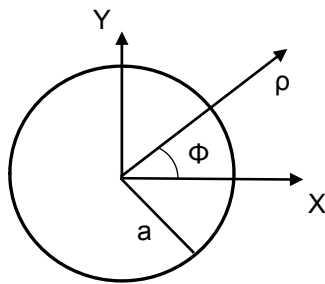


GUÍAS DE ONDAS

GUÍA CIRCULAR: MODOS DE PROPAGACIÓN

Resolución de la Ecuación de Ondas



$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Solución: onda armónica propagándose en la dirección del eje de la guía (eje Z)

$$\vec{E}(\rho, \phi, z, t) = \text{Re} \left[\left(\vec{e}(\rho, \phi) + \hat{z}e_z(\rho, \phi) \right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right]$$
$$\vec{H}(\rho, \phi, z, t) = \text{Re} \left[\left(\vec{h}(\rho, \phi) + \hat{z}h_z(\rho, \phi) \right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right]$$

Resolución de la Ecuación de Ondas

Hay que resolver seis ecuaciones diferenciales:
 tres para el campo eléctrico
 tres para el campo magnético
 (una para cada componente de los campos)

A partir de las Ecuaciones de Maxwell se obtiene que las componentes transversales se pueden poner en función de las componentes longitudinales:

$$\begin{array}{c} E_z \\ H_z \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} E_\rho, E_\phi \\ H_\rho, H_\phi \end{array}$$

Sólo es necesario resolver dos ecuaciones diferenciales:
 para E_z, H_z ,

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$H_z = 0$$

$$\nabla_t^2 e_z(\rho, \phi) + k_c^2 e_z(\rho, \phi) = 0 \quad k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$\nabla_t^2 e_z(\rho, \phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) e_z(\rho, \phi)$$

Ponemos la solución como:

$$e_z(\rho, \phi) = R(\rho)F(\phi)$$

$$R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2}$$

$$R' = \frac{\partial R}{\partial \rho}$$

$$F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$$

$$R'' \cdot F + \frac{R' \cdot F}{\rho} + \frac{R \cdot F''}{\rho^2} + k_c^2 R \cdot F = 0 \quad \text{donde:}$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

Multiplicando por ρ^2 y dividiendo por RF:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + k_c^2 \rho^2 = -\frac{F''}{F}$$

Sólo es función de ρ

Sólo es función de Φ

$$-\frac{F''}{F} = \xi^2$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(k_c^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$F'' + \xi^2 F = 0$$

$$F = A_1 \text{sen } \xi\phi + B_1 \text{cos } \xi\phi$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(k_c^2 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

$$R = C_1 \underbrace{J_{\xi}(k_c \rho)}_{\text{cos}} + D_1 \underbrace{Y_{\xi}(k_c \rho)}_{\text{sen}}$$

Funciones de Bessel

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$e_z(\rho, \phi) = [C_1 J_\xi(k_c \rho) + D_1 Y_\xi(k_c \rho)] (A_1 \sin \xi \phi + B_1 \cos \xi \phi)$$

Como el campo debe tener el mismo valor al pasar de Φ a $\Phi + 2\pi$:

$$\xi = m \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Como : $Y_\xi(k_c \rho) \Big|_{\rho=0} = \infty \implies D_1 = 0$

$$e_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi)$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$e_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi)$$

Condición de contorno:

el campo eléctrico es perpendicular en la superficie de un conductor

$$J_m(k_c a) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) = 0 \implies J_m(k_c a) = 0$$

$$k_c a = \chi_{mn} \quad \text{Ceros de las funciones de Bessel}$$

$$k_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

A cada pareja de m, n corresponde una solución o modo: TM_{mn} .

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$H_z = 0 \quad e_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) \quad k_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$$

A partir de E_z , H_z se puede calcular las demás componentes de los campos eléctrico y magnético

$$E_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\frac{j\beta}{k_c} J'_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z} \quad J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$E_\phi = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{\rho} J_m(k_c \rho) (A \cos m\phi - B \sin m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = -\frac{E_\phi}{Z_{TM}}$$

$$H_\phi = \frac{E_\rho}{Z_{TM}}$$

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TM

$$E_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$k_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$$

$$H_z = 0$$

$$E_\rho = -\frac{j\beta}{k_c} J'_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$E_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{\rho} J_m(k_c \rho) (A \cos m\phi - B \sin m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m}{\rho} J_m(k_c \rho) (A \cos m\phi - B \sin m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$H_\phi = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c} J'_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z}$$

**Clasificación de las soluciones:
Modos de propagación: Modos TE**

$$E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 h_z(\rho, \phi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h_z(\rho, \phi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h_z(\rho, \phi)}{\partial \phi^2} + k_c^2 h_z(\rho, \phi) = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

La solución de esta ecuación es de la forma:

$$h_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi)$$

**Clasificación de las soluciones:
Modos de propagación: Modos TE**

$$h_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi)$$

Condición de contorno:

el campo magnético es paralelo en la superficie de un conductor

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

$$J'_m(k_c a) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) = 0 \quad \implies \quad J'_m(k_c a) = 0$$

$$k_c a = \chi'_{mn} \quad \text{Ceros de las derivadas de las funciones de Bessel}$$

$$k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

A cada pareja de m, n corresponde una solución o modo: TE_{mn}.

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TE

$$E_z = 0 \quad H_z(\rho, \phi) = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z} \quad k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

A partir de E_z , H_z se puede calcular las demás componentes de los campos eléctrico y magnético

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -\frac{j\beta}{k_c} J'_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z} \quad J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{\rho} J_m(k_c \rho) (A \cos m\phi - B \sin m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$k_c a = \chi'_{mn}$$

$$E_\phi = -Z_{TE} H_\rho$$

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Clasificación de las soluciones: Modos de propagación: Modos TE

$$E_z = 0$$

$$k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$H_z = J_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$E_\rho = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m}{\rho} J_m(k_c \rho) (A \cos m\phi - B \sin m\phi) e^{-j\beta z}$$

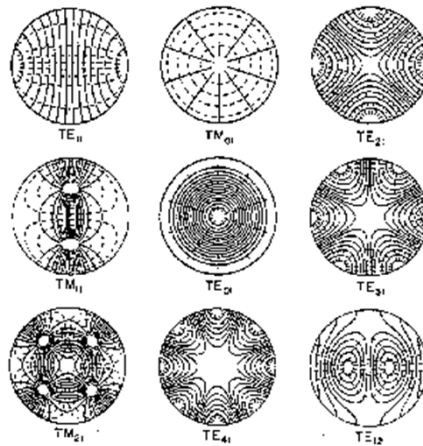
$$J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z}$$

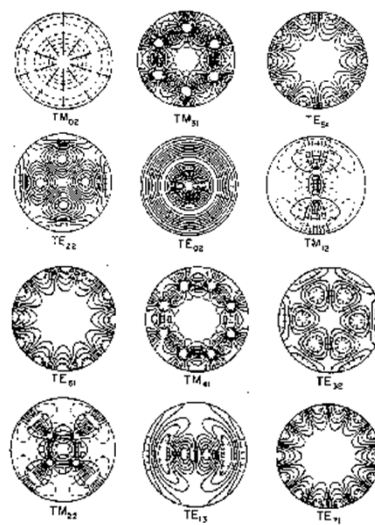
$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c} J'_m(k_c \rho) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) e^{-j\beta z}$$

$$H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m}{\rho} J_m(k_c \rho) (A \cos m\phi - B \sin m\phi) e^{-j\beta z}$$

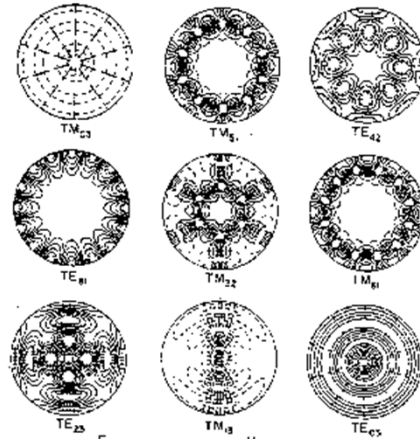
Modos de propagación



Modos de propagación



Modos de propagación



GUÍAS DE ONDAS

GUÍA CIRCULAR: PROPIEDADES

Frecuencia de corte

Modos TM

$$k_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$$

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \dots \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

χ_{mn} Ceros de las funciones de Bessel

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$f_c = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Modos TM_{mn} .

El modo TM con menor frecuencia de corte es el TM_{01}

$$\chi_{01} = 2.4049$$

Frecuencia de corte

Modos TE

$$k_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$\begin{aligned} m &= 0, 1, 2, \dots \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

χ'_{mn} Ceros de las derivadas de las funciones de Bessel

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$f_c = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

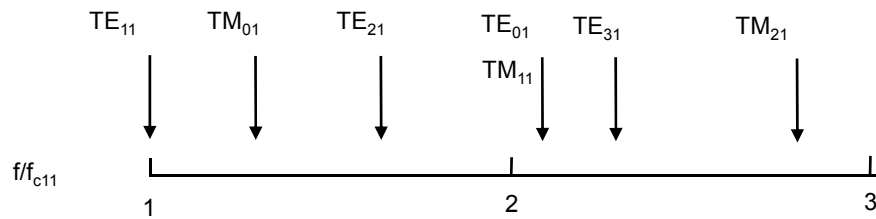
Modos TE_{mn} .

El modo TE con menor frecuencia de corte es el TE_{11}

$$\chi'_{11} = 1.8412$$

El modo fundamental en la guía circular es el TE_{11}

Frecuencia de corte



Los modos TE_{0n} y TM_{1n} tienen la misma frecuencia de corte

Velocidad de fase y de grupo

Longitud de onda: $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$ $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$

Velocidad de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Impedancia

Modos TM:

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_{\rho}}{H_{\phi}} = -\frac{E_{\phi}}{H_{\rho}}$$

$$Z_{\text{TM}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Modos TE:

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_{\rho}}{H_{\phi}} = -\frac{E_{\phi}}{H_{\rho}}$$

$$Z_{\text{TE}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Pérdidas. Constante de atenuación

Pérdidas debidas al conductor

Modos TM:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Modos TE:

$$\alpha_c = \frac{2R_s}{a\eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left\{ \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{(\chi'_{mn})^2 - m^2} \right\}$$

Pérdidas. Constante de atenuación

Pérdidas debidas al dieléctrico

$$\alpha_d = \frac{\beta_0 \varepsilon'' / \varepsilon'}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \delta \equiv \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Modo fundamental: TE_{11}

El modo fundamental es aquél que tiene la frecuencia de corte más baja:

Modo TE_{11}

$$f_c = \frac{\chi'_{11}}{2\pi a \sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\chi'_{11} = 1.8412$$

El siguiente modo es:

Modo TM_{01}

$$f_c = \frac{\chi_{01}}{2\pi a \sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\chi_{01} = 2.4049$$

El ancho de banda para conseguir propagación de un único modo en la guía circular es:

$$\frac{f_c(\text{TM}_{01})}{f_c(\text{TE}_{11})} = \frac{\chi_{01}}{\chi'_{11}} = \frac{2.4049}{1.8412} \approx 1.3$$

⇒

Menor que en una
guía rectangular óptima: 2

Líneas de campo

