

Propiedades ondulatorias de las partículas

Fernando Barreiro

Universidad Autónoma de Madrid

Fundamentos Física III

En Física clásica la distinción entre partículas y ondas es muy clara:

- Partículas
 - Obedecen leyes mecánica newtoniana como p.ej. para colisiones
 - Su energía y posición están bien localizadas
- Ondas obedecen a ecuaciones de ondas
 - Dan lugar a interferencia y difracción
 - Su energía se distribuye sobre frente de ondas, su posición indeterminada

Experimento doble rendija muestra la naturaleza ondulatoria de la luz, los efectos fotoeléctrico y Compton muestran su naturaleza corpuscular. Es esta dualidad propia de la luz o puede extenderse a partículas otras que los fotones?

Hipótesis de Louis de Broglie: A toda partícula moviéndose con impulso p asociamos una onda con $\lambda = \frac{h}{p}$.

Ej: Calcular longitud onda de Broglie para :

- automóvil con $m = 1000 \text{ kg}$ y $v = 100 \text{ m/s}$
- electrón con energía cinética 1 eV , siendo $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$
- electrón con energía cinética 100 MeV

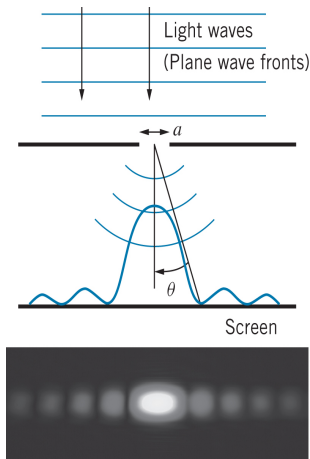
Sol:

- $\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{(10^3 \text{ kg}) \cdot (100 \text{ ms}^{-1})} = 6.6 \times 10^{-39} \text{ m}$
- $cp = c\sqrt{2m_e K} = \sqrt{2m_e c^2 K} = \sqrt{2(5.1 \times 10^5 \text{ eV})(1 \text{ eV})} = 10^3 \text{ eV} \Rightarrow$
 $\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10^3 \text{ eV}} = 1.2 \text{ nm}$
- Como este electrón es ultrarelativista : $\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{1240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{100 \text{ MeV}} = 12 \text{ fm}$

NOTA : Determinar longitud onda de Broglie objetos macroscópicos muy difícil, por ejemplo en un experimento de rendija doble $\Delta y = \lambda D/d \sim \lambda$

Recordatorio: difracción de la luz por una rendija

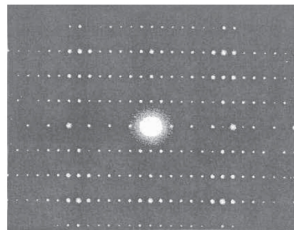
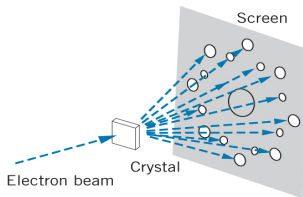
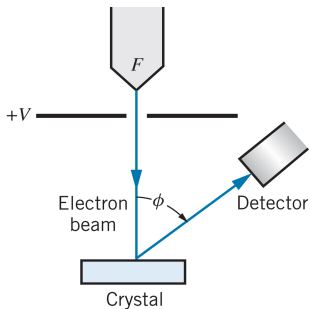
- Luz de longitud de onda λ incidente sobre rendija de anchura a
- Condición mínimos difracción: $a \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$; $n = 1, 2, 3, \dots$



Sin embargo, primeras evidencias comportamiento ondulatorio haces electrones vienen de experimentos de difracción sobre un cristal no sobre una única rendija

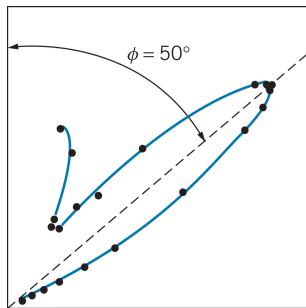
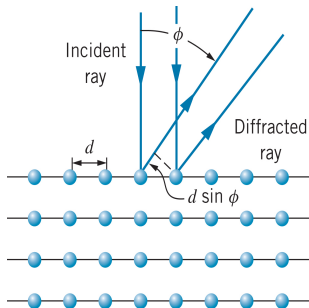
Evidencia experimental ondas de Broglie : difracción electrones por un cristal

- Experimentos de difracción de haces de electrones sobre cristales dan resultados similares a los obtenidos con rayos X
- C. Davisson, L. Germer (1926), G.P. Thomson (1927)
- $V = 54 \text{ V}$ en dispositivo adjunto.



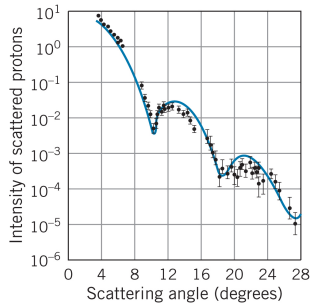
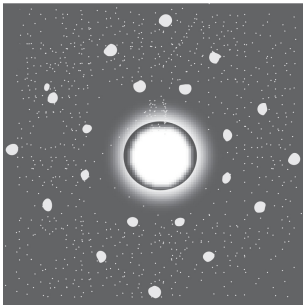
Evidencia experimental ondas de Broglie : difracción electrones por un cristal

- Átomos del cristal actúan como centros de dispersión
- Electrones tienen poca energía i.e. no penetran en el cristal, situación similar a reflexión luz por cristal
- Condición interferencia máxima : $d \cdot \sin\phi = n\lambda$, $n = 1, 2, 3...$
- En Ni $d = 0.215 \text{ nm}$ luego si corresponde primer máximo $\lambda = d \cdot \sin 50^\circ = 0.165 \text{ nm}$
- Haz electrones estaba acelerado a 54 V luego $p = \sqrt{2mK} = (1/c)\sqrt{2mc^2K} = (1/c)\sqrt{2(0.511 \text{ MeV})(54 \text{ eV})} = 7430 \text{ eV}/c$
- Finalmente $\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{7430 \text{ eV}} = 0.167 \text{ nm}$



Evidencia experimental ondas de Broglie : difracción neutrones por un cristal y scattering difractivo de protones

- Cualquier partícula, no solo los electrones, tiene onda de de Broglie asociada con $\lambda = h/p$.
- Neutrones producidos en reactores nucleares tienen $p \Leftrightarrow \lambda \sim 0.1 \text{ nm} \Rightarrow$ aptos para difracción sobre cristal, fig. adjunta izda, CINA como ejemplo
- Para estudiar estructura nuclear se necesitan longitudes de onda menores $O(10^{-15} \text{ m}) = 1 \text{ fm}$
- Figura adjunta, dcha, muestra patrón de difracción al estudiar scattering de protones de $K \sim 1 \text{ GeV}$ sobre O_2



Si $R_0 = 3.0 \text{ fm}$ calcular los ángulos a que aparecerían los tres primeros mínimos difractivos, sabiendo que la masa en reposo del protón es $0.94 \text{ GeV}/c^2$ y que para scattering sobre discos de radio R la fórmula de difracción se lee

$$\sin \theta = \frac{1.22n\lambda}{2R} \quad (1)$$

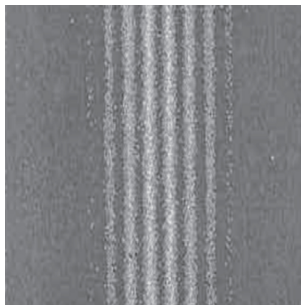
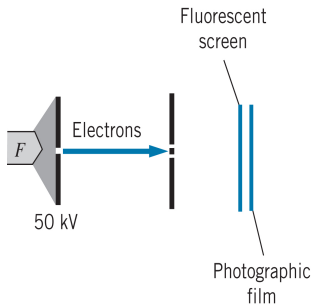
El haz de protones tiene una energía cinética de 1 GeV .

Sol.:

- La energía total del protón será 1.94 GeV y su impulso
 $p = \sqrt{E^2 - m_0^2} = \sqrt{1.94^2 - 0.94^2} = 1.7 \text{ GeV}/c$
- $\lambda = h/p = hc/pc = (1240 \text{ MeV}\cdot\text{fm})/(1700 \text{ MeV}) = 0.73 \text{ fm}$
- $\sin \theta = \frac{1.22n\lambda}{2R} = \frac{1.22 \times 0.73 \text{ fm}}{6.0 \text{ fm}} = 0.148$
- Primer mínimo a $\theta_1 = \text{arc sin } 0.148 = 8.5^\circ$
- Segundo mínimo a $\theta_2 = \text{arc sin } 0.296 = 17.2^\circ$
- Tercer mínimo a $\theta_3 = \text{arc sin } 0.444 = 26.4^\circ$

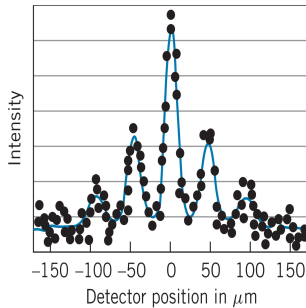
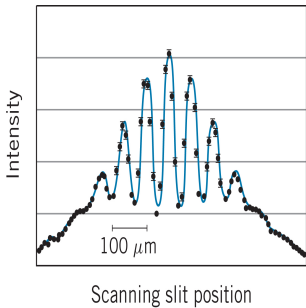
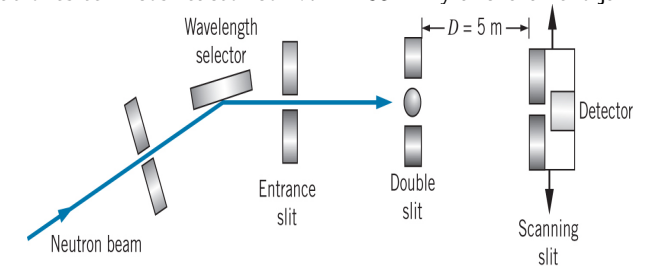
Evidencia experimental ondas de Broglie : experimentos con doble rendija

- Históricamente experimento doble rendija Young supuso un hito al mostrar evidencia naturaleza ondulatoria de la luz
- En principio se podrian repetir estos experimentos con particulas y demostrar su naturaleza ondulatoria a la de Broglie
- Dificultades tecnológicas los impidieron hasta los 60's
- Experimentos en los 60 con electrones \Rightarrow *microscopio electrónico*, esquema en figura adjunta
- Electrones acelerados a 50 kV $\Rightarrow \lambda = 5.4 \text{ pm}$
- Separación doble rendija $2 \mu\text{m}$ y anchura $0.5 \mu\text{m}$
- Patrones de interferencia similares a los observados con rayos X



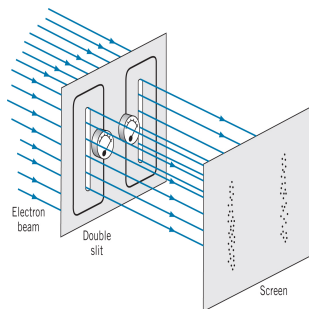
Evidencia experimental ondas de Broglie : neutrones sobre doble rendija

- Neutrones térmicos reactor con $\lambda = 1.85 \text{ nm}$ y anchura rendija $22 \mu\text{m}$



- $y_n = n \frac{\lambda D}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{d \Delta y}{D} = \frac{(126 \mu\text{m})(75 \mu\text{m})}{5 \text{ m}} = 1.89 \text{ nm} \sim 1.85 \text{ nm de partida}$

- En un experimento de doble rendija es tentador tratar de averiguar por cual de las dos rendijas pasó el electrón-neutrón-partícula
- El resultado de un experimento así, como en la figura adjunta, resultaría en la desaparición del patrón de interferencia
- **Principio de complementariedad : la naturaleza corpuscular u ondulatoria de una partícula no pueden ser puestas de manifiesto simultáneamente**



Se dice que $p(x)$ es una densidad de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua X si

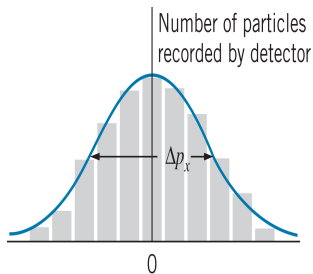
- $p(x) \geq 0, \forall x$
- $\int p(x)dx = 1$

Se define

- $E(X) = \langle x \rangle = \int xp(x)dx$
- $E(X^2) = \langle x^2 \rangle = \int x^2p(x)dx$
- $E(X^n) = \langle x^n \rangle = \int x^n p(x)dx$

Puede demostrarse que conocer $p(x)$ equivale a conocer $\langle x^n \rangle, \forall n$. En particular se define

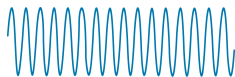
- $\sigma_x^2 = E(X - \langle x \rangle)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \Rightarrow \Delta x = \sigma_x$
- Ejemplo: Supongamos $X \equiv \text{medida } p_x$ y $\langle p_x \rangle = 0$



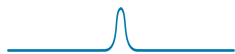
Relaciones incertidumbre para ondas clásicas

En Mecánica Cuántica queremos usar ondas de de Broglie para representar a partículas. La amplitud de onda debe darnos información sobre localización.

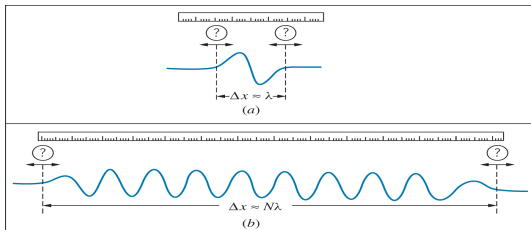
- Onda sinusoidal : permite buena determinación λ pero no sirve para localizar una partícula, fig. izda arriba
- Un pulso estrecho si serviría pero como definir longitud de onda para un pulso, fig. izda. abajo



(a)



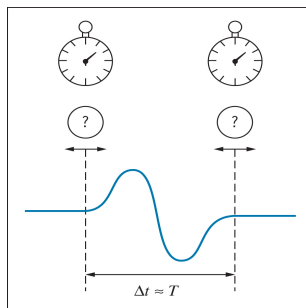
(b)



- El mismo problema aparece cuando trabajamos con paquetes de ondas clásicos, figura adjunta dcha-arriba. Si $\Delta x \sim \lambda$ y $\Delta \lambda \sim \epsilon \lambda$, se tiene $\Delta x \Delta \lambda \sim \epsilon \lambda^2$
- Si consideramos N ciclos, fig. dcha-abajo: $\Delta x \sim N\lambda$ y $\Delta \lambda \sim \epsilon \lambda / N \Rightarrow$

$$\Delta x \Delta \lambda \sim \epsilon \lambda^2 \quad (2)$$

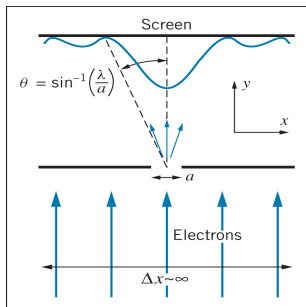
Supongamos de manera alternativa que queremos medir el periodo de una onda.



- $\Delta t \sim T$
- Suponemos $\Delta T \sim \epsilon T \Rightarrow \Delta t \Delta T \sim \epsilon T^2$
- Pero $\nu = 1/T \Rightarrow \Delta \nu = \Delta T / T^2 \Rightarrow \Delta \nu \Delta t = (1/T^2) \Delta T \Delta t \sim \epsilon$

Relaciones de incertidumbre de Heisenberg

- Apliquemos las relaciones de incertidumbre para ondas clásicas que acabamos de discutir a ondas de de Broglie : $p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{\lambda^2} \cdot \Delta \lambda$
- Como teníamos $\Delta x \Delta \lambda \sim \epsilon \lambda^2 \Rightarrow \Delta x \Delta p \sim \epsilon h$
- En QM \exists prescripción cálculo Δx y $\Delta p \Rightarrow$ paquete de ondas que minimiza el producto $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \Rightarrow \epsilon \sim 1/(4\pi)$. Es usual tomar $\Delta x \Delta p \sim \hbar$
- Ej.: electrones incidentes rendija. Antes difracción $\Delta p_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$.
- Después difracción: $\Delta x = a \Rightarrow \Delta p_x = \hbar/a$. Pero $\sin\theta = \tan\theta = \frac{p_x}{p_y} = \frac{\hbar/a}{h/\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi a} < \frac{\lambda}{a} \equiv$: primer pico difracción
- Si $E = h\nu \Rightarrow \Delta E = h\Delta\nu \Rightarrow \Delta E \Delta t = h\Delta\nu \Delta t \sim \epsilon h$. Es usual tomar $\Delta E \Delta t \sim \hbar$



No es posible determinar simultáneamente la posición y el impulso de una partícula con precisión infinita

No es posible determinar simultáneamente la energía y la coordenada temporal de una partícula con precisión infinita

Ej. 1 : Un electrón se mueve según OX con velocidad $v_x = 3.6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Si la precisión en la medida de su velocidad es 1% con que precisión podremos medir simultáneamente su coordenada x .

Sol.

- $p_x = m_e \cdot v_x = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.6 \times 10^6 \text{ m/s}) = 3.3 \times 10^{-24} \text{ kg.m.s}^{-1} \Rightarrow \Delta p_x = 3.3 \times 10^{-26} \text{ kg.m.s}^{-1}$
- $\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{3.3 \times 10^{-26} \text{ kg.m.s}^{-1}} = 3.2 \text{ nm}$

Ej. 2 : Una pelota de béisbol de masa $m = 0.145 \text{ kg}$ se mueve con velocidad $v_x = 42.5 \text{ m/s}$. Repetir el ejercicio anterior.

Sol.

- $p_x = m_e \cdot v_x = (0.145 \text{ kg})(42.5 \text{ m/s}) = 6.16 \text{ kg.m.s}^{-1} \Rightarrow \Delta p_x = 6.16 \times 10^{-2} \text{ kg.m.s}^{-1}$
- $\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{6.16 \times 10^{-2} \text{ kg.m.s}^{-1}} = 1.7 \times 10^{-33} \text{ m}$

Supongamos que los electrones observados en la desintegración nuclear beta tienen una indeterminación en su posición de 10^{-14} m i.e. el diámetro de un núcleo. Determinar el rango de energías cinéticas para los betas emitidos.

Sol.

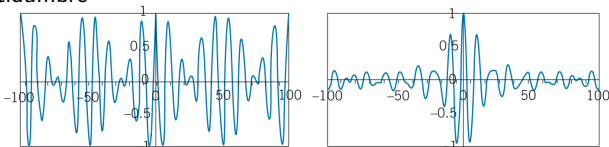
- $\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar c}{c \Delta x} = \frac{1}{c} \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{10 \text{ fm}} = 19.7 \text{ MeV}/c$
- $K = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 = \sqrt{(19.7 \text{ MeV})^2 + (0.5 \text{ MeV})^2} - 0.5 \text{ MeV} = 19 \text{ MeV}$
- Hemos tomado $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$

Ej. 2 : Si $m_{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$ y $\tau_{\pi^+} = 26 \text{ ns}$ determinar la incertidumbre en la medida de la energía del π^+ . Lo mismo para el meson ρ con masa de $765 \text{ MeV}/c^2$ y vida media $4.4 \times 10^{-24} \text{ s}$.

Sol.

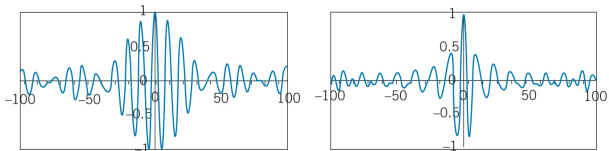
- $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{26 \times 10^{-9} \text{ s}} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ eV} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{2.5 \times 10^{-14} \text{ MeV}}{140 \text{ MeV}} = 1.8 \times 10^{-16}$
- $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{4.4 \times 10^{-24} \text{ s}} = 1.5 \times 10^8 \text{ eV} = 150 \text{ MeV} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{150 \text{ MeV}}{765 \text{ MeV}} = 0.20$

- Idea de paquete de ondas: onda cuya amplitud es grande sobre una región finita de espacio-tiempo y pequeña fuera de ella.
- Construcción paquete de ondas : superposición ondas diferentes λ s
- Ej: $y(x) = A_1 \cos(\frac{2\pi x}{\lambda_1}) + A_2 \cos(\frac{2\pi x}{\lambda_2})$
- Se observa, como en la figura adjunta, aparición de **pulsaciones**
- a) suma dos ondas $\lambda = 9, 11$, b) cinco ondas con $9 < \lambda_i < 11$, c) 9 ondas con $8 < \lambda_i < 12$, y d) trece ondas con $7 < \lambda_i < 13$,
- Si aumento número longitudes de ondas localizo más el paquete: principio incertidumbre



(a)

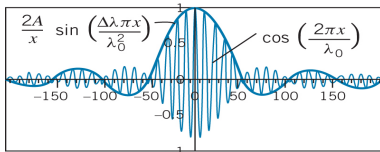
(c)



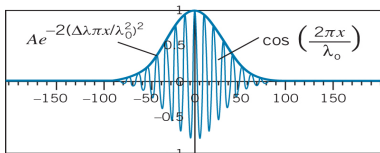
(b)

(d)

- Ej: $y(x) = A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) + A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_2}\right) = 2A\cos\left(\frac{\pi x}{\lambda_1} - \frac{\pi x}{\lambda_2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{\lambda_1} + \frac{\pi x}{\lambda_2}\right)$
- $y(x) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\lambda\pi x}{\lambda_{ave}^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{ave}}\right)$ con $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ y $\lambda_{ave} = 0.5(\lambda_1 + \lambda_2)$
- La amplitud aparece **modulada** por primer término ecuación anterior
- Para evitar onda se repita de $(-\infty, +\infty)$ debo sustituir este término por función que se anule fuera del dominio de localización de la partícula
- Ej.: $y(x) = \frac{2A}{x}\sin\left(\frac{\Delta\lambda\pi x}{\lambda_{ave}^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{ave}}\right)$; $y(x) = Ae^{-2\left(\frac{\Delta\lambda\pi x}{\lambda_{ave}^2}\right)^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_{ave}}\right)$
- $y(x) = \frac{2A}{x}\sin\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(k_0x)$; $y(x) = A\Delta k\sqrt{2\pi}e^{-(\Delta k \cdot x)^2/2}\cos(k_0x)$
- Aquí $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{ave}}$



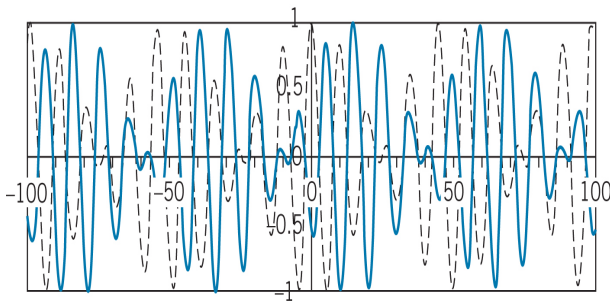
(a)



(b)

Movimiento de un paquete ondas

- Componemos ondas viajeras en lugar de estáticas como antes
- $y(x, t) = A\cos(k_1x - \omega_1t) + A\cos(k_2x - \omega_2t)$
- Recordemos para cada onda : $\mathbf{v}_{\text{fase}} = \lambda\nu = (\omega/\mathbf{k})$.
- Figura adjunta muestra la onda suma a $t = 1$ s para $v_1 = 6$, $v_2 = 4$, $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 11$. Línea de puntos la muestra a $t = 0$ s.
- Onda 1 (2) se ha movido 6 u (res. 4), onda superposición 15 u. Como?
- $y(x, t) = 2A\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t) \Rightarrow$
 $\mathbf{v}_{\text{grupo}} = \Delta\omega/\Delta\mathbf{k} \rightarrow d\omega/d\mathbf{k}$
- Nótese: $\frac{d\omega}{dk} \neq \frac{\omega}{k}$



Una onda se mueve con $v_{fase} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Determinar la velocidad de grupo de un paquete de estas ondas.

Sol.:

- Como $k = 2\pi/\lambda$, podremos escribir $v_{fase} = \sqrt{\frac{g}{k}}$.
- Por otra parte $v_{fase} = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k}} \Rightarrow \omega = \sqrt{gk}$.
- $v_{grupo} = d\omega/dk = \frac{d}{dk} \sqrt{gk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$
- En este caso es v_{grupo} la mitad de la velocidad de fase.

- Partícula localizada y representada por grupo de ondas de de Broglie
- Para cada onda $E = h\nu = \hbar\omega \Rightarrow dE = \hbar d\omega$
- Pero $p = h/\lambda = \hbar k \Rightarrow dp = \hbar dk$
- Luego $v_{grupo} = d\omega/dk = dE/dp$
- Para partícula clásica $E = K = p^2/2m \Rightarrow dE/dp = p/m = v$
- Luego para ondas de de Broglie $v_{grupo} = v_{particula}$

- Longitud onda de Broglie : $\lambda = h/p$
- Difracción por una rendija de anchura a : $a \cdot \sin \theta = n\lambda, n = 1, 2, 3, \dots$
- Incertidumbre clásica: $\Delta x \Delta \lambda \sim \epsilon \lambda^2$; $\Delta \nu \Delta t \sim \epsilon$
- Incertidumbre Heisenberg: $\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$; $\Delta E \Delta t \sim \hbar$
- Paquete de ondas discreto : $y(x) = \sum_i A_i \cos k_i x$
- Paquete de ondas continuo: $y(x) = \int A(k) \cos kx \, dx$
- Velocidad de fase : $v_{fase} = \frac{\omega}{k}$
- Velocidad de grupo paquete: $v_{grupo} = \frac{d\omega}{dk}$