναι τυλιγμένα αβαρή νήματα, τα οποία δεν ολισθαίνουν πάνω στους δίσκους. Στις ελεύθερες άκρες των νημάτων των τροχαλιών Α και Β έχουν δεθεί σώματα Σ_1, Σ_2, με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.



α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία και στα σώματα Σ_1, Σ_2.

β) Να γράψετε και να εφαρμόσετε το θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης για την τροχαλία και το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση των σωμάτων Σ_1, Σ_2 (Δε ζητείται αριθμητική αντικατάσταση).

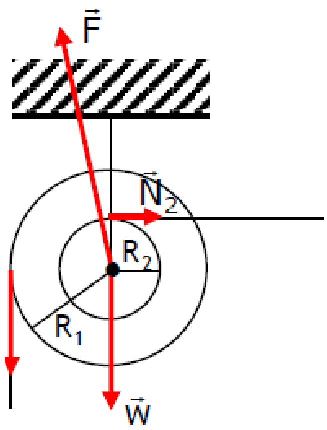
γ) Να βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας με τις μεταφορικές επιταχύνσεις των σωμάτων Σ_1, Σ_2.

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ της διπλής τροχαλίας και να δείξετε την κατεύθυνσή της στο σχήμα.

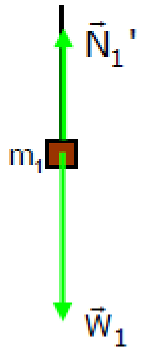
Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 0,01 \text{ kgm}^2$. Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Λύση

α) Στη διπλή τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



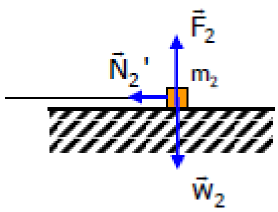
- Οι δυνάμεις $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ ασκούνται από τα νήματα στη διπλή τροχαλία.
- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στη διπλή τροχαλία.
- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από την άρθρωση στη διπλή τροχαλία.
  Η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να σχεδιαστεί πλάγια, όπως φαίνεται στο σχήμα, διότι:
  - Λόγω της (2), η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να έχει οριζόντια συνιστώσα, τέτοια που να εξουδετερώνει τη δύναμη $\vec{N}_2$.
  - Λόγω της (3), η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να έχει κατακόρυφη συνιστώσα, τέτοια που να εξουδετερώνει τις δυνάμεις $\vec{N}_1$ και $\vec{w}$.



Στο σώμα Σ_1 ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:

- Η δύναμη $\vec{N}_1$' ασκείται από το νήμα στο σώμα Σ_1.
- Η δύναμη $\vec{w}_1$ ασκείται από τη Γη στο σώμα Σ_1.

Στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{N}_2$' ασκείται από το νήμα στο σώμα Σ_2.
- Η δύναμη $\vec{w}_2$ ασκείται από τη Γη στο σώμα Σ_2.
- Η δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται από το έδαφος στο σώμα Σ_2.

Επειδή για το σώμα Σ_2 ισχύει ότι $\Sigma\vec{F}_y = \vec{0}$, οι δυνάμεις $\vec{w}_2$, $\vec{F}_2$ εξουδετερώνονται, επομένως θα μελετήσουμε μόνο την επίδραση της $\vec{N}_2$'.

Επειδή τα νήματα είναι αβαρή έχουμε:

$\vec{N}_1 = -\vec{N}_1' \Rightarrow N_1 = N_1'$ (6)

$\vec{N}_2 = -\vec{N}_2' \Rightarrow N_2 = N_2'$ (7)

β) Για τη χρήση της σχέσης (1), θέτουμε θετική την αριστερόστροφη φορά και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Οι ροπές υπολογίζονται ως προς το σταθερό άξονα περιστροφής στο κέντρο της διπλής τροχαλίας:

Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$\tau_1 = +N_1 \cdot R_1$

$\tau_2 = -N_2 \cdot R_2$

$\tau_w = 0$

$\tau_F = 0$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$\tau_1 + \tau_2 + \tau_w + \tau_F = I \cdot a_\gamma \;\Rightarrow\; N_1 \cdot R_1 - N_2 \cdot R_2 = I \cdot a_\gamma$ (8)

Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση των m_1 και m_2

Από τη σχέση (4), θέτοντας θετική την προς τα κάτω φορά, έχουμε:

$\Sigma F_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \;\Rightarrow\; w_1 - N_1' = m_1 \cdot \alpha_1$

και λόγω της (6):

$w_1 - N_1 = m_1 \cdot \alpha_1$ (9)

Από τη σχέση (5), θέτοντας θετική την προς τ' αριστερά φορά, έχουμε:

$\Sigma F_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \;\Rightarrow\; N_2' = m_2 \cdot \alpha_2$

και λόγω της (7):

$N_2 = m_2 \cdot \alpha_2$ (10)

γ) Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν πάνω στους δίσκους, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρεια ενός εκ των δύο δίσκων της διπλής τροχαλίας σε χρόνο dt, θα είναι ίσο με την απόσταση dx κατά την οποία έχει τυλιχθεί ή ξετυλιχθεί το αντίστοιχο νήμα, άρα και με την απόσταση dx κατά την οποία έχει μετατοπισθεί το αντίστοιχο σώμα. Επομένως:

$$dx = ds = d\theta \cdot R \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \;\Rightarrow\; \upsilon = \omega \cdot R \;\Rightarrow\; \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \;\Rightarrow\; \alpha = a_\gamma \cdot R$$

Για καθένα από τα δύο σώματα, η σχέση αυτή γράφεται (S.I.):

$\alpha_1 = a_\gamma \cdot R_1 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 0,2 \cdot a_\gamma$ (11)

$\alpha_2 = a_\gamma \cdot R_2 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 0,1 \cdot a_\gamma$ (12)

δ) Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων: (8), (9) ,(10), (11) και (12). Από την (8), με αντικατάσταση τιμών, έχουμε (S.I.):

$N_1 \cdot 0,2 - N_2 \cdot 0,1 + 0 + 0 = 0,01 \cdot a_\gamma \;\Rightarrow\; 0,2 \cdot N_1 - 0,1 \cdot N_2 = 0,01 \cdot a_\gamma$ (13)

Από τις (9) και (11), με αντικατάσταση τιμών, έχουμε:

$N_1 = m_1 g - m_1 \cdot \alpha_1 \;\Rightarrow\; N_1 = 20 - 2 \cdot 0,2 \cdot a_\gamma \;\Rightarrow\; N_1 = 20 - 0,4 \cdot a_\gamma$ (14)

Από τις (10) και (12), με αντικατάσταση τιμών, έχουμε (S.I.):

$N_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \;\Rightarrow\; N_2 = 0,1 \cdot \alpha_\gamma$ (15)

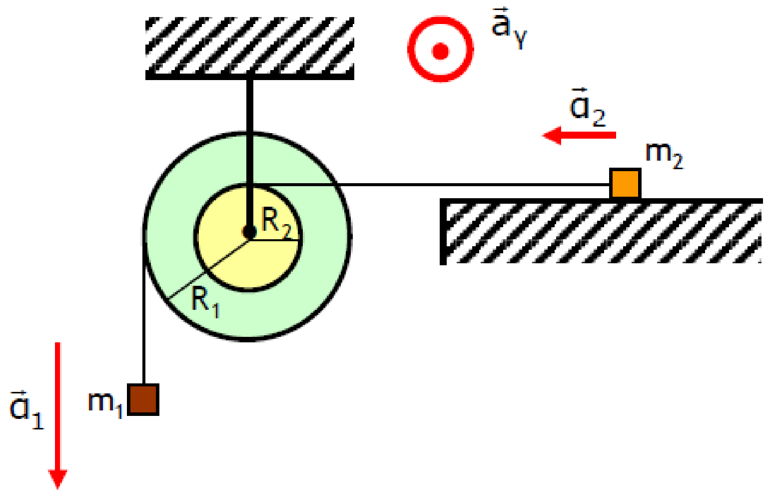
Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (14) και(15) στη (13) έχουμε (S.I.):

$$0,2\cdot(20-0,4\cdot a_\gamma)-0,1\cdot 0,1\cdot a_\gamma=0,01\cdot a_\gamma \quad\Rightarrow$$

$$4-0,08\cdot a_\gamma-0,01\cdot a_\gamma=0,01\cdot a_\gamma \quad\Rightarrow\quad 4-0,09\cdot a_\gamma=0,01\cdot a_\gamma \quad\Rightarrow$$

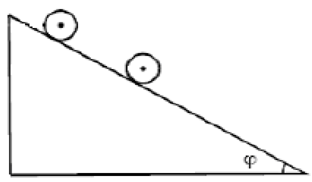
$$4=0,1\cdot a_\gamma \quad\Rightarrow\quad a_\gamma=+40\frac{rad}{s^2}$$

Το θετικό πρόσημο στην αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης σημαίνει ότι το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης είναι πάνω στον άξονα περιστροφής με την κατεύθυνση του σχήματος (σημειώνεται παράπλευρα χάριν σαφήνειας). Στο σχήμα φαίνονται και οι κατευθύνσεις των $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\alpha}_2$:



Άσκηση 12

Ένας ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας $M=2\,kg$ και ακτίνας $R=0,2\,m$ αφήνεται να κυλίσει κατά μήκος ενός πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ, με $ημφ=0,6$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, να γράψετε και να εφαρμόσετε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση και το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη Στροφική Κίνηση του κυλίνδρου (Δε ζητείται αριθμητική αντικατάσταση).

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου καθώς αυτός κυλίεται.

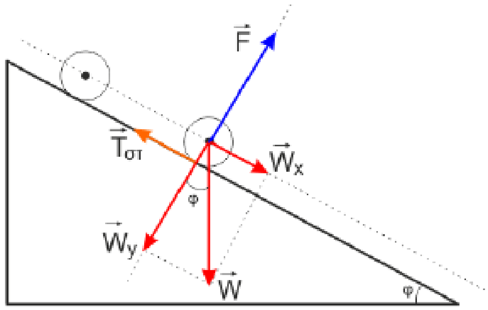
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής που ασκείται στον κύλινδρο από το πλάγιο επίπεδο.

δ) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου όταν το κέντρο μάζας του μετατοπιστεί 8m από το σημείο που αυτός αφέθηκε ελεύθερος.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=\frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\frac{m}{s^2}$.

Λύση

α) Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στον κύλινδρο και αναλύεται στις $\vec{w}_x$ και $\vec{w}_y$.
- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από το δάπεδο στον κύλινδρο και είναι κάθετη στο δάπεδο.
- Η δύναμη $\vec{T}_{στ}$ ασκείται από το δάπεδο στον κύλινδρο και είναι παράλληλη στο δάπεδο.

<u>Μεταφορική κίνηση</u>

Θεωρώντας θετική τη φορά κίνησης (προς τα κάτω), η σχέση (1) γράφεται:

$w_x - T_{στ} = M\cdot\alpha_{cm}$ (3)

<u>Στροφική κίνηση</u>

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής (δεξιόστροφη), για τις ροπές των δυνάμεων έχουμε:

$\tau_w = 0$

$\tau_F = 0$

$\tau_{T_{στ}} = T_{στ}\cdot R$

Επομένως, η σχέση (2) γράφεται:

$\tau_w + \tau_F + \tau_{T_{στ}} = I\cdot a_γ \Rightarrow T_{στ}\cdot R = I\cdot a_γ$ (4)

β) Επίσης, επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύουν (S.I.):

$\upsilon_{cm} = \omega\cdot R \Rightarrow \upsilon_{cm} = 0,2\cdot\omega$ (5)

$\alpha_{cm} = a_γ\cdot R \Rightarrow \alpha_{cm} = 0,2\cdot a_γ$ (6)

Από την ανάλυση του $\vec{w}$ έχουμε:

$w_x = w\cdot ημφ \Rightarrow w_x = Mg\cdot ημφ \Rightarrow w_x = 12\,N$ (7)

Επίσης, για τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου έχουμε:

$I=\frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = 0,04\,kgm^2$ (8)

Θέτουμε τις (6) και (7) στην (3) και λύνουμε (S.I.):

$w_x - T_{στ} = M\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow 12 - T_{στ} = 2\cdot 0,2\cdot a_γ \Rightarrow T_{στ} = 12 - 0,4\cdot a_γ$ (9)

Θέτουμε τις (8) και (9) στην (4) και λύνουμε (S.I.):

$T_{στ}\cdot R = I\cdot a_γ \Rightarrow (12-0,4\cdot a_γ)\cdot 0,2 = 0,04\cdot a_γ \Rightarrow 2,4 - 0,08\cdot a_γ = 0,04\cdot a_γ \Rightarrow$

$0,12\cdot a_γ = 2,4 \Rightarrow a_γ = 20\frac{rad}{s^2}$.

Με αντικατάσταση στην (6) έχουμε:

$\alpha_{cm} = 4\dfrac{m}{s^2}$.

γ) Θέτουμε την τιμή $a_\gamma = 20\dfrac{rad}{s^2}$ στην (9) και έχουμε:

$T_{\sigma\tau} = 4\,N$.

δ) Επειδή ο κύλινδρος, στη μεταφορική του κίνηση, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, θα έχουμε (S.I.):

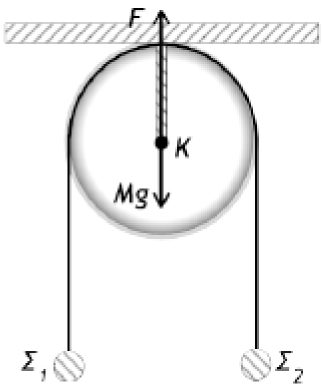
$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t \;\Rightarrow\; \upsilon_{cm} = 4t \quad (10)$

$x_{cm} = \dfrac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \;\Rightarrow\; 8 = 2t^2 \;\Rightarrow\; t = 2\,s$

και με αντικατάσταση στην (10) έχουμε $\upsilon_{cm} = 8\dfrac{m}{s}$ και λόγω της (5):

$\omega = 40\dfrac{rad}{s}$.

Άσκηση 13



Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, με μάζες m_1=3 Kg και m_2=1 Kg αντίστοιχα, συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα, που είναι τυλιγμένο σε ομογενή δίσκο τροχαλίας, ακτίνας R=0,25 m και μάζας M=2 Kg. Τα σώματα συγκρατούνται αρχικά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή t=0, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, οπότε αρχίζει περιστρέφεται χωρίς το νήμα να ολισθαίνει στην τροχαλία.

α) Να βρείτε αν το σύστημα θα περιστραφεί δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.

Β) Να υπολογίσετε τα μέτρα της επιτάχυνσης των σωμάτων.

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των τάσεων, που ασκεί το νήμα στα δύο σώματα.

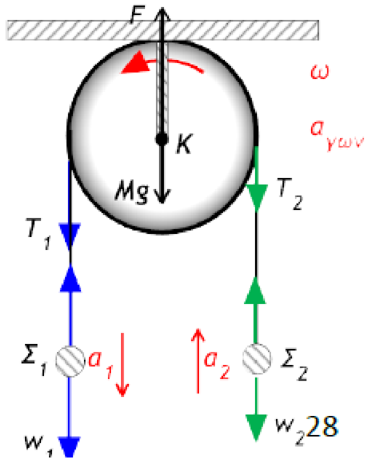
δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης στήριξης της τροχαλίας από τον άξονα.

ε) Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται από την τροχαλία, σε χρόνο $t = 2\,s$.

Δίνονται $g = 10\,m/s^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της: $I_{cm} = \dfrac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) Για να βρούμε προς τα πού θα στραφεί η τροχαλία υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών, των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα τροχαλία - νήμα - σώματα. Οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη των σωμάτων $w_1=m_1g$ και $w_2=m_2g$, το βάρος της τροχαλίας $w = Mg$ και η δύναμη στήριξης F από τον άξονα. Απ' αυτές ροπή προκαλούν μόνο τα βάρη των σωμάτων, καθώς το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη στήριξης ασκούνται στον άξονα, άρα δεν προκαλούν ροπή.



Έτσι, θεωρώντας θετική φορά την αριστερόστροφη, έχουμε θετική ροπή για το w_1 και αρνητική ροπή για το w_2, οπότε το άθροισμα των ροπών είναι:

$$\Sigma\tau = m_1 g \cdot R - m_2 g \cdot R = gR(m_1 - m_2) \overset{S.I.}{\Rightarrow} \Sigma\tau = 10 \cdot 0,25 \cdot 2\text{Nm} = +5\ \text{Nm}.$$

Εφόσον η Στ έχει θετικό πρόσημο, το σύστημα θα περιστραφεί στην κατά σύμβαση θετική φορά, δηλαδή αριστερόστροφα.

β) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για τη Στροφική κίνηση της τροχαλίας, λαμβάνοντας υπόψη ότι ροπή προκαλούν μόνο οι τάσεις του νήματος T_1 και T_2 (η τάση του νήματος έχει διαφορετική τιμή στην είσοδο και στην έξοδό του από την τροχαλία: $T_1 \neq T_2$).

$$\Sigma\tau = I_{cm} \cdot a_{γων} \Rightarrow T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = I_{cm} \cdot a_{γων} \Rightarrow (T_1 - T_2) \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} M R^{\cancel{2}} \cdot a_{γων} \Rightarrow$$
$$T_1 - T_2 = \frac{M}{2} R \cdot a_{γων}\ (1).$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη Μεταφορική κίνηση κάθε σώματος στον κατακόρυφο άξονα (θεωρούμε ως θετική φορά, αυτήν της κίνησης κάθε σώματος, δηλαδή την προς τα κάτω για το $Σ_1$ και την προς τα πάνω για το $Σ_2$):

Για το $Σ_1$: $\Sigma F = m_1 \alpha_1 \Rightarrow m_1 g - T_1' = m_1 \alpha_1$ (2).

Για το $Σ_2$: $\Sigma F = m_2 \alpha_2 \Rightarrow T_2' - m_2 g = m_2 \alpha_2$ (3).

Γνωρίζουμε ότι ένα τεντωμένο αβαρές νήμα ασκεί ίσου μέτρου τάσεις στα σώματα, που «ενώνει», άρα: $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$ (4).

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία και παραμένει τεντωμένο, όλα τα σημεία του νήματος έχουν κοινή ταχύτητα, οπότε: $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_{τροχ}$, όπου $\upsilon_{τροχ} = \omega R$ είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, που έρχονται σε επαφή με το νήμα. Φυσικά θα είναι ίσοι και οι ρυθμοί μεταβολής τους, οπότε:

$\frac{d\upsilon_1}{dt}=\frac{d\upsilon_2}{dt}=\frac{d\upsilon_{\tau\rho o\chi}}{dt}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\frac{d\omega}{dt}R\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=a_{\gamma\omega\nu}R$. Ονομάζουμε αυτή την κοινή επιτάχυνση α, δηλαδή: $\alpha_1=\alpha_2=a_{\gamma\omega\nu}R=\alpha$ (5).

Επιλύουμε το σύστημα ως εξής:

Από τις (1) και (5) προκύπτει: $T_1-T_2=\frac{M}{2}\alpha$ (6).

Από τις (2), (4) και (5) προκύπτει: $m_1g\text{-}T_1=m_1\alpha$ (7).

Από τις (3), (4) και (5) προκύπτει: $T_2\text{-}m_2g=m_2\alpha$ (8).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (6), (7) και (8), οπότε έχουμε: $\cancel{T_1}-\cancel{T_2}+m_1g-\cancel{T_1}-m_2g+\cancel{T_2}=m_1\alpha+m_2\alpha+\frac{M}{2}\alpha\Rightarrow m_1g-m_2g=(m_1+m_2+\frac{M}{2})\alpha$ και λύνοντας ως προς την κοινή επιτάχυνση βρίσκουμε τελικά: $\alpha=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{M}{2}}$.

Αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $\alpha=\frac{(3-1)10}{3+1+\frac{2}{2}}\frac{m}{s^2}\Rightarrow \alpha=4\frac{m}{s^2}$.

γ) Για να βρούμε τις τάσεις T_1 και T_2 αξιοποιούμε τις (7) και (8). Έτσι:

Από την (7): $T_1=m_1g-m_1\alpha=m_1(g-\alpha)\overset{S.I.}{\Rightarrow}T_1=3\cdot(10-4)N\Rightarrow T_1=18\ N$ και

από την (8): $T_2=m_2\alpha+m_2g=m_2(g+\alpha)\overset{S.I.}{\Rightarrow}T_1=1\cdot(10+4)N\Rightarrow T_2=14\ N$.

δ) Η δύναμη στήριξης από τον άξονα, υπολογίζεται αν εφαρμόζουμε για την τροχαλία τη συνθήκη ισορροπίας, επειδή ακινητεί μεταφορικά:

$$\Sigma F_y=0\Rightarrow F-Mg-T_1-T_2=0\Rightarrow F=Mg+T_1+T_2\overset{S.I.}{\Rightarrow}F=(2\cdot10+18+14)N\Rightarrow F=52\ N.$$

ε) Το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται, σε χρόνο t, ισούται με το τόξο που διαγράφουν τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας στον ίδιο χρόνο: $L=\widehat{s}$.

Απ' τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου δίνεται από τη σχέση: $\widehat{s}=R\cdot\theta$, όπου θ η γωνία σε rad, που διαγράφει η τροχαλία. Δηλαδή: $L=R\cdot\theta$ (9).

Η γωνία θ υπολογίζεται από το νόμο της γωνιακής μετατόπισης, λαμβάνοντας υπόψη ότι η στροφική κίνηση της τροχαλίας είναι Ομαλά Επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα, δηλαδή: $\theta=\frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2}t^2$ (10).

Η γωνιακή επιτάχυνση υπολογίζεται απ' την (5): $a_{\gamma\omega\nu}=\frac{\alpha}{R}=\frac{4}{0,25}\frac{rad}{s^2}\Rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=16\frac{rad}{s^2}$.

Έτσι η (10) δίνει: $\theta=\frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2}t^2=\frac{16}{2}2^2rad\Rightarrow\theta=32\ rad$, και τελικά απ' την (9) βρίσκουμε:

$L=R\cdot\theta=0,25\cdot32m\Rightarrow L=8\ m$.

Άσκηση 14

Σφαίρα ακτίνας R και μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\varphi = 30^0$, με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\mathrm{m/s}$ και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας.

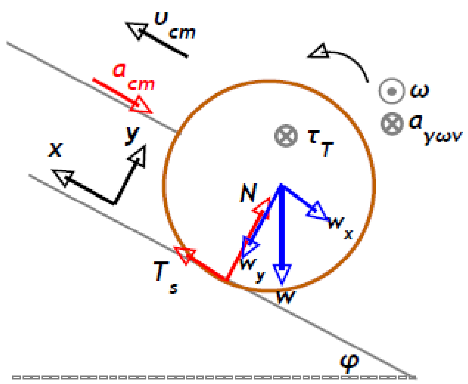
β) Το μέτρο της στατικής τριβής, αν η μάζα της σφαίρας είναι $m = 1,4\mathrm{kg}$.

γ) τη χρονική διάρκεια και τη μετατόπιση της σφαίρας μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

δ) για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής, η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνονται για τη σφαίρα: $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2 και $\sigma\upsilon\nu 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση



α) Στη σφαίρα κατά την άνοδό της ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος $w = mg$ στο κέντρο μάζας της σφαίρας, η κάθετη αντίδραση N στο σημείο επαφής σφαίρας-επιπέδου και η στατική τριβή T_s στο σημείο επαφής σφαίρας-επιπέδου, με διεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο.

Εφόσον οι δυνάμεις N και w δεν προκαλούν ροπή ως προς το cm της σφαίρας, η φορά της στατικής τριβής T_s θα είναι προς τα πάνω, έτσι ώστε η ροπή της να προκαλεί τη στροφική επιβράδυνση της σφαίρας, δηλαδή θα πρέπει να είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu}$ της σφαίρας.

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, με τον άξονα Ox παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και θετική φορά την προς τα πάνω. Αναλύουμε το βάρος mg σε δύο συνιστώσες: την $w_x = mg\eta\mu\varphi$ στον Ox και την $w_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ στον Oy.

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής σε κάθε άξονα.

Στον Ox κινείται ομαλά επιβραδυνόμενα, οπότε με βάση το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση:

$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_s - mg\eta\mu\varphi = -m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_s = mg\eta\mu\varphi - m\alpha_{cm}$ (1).

Ακολουθώντας τη σύμβαση του Σχολικού βιβλίου, θεωρούμε θετική φορά την προς τα έξω, οπότε τα διανύσματα της ροπής της στατικής τριβής και της γωνιακής επιτάχυνσης, έχουν αρνητική φορά. Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της cm, οπότε:

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!! Η ροπή της $T_{στ}$ έχει αρνητική αλγεβρική τιμή γιατί είναι επιβραδύνουσα ροπή

Η ροπή μιας δύναμης έχει θετική αλγεβρική τιμή όταν τείνει να επιταχύνει το στερεό (επιταχύνουσα ροπή)

Η ροπή μιας δύναμης έχει αρνητική αλγεβρική τιμή όταν τείνει να επιβραδύνει το στερεό (επιβραδύνουσα ροπή)

$$\Sigma\tau = I_{cm}\cdot a_{γων} \Rightarrow -T_s\cdot R = \frac{2}{5}mR^2(-a_{γων}) \Rightarrow T_s = \frac{2}{5}mRa_{γων}\ (2).$$

Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, θα ισχύει: $\alpha_{cm} = a_{γων}R \Rightarrow a_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R}\ (3).$

Έτσι θα έχουμε τελικά: $T_s = \frac{2}{5}m\cancel{R}\frac{\alpha_{cm}}{\cancel{R}} = \frac{2}{5}m\alpha_{cm}\ (4).$

Επιλύουμε τώρα το σύστημα:

Εξισώνοντας τα πρώτα μέλη των (1) και (4) βρίσκουμε:

$$\frac{mg}{2} - m\alpha_{cm} = \frac{2}{5}m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{\cancel{m}g}{2} = \frac{7\cancel{m}\alpha_{cm}}{5} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{25}{7}m/s^2.$$

β) Αντικαθιστώντας στην (4) τις τιμές των m και $α_{cm}$ βρίσκουμε:

$$T_s = \frac{2}{5}1,4\frac{25}{7}N = \frac{14}{7}N \Rightarrow T_s = 2\ N.$$

γ) Η Μεταφορική Κίνηση είναι Ομαλά Επιβραδυνόμενη μέχρι να σταματήσει, οπότε:

$$0 = \upsilon_0 - \alpha_{cm}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{\alpha_{cm}} = \frac{10}{\frac{25}{7}}s \Rightarrow t_1 = 2,8\ s.$$

Η απόσταση μέχρι να σταματήσει είναι: $s = \upsilon_0 t_1 - \frac{\alpha_{cm}}{2}t_1^2$ και αντικαθιστώντας τις ήδη γνωστές τιμές, έχουμε:

$$s = (10\cdot 2,8 - \frac{\frac{25}{7}}{2}2,8^2)m = (28 - \frac{25}{14}7,84)m = (28 - \frac{196}{14})m = (28-14)m \Rightarrow s = 14\ m.$$

δ) Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η σφαίρα, θα πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη (ή οριακά ίση) με τη μέγιστη τιμή της, που είναι η οριακή τριβή: $T_s \le T_{op}$ (5).

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η οριακή τριβή υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{op} = \mu_\sigma \cdot N$ (6), όπου μ_σ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής και N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στη σφαίρα, που θα υπολογιστεί από τη Συνθήκη Ισορροπίας στον Oy:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (7).

Αντικαθιστώντας τώρα την (7) στην (6) βρίσκουμε για την οριακή τριβή: $T_{op} = \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (8).

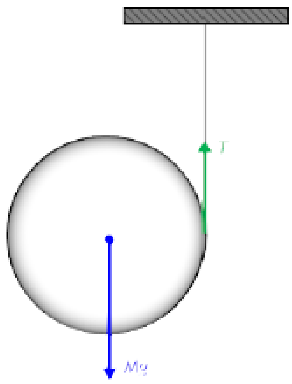
Τέλος, αντικαθιστώντας τις (4) και (8) στην (5) βρίσκουμε:

$$\frac{2}{5}m\alpha_{cm} \le \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_\sigma \ge \frac{\frac{2}{5}m\alpha_{cm}}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$$

$$\mu_\sigma \ge \frac{\frac{2}{5}\cancel{m}\alpha_{cm}}{\cancel{m}g\sigma\upsilon\nu 30^\circ} \Rightarrow \mu_\sigma \ge \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{7}}{10\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \mu_\sigma \ge \frac{100}{7\cdot 50\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \mu_\sigma \ge \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3} \Rightarrow \mu \ge \frac{2\sqrt{3}}{21}.$$

Άσκηση 15

Στο κυρτό μέρος της περιφέρειας ενός ομογενούς κυλίνδρου μικρού πάχους, έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα. Σταθεροποιούμε το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει κατακόρυφα. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση: μετατοπίζεται κατακόρυφα προς τα κάτω και περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα x'x, που περνά από το κέντρο του. Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το νήμα παραμένει κατακόρυφο.



α) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου α_{cm} και η γωνιακή επιτάχυνσή του $a_{\gamma\omega\nu}$ συνδέονται με τη σχέση: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R$.

Να υπολογίσετε:

β) τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.

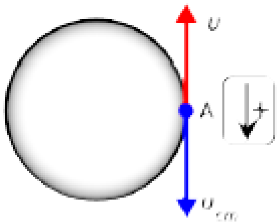
γ) την τάση T του νήματος.

δ) το μήκος του νήματος, που έχει ξετυλιχτεί όταν ο κύλινδρος έχει αποκτήσει γωνιακή

rad

Δίνονται: η μάζα του κυλίνδρου $M = 0,09kg$, η ακτίνα του $R = \frac{8}{3}10^{-2}m$, η ροπή αδράνειάς του ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

Λύση



α) Το σημείο Α του κυλίνδρου, που έρχεται σ' επαφή με το νήμα, θα έχει δύο ταχύτητες: την προς τα κάτω $υ_{cm}$ λόγω μεταφορικής κίνησης και την προς τα πάνω γραμμική ταχύτητα υ, λόγω στροφικής κίνησης, η οποία ισούται με υ=ωR.

Με βάση την αρχή της επαλληλίας, η διανυσματική πρόσθεση αυτών θα «δώσει» την ταχύτητα του Α:

$\vec{υ}_A = \vec{υ}_{cm} + \vec{υ}$. Επειδή αυτές είναι αντίρροπες θα ισχύει: $υ_A = υ_{cm} - υ \Rightarrow υ_A = υ_{cm} - ωR$.

Όμως, το σημείο Α έχει την ίδια ταχύτητα με τα σημεία του ακίνητου νήματος, δηλαδή $υ_A = 0$, οπότε: $υ_{cm} - ωR = 0 \Rightarrow υ_{cm} = ωR$.

Εξισώνοντας τώρα και τους ρυθμούς μεταβολής, θα έχουμε: $\frac{dυ_{cm}}{dt} = \frac{d(ωR)}{dt} = R\frac{dω}{dt}$.

Αλλά $\frac{dω}{dt} = a_{γων}$, οπότε τελικά προκύπτει ότι: $α_{cm} = a_{γων}R$ (1).

β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του Mg και η τάση T από το κατακόρυφο νήμα. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, που είναι αποτέλεσμα μιας κατακόρυφης προς τα κάτω μεταφορικής κίνησης και μιας αριστερόστροφης στροφικής.

Για τη Μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:

$ΣF = Mα_{cm} \Rightarrow Mg - T = Mα_{cm}$ (2).

Για τη Στροφική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς τον άξονα περιστροφής, που περνά από το κέντρο του:

$Στ = I_{cm}a_{γων} \Rightarrow τ_{Mg} + τ_T = \frac{1}{2}MR^2a_{γων}$. Όμως η ροπή του βάρους του είναι μηδέν, διότι το βάρος διέρχεται απ' τον άξονα περιστροφής και η T έχει μοχλοβραχίονα R, οπότε: $T \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}a_{γων} \Rightarrow T = \frac{1}{2}M \cdot Ra_{γων}$ και με βάση την (1) έχουμε: $T = \frac{1}{2}Mα_{cm}$ (3).

Προσθέτοντας τώρα τις (2) και (3) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$Mg - \cancel{T} + \cancel{T} = Mα_{cm} + \frac{1}{2}Mα_{cm} \Rightarrow \cancel{M}g = \frac{3}{2}\cancel{M}α_{cm} \Rightarrow α_{cm} = \frac{2g}{3} \quad (4).$$

Αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $α_{cm} = \frac{20}{3}\frac{m}{s^2}$.

Λύνοντας την (1) ως προς $a_{γων}$ βρίσκουμε: $a_{γων} = \frac{α_{cm}}{R}$ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $a_{γων} = \frac{\frac{20}{\cancel{3}}}{\frac{8}{\cancel{3}}10^{-2}}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{γων} = 250\frac{rad}{s^2}$.

γ) Η τάση T του νήματος βρίσκεται από την (3): $T = \frac{1}{2}0,09\frac{20}{3}N \Rightarrow T = 0,3\,N$.

δ) Η Στροφική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε από τη χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας για τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1}{a_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t_1 = \frac{75}{250} s = 0,3\ s.$$

Το μήκος του νήματος L, που έχει ξετυλιχτεί έως τη χρονική στιγμή t_1, θα είναι ίσο με την μετατόπιση x_{cm} μεταφορικά του κυλίνδρου, δηλαδή:

$$L = x_{cm} = \frac{\alpha_{cm}}{2} t_1^2 \Rightarrow L = \frac{20}{6} 0,09m \Rightarrow L = 0,3\ m.$$

Άσκηση 16

Μια μπάλα, μάζας m και ακτίνας R, αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης φ, οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις, που ασκούνται στη μπάλα και να αιτιολογήσετε το σχεδιασμό της στατικής τριβής.

Να υπολογίσετε:

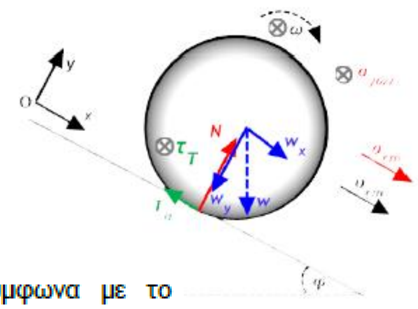
β) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της μπάλας.

γ) το μέτρο της στατικής τριβής, αν η μάζα της μπάλας είναι $m = 0,5kg$.

δ) τις επιτρεπτές τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μ_σ για τις οποίες η μπάλα μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνονται ότι $\eta\mu\varphi = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,866$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η μπάλα θεωρείται κοίλη σφαίρα με ροπή αδράνειας ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{2}{3} mR^2$.

Λύση



α) Στη μπάλα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος w=mg στο κέντρο μάζας της, η κάθετη αντίδραση N στο σημείο επαφής μπάλας - επιπέδου και η στατική τριβή T_s στο σημείο επαφής μπάλας - επιπέδου, με διεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο.

Εφόσον οι δυνάμεις N και w δεν προκαλούν ροπή ως προς το κέντρο μάζας της μπάλας, η συνισταμένη των ροπών οφείλεται αποκλειστικά στη ροπή της στατικής τριβής. Σύμφωνα με το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης: $\Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}_{T_\sigma} = I_{cm} \cdot \vec{a}_{\gamma\omega\nu}$, η φορά της στατικής τριβής T_σ θα είναι προς τα πάνω, έτσι ώστε η ροπή της να είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ της σφαίρας, προκαλώντας έτσι τη στροφική της επιτάχυνση.

β) Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, με τον άξονα Ox παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και θετική φορά την προς τα κάτω. Αναλύουμε το βάρος w=mg σε δύο συνιστώσες: την $w_x = mg\eta\mu\varphi$ στον Ox και την $w_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ στον Oy.

Για τη Μεταφορική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής σε κάθε άξονα:

Στον Ox κινείται ομαλά επιταχυνόμενα, οπότε:

$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - T_\sigma = m\alpha_{cm}$ (1).

Για τη Στροφική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της, θεωρώντας θετική φορά την προς τα μέσα, οπότε:

$$\Sigma\tau = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma \cancel{R} = \frac{2}{3} mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma = \frac{2}{3} m \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \ (2).$$

Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, θα ισχύει: $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$ (3) και αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε τελικά: $T_\sigma = \frac{2}{3} m\alpha_{cm}$ (4).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (4) βρίσκουμε:

$$mg\eta\mu\varphi - \cancel{T_\sigma} + \cancel{T_\sigma} = m\alpha_{cm} + \frac{2}{3} m\alpha_{cm} \Rightarrow \cancel{m}g\eta\mu\varphi = \frac{5}{3}\cancel{m}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{3}{5} g\eta\mu\varphi \overset{S.I.}{\Rightarrow} \alpha_{cm} = 3\frac{m}{s^2}.$$

γ) Αντικαθιστώντας στην (4) βρίσκουμε: $T_\sigma = \frac{2}{3} 0,5 \cdot 3N \Rightarrow T_\sigma = 1\,N$.

δ) Για να Κυλίεται χωρίς να Ολισθαίνει η μπάλα, θα πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη από τη μέγιστη τιμή της, που είναι η οριακή τριβή: $T_\sigma < T_{o\rho}$ (5).

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η οριακή τριβή υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{o\rho} = \mu_\sigma \cdot N$ (6), όπου μ_σ είναι ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής και N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στη σφαίρα, που θα υπολογιστεί από τη Συνθήκη Ισορροπίας στον Oy:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \ (7)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (7) στην (6) βρίσκουμε για την οριακή τριβή: $T_{o\rho} = \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (8).

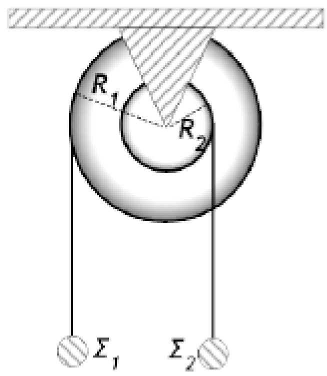
Τέλος, αντικαθιστώντας τις (4) και (8) στην (5) βρίσκουμε:

$$\frac{2}{3} m\alpha_{cm} < \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_\sigma > \frac{\frac{2}{3} m\alpha_{cm}}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$$

$$\mu_\sigma > \frac{\frac{2}{3}\cancel{m}\alpha_{cm}}{\cancel{m}g\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu_\sigma > \frac{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{3}}{10 \cdot 0,866} \Rightarrow \mu_\sigma > \frac{2}{8,5} \Rightarrow \mu_\sigma > 0,23$$

Άσκηση 17

Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ενωμένους ομόκεντρους δίσκους, που μπορούν να περιστρέφονται ενιαία γύρω από οριζόντιο άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το κέντρο τους. Η ακτίνα του εξωτερικού δίσκου είναι $R_1 = 0,2m$ και του εσωτερικού $R_2 = 0,1m$. Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 0,6kgm^2$. Στα αυλάκια, που φέρουν οι δύο δίσκοι είναι τυλιγμένα δύο λεπτά αβαρή μεγάλου μήκους και μη εκτατά



νήματα, στα κάτω άκρα των οποίων είναι δεμένα δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, με μάζες $m_1 = 40\ Kg$ και $m_2 = 30\ Kg$ αντίστοιχα. Τα σώματα συγκρατούνται αρχικά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και τη χρονική στιγμή $t = 0$, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, οπότε αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τα νήματα να ολισθαίνουν στα αυλάκια των δίσκων.

α) Να βρείτε αν το σύστημα θα περιστραφεί δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.

β) Να υπολογίσετε:

1) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

2) το μέτρο της δύναμης στήριξης F της τροχαλίας από τον άξονα, αν η μάζα της τροχαλίας είναι $M = 45 kg$.

3) την κατακόρυφη απόσταση των σωμάτων, σε χρόνο $t = 2\ s$.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

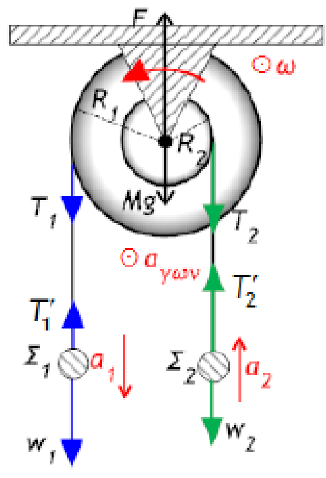
α) Για να βρούμε προς τα πού θα στραφεί η διπλή τροχαλία υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών $Στ_{εξ}$, των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα διπλή τροχαλία - σώματα ως προς τον άξονα της περιστροφής. Οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη των σωμάτων $w_1=m_1g$ και $w_2=m_2g$, το βάρος της τροχαλίας w και η δύναμη στήριξης F από τον άξονα. Απ' αυτές ροπή προκαλούν μόνο τα βάρη των σωμάτων, καθώς το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη στήριξης ασκούνται στον άξονα, άρα δεν προκαλούν ροπή.

Έτσι, θεωρώντας θετική φορά την αριστερόστροφη, έχουμε:

$$Στ_{εξ} = m_1 g \cdot R_1 - m_2 g \cdot R_2 = g(m_1 R_1 - m_2 R_2) \Rightarrow Στ_{εξ} = 10(40 \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,1) Nm = +50\ Nm.$$

Εφόσον η $Στ_{εξ}$ έχει θετικό πρόσημο, το σύστημα θα περιστραφεί στην κατά σύμβαση θετική φορά, δηλαδή αριστερόστροφα.

β)



1) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για τη Στροφική κίνηση της τροχαλίας (ροπή δημιουργούν μόνο οι τάσεις T_1 και T_2 - όχι η Mg και η F).

$Στ_{τρ} = I \cdot a_{γων} \Rightarrow T_1 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_2 = I \cdot a_{γων}$ (1).

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη Μεταφορική κίνηση κάθε σώματος στον κατακόρυφο άξονα (θετική φορά, η προς τα κάτω για το $Σ_1$ και η προς τα πάνω για το $Σ_2$):

Για το $Σ_1$: $ΣF_1 = m_1 α_1 \Rightarrow m_1 g - T_1' = m_1 α_1$ (2).

Για το $Σ_2$: $ΣF_2 = m_2 α_2 \Rightarrow T_2' - m_2 g = m_2 α_2$ (3).

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα τεντωμένο αβαρές νήμα ασκεί ίσου μέτρου τάσεις στα σώματα, που «ενώνει», θα ισχύει ότι: $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$ (4).

Επειδή το κάθε νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία και παραμένει τεντωμένο, όλα τα σημεία κάθε νήματος έχουν κοινή ταχύτητα, οπότε: $\upsilon_1 = \omega R_1$ και $\upsilon_2 = \omega R_2$, όπου ω είναι η κοινή γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων της τροχαλίας.

Φυσικά θα είναι ίσοι και οι ρυθμοί μεταβολής τους, οπότε:

$\frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R_1 \Rightarrow \alpha_1 = a_{\gamma\omega\nu}R_1$ και $\frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R_2 \Rightarrow \alpha_2 = a_{\gamma\omega\nu}R_2$ (5), όπου $a_{\gamma\omega\nu}$ είναι η κοινή γωνιακή επιτάχυνση των δύο δίσκων της τροχαλίας.

Με βάση τις (4) και (5), οι εξισώσεις (2) και (3) διαμορφώνονται ως εξής:

$m_1 g - T_1 = m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1$ (2΄)

$T_2 - m_2 g = m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2$ (3΄).

Επιλύουμε το σύστημα ως εξής: πολλαπλασιάζουμε την (2΄) επί R_1 και την (3΄) επί R_2, οπότε αυτές γίνονται:

$m_1 g R_1 - T_1 R_1 = m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1^2$ (6)

$T_2 R_2 - m_2 g R_2 = m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2^2$ (7).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (6) και (7), οπότε παίρνουμε:

$$\cancel{T_1R_1} - \cancel{T_2R_2} + m_1 g R_1 - \cancel{T_1R_1} - m_2 g R_2 + \cancel{T_2R_2} = I a_{\gamma\omega\nu} + m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1^2 + m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2^2 \Rightarrow$$

$m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = (I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) a_{\gamma\omega\nu}$, και λύνοντας ως προς την κοινή επιτάχυνση βρίσκουμε τελικά: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I}$.

Αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{(8-3)10}{1,6+0,3+0,6}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 20\frac{rad}{s^2}$.

2) Πρέπει αρχικά να βρούμε τις τάσεις T_1 και T_2. Έτσι:

Από την (2΄): $T_1 = m_1 g - m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1 = m_1 (g - a_{\gamma\omega\nu} R_1) \Rightarrow T_1 = 40(10 - 20 \cdot 0,2) N \Rightarrow T_1 = 240\ N$

και από την (3΄):

$T_2 = m_2 g + m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2 = m_2 (g + a_{\gamma\omega\nu} R_2) \Rightarrow T_2 = 30(10 + 20 \cdot 0,1) N \Rightarrow T_2 = 360\ N$.

Η δύναμη στήριξης απ' τον άξονα, υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε για την τροχαλία τη Συνθήκη ισορροπίας, επειδή ακινητεί μεταφορικά:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - Mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F = Mg + T_1 + T_2 \Rightarrow F = (450 + 240 + 360) N \Rightarrow$$
$$F = 1050\ N.$$

2) Πρέπει αρχικά να βρούμε τις τάσεις T_1 και T_2. Έτσι:

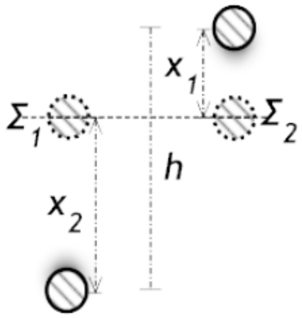
Από την (2΄): $T_1 = m_1 g - m_1 a_{γων} R_1 = m_1(g - a_{γων} R_1) \Rightarrow T_1 = 40(10 - 20 \cdot 0,2)N \Rightarrow T_1 = 240\ N$

και από την (3΄):

$T_2 = m_2 g + m_2 a_{γων} R_2 = m_2(g + a_{γων} R_2) \Rightarrow T_2 = 30(10 + 20 \cdot 0,1)N \Rightarrow T_2 = 360\ N$.

Η δύναμη στήριξης απ' τον άξονα, υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε για την τροχαλία τη Συνθήκη ισορροπίας, επειδή ακινητεί μεταφορικά:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - Mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F = Mg + T_1 + T_2 \Rightarrow F = (450 + 240 + 360)N \Rightarrow$
$F = 1050\ N$.



3) Ξεκινώντας, τη χρονική στιγμή t=0, από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο, τη χρονική στιγμή t=2 s, το $Σ_1$ μετατοπίστηκε κατά x_1 προς τα κάτω και το $Σ_2$ μετατοπίστηκε κατά x_2 προς τα πάνω, κινούμενα και τα δύο με σταθερή επιτάχυνση. Εφαρμόζοντας τις χρονικές εξισώσεις για τη μετατόπιση βρίσκουμε:

$x_1 = \frac{\alpha_1}{2}t^2 = \frac{a_{γων} R_1}{2}t^2 \overset{S.I.}{\Rightarrow} x_1 = 8\ m$ και $x_2 = \frac{\alpha_2}{2}t^2 = \frac{a_{γων} R_2}{2}t^2 \overset{S.I.}{\Rightarrow} x_2 = 4\ m$.

Συνεπώς, με βάση το σχήμα, η κατακόρυφη απόστασή τους, τη χρονική στιγμή t=2 s, θα είναι: $h = x_1 + x_2 \Rightarrow x_{ολ} = 12\ m$.

Άσκηση 18

Ομογενής κύλινδρος μάζας $m = 2kg$ και ακτίνας $R = 0,2m$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς παραμόρφωση σε οριζόντιο δάπεδο (Α) με ταχύτητα μέτρου $υ_0 = 2m/s$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο κύλινδρος δέχεται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 6\ N$, που ασκείται στο κέντρο μάζας του. Ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά την άσκηση της δύναμης F.

α) Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το δάπεδο, σε κατάλληλο σχήμα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο:

β1) της στατικής τριβής.

β2) της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας καθώς και της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

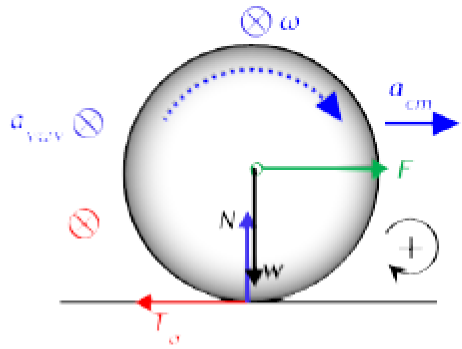
β3) της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$.

γ) Στη συνέχεια τη χρονική στιγμή $t_1 = 4s$, ο κύλινδρος εισέρχεται σε λείο δάπεδο (Β), το οποίο είναι συνέχεια του προηγούμενου. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10s$, να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου του κυλίνδρου, που είναι εκείνη τη στιγμή σ' επαφή με το λείο δάπεδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονά του: $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο: Το βάρος mg και η δύναμη F στο κέντρο μάζας του, η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ στο σημείο επαφής τροχού-δαπέδου.



Η συνολική ροπή οφείλεται αποκλειστικά στη ροπή της T_σ $\Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}_{T_\sigma}$, διότι η ροπή της F και του βάρους w είναι μηδενική καθώς ασκούνται στον άξονα περιστροφής, όπως και η N, που διέρχεται απ' αυτόν. Συνεπώς η ροπή της T_σ, $\vec{\tau}_{T_\sigma}$ θα είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να έχει φορά προς τα πίσω, όπως φαίνεται στο σχήμα.

β)

β1) Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (θεωρούμε θετική φορά την προς τα δεξιά):

$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow F - T_\sigma = m\alpha_{cm}$ (1).

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της (θεωρούμε θετική φορά την προς τα μέσα):

$$\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma \cancel{R} = \frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma = \frac{1}{2}m\cdot Ra_{\gamma\omega\nu} \ (2).$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει για τις επιταχύνσεις η σχέση: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R$ (3).

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε: $T_\sigma = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}$ (2΄).

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2΄) παίρνουμε:

$$\frac{F - T_\sigma}{T_\sigma} = \frac{\cancel{m}\cancel{\alpha}_{cm}}{\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{\alpha}_{cm}} \Rightarrow \frac{F - T_\sigma}{T_\sigma} = 2 \Rightarrow F - T_\sigma = 2T_\sigma \Rightarrow F = 3T_\sigma \Rightarrow T_\sigma = \frac{F}{3} \overset{S.I.}{\Rightarrow} T_\sigma = 2\,\text{N}$$

β2) Λύνοντας την (2΄) ως προς α_{cm} βρίσκουμε: $\alpha_{cm} = \frac{2T_\sigma}{m} = \frac{2\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2}$.

Λύνοντας την (3) ως προς $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ βρίσκουμε: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{2}{0,2}\frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10\frac{rad}{s^2}$.

β3) Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει για τις ταχύτητες η σχέση: $\upsilon_{cm} = \omega R$. Εφαρμόζοντάς την τη χρονική στιγμή t=0, βρίσκουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 τη χρονική στιγμή t_1=4s:

$$\upsilon_0 = \omega_0 R \Rightarrow \omega_0 = \frac{\upsilon_0}{R} = \frac{2}{0,2}\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega_0 = 10\frac{rad}{s}.$$

Εφαρμόζοντας το Νόμο της γωνιακής ταχύτητας για την Ομαλά Επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω_1:

$$\omega_1 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega_1 = (10+10\cdot 4)\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega_1 = 50\frac{rad}{s}\ .$$

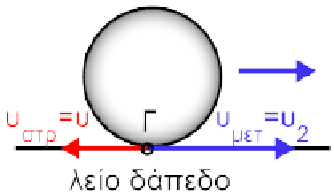
γ) Στο λείο δάπεδο (Β) δεν υπάρχει στατική τριβή, οπότε δεν υπάρχει ροπή δύναμης, που να μεταβάλλει τη στροφική κίνησή του. Αντίθετα, η δύναμη F συνεχίζει να τον επιταχύνει μεταφορικά, με διαφορετική όμως επιτάχυνση. Συνεπώς ο κύλινδρος θα κάνει σύνθετη κίνηση (όχι όμως κύλιση χωρίς ολίσθηση), η οποία προκύπτει από την επαλληλία:

1[ον] μιας Ομαλής Στροφικής, με τη γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 50\frac{rad}{s}$, που είχε αποκτήσει. Τα σημεία της περιφέρειάς του θα έχουν κάθε στιγμή γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου : $\upsilon = \omega_1 R = 50\cdot 0,2\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = 10\frac{m}{s}$ (4), και

2[ον] μιας Ομαλά Επιταχυνόμενης μεταφορικής με αρχική ταχύτητα, αυτήν που είχε αποκτήσει: $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = (2+2\cdot 4)\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$ και νέα επιτάχυνση: $\alpha'_{cm} = \frac{F}{m} = \frac{6\ N}{2\ kg} \Rightarrow \alpha'_{cm} = 3\frac{m}{s^2}$.

Έτσι μετά από χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1 = (10-4)s = 6\ s$, η μεταφορική του ταχύτητα θα είναι: $\upsilon_2 = \upsilon_1 + \alpha'_{cm}\Delta t \Rightarrow \upsilon_2 = (10+3\cdot 6)\frac{m}{s} = 28\frac{m}{s}$ (5).

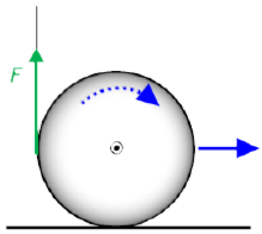
Εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας των ταχυτήτων, στο σημείο επαφής Γ με το λείο δάπεδο: $\vec{\upsilon}_\Gamma = \vec{\upsilon}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{\upsilon}_{\sigma\tau\rho} = \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες είναι αντίρροπες, και με βάση τις (4) και (5), βρίσκουμε:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_2 - \upsilon \Rightarrow \upsilon_\Gamma = (28-10)\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_\Gamma = 18\frac{m}{s}.$$

Άσκηση 19



Ένας ομογενής δίσκος, μάζας $m = 2kg$ και ακτίνας $R = 0,3m$, που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο, φέρει στην περιφέρειά του αυλάκι, στο οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ασκούμε στον δίσκο μέσω του νήματος σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 9\ N$. Καθώς ξετυλίγεται το νήμα χωρίς να ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, ο δίσκος κυλίεται επίσης χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς παραμόρφωση, πάνω σε οριζόντιο δάπεδο.

α) Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο, σε κατάλληλο σχήμα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

β) Να υπολογίσετε:

β1) το μέτρο της στατικής τριβής, που δέχεται ο δίσκος.

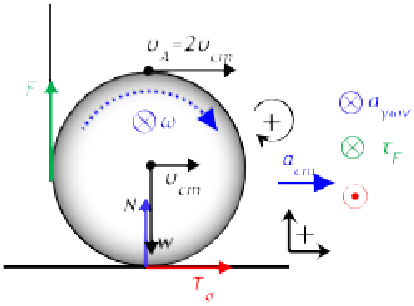
β2) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας καθώς και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου.

β3) το μήκος του νήματος, που έχει ξετυλιχτεί από τη στιγμή $t=0$, μέχρι τη στιγμή t_1, κατά την οποία το ανώτερο σημείο του δίσκου έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_A = 12 m/s$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονά του: $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο: το βάρος mg, στο κέντρο μάζας του, η δύναμη F, στο σημείο επαφής δίσκου - νήματος, και η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ στο σημείο επαφής δίσκου - δαπέδου.



Παρατηρούμε ότι οι τρείς δυνάμεις F, mg και N έχουν κατακόρυφη διεύθυνση, ενώ ο δίσκος κινείται επιταχυνόμενος μεταφορικά στην οριζόντια διεύθυνση με φορά προς τα δεξιά. Συνεπώς η στατική τριβή T_σ είναι η μόνη δύναμη, που τον επιταχύνει στον οριζόντιο άξονα, δηλαδή θα είναι ομόρροπη της επιτάχυνσης α_{cm}, όπως φαίνεται στο σχήμα.

β)

β1) Για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (θετική φορά η προς τα δεξιά):

$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_\sigma = m\alpha_{cm}$ (1).

Για τη στροφική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της (θετική φορά η προς τα μέσα):

$\Sigma\tau = I_{cm}a_{γων} \Rightarrow F\cancel{R} - T_\sigma\cancel{R} = \frac{1}{2}mR^2 a_{γων} \Rightarrow F - T_\sigma = \frac{1}{2}m \cdot Ra_{γων}$ (2).

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει για τις επιταχύνσεις η σχέση: $\alpha_{cm} = a_{γων}R$ (3).

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε: $F - T_\sigma = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}$ (2΄).

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2΄) παίρνουμε:

$$\frac{T_\sigma}{F-T_\sigma} = \frac{\cancel{m}\cancel{\alpha}_{cm}}{\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{\alpha}_{cm}} \Rightarrow \frac{T_\sigma}{F-T_\sigma} = 2 \Rightarrow 2F - 2T_\sigma = T_\sigma \Rightarrow 2F = 3T_\sigma \Rightarrow T_\sigma = \frac{2F}{3} \overset{S.I.}{\Rightarrow} T_\sigma = 6\,N.$$

β2) Λύνοντας την (2΄) ως προς α_{cm} βρίσκουμε: $\alpha_{cm} = \frac{2(F-T_\sigma)}{m} = \frac{\cancel{2}\cdot(9-6)}{\cancel{2}}\frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_{cm} = 3\frac{m}{s^2}$.

Λύνοντας την (3) ως προς $a_{γων}$ βρίσκουμε: $a_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{3}{0,3}\frac{m}{s^2} \Rightarrow a_{γων} = 10\frac{rad}{s^2}$.

β3) Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με το τόξο, που διαγράφουν στον ίδιο χρόνο, τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου: $h_1 = \Delta\widehat{s}$ (4).

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, το τόξο, που διαγράφουν τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου είναι ίσο με την οριζόντια μετατόπιση του κέντρου μάζας του, στον ίδιο χρόνο: $\Delta\widehat{s} = x_1$ (5).

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι: $h_1 = x_1$ (6).

Η μετατόπιση x_1 μπορεί να υπολογιστεί από τη χρονική εξίσωση της μετατόπισης κατά τη μεταφορική κίνηση, η οποία είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα: $x_1 = \frac{\alpha_{cm}}{2}t_1^2 \overset{(6)}{\Rightarrow} h_1 = \frac{\alpha_{cm}}{2}t_1^2$ (7).

Γνωρίζουμε ότι (Σχολικό Βιβλίο, σελ. 110, σχ. 4.4) η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του δίσκου, εφόσον αυτός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, είναι: $\upsilon_A = 2\upsilon_{cm}$. Στην εκφώνηση δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t_1 είναι υ_A=12 m/s, οπότε $\upsilon_{cm} = 6\frac{m}{s}$.

Από τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας έχουμε: $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{6}{3}s = 2\ s$.

Αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε τελικά: $h_1 = \frac{3}{2}2^2 m \Rightarrow h_1 = 6\ m$.

Άσκηση 20

Γύρω από ένα ομογενή δίσκο, ακτίνας R, μάζας $m = 2kg$ και ροπής αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, μέσω του οποίου, τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκούμε στο ανώτερο σημείο Γ οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 6N$. Ο τροχός κυλίεται χωρίς παραμόρφωση σε οριζόντιο δάπεδο, που έχει τέτοια τιμή συντελεστή στατικής τριβής μ_σ, ώστε οριακά να αποφεύγεται η ολίσθηση.

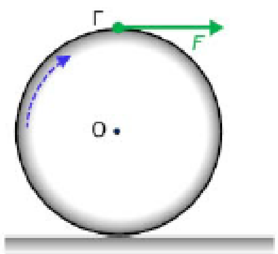
Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας Ο.

β) το μέτρο της επιτάχυνσης του ανώτερου σημείου Γ.

γ) τη δύναμη της στατικής τριβής, που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο.

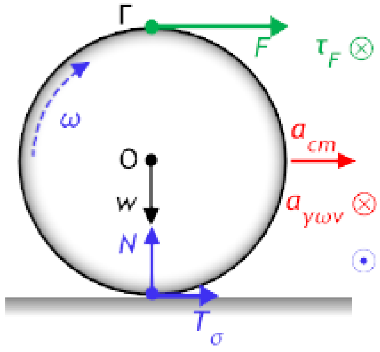
δ) το συντελεστή στατικής τριβής.



Λύση

α) Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, με τον άξονα Ox παράλληλο στο οριζόντιο δάπεδο και θετική φορά την προς τα δεξιά.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο: στο κέντρο μάζας O, το βάρος mg, στο σημείο επαφής δίσκου - δαπέδου η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ και στο ανώτερο σημείο Γ η τάση του νήματος F.



Επειδή η ροπή της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική ροπή, που επιταχύνει στροφικά το δίσκο και η δύναμη της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική δύναμη, που τον επιταχύνει μεταφορικά, δεν μπορούμε εξαρχής να συμπεράνουμε για τη φορά της T_σ. Έστω λοιπόν ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά.

Για τη Μεταφορική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής σε κάθε άξονα.

Στον Ox: $\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow F + T_\sigma = m\alpha_{cm}$ (1).

Στον Oy: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$ (2).

Για τη Στροφική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας O:

$$\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot \cancel{R} - T_\sigma \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2}mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F - T_\sigma = \frac{1}{2}m \cdot Ra_{\gamma\omega\nu} \text{ (3).}$$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα ισχύει: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R$ (4). Με βάση αυτήν η (3) γίνεται: $F - T_\sigma = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}$ (3΄).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3΄) έχουμε:

$2F = \frac{3}{2}m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{4F}{3m}$ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $\alpha_{cm} = 4\frac{m}{s^2}$.

β) Γνωρίζουμε ότι αν ένας δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, η ταχύτητα του ανώτερου σημείου Γ, με βάση της αρχή της επαλληλίας (Σχολικό Βιβλίο, σελ. 110, σχ. 4.4), είναι: $\upsilon_\Gamma = 2\upsilon_{cm}$, οπότε και για τους ρυθμούς μεταβολής θα ισχύει ότι: $\frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = 2\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \Rightarrow a_\Gamma = 2\alpha_{cm} \Rightarrow a_\Gamma = 2\alpha_{cm} = 8\frac{m}{s^2}$.

γ) Μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατική τριβή T_σ, λύνοντας την (1) ως προς αυτήν: $T_\sigma = m\alpha_{cm} - F \Rightarrow T_\sigma = (2 \cdot 4 - 6)N \Rightarrow T_\sigma = +2\,N$. Το θετικό πρόσημο δείχνει ότι σωστά υποθέσαμε ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, δηλαδή η κατεύθυνσή της είναι όπως φαίνεται στο αρχικό σχήμα.

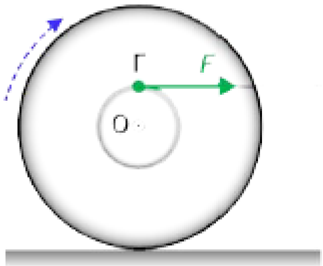
δ) Εφόσον απ' την εκφώνηση δίνεται ότι ο δίσκος κυλίεται οριακά χωρίς Ολίσθηση, αυτό σημαίνει ότι η στατική τριβή T_σ θα είναι ίση τη μέγιστη τιμή της, την οριακή τριβή $T_{o\rho}$, δηλαδή: $T_\sigma = T_{o\rho}$ ή $T_{o\rho} = 2\,N$.

Όμως η οριακή τριβή $T_{o\rho}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{o\rho} = \mu_\sigma \cdot N$ και με βάση την (2): $T_{o\rho} = \mu_\sigma \cdot mg$.

Λύνουμε ως προς το συντελεστή στατικής τριβής και βρίσκουμε:

$$\mu_\sigma = \frac{T_{o\rho}}{mg} \Rightarrow \mu_\sigma = \frac{2\,N}{2 \cdot 10\,N} \Rightarrow \mu_\sigma = 0{,}1.$$

Άσκηση 21



Ένας κύλινδρος ακτίνας R έχει μάζα $M = 4\,kg$. Στο εσωτερικό του υπάρχει μία κυλινδρική εγκοπή, ακτίνας $r = \frac{R}{3}$ πολύ μικρού πάχους, στην οποία έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο άκρο του νήματος και πάνω από το κέντρο μάζας, ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 9\,N$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε τον κύλινδρο ομογενή με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

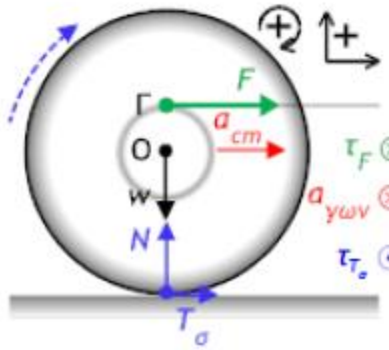
β) το μέτρο της στατικής τριβής, που δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο και να την σχεδιάσετε σε κατάλληλο σχήμα.

γ) το μέτρο της οριζόντιας επιτάχυνσης του σημείου επαφής Γ νήματος - κυλίνδρου.

δ) το μήκος του νήματος, που ξετυλίχτηκε, έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 3s$.

Λύση

α) Καθορίζουμε ως σύστημα αναφοράς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, με τον άξονα Ox παράλληλο στο οριζόντιο δάπεδο και θετική φορά την προς τα δεξιά.



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο: στο κέντρο μάζας O, το βάρος mg, στο σημείο επαφής κυλίνδρου - δαπέδου η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ και στο σημείο Γ η τάση του νήματος F.

Επειδή η ροπή της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική ροπή, που επιταχύνει στροφικά τον κύλινδρος και η δύναμη της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική δύναμη, που τον επιταχύνει μεταφορικά, δεν μπορούμε εξαρχής να συμπεράνουμε για τη φορά της T_σ. Έστω λοιπόν ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά.

Εφαρμόζουμε τον ανάλογο νόμο, για κάθε κίνηση:

Για τη Μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:

$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow F + T_\sigma = M\alpha_{cm}$ (1).

Για τη Στροφική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο:

$\Sigma\tau = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot r - T_\sigma \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F\frac{\cancel{R}}{3} - T_\sigma \cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{F}{3} - T_\sigma = \frac{1}{2}M \cdot Ra_{\gamma\omega\nu}$ (2).

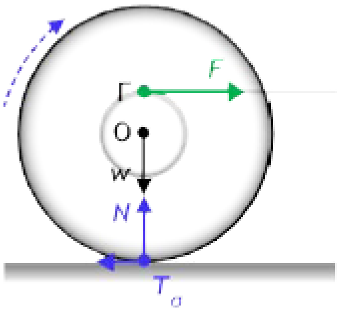
Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα ισχύει: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R$ (3). Με βάση αυτήν η (2) γίνεται: $\frac{F}{3} - T_\sigma = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$ (2΄).

Επιλύουμε το αλγεβρικό σύστημα:

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2΄) έχουμε:

$F + \cancel{T_\sigma} + \frac{F}{3} - \cancel{T_\sigma} = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{4F}{3} = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{8F}{9M}$ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $\alpha_{cm} = 2\frac{m}{s^2}$.

β) Μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατική τριβή T_σ, από την (1): $T_\sigma = M\alpha_{cm} - F \Rightarrow T_\sigma = (4 \cdot 2 - 9)N \Rightarrow T_\sigma = -1\,N$. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι λανθασμένα υποθέσαμε ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, συνεπώς η κατεύθυνσή της είναι προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο νέο σχήμα.



γ) Εφόσον ο κύλινδρος κάνει σύνθετη κίνηση, το σημείο Γ θα έχει μία ταχύτητα λόγω μεταφορικής και μία λόγω στροφικής κίνησης.

Η ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης είναι κοινή για όλα τα σημεία του κυλίνδρου, ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας: $\upsilon_{\mu\varepsilon\tau} = \upsilon_{cm}$.

Η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων, που στρέφονται σε ακτίνα r, οπότε: $\upsilon_{\sigma\tau\rho} = \upsilon_r$.

Η ταχύτητα του σημείου Γ θα υπολογιστεί, με βάση την αρχή της επαλληλίας, προσθέτοντας διανυσματικά τις επιμέρους ταχύτητες: $\vec{\upsilon}_\Gamma = \vec{\upsilon}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{\upsilon}_{\sigma\tau\rho} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_r$. Από το σχήμα όμως φαίνεται ότι οι ταχύτητες αυτές είναι ομόρροπες, συνεπώς: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_{cm} + \upsilon_r$.

Για να βρούμε την οριζόντια επιτάχυνση του Γ, παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή:

$\frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d\upsilon_r}{dt}$, αλλά $\upsilon_r = \omega \cdot r$, οπότε:

$$\frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} r \Rightarrow \alpha_\Gamma = \alpha_{cm} + a_{\gamma\omega\nu} \cdot r \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\alpha_\Gamma = \alpha_{cm} + \frac{\alpha_{cm}}{R} r \Rightarrow \alpha_\Gamma = \alpha_{cm} + \frac{\alpha_{cm}}{\cancel{R}} \frac{\cancel{R}}{3} \Rightarrow \alpha_\Gamma = \frac{4\alpha_{cm}}{3} \Rightarrow \alpha_\Gamma = \frac{8}{3} \frac{m}{s^2}.$$

δ) Το μήκος του νήματος L, που ξετυλίγεται έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με το τόξο, που διέγραψαν τα σημεία της εγκοπής σε ακτίνα r, δηλαδή: $L = \overset{\frown}{s}$.

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $\overset{\frown}{s} = r \cdot \theta$, οπότε: $L = r \cdot \theta$ (4), όπου θ η γωνία στροφής των σημείων του κυλίνδρου.

Επειδή η στροφική κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, θα ισχύει: $\theta = \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2} t_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{\alpha_{cm}}{2R} t_1^2$.

Αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε:

$$L = r \cdot \theta = \frac{\cancel{R}}{3} \frac{\alpha_{cm}}{2\cancel{R}} t_1^2 \Rightarrow L = \frac{\alpha_{cm}}{6} t_1^2 \Rightarrow L = \frac{2}{6} 3^2 m \Rightarrow L = 3\ m$$