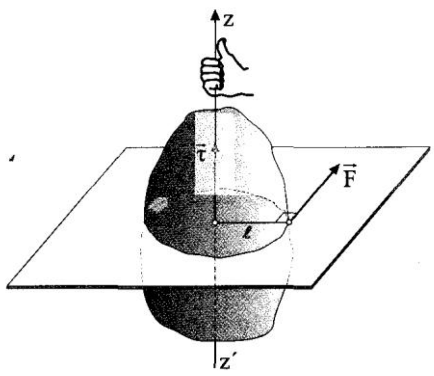
ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ-ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1.ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Α) ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ



Θεωρούμε ένα σώμα, το οποίο έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα z΄z. Στο σώμα ασκείται δύναμη F ,η οποία βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής και ο φορέας της απέχει από τον άξονα απόσταση *l* (μοχλοβραχίονας).

Ονομάζουμε ροπή της δύναμης , ως προς τον άξονα περιστροφής z΄z, το διανυσματικό μέγεθος , το οποίο έχει:

- **διεύθυνση:** τη διεύθυνση τον άξονα περιστροφής.
- **φορά:** τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα τον δεξιού χεριού. Για να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού γύρω από τον άξονα περιστροφής, έτσι ώστε να δείχνουν τη φορά κατά την οποία η δύναμη τείνει να περιστρέψει το σώμα. Ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει τότε τη φορά του διανύσματος της ροπής.
- **μέτρο :** ίσο με το γινόμενα του μέτρου F της δύναμης επί την κάθετη απόσταση *l* της δύναμης από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή $\boxed{\tau = F.l}$

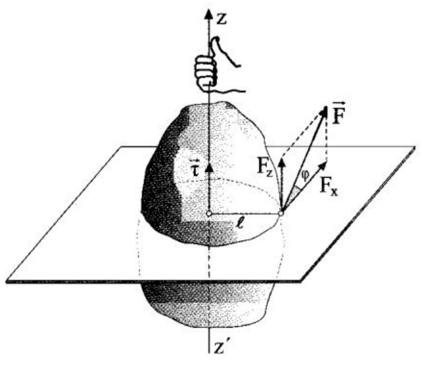
Η μονάδα μέτρησης της ροπής δύναμης στο διεθνές σύστημα (S.I) είναι το 1 N.m

Παρατηρήσεις

α)Η ροπή δύναμης (τ) είναι το φυσικό μέγεθος που περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα.

β) Η ροπή μιας δύναμης ως προς άξονα είναι ίση με μηδέν:

- όταν η δύναμη ασκείται στον άξονα (l=0)
- όταν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα(l=0)
- όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος προς τον άξονα (ο άξονας είναι σταθερός και η ροπή της δύναμης δεν μπορεί να περιστρέψει το σώμα γύρω από τον άξονα αυτό)



γ)Αν η δύναμη δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, τότε την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, τη συνιστώσα F_x = F.συνφ πάνω σε επίπεδο κάθετο στον άξονα και τη συνιστώσα F_z =F.ημφ παράλληλη προς τον άξονα. Η ροπή της δύναμης F έχει μέτρο:

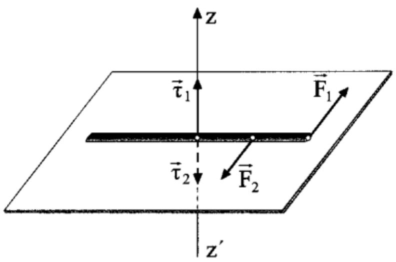
$$\tau = F_x.l \Rightarrow \boxed{\tau = F.\, l\ \text{συνφ}}$$

Β) Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνον περιπτώσεις, στις οποίες **όλες οι δυνάμεις** που ασκούνται σ' ένα σώμα βρίσκονται **στο ίδιο επίπεδο**, το οποίο είναι **κάθετο στον άξονα περιστροφής** του σώματος. Σε τέτοια προβλήματα, για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μια ή την άλλη φορά, χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε

- **θετική** τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού και
- **αρνητική** τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Στο διπλανό σχήμα, η ροπή τ_1 της δύναμης F_1 θεωρείται θετική ενώ η ροπή τ_2 της δύναμης F_2 θεωρείται αρνητική.

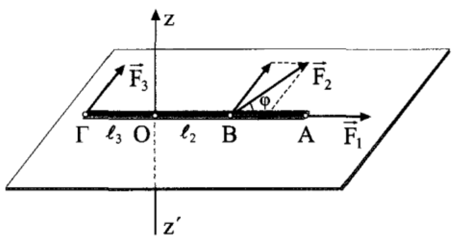


Προσοχή: Το μέτρο της ροπής είναι πάντα θετικός αριθμός. Η αλγεβρική τιμή της ροπής δείχνει την φορά της πάνω στον άξονα περιστροφής.

Γ) Η ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΡΟΠΗ ΠΟΥ ΔΕΧΕΤΑΙ ΕΝΑ ΣΩΜΑ

Η συνολική ροπή που δέχεται ένα σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος.

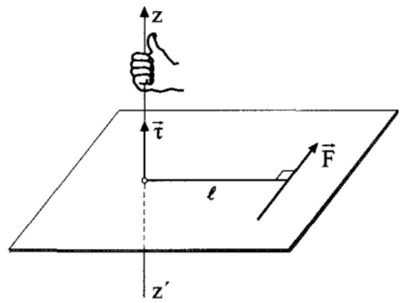
Στη ράβδο του διπλανού σχήματος ασκούνται οι ομοεπίπεδες δυνάμεις F_1, F_2 και F_3. Η ράβδος έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από τον άξονα z΄z που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων. Η συνολική ροπή που δέχεται το σώμα είναι: $\tau= \tau_1+\tau_2+\tau_3$ όπου τ_1, τ_2, τ_3 οι αλγεβρικές τιμές των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής.



$\tau= \tau_1+\tau_2+\tau_3 \;\Rightarrow\; \tau=0+ F_2\,ημφ(ΟΒ) - F_3.(ΟΓ) \;\Rightarrow\; \tau = F_2 .l_2.ημφ - F_3. l_3$

Παρατήρηση Το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής της συνολικής ροπής δείχνει μόνο, πως η συνολική ροπή τείνει να περιστρέψει το σώμα γύρω από τον άξονα περιστροφής και όχι αν το σώμα εκτελέσει επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα περιστροφής.

2.ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ



- Αν σ' ένα σώμα, ελεύθερο να κινηθεί, ασκείται δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.
- Αν ο φορέας της δύναμης δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση: μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από ένα νοητό άξονα (ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το κέντρο μάζας του σώματος. Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής χρησιμοποιείται η έννοια της ροπής δύναμης ως προς σημείο.

Ονομάζουμε ροπή δύναμης , ως προς σημείο Ο, το διανυσματικό μέγεθος , το οποίο έχει:

- **διεύθυνση:** κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το φορέα της δύναμης και το σημείο Ο,
- **φορά :**τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και
- **μέτρο**: ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της δύναμης επί την απόσταση *l* του σημείου Ο από το φορέα της δύναμης. Δηλαδή: $\boxed{\boldsymbol{\tau = F.l}}$

Παρατήρηση : Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι ίση με μηδέν:

- όταν η δύναμη ασκείται στο σημείο αυτό ($l = 0$)
- όταν ο φορέας της δύναμης διέρχεται από το σημείο αυτό ($l = 0$).

3.ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

α.Ζεύγος δυνάμεων

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζεται ένα σύστημα δύο δυνάμεων F_1 και F_2 οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος, είναι αντίρροπες και έχουν ίσα μέτρα ($F_1 = F_2 = F$)

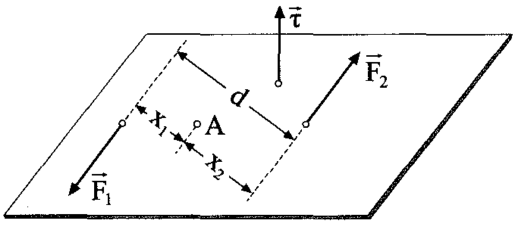
- **επίπεδο του ζεύγους:** το επίπεδο που ορίζεται από τις δύο δυνάμεις .
- **βραχίονας του ζεύγους:** η απόσταση d των φορέων των δύο δυνάμεων.

β. Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ονομάζουμε ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων και το διανυσματικό μέγεθος τ, το οποίο έχει:

- διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των δύο δυνάμεων,
- φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και
- μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου F της μιας από τις δύο δυνάμεις επί τον βραχίονα d του ζεύγους. Δηλαδή: $\boxed{\boldsymbol{\tau = F.d}}$

Παράδειγμα



Η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο Α του επιπέδου του, που απέχει απόσταση x_1 από τη δύναμη F_1 και x_2 από τη δύναμη F_2 είναι:

$\tau = F_1.x_1 + F_2.x_2$ Όμως $F_1 = F_2 = F$ Άρα : $\tau = F.x_1 + F.x_2$ =>

$\tau = F(x_1 + x_2)$ => $\tau = F.d$

Παρατηρήσεις

- Το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων του ζεύγους είναι ίσο με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι ένα ζεύγος δυνάμεων δε μπορεί να μετακινήσει ένα σώμα, αλλά μόνο να το περιστρέψει. Η περιστροφή θα πραγματοποιηθεί γύρω από τον άξονα περιστροφής του σώματος, αν υπάρχει τέτοιος άξονας, ή γύρω από νοητό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο του ζεύγους, αν το σώμα είναι ελεύθερο να κινηθεί.
- Η σχέση $\tau = F.d$, που αποδείξαμε για το σημείο Α, ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο σημείο. Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους και ως προς οποιονδήποτε άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους.
- Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ελεύθερο διάνυσμα και μπορεί να σχεδιαστεί σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου του ζεύγους. Αν, όμως, το σώμα στο οποίο ασκείται το ζεύγος έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα περιστροφής z΄z, κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους, τότε η ροπή του ζεύγους έχει ως φορέα τον άξονα περιστροφής.

4.ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ένα αρχικά ακίνητο στερεό, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις.

- Αν το στερεό έχει **σταθερό άξονα** περιστροφής, τότε μπορεί να εκτελέσει **μόνο στροφική κίνηση.** Επομένως, για να ισορροπεί, αρκεί το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς τον άξονα αυτό να είναι μηδέν.
- Αν, όμως, το στερεό είναι ελεύθερο, τότε μπορεί να εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση. Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα δεν θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση. Αυτό, όμως, δεν εξασφαλίζει ότι το σώμα δεν θα στραφεί. Προφανώς, αν υπάρχουν ροπές, το σώμα θα στραφεί. Όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, αν υπάρχουν ροπές, αυτές θα οφείλονται υποχρεωτικά σε ζεύγη δυνάμεων. Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων, όμως, είναι ίδια ως προς όλα τα σημεία του επιπέδου τους. Επομένως, για να μη στραφεί ένα σώμα, πρέπει η συνισταμένη ροπή να είναι μηδέν ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο (τότε θα είναι μηδέν και ως προς κάθε άλλο).

Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει:

α) Η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν : $\boxed{\Sigma\vec{F} = \mathbf{0} \;\; => \;\; \Sigma\vec{F}_x = \mathbf{0} \text{ και } \Sigma\vec{F}_y = \mathbf{0}}$

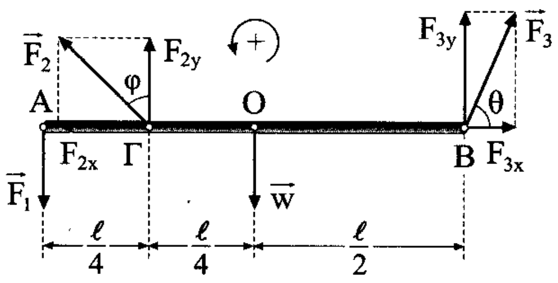
β) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων <u>ως προς οποιοδήποτε σημείο</u> να είναι μηδέν $\boxed{\Sigma\tau = 0}$

Οι συνθήκες ισχύουν και όταν ένα στερεό σώμα έχει υ = σταθ. και ω = σταθ. Όταν ικανοποιείται η συνθήκη ΣF =0 η επιτάχυνση του σώματος στη μεταφορική κίνηση είναι ίση με μηδέν ($\alpha_{cm}= 0$). Επομένως, αν αρχικά το σώμα έχει ταχύτητα υ =0, η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας του σώματος (για τη μεταφορική κίνηση). Όταν ικανοποιείται η συνθήκη Στ =0, η γωνιακή

επιτάχυνση του σώματος στη στροφική κίνηση είναι ίση με μηδέν (α = 0). Επομένως, αν αρχικά το σώμα έχει γωνιακή ταχύτητα ω = 0, η συνθήκη αυτή αποτελεί συνθήκη ισορροπίας του σώματος (για τη στροφική κίνηση).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Η ομογενής οριζόντια ράβδος του σχήματος, μήκους l = 4 m και βάρους w = 100 N, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της Ο και είναι κάθετος σ' αυτή. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις F_1, F_2 και F_3, οι οποίες έχουν μέτρα F_1 =100N, $F_2 = 100\sqrt{2}$ N και $F_3 = 100\sqrt{3}$ N , αντίστοιχα, ενώ οι φορείς τους βρίσκονται στο κατακόρυφο επίπεδο περιστροφής της ράβδου.

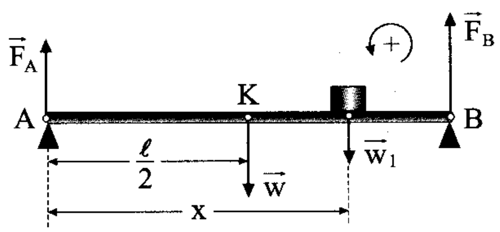


Αν είναι $\varphi = 45^0$ και $\theta = 60°$, να υπολογίσετε το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο, ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Απ: $\tau = +\ 400$ Nm

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Ομογενής δοκός ΑΒ, μήκους l = 4 m και βάρους w = 240 N, στηρίζεται στα άκρα της Α και Β, ώστε να διατηρείται οριζόντια. Σε απόσταση x από το άκρο Α τοποθετούμε πάνω στη δοκό σώμα βάρους w_1 = 200 N . Η δύναμη που ασκείται στη δοκό από το υποστήριγμα στο άκρο Α έχει μέτρο F_A=170N.



α. Να προσδιορίσετε την απόσταση x.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη δοκό από το υποστήριγμα στο άκρο Β.

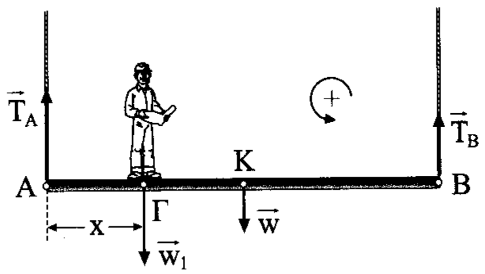
Απ: α. x=3m β.F_B =270N

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ένας άνθρωπος βάρους w_l= 700N βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια ομογενή σανίδα ΑΒ, μήκους l = 5 m και βάρους w = 300 N . Η σανίδα κρέμεται από δύο κατακόρυφα σχοινιά που είναι δεμένα στα άκρα Α και Β.

α. Να εκφράσετε τα μέτρα των τάσεων T_A και T_B των δύο σχοινιών σε συνάρτηση με την απόσταση x του ελαιοχρωματιστή από το άκρο Α της σανίδας.

β. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης T_A ;



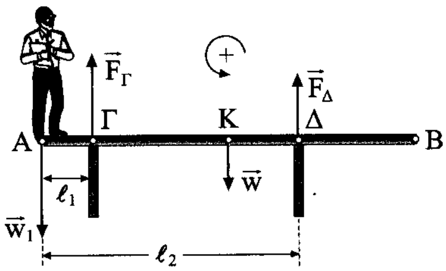
γ. Για ποια τιμή της απόστασης x, το μέτρο της τάσης T_A είναι τριπλάσιο από το μέτρο της τάσης T_B ; Να θεωρηθεί ότι τα σχοινιά παραμένουν συνεχώς κατακόρυφα.

Απ: α.T_A =850-140x (S.I.) ή T_B=150+140x (S.I.)

β. $T_{A(max)}$ = 850N , $T_{A(min)}$ =150N γ. x=5/7m

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ομογενής οριζόντια δοκός ΑΒ, μήκους l = 8 m και βάρους w = 300 N , στηρίζεται σε δύο σημεία της Γ και Δ που απέχουν από το άκρο Α αποστάσεις l_1 = 1 m και l_2 = 5 m , αντίστοιχα. Ένας άνθρωπος βάρους w_1= 600 N στέκεται πάνω στη δοκό, στο άκρο Α.



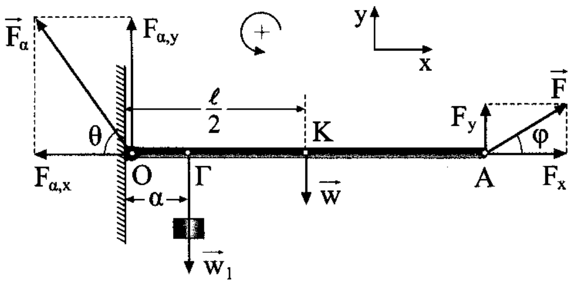
α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη σανίδα από τα δύο στηρίγματα.

β. Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να προχωρήσει ο άνθρωπος πάνω στη σανίδα, πριν αυτή ανατραπεί;

Απ: α. $F_Γ$ =825N , $F_Δ$ =75N β.x=5,5 m

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Ομογενής δοκός ΟΑ, μήκους l = 3m και βάρους w = 100 N, ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Ο της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, ώστε η δοκός να μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Σε απόσταση α = 0,5 m από το άκρο Ο της δοκού κρέμεται με αβαρές σχοινί σώμα βάρους w_1 = 300 N . Στο άκρο Α της δοκού ασκείται δύναμη F , η οποία σχηματίζει γωνία φ = 30° με τον κατά μήκος άξονα της δοκού, ενώ ο φορέας της βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο.



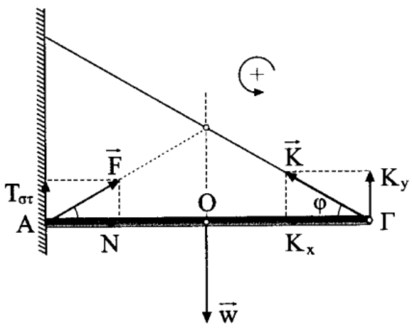
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F .

β. Να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση.

Απ: α.F=200N β.$F_α=200\sqrt{3}$ N , θ=60^0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Ομογενής δοκός ΑΓ, βάρους w = 100 N, ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της δοκού εφάπτεται σε κατακόρυφο τοίχο, ο οποίος δεν είναι λείος. Το άκρο Γ της δοκού συνδέεται με τον τοίχο με σχοινί το οποίο σχηματίζει γωνία φ =30° με τη δοκό. Να υπολογίσετε:



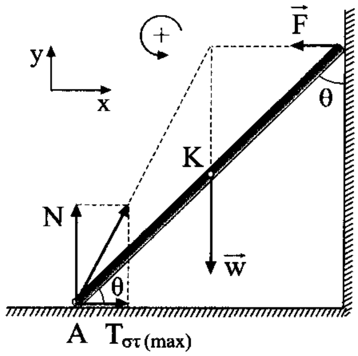
α. το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σχοινί στη ράβδο.

β. την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ της δοκού και του τοίχου, ώστε η δοκός να διατηρείται οριζόντια.

Απ: α.K=100N β. $μ_{s(min)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Ομογενής σκάλα, μήκους l = 2m και βάρους w = 200 N, ισορροπεί με το ένα άκρο της Α σε οριζόντιο δάπεδο και το άλλο άκρο της Β σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Μεταξύ σκάλας και δαπέδου υπάρχει τριβή. Όταν η σκάλα σχηματίζει με τον τοίχο γωνία θ = 45^0 είναι έτοιμη να ολισθήσει. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο της κάθετης αντίδρασης του δαπέδου στο άκρο Α της σκάλας.

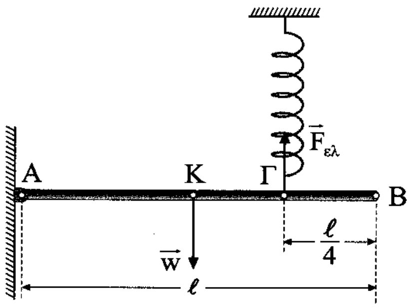
β. το μέτρο της στατικής τριβής στο άκρο Α της σκάλας.

γ. το συντελεστή στατικής τριβής της σκάλας με το δάπεδο.

Απ: α. Ν=200 Ν β.$T_{στ.(max)}$=100 Ν γ.$μ_s$=0,5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους l και βάρους w = 120N, ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το σημείο Γ της ράβδου, το οποίο απέχει από το άκρο της Β απόσταση $l/4$, στερεώνεται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκους είναι Δl = 0,1m .



α. Να αποδείξετε ότι η δύναμη F_A που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει κατακόρυφη διεύθυνση.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F_A.

γ. Να προσδιορίσετε τη σταθερά του ελατηρίου.

Απ:α. $F_{A,x}$=0 και F_A=$F_{A,y}$ β. F_A = 40N γ. Κ = 800N/m

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μία ομογενής ράβδος ΑΒ έχει μήκος l= 3 m και βάρος w = 100 N . Στα άκρα Α και Β της ράβδου κρέμονται με σχοινιά δύο σώματα που έχουν βάρη w_1= 150N και w_2 = 50 N , αντίστοιχα.

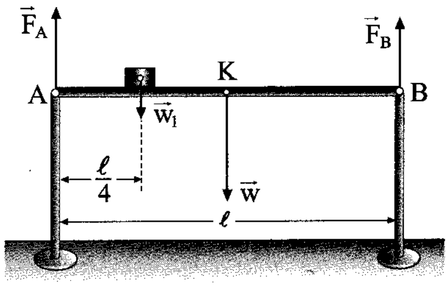
α. Σε ποιο σημείο της πρέπει να στηρίξουμε τη ράβδο, ώστε να ισορροπεί οριζόντια;

β. Ποιο θα είναι τότε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο υποστήριγμα;

Απ: (ΑΟ) = 1 m β. F'=F = 300N

2. Ομογενής ράβδος ΑΒ, βάρους w = 70N, στηρίζεται στα άκρα της Α και Β με δύο στύλους, ώστε να είναι οριζόντια.

Ένα σώμα, βάρους w_1 = 20 N , τοποθετείται πάνω στη ράβδο σε απόσταση από το ένα άκρο της ίση με το ένα τέταρτο του μήκους της. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκεί η ράβδος στους δύο στύλους.



Απ: F_A = 50N β. F_B=40N

3. Ένα όχημα βάρους w_1 = 200 KN διέρχεται από μια γέφυρα ΑΒ, μήκους l = 50m και βάρους

w_2 = 1000 KN . Η γέφυρα είναι κατασκευασμένη από ομογενές υλικό και στηρίζεται σε δύο στύλους που βρίσκονται στα άκρα της. Το όχημα, το οποίο θεωρούμε ως υλικό σημείο, κατευθύνεται από το άκρο Α προς το άκρο Β της γέφυρας.

α. Να εκφράσετε τα μέτρα των αντιδράσεων F_A και F_B των δύο στύλων στήριξης της γέφυρας σε συνάρτηση με την απόσταση x του οχήματος από το άκρο της Α.

β. Να παραστήσετε σε βαθμολογημένους άξονες, στο ίδιο διάγραμμα, τις σχέσεις F_A=f(x) και F_B=f(x).

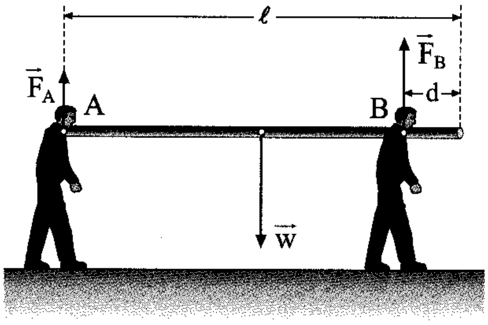
γ . Για ποια τιμή της απόστασης x, τα μέτρα των αντιδράσεων των δύο στύλων έχουν λόγο

F_A/F_B= 7 /8;

Απ: α. F_A = 700 – 4x (το x σε m,το F_A σε KN)

F_B = 500 + 4x (το x σε m,το F_B σε KN) γ. x=35m

4.Δύο εργάτες Α και Β μεταφέρουν στους ώμους τους μια οριζόντια ομογενή δοκό, μήκους $l = 6$ m και βάρους

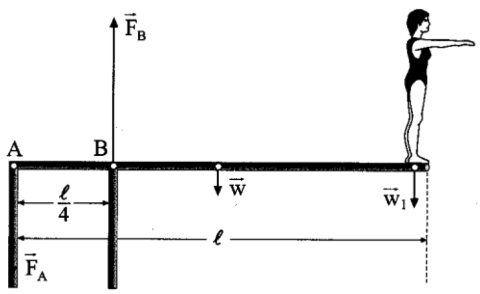


w = 600N. Η δοκός στηρίζεται στον εργάτη Α με το ένα άκρο της και στον εργάτη Β με ένα σημείο της που απέχει απόσταση d = 1 m από το άλλο άκρο της.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται κάθε εργάτης από την δοκό.

β. Με ποιο σημείο της πρέπει η δοκός να στηρίζεται στον εργάτη Β, ώστε αυτός να δέχεται διπλάσια δύναμη από τον εργάτη Α;

Απ: α. $F'_A = F_A = 240$N, $F'_B = F_B = 360$N β. x=1,5m

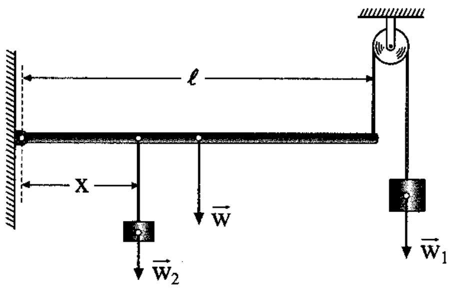


5.Μια αθλήτρια καταδύσεων, βάρους $w_1 = 500$ N , στέκεται στο ένα άκρο μιας ομογενούς σανίδας καταδύσεων, η οποία έχει μήκος $l = 3$m και βάρος w = 300 N . Η σανίδα είναι στερεωμένη σε δύο κατακόρυφους στύλους Α και Β, οι οποίοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση (ΑΒ) = $\frac{l}{4}$

Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σανίδα από καθένα από τους δυο στύλους.

Απ: α. $F_A = 1800$N, , $F_B = 2600$N

6.Ομογενής δοκός έχει μήκος l=4m και βάρος w=50N. Το ένα άκρο της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άλλο άκρο της είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου αβαρούς σχοινιού που περνάει από το αυλάκι ακίνητης τροχαλίας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



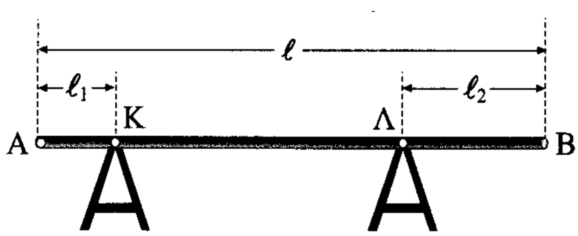
Στο άλλο άκρο του σχοινιού έχει δεθεί σώμα βάρους w_1=30N.

α. Σε ποιο σημείο της δοκού πρέπει να κρεμάσουμε με αβαρές σχοινί ένα δεύτερο σώμα βάρους $w_2 = 20$ N , ώστε η δοκός να ισορροπεί οριζόντια;

β. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη δοκό από την άρθρωση;

Απ:α. x=1m β. $F_A = 40$N

7.Μια ράβδος ΑΒ, μήκους l = 7m και βάρους w=80 N, στηρίζεται στα σημεία της Κ και Λ και διατηρείται οριζόντια. Το σημείο Κ απέχει απόσταση l_1 = 1 m από το άκρο Α , ενώ το σημείο Λ απέχει απόσταση l_2=2m από το άκρο Β.

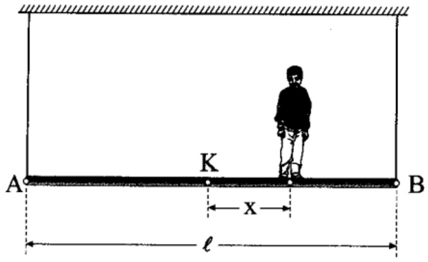


α. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή F_{min} του μέτρου της δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στη ράβδο, ώστε αυτή να ανατραπεί;

β. Αν το μέτρο της δύναμης F είναι F_{min} /2 ποια είναι τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν τα δύο υποστηρίγματα στη ράβδο;

Απ: α. F_{min}= 60N β. F_K=5N , F_Λ = 105 N

8.Ομογενής δοκός ΑΒ, μήκους *l*=4m και βάρους w_l = 100N , είναι κρεμασμένη από τα άκρα της με δύο κατακόρυφα σχοινιά και διατηρείται οριζόντια. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης με την οποία μπορούν να τεντωθούν τα δύο σχοινιά χωρίς να "σπάσουν" είναι T_{max} = 650 N .



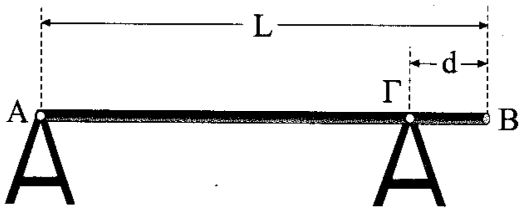
α, Σε πόση απόσταση x από το κέντρο μάζας της δοκού μπορεί να μετακινηθεί ένας

άνθρωπος, βάρους w_2 = 800N , ο οποίος στέκεται πάνω στη δοκό, χωρίς να "σπάσει" κάποιο από τα δύο σχοινιά;

β. Ποιος είναι ο λόγος των μέτρων των τάσεων των δύο σχοινιών, όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στην απόσταση x;

Απ: α. x=lm β. $\frac{T_A}{T_B} = \frac{5}{13}$

9.Ομογενής δοκός ΑΒ, μήκους L=3m και βάρους



w = 50 N, ισορροπεί οριζόντια, στηριζόμενη στο άκρο Α και στο σημείο Γ, που απέχει από το άλλο άκρο Β απόσταση d= 0,5m, όπως φαίνεται στο σχήμα.

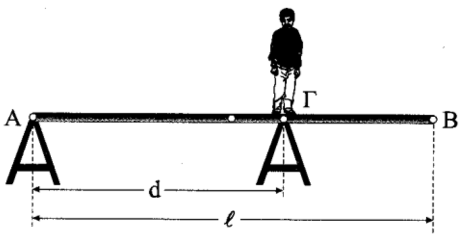
α. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη δοκό στα σημεία Α και Γ.

β. Στο άκρο Β της δοκού τοποθετείται σώμα βάρους W_1 και παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στη δοκό από το στήριγμα στο άκρο Α ελαττώνεται στο μισό. Να υπολογίσετε το βάρος w_1 του σώματος.

Απ: α. F_A=20N , F_Γ =30N β. w_l=50N

10.Ομογενής δοκός ΑΒ μήκους *l* =4m και βάρους

w_1 = 600N , στηριζόμενη στο άκρο Α και σε ένα σημείο Γ, το οποίο απέχει απόσταση d = 2,5 m από το άκρο Α, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ένα παιδί βάρους w_2 = 300 N στέκεται πάνω στη δοκό, στο σημείο Γ, και αρχίζει να προχωράει προς το άκρο Β .

α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όταν το παιδί βρίσκεται σε απόσταση x από το σημείο Γ.

β. Να εκφράσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν στη δοκό τα στηρίγματα, σε συνάρτηση με την απόσταση x.

γ . Μέχρι ποια απόσταση μπορεί να προχωρήσει το παιδί, χωρίς να ανατραπεί η δοκός;

δ. Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί στη δοκό το υποστήριγμα στο σημείο Γ, στην περίπτωση του ερωτήματος (γ);

Απ: β. $F_Γ=780+120x$ (S.I.) , $F_A=120-120x$ (S.I.) γ. x=1m δ. $F_Γ = 900$ N

11.Μια ανομοιογενής ράβδος ΑΒ έχει μήκος l= 105 cm . Όταν η ράβδος δεθεί από το άκρο Α σε δυναμόμετρο, ενώ το άκρο Β στηρίζεται σε λείο δάπεδο, η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι

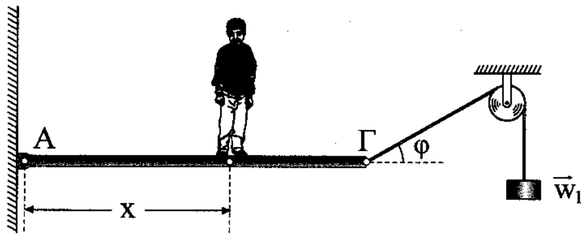
F_1 = 40 N . Όταν η ράβδος δεθεί από το άκρο Β στο ίδιο δυναμόμετρο, ενώ το άκρο Α στηρίζεται στο δάπεδο, η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι F_2 = 30N.

α. Να προσδιορίσετε τη θέση του κέντρου μάζας της ράβδου.

β. Να υπολογίσετε το βάρος της ράβδου.

Απ: α. x=0,45m β. w = 70 N

12.Ομογενής δοκός ΑΓ, μήκους l = 4m και βάρους w = 100 N , στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση, ενώ στο άλλο άκρο της είναι δεμένο νήμα, το οποίο συγκρατεί σώμα βάρους w_1 = 400 N με τη βοήθεια τροχαλίας. Ένα παιδί βάρους w_2 =300 N στέκεται πάνω στη δοκό, σε απόσταση x από την άρθρωση, έτσι ώστε η δοκός να ισορροπεί οριζόντια και το νήμα να σχηματίζει γωνία φ = 30° με τον κατά μήκος άξονα της δοκού, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.

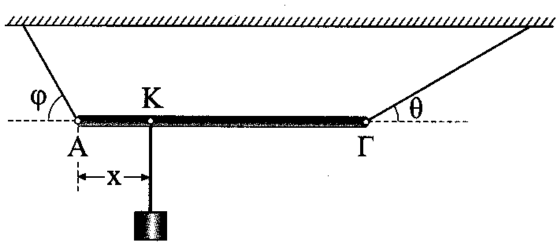
β. Ν α γράψετε τις συνθήκες ισορροπίας της δοκού.

γ. Να προσδιορίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στη δοκό.

δ. Να υπολογίσετε την απόσταση Χ.

Απ: β. $ΣF_x = 0$, $ΣF_y = 0$ και $Στ = 0$ γ. $F_A = 400$ N και $θ = 30^0$ δ. x=2m

13.Ράβδος ΑΓ έχει μήκος l = 2 m και αμελητέο βάρος. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια δύο σχοινιών , τα 0ποία είναι δεμένα στα άκρα της Α και Γ και σχηματίζουν με τη ράβδο γωνίες φ ==60^0 και θ = 30°, αντίστοιχα. Σε απόσταση x από το άκρο Α της ράβδου κρέμεται με αβαρές σχοινί σώμα βάρους w, όπως φαίνεται στο σχήμα.

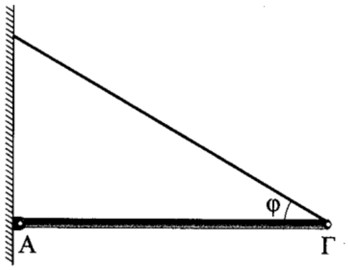


α. Να βρείτε τη σχέση των μέτρων των τάσεων των δύο σχοινιών.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση x.

Απ: α. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{3}}{1}$ β. x=0,5m

14.Ομογενής δοκός ΑΓ βάρους w = 200N, ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άκρο Γ συνδέεται με τον τοίχο με σχοινί που σχηματίζει γωνία φ = 30° με τη δοκό.



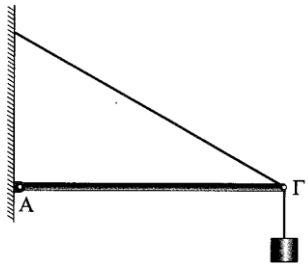
α. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης Τ του σχοινιού.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F που ασκεί η άρθρωση στη δοκό.

γ. Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση της δύναμης F. Τι παρατηρείτε;

Απ: α. Τ=200Ν β. F = 200 N γ. $\theta=30^0$

15.Ομογενής δοκός ΑΓ, μήκους l =4m και βάρους w_l = 200N , ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άκρο Γ συνδέεται με τον τοίχο με σχοινί μήκους d = 5 m. Στο άκρο Γ της δοκού κρέμεται με αβαρές σχοινί σώμα βάρους w_2 = 1100N .Να υπολογίσετε:

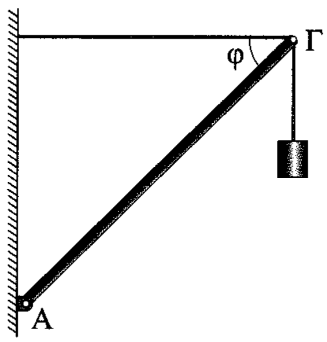


α. το μέτρο της τάσης του σχοινιού.

β. τα μέτρα των συνιστωσών της δύναμης που ασκεί η άρθρωση στη δοκό.

Απ:α. Τ=2000Ν β. F_x = 1600 N , F_y =100N

16.Ομογενής ράβδος ΑΓ βάρους w_l = 40N, ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άκρο r συνδέεται με τον τοίχο με οριζόντιο σχοινί, το οποίο σχηματίζει γωνία φ= 45^0 με τη ράβδο. Στο άκρο Γ κρέμεται με αβαρές σχοινί σώμα βάρους w_2 = 40 N .

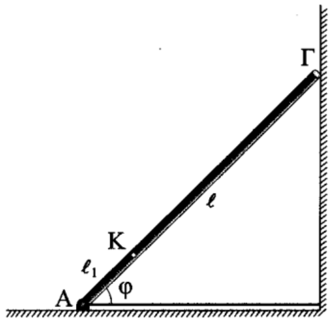


α. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το οριζόντιο σχοινί.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο και να προσδιορίσετε τη διεύθυνση της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

Απ:α. Τ=60Ν β. F= 100 N και εφθ=4/3

17.Μη ομογενής ράβδος ΑΓ , μήκους l = 1 m και βάρους w = 50 N, στηρίζεται σε λείο δάπεδο και σε λείο κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κατώτερο άκρο της ράβδου συνδέεται με τον τοίχο με οριζόντιο σχοινί. Το κέντρο μάζας Κ της ράβδου βρίσκεται σε απόσταση l_1= 0,2m από το κατώτερο άκρο της.



α. Αν τη τάση του σχοινιού έχει μέτρο Τ= 10Ν, να βρεθεί η τιμή της γωνίας φ που σχηματίζει η ράβδος με το δάπεδο.

β. Αν το όριο θραύσης του σχοινιού είναι T_θ = 70 N , σε ποια μέγιστη απόσταση από το κατώτερο άκρο της ράβδου πρέπει να κρεμάσουμε με αβαρές σχοινί ένα σώμα βάρους

w_1 = 100 N , χωρίς να σπάσει το οριζόντιο σχοινί;

Απ:α. φ = 45^0 β. x= 0,6m

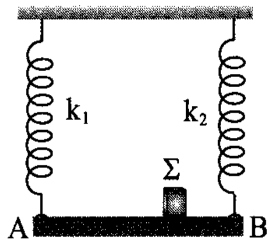
18.Ομογενής ράβδος, μήκους l= 2 m και αμελητέου βάρους, στηρίζεται σε οριζόντιο δάπεδο και σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με το δάπεδο είναι θ = 60° . Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της ράβδου και του δαπέδου είναι μ_s = 0,5. Αν σε απόσταση x από το κατώτερο άκρο της ράβδου κρεμάσουμε με αβαρές σχοινί σώμα βάρους w= 20 N , η ράβδος είναι έτοιμη να ολισθήσει. Να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από τον τοίχο.

β. την απόσταση x.

Απ:α. F=l0N β. x=1,73m

19. Τα ελατήρια του σχήματος είχαν το ίδιο μήκος πριν δημιουργήσουμε το σύστημα του σχήματος. Η ομογενής ράβδος έχει μήκος l και βάρος w=200N. Το σώμα Σ έχει βάρος w_1 = 100N και απέχει από το ακρό Β απόσταση l/4.



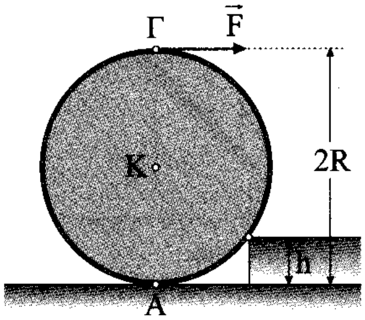
Να υπολογίσετε:

α. τις δυνάμεις που ασκούν τα ελατήρια στη ράβδο και

β. τον λόγο των σταθερών των ελατηρίων.

Απ: α) F_1=125 N , F_2=175 N β) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{7}$

20.Τροχός, ακτίνας R = 50 cm και βάρους w=60N, βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με σκαλοπάτι ύψους h = 10 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο ανώτερο σημείο Γ του τροχού ασκείται οριζόντια δύναμη F .



α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον τροχό και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας για το φορέα της δύναμης που ασκεί το σκαλοπάτι στον τροχό.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο F_1 της δύναμης F , ώστε ο τροχός να χάσει οριακά την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο.

γ. Να αποδείξετε ότι, αν το μέτρο της δύναμης F αυξηθεί ελάχιστα από την τιμή F_1, ο τροχός θα υπερπηδήσει το εμπόδιο.

Απ: β.F_1=20 N