

9. RECTAS EN EL PLANO PROYECTIVO

En este tema vamos a explorar algunos aspectos de la geometría de las rectas de un plano proyectivo. Como ya hemos visto, si tenemos un plano proyectivo arbitrario sobre un cuerpo \mathbf{k} y fijamos una referencia proyectiva, podemos establecer una biyección, que es de hecho una proyectividad, entre dicho plano proyectivo y el plano proyectivo estándar $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$. Esto justifica que en este tema trabajemos por simplicidad con rectas de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ principalmente, ya que sabemos que así no perdemos generalidad y capturamos toda la geometría del problema que queremos abordar.

Parametrización de una recta proyectiva

Ejemplo 9.1. Consideramos la recta l de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ y consideramos la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{(1 : 1 : 0), (0 : 1 : 1); (1 : 2 : 1)\}$ de l (comprueba que en efecto \mathcal{R} es una referencia proyectiva de l). ¿Qué quiere decir que un punto $p = (x_0 : x_1 : x_2)$ de l tiene coordenadas (homogéneas) $(t_0 : t_1)$ con respecto a \mathcal{R} ? Es decir, ¿qué punto (de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$) es p ? El punto p es el punto $(t_0 : t_0 + t_1 : t_1)$ (¡compruébalo!). Recordemos que este proceso de asignar a cada valor $(t_0 : t_1) \in \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1$ el punto de l que tiene a $(t_0 : t_1)$ como sus coordenadas respecto de \mathcal{R} nos proporciona una *proyectividad* de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1$ a l (la inversa de la proyectividad $\psi_{\mathcal{R}}$ definida en la proposición 8.32), que es concretamente

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{R}}^{-1} : \quad \mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1 &\longrightarrow l \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (t_0 : t_0 + t_1 : t_1). \end{aligned}$$

Además, este proceso nos proporciona también unas *ecuaciones paramétricas* de l , ya que estamos diciendo cómo tienen que ser los puntos $(x_0 : x_1 : x_2)$ de l en función de los valores $(t_0 : t_1)$ de los parámetros:

$$(9.1.1) \quad \begin{aligned} x_0 &= t_0 \\ x_1 &= t_0 + t_1 \\ x_2 &= t_1. \end{aligned}$$

Observamos que (9.1.1) son también las ecuaciones de f , pensada como aplicación proyectiva de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1$ a $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$, respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$.

Ejercicio 9.2. Si consideramos la referencia $\mathcal{R}' = \{(1 : 1 : 0), (0 : 1 : 1); (1 : -1 : -2)\}$ de la recta l del ejemplo anterior, ¿cuál es la proyectividad que obtenemos al asignar a cada valor $(t_0 : t_1)$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1$ el punto p de l de coordenadas $(t_0 : t_1)$ respecto de \mathcal{R}' ? ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas correspondientes?

Recordemos que unas *ecuaciones paramétricas* o una *parametrización* de una recta $l = \mathbf{P}(W)$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ (W es un plano vectorial de \mathbf{k}^3) son unas ecuaciones

$$(9.2.1) \quad \begin{aligned} x_0 &= a_0 t_0 + b_0 t_1 \\ x_1 &= a_1 t_0 + b_1 t_1 \\ x_2 &= a_2 t_0 + b_2 t_1, \end{aligned}$$

donde $B = \{(a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2)\}$ son un sistema de generadores (y por tanto, una base) de W . Observamos que la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{(a_0 : a_1 : a_2), (b_0 : b_1 : b_2); (a_0 + b_0 : a_1 + b_1 : a_2 + b_2)\}$ de l tiene a B como base asociada. Por tanto, la proyectividad que asigna a cada $(t_0 : t_1)$ el punto $p \in l$ (vista l como subespacio proyectivo de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$) de coordenadas $(t_0 : t_1)$ respecto de \mathcal{R} , tiene a (9.2.1) como ecuaciones respecto a las referencias canónicas de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^1$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$. En vista de esto y del ejemplo 9.1 podemos dar una nueva definición de parametrización de una recta de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$:

Definición 9.3. Sea $l = \mathbf{P}(W)$ una recta proyectiva de \mathbf{P}_k^2 . Una *parametrización* de l es una proyectividad f de \mathbf{P}_k^1 a l . La proyectividad f viene determinada por la imagen de tres puntos distintos de \mathbf{P}_k^1 , por ejemplo, por la imagen de $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ (la referencia canónica de \mathbf{P}_k^1). También podemos dar f de manera explícita como

$$(9.3.1) \quad (t_0 : t_1) \mapsto (a_0 t_0 + b_0 t_1 : a_1 t_0 + b_1 t_1 : a_2 t_0 + b_2 t_1),$$

donde (a_0, a_1, a_2) y (b_0, b_1, b_2) son vectores linealmente independientes de W .

Observación 9.4. Por lo que hemos visto, una parametrización f de una recta proyectiva l de \mathbf{P}_k^2 nos da una forma de “recorrer” l , ya que para cada valor del *parámetro homogéneo* $(t_0 : t_1) \in \mathbf{P}_k^1$ obtenemos un único punto $f(t_0 : t_1)$ de l . Por ello, según movemos el parámetro homogéneo de \mathbf{P}_k^1 , vamos recorriendo toda la recta l , pasando por todos sus puntos una sola vez. Observamos también que para tener determinada de forma única una parametrización f de l necesitamos especificar las imágenes que toma f para $(1 : 0), (0 : 1)$ y $(1 : 1)$ o, en general, para tres valores distintos del parámetro homogéneo $(t_0 : t_1)$ (esto es así porque una proyectividad de \mathbf{P}_k^1 a l viene determinada por la imagen de los puntos de una referencia proyectiva de \mathbf{P}_k^1 y una referencia de \mathbf{P}_k^1 consiste en tres puntos distintos de \mathbf{P}_k^1). Si, por el contrario, solo especificamos los valores $p_0 = (a_0 : a_1 : a_2)$ y $p_1 = (b_0 : b_1 : b_2)$ que una parametrización de l ha de tomar en dos valores distintos del parámetro homogéneo, por ejemplo, en $(1 : 0)$ y $(0 : 1)$, habrá varias (si k es infinito, infinitas) parametrizaciones f tales que $f(1 : 0) = (a_0 : a_1 : a_2)$ y $f(0 : 1) = (b_0 : b_1 : b_2)$. Esto es porque $\{(1 : 0), (0 : 1)\}$ *no* son una referencia de \mathbf{P}_k^1 , por lo que especificar las imágenes que una proyectividad ha de tener en dichos puntos no determina la proyectividad de forma única. Dicho de otro modo, hay muchas maneras distintas de parametrizar l de forma que pasemos por el punto p_0 para el valor $(1 : 0)$ del parámetro y por el punto p_1 para el valor $(0 : 1)$ del parámetro. Simplemente, hay que escoger imágenes distintas para $(1 : 1)$ (el punto unidad de la referencia proyectiva canónica de \mathbf{P}_k^1); cada una de estas elecciones dará lugar a una proyectividad de \mathbf{P}_k^1 a l distinta. Dicho de otra forma, las distintas elecciones de imagen para $(1 : 1)$ darán lugar a distintas maneras de recorrer l que solo tendrán en común entre ellas esto: todas pasan por p_0 para el valor $(1 : 0)$ del parámetro y por p_1 para el valor $(0 : 1)$ del parámetro. Otra forma de entender por qué ocurre esto es fijarnos en las posibles parametrizaciones de W (recuerda que W es el plano vectorial de \mathbf{k}^3 para el que $l = \mathbf{P}(W)$). Para que una parametrización de l tome el valor p_0 en $(1 : 0)$ y el valor p_1 en $(0 : 1)$ basta considerar una parametrización de W que lleve el valor $(1, 0)$ de los parámetros a un múltiplo no nulo *cualquiera* del vector $v_0 = (a_0, a_1, a_2)$ y el valor $(0, 1)$ de los parámetros a un múltiplo no nulo *cualquiera* del vector $v_1 = (b_0, b_1, b_2)$. Según los múltiplos de v_0 y v_1 que elijamos, la imagen de $(1, 1)$ por la parametrización de W resultante generará distintos “rayos” vectoriales en W .

Observación 9.5. La definición 9.3 se puede extender de manera obvia a una recta proyectiva de \mathbf{P}_k^n o incluso a una recta proyectiva de un espacio proyectivo arbitrario $\mathbf{P}(V)$. La definición también se extiende a subespacios Λ de dimensión m de $\mathbf{P}(V)$: una parametrización de Λ sería una proyectividad de \mathbf{P}_k^m a Λ .

Proyectividades y perspectivas de rectas

Ahora vamos a estudiar proyectividades entre dos rectas l_1 y l_2 de \mathbf{P}_k^2 , *no necesariamente distintas*. Para determinar una proyectividad de l_1 en l_2 basta conocer las imágenes de tres puntos (ordenados) distintos de l_1 . Estas imágenes que han de ser necesariamente tres puntos distintos de l_2 , ya que una proyectividad es una aplicación biyectiva. Vemos un ejemplo de proyectividad entre dos rectas l_1 y l_2 de \mathbf{P}_k^2 en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 9.6. Sean l_1 y l_2 las rectas de \mathbf{P}_k^2 de ecuaciones $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - x_2 = 0$. Sea f la proyectividad de l_1 a l_2 que cumple

$$\begin{aligned} f((1 : 0 : -1)) &= (1 : 0 : 0) \\ f((0 : 1 : -1)) &= (1 : 1 : 1) \\ f((1 : -2 : 1)) &= (0 : 1 : 1). \end{aligned}$$

(1) Calcula $f((2 : 1 : -3))$.

(2) En general, dado un punto $(t_0 : t_1 : -t_0 - t_1)$ de l_1 , calcula $f((t_0 : t_1 : -t_0 - t_1))$.

Si hemos sido capaces de resolver el ejercicio anterior, es claro que sabemos cómo describir de forma analítica una proyectividad f entre dos rectas del plano. Sin embargo nos gustaría también ser capaces de describir f de manera geométrica. Para hacer esto comenzamos por estudiar un ejemplo muy importante de proyectividades entre dos rectas de \mathbf{P}_k^2 , las *perspectividades*:

Definición 9.7. Una *perspectividad* f entre dos rectas l_1 y l_2 de \mathbf{P}_k^2 , o de l_1 sobre l_2 , es la restricción a l_1 de la proyección π de \mathbf{P}_k^2 sobre l_2 con centro un punto o no contenido en l_1 ni en l_2 . A o se le denomina *centro* de f .

Observación 9.8. Una perspectividad entre dos rectas distintas l_1 y l_2 de \mathbf{P}_k^2 viene determinada por su centro. Si f es una perspectividad de una recta l sobre sí misma, $f = \text{id}_l$.

Ejercicio 9.9. Sean l_1 y l_2 las rectas de \mathbf{P}_k^2 de ecuaciones $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - x_2 = 0$ y sea f la perspectividad que de l_1 sobre l_2 de centro $(0 : 1 : 0)$. Halla la parametrización de l_2 que resulta de componer la parametrización de l_1 del ejemplo 9.1 con f .

Proposición 9.10. La *perspectividad* f de una recta l_1 sobre una recta l_2 con centro o de una recta l_1 es una proyectividad entre l_1 y l_2 . La proyectividad inversa de f es de nuevo una *perspectividad*, de l_2 sobre l_1 y centro o .

Demostración. La proposición es un caso particular del ejemplo 8.19. \square

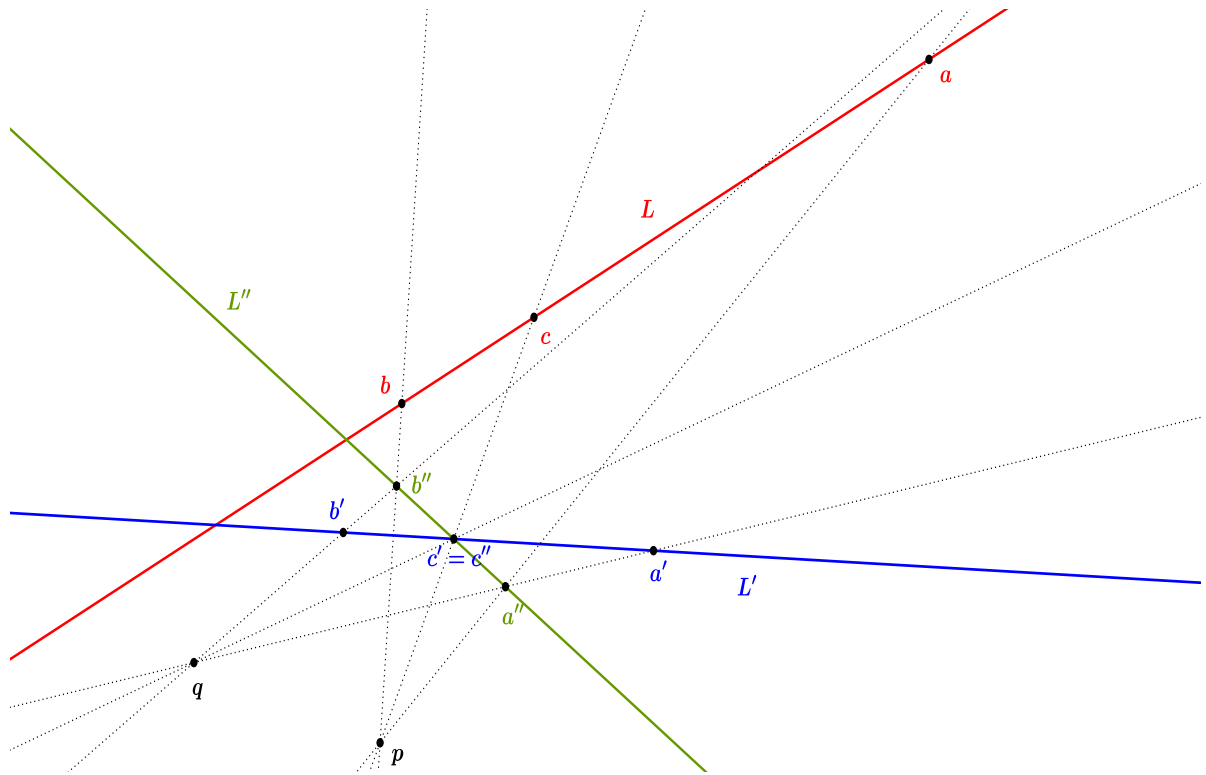
Teorema 9.11. (*caracterización geométrica de las perspectividades*) Sean l y l' dos rectas distintas de \mathbf{P}_k^2 y sea $f : l \rightarrow l'$ una proyectividad entre ellas. Sea p el (único) punto de intersección de l y l' . Entonces, f es una *perspectividad* si y solo si $f(p) = p$.

Demostración. Es claro que si f es una perspectividad de l a l' , entonces $f(p) = p$. Supongamos ahora que f es una proyectividad de l a l' tal que $f(p) = p$. Sean a y b otros dos puntos de l distintos de p y denotemos $a' = f(a)$ y $b' = f(b)$. Consideramos el punto o de intersección de las rectas $\langle a, a' \rangle$ y $\langle b, b' \rangle$ (observa que $a \neq a'$ y $b \neq b'$). Entonces, si g es la perspectividad de l sobre l' de centro o , es claro que $g(a) = a'$, $g(b) = b'$ y $g(p) = p$. Como f y g son dos proyectividades de l a l' que valen lo mismo en la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{a, b, p\}$ de l , se tiene por el teorema 8.34 que $f = g$. \square

Podemos ahora describir las proyectividades entre dos rectas del plano como composición de perspectividades:

Teorema 9.12. Toda proyectividad entre dos rectas L y L' de \mathbf{P}_k^2 , no necesariamente distintas, se puede expresar como composición de *perspectividades*.

Demostración. Vemos en primer lugar que podemos suponer que L y L' son distintas. En efecto, si fueran iguales, tomando una recta \hat{L} distinta de L y una perspectividad cualquiera g de L sobre \hat{L} se tendría, supuesto demostrado el teorema para rectas distintas, que $f \circ g^{-1}$ es una composición de perspectividades, con lo que f también lo sería. Suponemos pues que L y L' son dos rectas distintas (a partir de aquí, para entender mejor la demostración



conviene que vayas dibujando las rectas y puntos que se van introduciendo, con lo que obtendrás un dibujo análogo al que aparece arriba). Elegimos tres puntos distintos a, b, c de L de tal manera que si $a' = f(a), b' = f(b)$ y $c' = f(c)$ entonces ni c ni c' son el punto de intersección de L y L' . Sea p un punto de la recta $\langle c, c' \rangle$ distinto de c y c' . Tomamos una recta L'' que pase por c' pero que no pase ni por c ni por a' . Sean a'' y b'' los respectivos puntos de intersección de L'' con las rectas $\langle p, a \rangle$ y $\langle p, b \rangle$ y renombramos c' como c'' . Finalmente, sea q el punto de intersección de las rectas $\langle a', a'' \rangle$ y $\langle b', b'' \rangle$. Si f_1 es la perspectividad de L sobre L'' de centro p y f_2 es la perspectividad de L'' sobre L' de centro q se tiene

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{f_1} & L'' & \xrightarrow{f_2} & L' \\
 a & \mapsto & a'' & \mapsto & a' \\
 b & \mapsto & b'' & \mapsto & b' \\
 c & \mapsto & c'' & \mapsto & c' ,
 \end{array}$$

por lo que $(f_2 \circ f_1)(a) = a' = f(a)$, $(f_2 \circ f_1)(b) = b' = f(b)$ y $(f_2 \circ f_1)(c) = c' = f(c)$. Como $\{a, b, c\}$ es una referencia proyectiva de L , se sigue del teorema 8.34 que $f = f_2 \circ f_1$. \square

La elección del infinito

Al comienzo de la sección 7 construimos el plano proyectivo \mathbf{P}_k^2 como completión del plano afín \mathbf{A}_k^2 , incluyendo este último en \mathbf{P}_k^2 mediante la aplicación inyectiva (7.4.1), que en dimensión 2 queda

$$(9.12.1) \quad i : \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbf{P}_k^2 \\ (x, y) & \mapsto & (1 : x : y). \end{array}$$

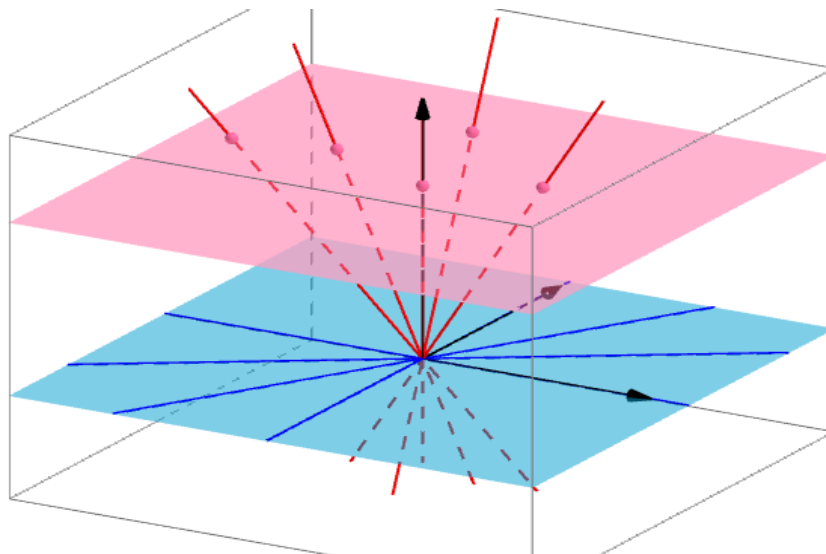
Para obtener i , primero incluimos \mathbf{A}_k^2 dentro de \mathbf{k}^3 mediante

$$j : \mathbf{A}_k^2 \longrightarrow \mathbf{k}^3 \\ j : (x, y) \mapsto (1, x, y).$$

De esta forma estamos identificando \mathbf{A}_k^2 con el plano afín Π de \mathbf{k}^3 de ecuación $x_0 = 1$. Luego componemos j con la proyección desde $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ a \mathbf{P}_k^2

$$\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbf{P}_k^2 \\ \pi : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2).$$

Podemos así identificar \mathbf{A}_k^2 con el subconjunto $i(\mathbf{A}_k^2)$ de \mathbf{P}_k^2 . Los puntos que añadimos a $i(\mathbf{A}_k^2)$ hasta completar \mathbf{P}_k^2 son las clases en \mathbf{P}_k^2 del plano vectorial W de \mathbf{k}^3 de ecuación $x_0 = 0$, que es la dirección de Π . Dichas clases son los puntos la recta $\mathbf{P}(W)$ de ecuación $x_0 = 0$, que llamamos por ese motivo *recta del infinito* para la inclusión i . Ilustramos esta construcción en la figura siguiente, donde Π aparece en rosa, W aparece en azul claro y dibujamos, en rojo, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de $i(\mathbf{A}_k^2)$ y, en azul, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de la recta del infinito $\mathbf{P}(W)$.



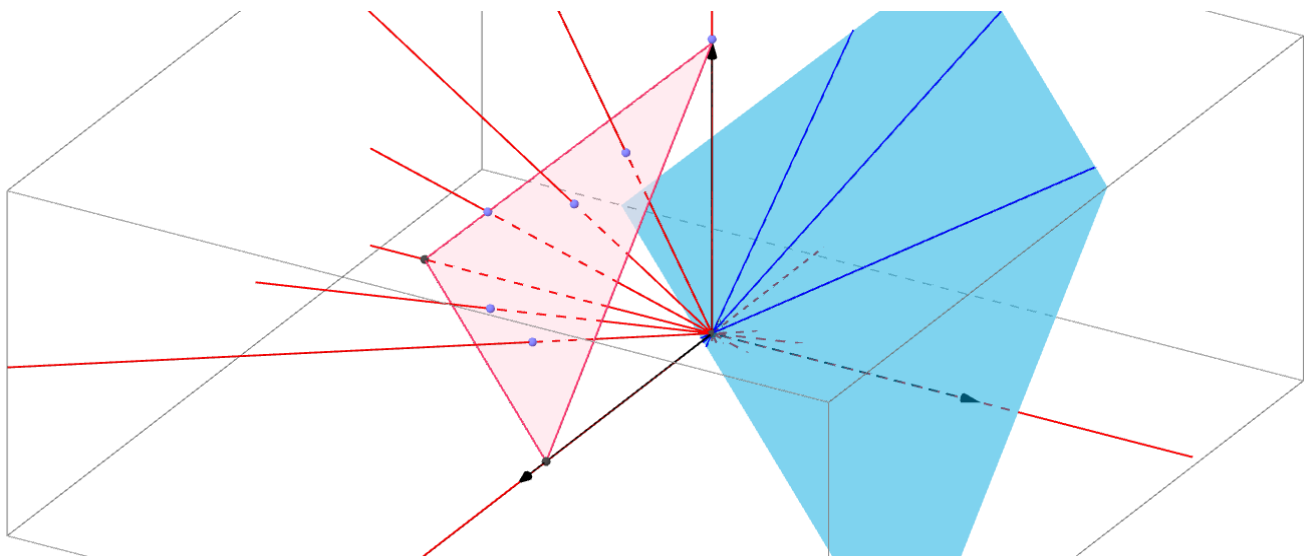
Sin embargo i no es la única forma de incluir \mathbf{A}_k^2 dentro de \mathbf{P}_k^2 . Podemos elegir cualquier plano afín Π' (que no pase por $(0, 0, 0)$, para que después tenga sentido componer con π) de \mathbf{k}^3 y, en vez de j , podemos considerar un isomorfismo afín j' entre \mathbf{A}_k^2 y Π' . Definimos entonces como i' la composición $i' = \pi \circ j'$. Podemos así identificar \mathbf{A}_k^2 como el subconjunto $i'(\mathbf{A}_k^2)$ de \mathbf{P}_k^2 y los puntos que añadimos para completar $i'(\mathbf{A}_k^2)$ hasta \mathbf{P}_k^2 son en este caso las clases de los vectores de la dirección W' de Π' . Estos puntos forman la recta $\mathbf{P}(W')$, que será la recta del infinito para la inclusión i' . Vemos un ejemplo concreto de i' . Elegimos como Π' el plano de \mathbf{k}^3 de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 1$ y como j' , por ejemplo,

$$j' : \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbf{k}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y + 1, x, y). \end{array}$$

Con estas elecciones i' será

$$i' : \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_k^2 & \longrightarrow & \mathbf{P}_k^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y + 1 : x : y) \end{array}$$

y la dirección W' de Π' será el plano vectorial de \mathbf{k}^3 de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 0$. Por tanto, la recta del infinito para i' será en este caso $\mathbf{P}(W')$, es decir, la recta de \mathbf{P}_k^2 de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 0$. Ilustramos esta construcción en la siguiente figura, donde Π' aparece en rosa (dibujamos solo un triángulo de Π'), W' aparece en azul claro y dibujamos, en rojo, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de $i'(\mathbf{A}_k^2)$ y, en azul, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de la recta del infinito $\mathbf{P}(W')$.



Hemos visto pues que no hay una única forma de sumergir \mathbf{A}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 y que la recta del infinito depende de la inmersión elegida. Por otra parte, es claro que, dada una recta l' cualquiera de \mathbf{P}_k^2 , existe una inmersión de \mathbf{A}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 como las que acabamos de describir para la que l' es su recta del infinito. Dicho de otra forma, dada cualquier recta l' de \mathbf{P}_k^2 , podemos identificar $\mathbf{P}_k^2 \setminus l'$ con \mathbf{A}_k^2 , mediante la aplicación inversa de una inmersión i' como las descritas más arriba. A esto le llamaremos *elegir la recta del infinito*.

Otra forma de entender las distintas maneras de sumergir \mathbf{A}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 y de elegir la recta del infinito es la siguiente. Dadas dos rectas proyectivas de \mathbf{P}_k^2 existen proyectividades de \mathbf{P}_k^2 que transforman una en la otra:

Lema 9.13. *Sean l y l' dos rectas de \mathbf{P}_k^2 . Existen proyectividades de \mathbf{P}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 que transforman l en l' .*

Demostración. Una proyectividad f que cumpla $f(l) = l'$ se puede construir como sigue. Elegimos dos puntos distintos p_0, p_1 de l y los completamos a una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$ de \mathbf{P}_k^2 (para ello basta con escoger un punto p_2 no contenido en l ; entonces p_0, p_1 y p_2 son proyectivamente independientes, por lo que si v_0, v_1 y v_2 son vectores de \mathbf{k}^3 tales que $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1]$ y $p_2 = [v_2]$, v_0, v_1 y v_2 forman una base de \mathbf{k}^3 y, si definimos $p_3 = [v_0 + v_1 + v_2]$, p_0, p_1, p_2 y p_3 forman una referencia de \mathbf{P}_k^2). Análogamente escogemos dos puntos distintos p'_0 y p'_1 de l' y elegimos otros dos puntos de \mathbf{P}_k^2 de manera que $\mathcal{R}' = \{p'_0, p'_1, p'_2; p'_3\}$ sea una referencia proyectiva de \mathbf{P}_k^2 . Consideramos la proyectividad f que transforma \mathcal{R} en \mathcal{R}' . Entonces $f(l) = f(\langle p_0, p_1 \rangle) = \langle f(p_0), f(p_1) \rangle = \langle p'_0, p'_1 \rangle = l'$. Observa que con esta construcción podemos obtener muchas proyectividades que transforman l en l' , ya que, para fijar \mathcal{R}' , podemos elegir como p'_0 y p'_1 dos puntos distintos de l' cualesquiera; como p'_2 podemos elegir un punto cualquiera fuera de l' y como p'_3 podemos elegir cualquier punto que no esté contenido en la unión de $\langle p'_0, p'_1 \rangle$, $\langle p'_0, p'_2 \rangle$ y $\langle p'_1, p'_2 \rangle$. Cada elección distinta de los puntos p'_0, p'_1, p'_2 y p'_3 define una proyectividad diferente que transforma l en l' . \square

El lema 9.13 nos dice que dos rectas de \mathbf{P}_k^2 son indistinguibles desde un punto de vista proyectivo. Otra forma de ver esto es que una recta de \mathbf{P}_k^2 puede adoptar cualquier ecuación siempre que la escribamos con respecto a una referencia proyectiva adecuada.

En particular, se sigue de todo esto que la recta de ecuación $x_0 = 0$ (que denotamos a partir de ahora como l) no tiene nada de especial y así, cualquier recta de \mathbf{P}_k^2 tiene “derecho” a ser elegida como recta del infinito. Como hemos identificado \mathbf{A}_k^2 con $\mathbf{P}_k^2 \setminus l$ mediante la biyección i de (9.12.1), tenemos la siguiente observación:

Observación 9.14. *Sea l la recta de \mathbf{P}_k^2 de ecuación $x_0 = 0$ y sea l' otra recta de \mathbf{P}_k^2 . Podemos identificar (no de manera única) \mathbf{A}_k^2 con $\mathbf{P}_k^2 \setminus l'$ de la siguiente forma. Sea i la aplicación de (9.12.1) y sea f una proyectividad de \mathbf{P}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 tal que $f(l) = l'$ (recuerda el lema 9.13) Entonces $i' = f \circ i$ es una aplicación inyectiva y su imagen es $\mathbf{P}_k^2 \setminus l'$.*

En realidad, esta manera de elegir la recta del infinito tal como se describe en la observación 9.14 es equivalente a la manera de elegir la recta del infinito que vimos antes en la página 79. Dicho de forma más precisa:

Proposición 9.15. *Sea i la aplicación de (9.12.1) y sea π la proyección canónica de $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ a \mathbf{P}_k^2 .*

- (1) *Si Π' es un plano afín de \mathbf{k}^3 que no contiene a $(0, 0, 0)$, j' es una aplicación afín de \mathbf{A}_k^2 a \mathbf{A}_k^3 tal que $j'(\mathbf{A}_k^2) = \Pi'$ e $i' = \pi \circ j'$, entonces existe una proyectividad f de \mathbf{P}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 tal que $i' = f \circ i$.*

- (2) Si f es una proyectividad de \mathbf{P}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 e $i' = f \circ i$, entonces existe un plano afín Π' de \mathbf{k}^3 que no contiene a $(0, 0, 0)$ y una aplicación afín j' de \mathbf{A}_k^2 a \mathbf{A}_k^3 que cumple $j'(\mathbf{A}_k^2) = \Pi'$, tales que $i' = \pi \circ j'$.

Demostración. Para demostrar (1), definimos $v'_0 = (j' \circ j^{-1})(1, 0, 0)$ (observa que v'_0 es un punto de Π' ; para que la inversa de j tenga sentido entendemos j como una aplicación de \mathbf{A}_k^2 a Π). Definimos también $v'_1 = (\overset{\rightarrow}{j'} \circ \vec{j}^{-1})(0, 1, 0)$ y $v'_2 = (\overset{\rightarrow}{j'} \circ \vec{j}^{-1})(0, 0, 1)$ (observa que v'_1 y v'_2 son dos vectores linealmente independientes de la dirección de Π'). Por tanto v'_0, v'_1 y v'_2 forman una base de \mathbf{k}^3 . Definimos Φ como el automorfismo de \mathbf{k}^3 que envía los vectores de la base canónica de \mathbf{k}^3 a v'_0, v'_1 y v'_2 . Entonces la proyectividad f que buscamos es la proyectividad inducida por Φ .

Dejamos la demostración de (2) como ejercicio. □

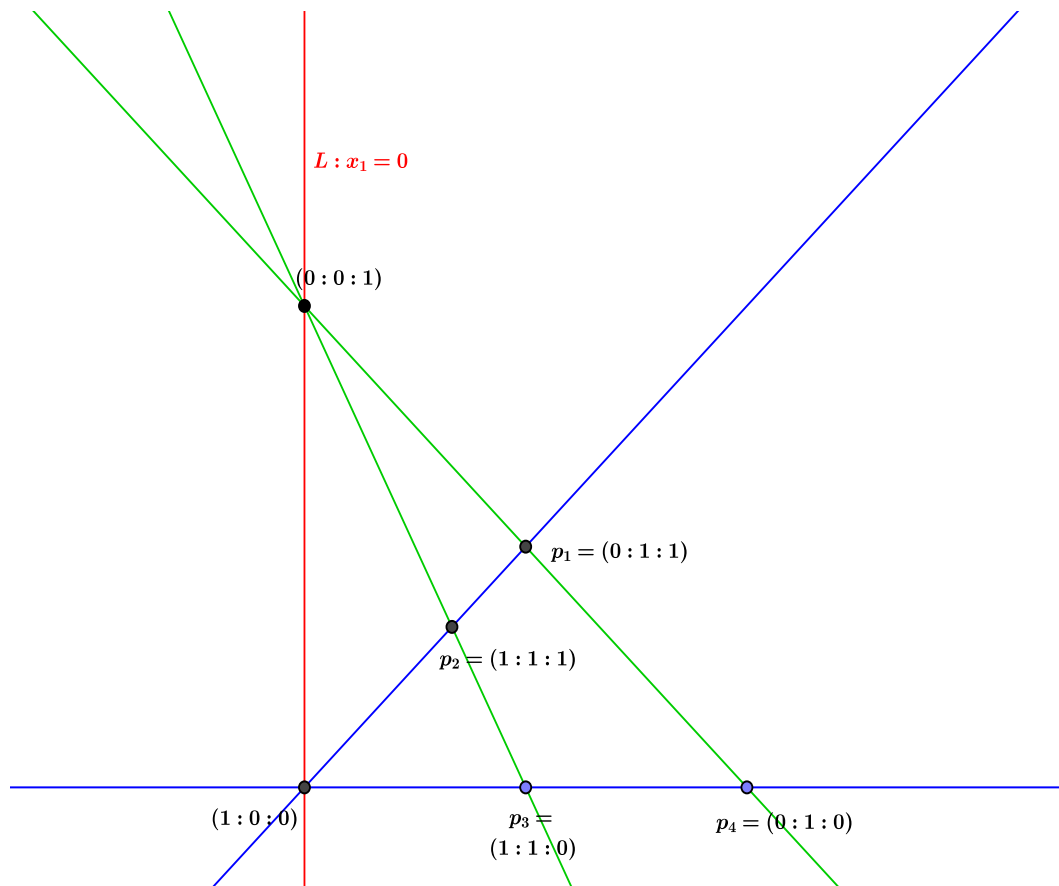
El lema 9.13 se puede generalizar de la manera obvia (dados dos hiperplanos H y H' de \mathbf{P}_k^n , existe una proyectividad (no única) de \mathbf{P}_k^n en \mathbf{P}_k^n que transforma H en H'). De igual manera podemos generalizar la observación 9.14, por lo que también en \mathbf{P}_k^n podemos *elegir el hiperplano del infinito*. Esto consistiría en fijar un hiperplano H de \mathbf{P}_k^n e identificar el complementario de H con el espacio afín \mathbf{A}_k^n . Este proceso también lo podemos realizar generalizando la construcción que hicimos en la página 79.

A continuación vemos varios contextos que ilustran el proceso de elegir la recta del infinito y nos muestran la utilidad del mismo (en el tema 4 veremos una situación más en que elegir la recta del infinito será muy importante: cuando relacionemos las cónicas proyectivas con las cónicas afines).

Paralelismo.

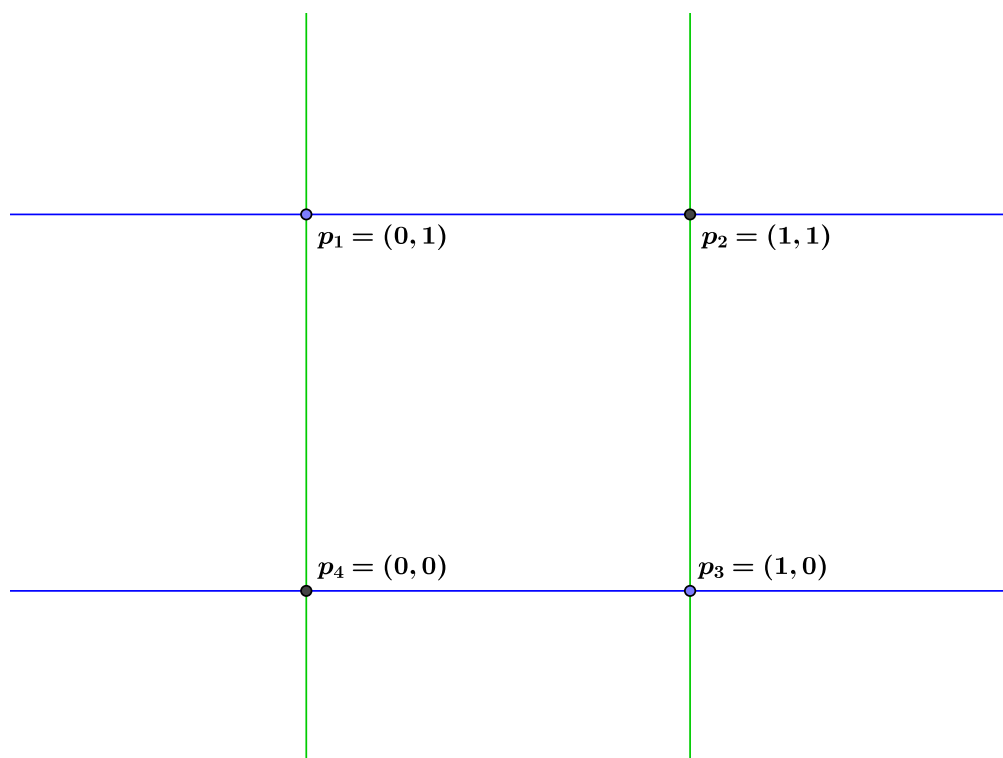
Ya vimos en la sección 7 que, al completar \mathbf{A}_k^2 a \mathbf{P}_k^2 usando la aplicación i de (9.12.1), dos rectas paralelas l_1 y l_2 de \mathbf{A}_k^2 se caracterizan por tener el mismo punto del infinito. Esta propiedad se conserva si, en lugar de utilizar la inmersión i de \mathbf{A}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 , usamos una inmersión i' como las de la página 79. Para ver esto último, definimos el completado proyectivo de una recta l de \mathbf{A}_k^2 respecto de la complección de \mathbf{A}_k^2 dada por i' como la recta proyectiva $i'(l) \cup \pi(\overset{\rightarrow}{j'}(l))$ de \mathbf{P}_k^2 , siendo $\pi(\overset{\rightarrow}{j'}(l))$ el punto del infinito de l para esta complección. En ese caso, si l_1 y l_2 son dos rectas de \mathbf{A}_k^2 , como j' es una aplicación afín inyectiva, l_1 y l_2 son paralelas si y solo si $j'(l_1)$ y $j'(l_2)$ son paralelas. Esto se traduce en que l_1 y l_2 son paralelas si y solo si tienen el mismo punto del infinito para la complección de \mathbf{A}_k^2 dada por i' . Entonces, si en \mathbf{P}_k^2 hemos elegido una recta proyectiva L como recta del infinito e identificamos $\mathbf{P}_k^2 \setminus L$ con \mathbf{A}_k^2 , y l_1 y l_2 son dos rectas proyectivas de \mathbf{P}_k^2 , tenemos que $l_1 \setminus L$ y $l_2 \setminus L$ son rectas paralelas de $\mathbf{A}_k^2 = \mathbf{P}_k^2 \setminus L$ si y solo si $l_1 \cap L = l_2 \cap L$. Lo ilustramos en los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 9.16. En \mathbf{P}_k^2 consideramos cuatro puntos p_1, p_2, p_3, p_4 en posición general. ¿Qué recta L de \mathbf{P}_k^2 debemos elegir como recta del infinito para que los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 sean en $\mathbf{P}_k^2 \setminus L$ vértices consecutivos de un paralelogramo? La recta L buscada es la recta que pasa por los puntos $\langle p_1, p_2 \rangle \cap \langle p_3, p_4 \rangle$ y $\langle p_1, p_4 \rangle \cap \langle p_2, p_3 \rangle$. Por ejemplo, en las figuras siguientes se ilustra el caso en que $p_1 = (0 : 1 : 1)$, $p_2 = (1 : 1 : 1)$, $p_3 = (1 : 1 : 0)$ y $p_4 = (0 : 1 : 0)$: los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 forman un paralelogramo en $\mathbf{P}_R^2 \setminus L$ si y solo si L es la recta de \mathbf{P}_R^2 de ecuación $x_1 = 0$. Ten en cuenta que para el segundo dibujo



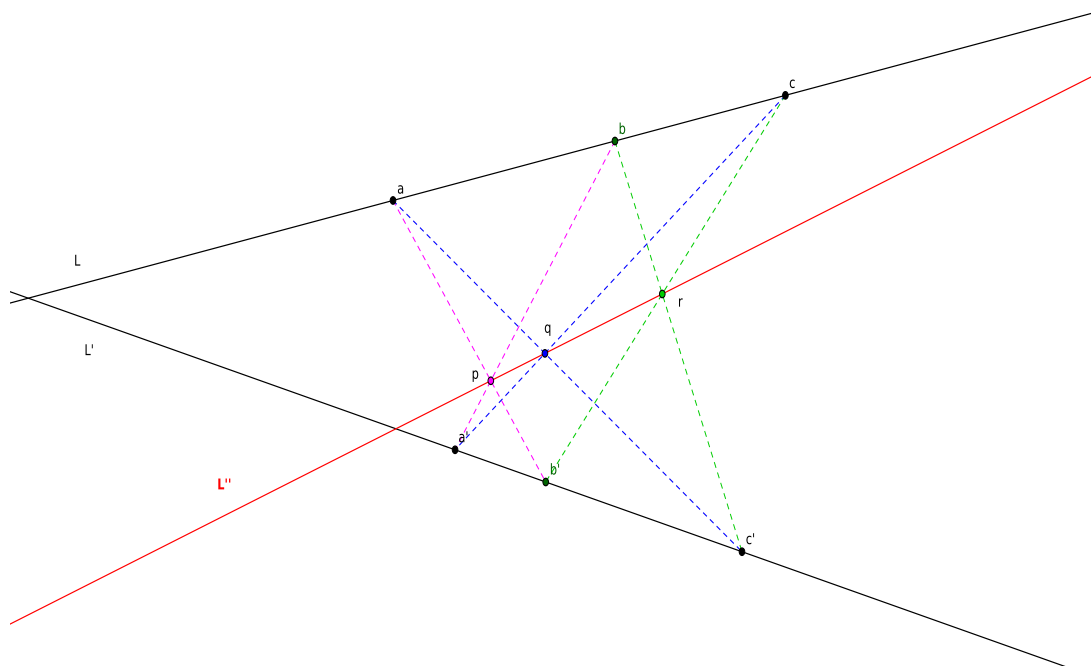
identificamos $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2 \setminus L$ con $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2$ mediante

$$i'^{-1}: \quad \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2 \setminus L \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2) \quad \longmapsto \quad \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} \right).$$



El siguiente ejemplo es la demostración de un resultado clásico sobre configuraciones de rectas: el teorema de Pappus. Probaremos la versión proyectiva del teorema de Pappus (también hay una versión afín, la cual, como ya hemos observado en otras ocasiones, tiene un enunciado más complicado, con más casos: compara la versión afín del teorema de Pappus que aparece en el teorema I.3.4 y en el ejercicio I.39 de “Geometry”, de M. Audin con la versión proyectiva enunciada en el teorema 9.17). Aunque se puede dar una demostración proyectiva (consulta el ejercicio 58 de la lista de ejercicios de Geometría Proyectiva), la demostración que veremos a continuación usa la idea de la elección de la recta del infinito para reducir la demostración del teorema 9.17 a argumentos afines (en realidad, demostraremos las versiones afines del teorema de Pappus a las que hemos hecho referencia y, usando el “truco” de elegir adecuadamente la recta del infinito, probaremos, a partir de las versiones afines, la versión proyectiva).

Teorema 9.17. (Pappus) En \mathbf{P}_k^2 sean a, b, c tres puntos distintos alineados y sea $L = \langle a, b, c \rangle$; sean a', b', c' otros tres puntos alineados, contenidos en la recta L' distinta de L . Si p es el punto de intersección de $\langle a, b' \rangle$ y $\langle a', b \rangle$, q es el punto de intersección de $\langle a, c' \rangle$ y $\langle a', c \rangle$ y r es el punto de intersección de $\langle b, c' \rangle$ y $\langle b', c \rangle$, entonces los puntos p, q y r están alineados.



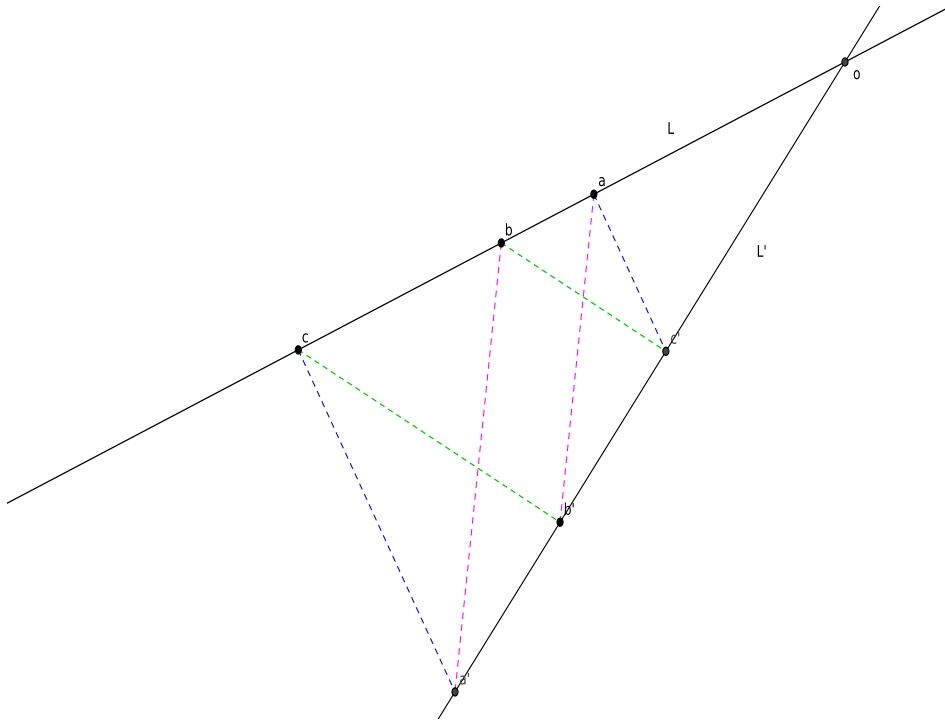
Demostración. Sea $L'' = \langle p, r \rangle$. Para demostrar el teorema basta ver que $q \in L''$. Tomamos L'' como recta del infinito, es decir, identificamos $\mathbf{P}_k^2 \setminus L''$ con \mathbf{A}_k^2 según la construcción de la página 79 o la observación 9.14. A partir de ahora haremos un pequeño abuso de notación y, dada una recta de \mathbf{P}_k^2 con intersección no vacía con $\mathbf{P}_k^2 \setminus L''$, daremos el mismo nombre a la recta proyectiva y la recta afín que resulta al intersecarla con $\mathbf{P}_k^2 \setminus L''$. En ese caso las rectas $\langle a, b' \rangle$ y $\langle a', b \rangle$ se convierten en rectas de \mathbf{A}_k^2 paralelas (¡puesto que sus completados proyectivos tienen el mismo punto en el infinito!). De igual forma las rectas $\langle b, c' \rangle$ y $\langle b', c \rangle$ se convierten en rectas de \mathbf{A}_k^2 paralelas. Por tanto habremos demostrado que $q \in L''$, si demostramos la siguiente versión afín (especial) del teorema de Pappus:

En \mathbf{A}_k^2 , sean a, b, c tres puntos distintos alineados y sea $L = \langle a, b, c \rangle$; sean a', b', c' otros tres puntos alineados, contenidos en la recta L' distinta de L . Si $\langle a, b' \rangle$ y $\langle a', b \rangle$ son paralelas y $\langle b, c' \rangle$ y $\langle b', c \rangle$ son paralelas, entonces $\langle a, c' \rangle$ y $\langle a', c \rangle$ son paralelas.

Como las rectas L y L' en \mathbf{A}_k^2 pueden ser paralelas o concurrentes (dependerá de si el punto de intersección de L y L' (de forma más precisa, el punto de intersección de sus completados proyectivos) en \mathbf{P}_k^2 esté en L'' o no; en la figura incluida en el enunciado del teorema, no lo está, que es la situación más probable), para demostrar la versión afín del teorema de Pappus del párrafo anterior será necesario distinguir esos dos casos:

Caso 1: Las rectas L y L' son concurrentes en \mathbf{A}_k^2 (el punto de intersección de L y L' en \mathbf{P}_k^2 está en L''). Sea o el punto de intersección de L y L' , sea h_1 la homotecia de centro o que lleva a a b y sea h_2 la homotecia de centro o que lleva b a c . Como L y L' pasan por o , ambas rectas son invariantes tanto por h_1 como por h_2 . Como una homotecia transforma una recta en una recta paralela, h_1 transforma $\langle a, b' \rangle$ en $\langle b, a' \rangle$ (por lo que $h_1(b') = a'$) y h_2 transforma $\langle b, c' \rangle$ en $\langle c, b' \rangle$ (por lo que $h_2(c') = b'$). Por otra parte dos homotecias con el mismo centro conmutan (puedes demostrarlo fácilmente escribiendo

matrices de las homotecias en un sistema de referencia adecuado) y su composición es o bien una homotecia con el mismo centro o bien la identidad. Por ello $h = h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$, $h(a) = (h_2 \circ h_1)(a) = c$ y $h(c') = (h_1 \circ h_2)(c') = a'$, de donde se deduce que las rectas $\langle a, c' \rangle$ y $\langle c, a' \rangle$ son paralelas, como queríamos demostrar.



Caso 2: Las rectas L y L' son paralelas. El razonamiento es el mismo que el del caso 1 cambiando en el argumento homotecias por traslaciones (el que una traslación transforme una recta dada en una recta paralela a ella y el que la composición de traslaciones sea conmutativa son hechos triviales). \square

Proyectividades e isomorfismos afines.

Vimos en la sección 8, páginas 62–69, cómo completar aplicaciones afines y, en particular, cómo completar isomorfismos afines de \mathbf{A}_k^n en \mathbf{A}_k^n . Estudiamos ahora el proceso inverso. Dada una proyectividad f de \mathbf{P}_k^n en \mathbf{P}_k^n , elegiremos un hiperplano H como hiperplano del infinito y estudiaremos la restricción de f a $\mathbf{P}_k^n \setminus H$, que identificaremos con \mathbf{A}_k^n . ¡Cuidado, para que dicha restricción esté bien definida en todo \mathbf{A}_k^n no nos valdrá elegir un hiperplano H cualquiera (consulta el corolario 8.48)! Si H fue elegido correctamente, entonces la restricción de f a $\mathbf{P}_k^n \setminus H$ será un isomorfismo afín que tendrá distintas propiedades según vayamos variando nuestra elección de H . Vemos todo esto en un ejemplo concreto:

Ejemplo 9.18. Sea f una homología general de \mathbf{P}_k^2 de razón -1 , eje L y centro o (que no está contenido en L ; para la definición de homología, consulta las definiciones 8.52 y 8.54). Cuando veamos el concepto de dualidad, dispondremos de una manera sistemática de hallar los subespacios invariantes por una proyectividad. En este caso, es fácil encontrar las rectas invariantes de f con un razonamiento geométrico directo, que presentamos a continuación. El eje L es una recta de puntos fijos, por lo que, obviamente, es una recta

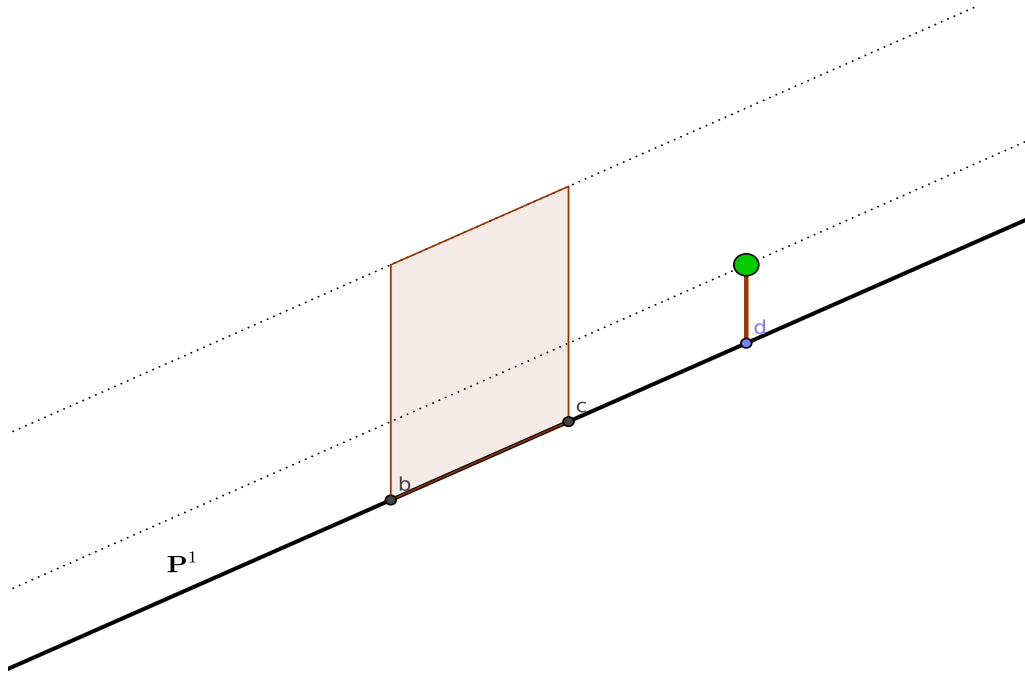
invariante. Como una recta generada por dos puntos fijos de f es una recta invariante por f y el centro o es un punto fijo de f , para todo $p \in L$, la recta $\langle o, p \rangle$ es una recta invariante por f . Por otra parte, no existen más rectas invariantes. En efecto, supongamos que L' sea una recta invariante por f , distinta de las ya mencionadas. Como $L' \neq L$, L y L' se cortan en un único punto, que sabemos que es fijo y llamaremos p' . Como L' y $\langle o, p' \rangle$ son distintas, se cortan en un único punto q' , que, al ser intersección de dos rectas invariantes, es un punto fijo. Sin embargo, sabemos que los únicos puntos fijos de f son o y los puntos de L . Si $q' = o$, entonces $L' = \langle o, p' \rangle$, lo que, por nuestra hipótesis, no es posible, así que $o \notin L'$. Consideramos $p'' \in L, p'' \neq p'$. Como $L' \neq \langle o, p'' \rangle$, L' corta a $\langle o, p'' \rangle$ en un único punto, q'' , que no es ni o ni p'' . Como L' y $\langle o, p'' \rangle$ son rectas invariantes, q'' es un punto fijo, pero q'' es distinto de o y no está en L . Esto contradice el hecho de que los únicos puntos fijos de f son o y los puntos de L .

Una vez que tenemos identificadas todas las rectas invariantes por f , usamos el corolario 8.48 para concluir que, si elegimos como recta del infinito una de esas rectas invariantes, la restricción de f al complementario de dicha recta del infinito será un isomorfismo afín (por contra, si elegimos como recta del infinito una recta no invariante por f , la restricción de f al complementario no estará definida en todos los puntos). Estudiamos el comportamiento de la restricción de f según cuál sea la recta elegida para recta del infinito. Si elegimos el eje L de f como recta del infinito, la restricción de f a $\mathbf{P}_k^2 \setminus L$ es una homotecia de razón -1 y centro o . Para comprobarlo, no tienes más que escribir la matriz $M = M_{\overline{\mathcal{R}}}f$ de f en una referencia proyectiva adecuada, concretamente, una referencia $\overline{\mathcal{R}}$ cuyo primer punto sea o y sus dos siguientes puntos sean puntos distintos de L . Después debes comprobar que es posible elegir una inclusión i' de \mathbf{A}_k^2 en \mathbf{P}_k^2 (como las de la página 79 o la observación 9.14) de manera que, si \mathcal{R} es una referencia cartesiana de \mathbf{A}_k^2 tal que su completada proyectiva respecto de i' es $\overline{\mathcal{R}}$, la matriz de la restricción de f a $\mathbf{P}_k^2 \setminus L$ respecto de \mathcal{R} es M . Geométricamente comprobamos que al “quitarle” L a \mathbf{P}_k^2 , la restricción de f a $\mathbf{P}_k^2 \setminus L$ se queda con un único punto fijo (el punto o), que será el centro de la homotecia. Por otra parte, como los puntos del infinito son puntos fijos de f , la aplicación lineal asociada a la restricción de f transforma todo vector v en un vector proporcional a v , siempre con el mismo factor de proporcionalidad (-1), tal como hace una homotecia.

Si elegimos como recta del infinito una recta $L_p = \langle o, p \rangle$, donde $p \in L$, usando un razonamiento análogo se comprueba que la restricción de f a $\mathbf{P}_k^2 \setminus L_p$ es una simetría axial de eje $L \setminus L_p$ y en la dirección correspondiente a un vector w , tal que $\pi(j'(w)) = o$. Observa que este ejemplo es la construcción recíproca del ejercicio 8.57, (4), (5) y (6), para el caso particular en que $n = 2$ y la razón de las homotecias y las dilataciones es -1 . Allí se veía que la complección tanto de una homotecia como de una dilatación con eje un hiperplano era una homología general. Aquí acabamos de ver que si partimos de una homología general f , según elijamos la recta del infinito, al restringir f al complementario de la recta del infinito elegida obtenemos una homotecia o dilataciones (las simetrías axiales son dilataciones respecto de una recta y con razón -1).

Elección del punto del infinito y razón doble.

Finalizamos esta subsección con una tercera ilustración de la elección del infinito. En este caso veremos qué consecuencias tiene elegir un punto del infinito de \mathbf{P}_k^1 u otro. Recordemos que la construcción de la página 79 y la de la observación 9.14 se pueden realizar para el espacio proyectivo estándar de cualquier dimensión, en particular, se puede realizar para



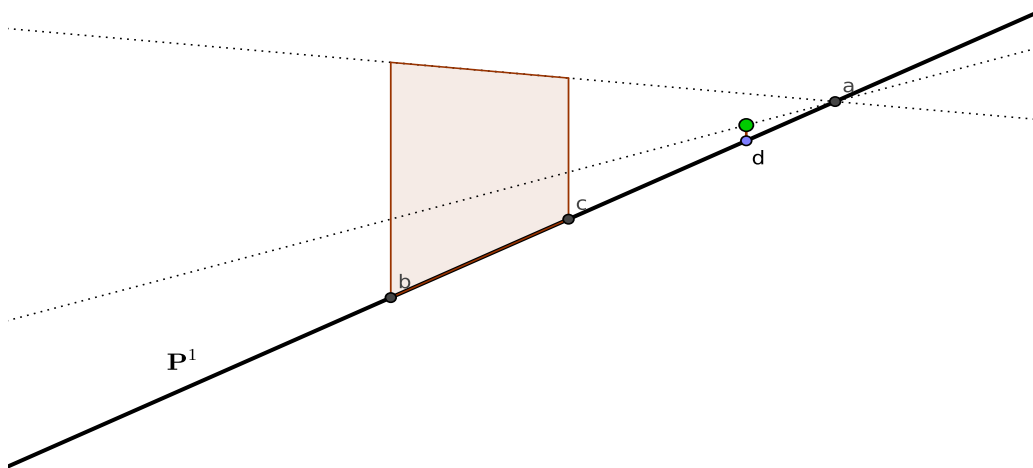
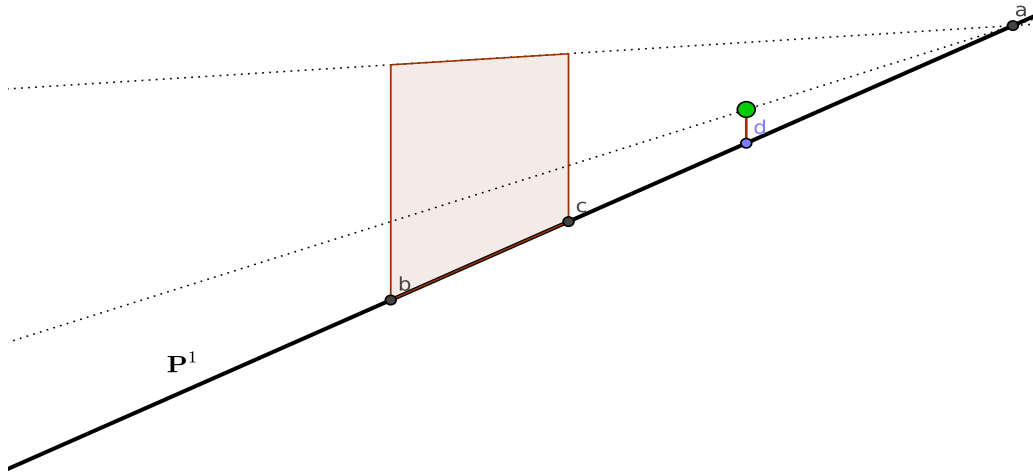
\mathbf{P}_k^1 . Entonces, si en \mathbf{P}_k^1 elegimos un punto a como punto del infinito, podemos identificar $\mathbf{P}_k^1 \setminus \{a\}$ como la recta afín estándar \mathbf{A}_k^1 . Aunque parezca que en \mathbf{P}_k^1 y \mathbf{A}_k^1 se puede hacer poca geometría, sí hay algo que podemos estudiar: la razón doble de una cuaterna ordenada de puntos en \mathbf{P}_k^1 y la razón simple de una terna ordenada de puntos en \mathbf{A}_k^1 . De hecho, vimos en la página 72 cómo se relacionaban ambos conceptos. En particular, vimos que si consideramos los puntos $a = (0 : 1), b = (1 : \beta), c = (1 : \gamma)$ y $d = (1 : \delta)$ la razón doble $[a, b, c, d]$ era igual a la razón simple $(\beta \gamma \delta)$. Observa que, en este caso, a es el punto del infinito para la inmersión

$$i : \mathbf{A}_k^1 \longrightarrow \mathbf{P}_k^1 \\ x \mapsto (1 : x),$$

por lo que si identificamos $\mathbf{P}_k^1 \setminus \{a\}$ con \mathbf{A}_k^1 mediante i^{-1} , b, c y d se corresponden con β, γ y δ y la razón doble de a, b, c, d es la razón simple de los puntos β, γ y δ , correspondientes a b, c, d en \mathbf{A}_k^1 .

Supongamos ahora que a no es necesariamente igual a $(0 : 1)$ sino que lo movemos en \mathbf{P}_k^1 pero seguimos considerándolo como el punto del infinito. Para ello, identificamos \mathbf{P}_k^1 con \mathbf{A}_k^1 componiendo una proyectividad g de \mathbf{P}_k^1 que trasforme a en $(0 : 1)$ con i^{-1} . Por ejemplo, elegimos como g a la proyectividad que lleva a a $(0 : 1)$ y deja b y c fijos. En ese caso, los puntos correspondientes a b, c en \mathbf{A}_k^1 (la correspondencia viene dada por $i^{-1} \circ g$) son β, γ respectivamente, mientras que el punto correspondiente a d , que llamaremos ahora δ' , se va moviendo en \mathbf{A}_k^1 a medida que movemos a en \mathbf{P}_k^1 . La posición de δ' , relativa a β y γ , viene expresada justamente por la razón simple $(\beta \gamma \delta')$ y es, por la proposición 8.68, igual a la razón doble $[(0 : 1), b, c, g(d)] = [g(a), g(b), g(c), g(d)] = [a, b, c, d]$. Interpretamos geoméricamente la igualdad

$$(\beta \gamma \delta') = [a, b, c, d]$$



cuando $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y para $b = (1 : 0), c = (1 : 1), d = (1 : 2)$; sea $a = (1 : \alpha)$. En ese caso la proposición 8.65 nos da

$$[a, b, c, d] = \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 2}.$$

Si α tiende a infinito, entonces $[a, b, c, d]$ tiende a 2 y, de hecho, si $a = (0 : 1)$, $[a, b, c, d] = 2$. Eso quiere decir que, cuando a está “infinitamente lejos” de b, c, d , el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es el doble del segmento $\overline{\beta\gamma}$, es decir, γ es el punto medio de $\overline{\beta\delta'}$ o, en otras palabras, γ equidista de β y δ' . Ahora partimos de a infinitamente lejos (es decir, $a = (0 : 1)$) y vamos “acercando” a a d . Si a es $(1 : 10)$ (a aún está bastante lejos de d), $[a, b, c, d] = 2, 25$. Así pues ahora el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es algo más del doble del segmento $\overline{\beta\gamma}$, es decir, δ' se ha alejado algo de γ , porque d está más cerca del infinito. Si $a = (1 : 4)$, el infinito se ha acercado bastante a d . En ese caso $[a, b, c, d] = 3$, es decir, δ' se ha alejado mucho más de γ , ya que ahora el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es el triple del segmento $\overline{\beta\gamma}$. Si $a = (1 : 3)$, el infinito se ha acercado aún más a d . En ese caso $[a, b, c, d] = 4$, es decir, δ' se alejado aún más de γ , ya que ahora el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es el cuádruple del segmento $\overline{\beta\gamma}$. De hecho, cuando a tiende a d (es decir, cuando α tiende a 2), el efecto que se produce es que δ' se aleja cada vez más de γ , porque δ' se va al infinito. Esto lo vemos en que $[a, b, c, d]$ tiende a infinito, es decir, la longitud del segmento $\overline{\beta\delta'}$ es cada vez más grande con respecto a la longitud del segmento $\overline{\beta\gamma}$, que es una cantidad finita. Dejamos como ejercicio la interpretación geométrica de la razón doble $[a, b, c, d]$ cuando a sobrepasa a d y sigue moviéndose hacia la “izquierda” (es decir, cuando $\alpha < 2$).

Todo esto tiene una interpretación intuitiva en términos de perspectiva, ya que, si dibujamos los puntos b, c y d (alineados) en un papel, el punto a (alineado con b, c y d) que elegimos como punto del infinito determina cuál será el “punto de fuga” de nuestro dibujo. Cuando $a = (0 : 1)$ (a está “infinitamente lejos” de b, c, d), el punto del infinito ni siquiera está en nuestro dibujo (está verdaderamente en el infinito) por lo que las distancias las pintamos tal como son, es decir, no dibujamos con perspectiva. En cambio, cuando a es un punto $(1 : \alpha)$, ubicamos a (el infinito, el punto de fuga), en nuestro dibujo y según lo pongamos más cerca o más lejos así irá cambiando la perspectiva, siendo más extrema a medida que a se acerca a d . Los puntos b, c, d los seguimos pintando en el mismo lugar del papel con lo cual la distancia entre ellos, medida sobre el papel, es siempre la misma, pero según dibujemos el punto de fuga más lejos o más cerca, la longitud que nuestro cerebro asigna al segmento \overline{bd} con respecto al segmento \overline{bc} disminuirá o aumentará (es decir, la ilusión óptica es que el punto d se acerca o se aleja de los puntos b y c y de nosotros). Vemos todo esto ilustrado en los tres dibujos anteriores. En el primero, el punto del infinito a no está en el dibujo (está, como decíamos, en el infinito). En el segundo y en el tercero, el punto del infinito a sí está en el dibujo. El cuadrilátero representa una casa, limitada por los puntos b y c y en el punto d hay un árbol. ¿En cuál de los tres dibujos se percibe que la distancia del árbol a la casa, con respecto al tamaño de esta, última, es mayor?

El espacio dual

Una recta l de \mathbf{P}_k^2 viene dada por una ecuación de la forma $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, donde u_0, u_1, u_2 son elementos de \mathbf{k} no todos nulos. Dos ecuaciones como $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ y $u'_0x_0 + u'_1x_1 + u'_2x_2 = 0$ definen la misma recta si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $(u'_0, u'_1, u'_2) = \lambda(u_0, u_1, u_2)$. Esta observación sugiere que al conjunto de todas las rectas de \mathbf{P}_k^2 se le pueda dotar de estructura de plano proyectivo. Lo hacemos de forma intrínseca:

Proposición 9.19. *El conjunto de rectas de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbf{P}(\mathbf{k}^{3*})$, donde \mathbf{k}^{3*} es el espacio dual de \mathbf{k}^3 , es decir, el espacio vectorial formado por todas las formas lineales homogéneas (es decir, aplicaciones lineales a \mathbf{k}) de \mathbf{k}^3 .*

Demostración. Una recta de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ es la proyectivización de un plano vectorial de \mathbf{k}^3 . Por otra parte, un plano vectorial de \mathbf{k}^3 es el núcleo de una forma lineal homogénea no nula de \mathbf{k}^3 . Ahora bien, dos formas lineales homogéneas ω_1 y ω_2 tienen el mismo núcleo si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\omega_2 = \lambda\omega_1$. Por tanto, por una parte, existe una biyección entre el conjunto de rectas de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ y el conjunto de planos vectoriales de \mathbf{k}^3 y, por otra parte, existe una biyección entre el conjunto de planos vectoriales de \mathbf{k}^3 y la proyectivización del espacio dual \mathbf{k}^{3*} de \mathbf{k}^3 . \square

Es claro que la proposición anterior puede generalizarse a $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^n$, o incluso a cualquier espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$, sin más que cambiar la palabra recta por la palabra hiperplano:

Proposición 9.20. *Sea V un espacio vectorial sobre \mathbf{k} de dimensión $n+1$. El conjunto de hiperplanos de $\mathbf{P}(V)$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbf{P}(V^*)$, donde V^* es el espacio dual de V . Por otro lado $\mathbf{P}(V^*)$ es un espacio proyectivo de dimensión n que es por tanto isomorfo (aunque no de forma canónica) a $\mathbf{P}(V)$.*

Definición 9.21. Dado un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$, llamaremos a $\mathbf{P}(V^*)$ su *espacio proyectivo dual* y lo denotaremos por $\mathbf{P}(V)^*$. Teniendo en cuenta la proposición 9.20 interpretaremos los elementos (es decir, los *puntos*) de $\mathbf{P}(V)^*$ como hiperplanos proyectivos de $\mathbf{P}(V)$.

Ejemplo 9.22. En $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{2*}$ cada punto l corresponde a una recta de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2$ de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, por lo que a dicho punto le podemos asignar de forma natural las *coordenadas* $(u_0 : u_1 : u_2)$. En efecto, puedes comprobar que $(u_0 : u_1 : u_2)$ son las coordenadas de l respecto del sistema de referencia proyectivo de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{2*}$, $\mathcal{R}^* = \{l_0, l_1, l_2; l_3\}$ donde l_0 es la recta de ecuación $x_0 = 0$, l_1 es la recta de ecuación $x_1 = 0$, l_2 es la recta de ecuación $x_2 = 0$ y l_3 es la recta de ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Para comprobar que \mathcal{R}^* es un sistema de referencia proyectivo de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{2*}$, puedes demostrar que \mathcal{R}^* tiene como base asociada a la base dual de la base canónica de \mathbf{k}^3 . Recuerda que si $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V , la base dual B^* de B es la base de V^* formada por $v_0^*, v_1^*, \dots, v_n^*$, donde v_i^* es la única aplicación lineal de V a \mathbf{k} que cumple $v_i^*(v_j) = 0$ si $i \neq j$ y $v_i^*(v_i) = 1$. Si $V = \mathbf{k}^3$ y $B = \{e_0, e_1, e_2\}$ es la base canónica, es sencillo comprobar que las formas lineales v_0^*, v_1^*, v_2^* son las aplicaciones

$$\begin{aligned} v_0^* : \quad \mathbf{k}^3 &\longrightarrow \mathbf{k} \\ (x_0, x_1, x_2) &\mapsto x_0 \\ \\ v_1^* : \quad \mathbf{k}^3 &\longrightarrow \mathbf{k} \\ (x_0, x_1, x_2) &\mapsto x_1 \\ \\ v_2^* : \quad \mathbf{k}^3 &\longrightarrow \mathbf{k} \\ (x_0, x_1, x_2) &\mapsto x_2. \end{aligned}$$

De igual forma, en $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{n*}$ cada punto H corresponde a un hiperplano de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^n$ de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + \dots + u_nx_n = 0$, por lo que a dicho punto le podemos asignar de forma natural las coordenadas $(u_0 : u_1 : \dots : u_n)$, que son las coordenadas de H respecto del sistema de referencia proyectivo $\mathcal{R}^* = \{H_0, H_1, \dots, H_n; H_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{n*}$, donde, para todo $i = 0, \dots, n$, H_i es el hiperplano de ecuación $x_i = 0$ y H_{n+1} es el hiperplano de ecuación

$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0$ (igual que en \mathbf{P}_k^{2*} , \mathcal{R}^* es un sistema de referencia proyectivo de \mathbf{P}_k^{n*} y tiene como base asociada a la base dual de la base canónica de \mathbf{k}^{n+1}).

Siguiendo con el caso de \mathbf{P}_k^2 observamos cierta “simetría” entre puntos y rectas. Por una parte, dos puntos distintos de \mathbf{P}_k^2 determinan una única recta de \mathbf{P}_k^2 . Por otra parte, dos rectas distintas de \mathbf{P}_k^2 se cortan en un único punto de \mathbf{P}_k^2 . Con el concepto de plano dual podemos expresar esta simetría, que llamaremos *dualidad*, de otra forma: dos puntos de \mathbf{P}_k^2 determinan una única recta, es decir, un punto de \mathbf{P}_k^{2*} ; dos puntos del *plano proyectivo* dual \mathbf{P}_k^{2*} (que corresponden a dos rectas de \mathbf{P}_k^2) determinan una única recta de \mathbf{P}_k^{2*} y esa recta la vamos a poder identificar como un punto de \mathbf{P}_k^2 (que va a corresponder al punto de intersección de las rectas de \mathbf{P}_k^2). Lo vemos más claramente en la siguiente proposición:

Proposición 9.23. (*Dualidad en el plano proyectivo*). *Existe una biyección entre los puntos de \mathbf{P}_k^2 y las rectas de \mathbf{P}_k^{2*} . Existe una biyección entre las rectas de \mathbf{P}_k^2 y los puntos de \mathbf{P}_k^{2*} .*

Demostración. La segunda afirmación se sigue de forma directa de la definición de \mathbf{P}_k^{2*} . Para la primera afirmación, consideremos un punto $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ de \mathbf{P}_k^2 y todas las rectas de \mathbf{P}_k^2 que pasan por p . Una recta de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ pasa por p si y solo si $a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 = 0$. Por otra parte, recordemos que el conjunto de rectas de \mathbf{P}_k^2 es el plano dual \mathbf{P}_k^{2*} . En ese caso, un punto l de \mathbf{P}_k^{2*} corresponde a una recta de \mathbf{P}_k^2 que pasa por p si y solo si *las coordenadas* $(u_0 : u_1 : u_2)$ *de l cumplen* $a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 = 0$, es decir, si y solo si l pertenece a la recta de \mathbf{P}_k^{2*} de ecuación $a_0U_0 + a_1U_1 + a_2U_2 = 0$. Por tanto el punto p da lugar a una recta de \mathbf{P}_k^{2*} , la de ecuación $a_0U_0 + a_1U_1 + a_2U_2 = 0$. Recíprocamente, una recta L de \mathbf{P}_k^{2*} tiene, en coordenadas, ecuación $a'_0U_0 + a'_1U_1 + a'_2U_2 = 0$ para alguna terna $(a'_0, a'_1, a'_2) \neq (0, 0, 0)$. Por lo visto anteriormente, los puntos de \mathbf{P}_k^{2*} que pertenecen a L corresponden a rectas de \mathbf{P}_k^2 de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ cuyos coeficientes cumplen $a'_0u_0 + a'_1u_1 + a'_2u_2 = 0$; es decir, los puntos de L corresponden a las rectas de \mathbf{P}_k^2 que pasan por el punto $(a'_0 : a'_1 : a'_2)$. Así pues, una recta de \mathbf{P}_k^{2*} da lugar a un punto de \mathbf{P}_k^2 y es claro que los procesos que hemos descrito para obtener una recta \mathbf{P}_k^{2*} a partir de un punto de \mathbf{P}_k^2 y para obtener un punto de \mathbf{P}_k^2 a partir de una recta de \mathbf{P}_k^{2*} son inversos uno del otro. \square

Definición 9.24. Dado un punto p de \mathbf{P}_k^2 , al conjunto de rectas de \mathbf{P}_k^2 que pasan por p lo llamamos el *haz de rectas* por el punto p o con *base* el punto p .

Observación 9.25. Un haz de rectas de \mathbf{P}_k^2 se corresponde por dualidad a una recta de \mathbf{P}_k^{2*} .

He preferido describir la dualidad de una forma concreta en la demostración de la proposición 9.23, pero esta puede obtenerse de manera más “elegante” y conceptual del hecho de que, *si V es un espacio vectorial de dimensión finita* (todos los espacios vectoriales con los que estamos trabajando en este curso lo son), existe un isomorfismo *canónico* (es decir, que se puede construir sin elegir bases) entre V y su *espacio bidual* $(V^*)^*$ (que denotamos como V^{**}). Por otra parte, la dualidad que hemos visto entre puntos y rectas de \mathbf{P}_k^2 se puede generalizar a \mathbf{P}_k^n y más aún, a un espacio proyectivo arbitrario $\mathbf{P}(V)$ pero, ¡cuidado!, esta dualidad no será en general entre puntos y rectas, sino entre *puntos e hiperplanos*:

Ejercicio 9.26. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo arbitrario.

- (1) Enuncia y demuestra un resultado de dualidad para $\mathbf{P}(V)$ análogo a la proposición 9.23, describiendo explícitamente esta dualidad como se hace en la demostración de la proposición 9.23 (indicación: para hacer esto último deberás fijar

una base B de V y usar la base dual B^* de B y sus referencias proyectivas asociadas).

- (2) Comprueba que la dualidad que has descrito en el apartado (1) se puede expresar como una *proyectividad* entre $\mathbf{P}(V)$ y $(\mathbf{P}(V))^*$.
- (3) Para el/la alumno/a que conozca el isomorfismo canónico entre V y V^{**} mencionado en el párrafo anterior: Comprueba que la proyectividad del apartado (2) está inducida por el isomorfismo canónico entre V y V^{**} .

La dualidad se puede generalizar aún más en un espacio proyectivo de dimensión n , obteniéndose biyecciones entre subespacios proyectivos de dimensión r y subespacios proyectivos de dimensión $n - r - 1$:

Ejercicio 9.27. Sea Λ un subespacio proyectivo de dimensión m de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n .

- (1) Demuestra que el conjunto $\Omega(\Lambda) = \{H \in \mathbf{P}(V)^* \mid \Lambda \subset H\}$ es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)^*$ de dimensión $n - m - 1$.
- (2) Observa que $\Omega(\emptyset) = \mathbf{P}(V)^*$ y $\Omega(\mathbf{P}(V)) = \emptyset$.
- (3) Observa que, en \mathbf{P}_k^3 , a un punto p le corresponde $\Omega(p)$ en \mathbf{P}_k^{3*} , que es un plano de \mathbf{P}_k^{3*} (cada punto de ese plano de \mathbf{P}_k^{3*} corresponde a un plano que pasa por p) y a un plano Π de \mathbf{P}_k^3 le corresponde $\Omega(\Pi)$, que es un punto de \mathbf{P}_k^{3*} .
- (4) Observa que, en \mathbf{P}_k^3 , los planos que contienen a una recta l forman un *haz de planos* (el haz de planos con *base* l) y a este haz de planos le corresponde la recta $\Omega(l)$ de \mathbf{P}_k^{3*} (cada punto de esa recta corresponde a un plano del haz).

Indicación: si tienes dificultades para resolver este ejercicio, puedes consultar el teorema 6.11 de “Apuntes de Geometría Proyectiva”, de E. Arrondo.

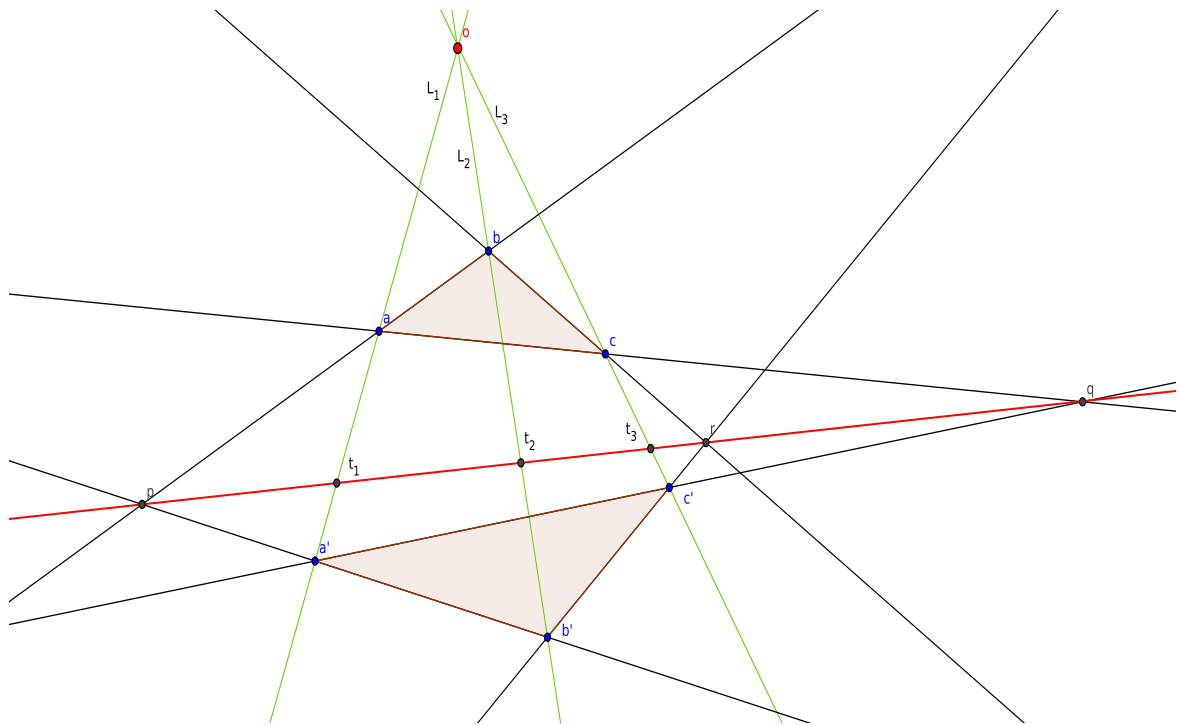
Usamos ahora el principio de dualidad para demostrar otro teorema clásico sobre configuraciones de rectas en el plano, el teorema de Desargues:

Teorema 9.28. (Desargues) Sean abc y $a'b'c'$ tres triángulos de \mathbf{P}_k^2 tales que sus vértices a, b, c y a', b', c' cumplen $a \neq a'$, $b \neq b'$ y $c \neq c'$ y las rectas que contienen lados correspondientes son distintas, es decir, $\langle a, b \rangle \neq \langle a', b' \rangle$, $\langle a, c \rangle \neq \langle a', c' \rangle$ y $\langle b, c \rangle \neq \langle b', c' \rangle$. Sea p el punto de intersección de $\langle a, b \rangle$ y $\langle a', b' \rangle$, sea q el punto de intersección de $\langle a, c \rangle$ y $\langle a', c' \rangle$ y sea r el punto de intersección de $\langle b, c \rangle$ y $\langle b', c' \rangle$. Entonces, para que los puntos p, q y r estén alineados es condición necesaria y suficiente que las rectas $\langle a, a' \rangle$, $\langle b, b' \rangle$ y $\langle c, c' \rangle$ sean coincidentes.

Demostración. (Condición suficiente): Tienes un poco más adelante un dibujo que ilustra el enunciado y la demostración de la condición suficiente del teorema, pero es aconsejable que, a medida que vayas leyendo el argumento, vayas dibujando las rectas y puntos que aparecen. Escribimos $l_1 = \langle a, a' \rangle$, $l_2 = \langle b, b' \rangle$ y $l_3 = \langle c, c' \rangle$. Por hipótesis las rectas l_1, l_2 y l_3 se cortan en un punto, que llamaremos o . Denotamos también $t_1 = \langle p, r \rangle \cap l_1$, $t_2 = \langle p, r \rangle \cap l_2$ y $t_3 = \langle p, r \rangle \cap l_3$ y definimos f_p como la perspectividad de l_1 sobre l_2 de centro p y f_r como la perspectividad de l_2 sobre l_3 de centro r . Tenemos entonces

$$\begin{array}{ccccc}
 l_1 & \xrightarrow{f_p} & l_2 & \xrightarrow{f_r} & l_3 \\
 o & \mapsto & o & \mapsto & o \\
 a & \mapsto & b & \mapsto & c \\
 a' & \mapsto & b' & \mapsto & c' \\
 t_1 & \mapsto & t_2 & \mapsto & t_3
 \end{array}$$

Observamos que la composición $f_r \circ f_p$ es una proyectividad de l_1 a l_3 que deja fijo el punto o , que es el punto de intersección de l_1 y l_3 , por lo que, por el teorema 9.11, $f_r \circ f_p$ es



una perspectividad de l_1 sobre l_3 y su centro es necesariamente el punto de intersección de $\langle a, c \rangle$ y $\langle a', c' \rangle$, o sea, q . Como $(f_r \circ f_p)(t_1) = t_3$, se tiene que t_1, t_3 y q están alineados, es decir, q está en la recta $\langle t_1, t_3 \rangle$, que es la recta $\langle p, r \rangle$, por lo que p, q y r están alineados, como queríamos demostrar.

Condición necesaria: Para demostrar la condición necesaria vamos a usar dualidad: una vez que “traduzcamos” todas las rectas y todos los puntos del enunciado del teorema 9.28 en puntos y rectas de \mathbf{P}_k^{2*} respectivamente, así como las relaciones entre esas rectas y puntos en relaciones entre puntos y rectas en el dual (por ejemplo, puntos que en \mathbf{P}_k^2 estén alineados darán lugar a rectas concurrentes en \mathbf{P}_k^{2*} ; rectas concurrentes en \mathbf{P}_k^2 darán lugar a puntos alineados en \mathbf{P}_k^{2*} , etc.), será claro que la condición necesaria del teorema de Desargues en \mathbf{P}_k^2 se convierte en la condición suficiente del teorema de Desargues en \mathbf{P}_k^{2*} (es decir, una implicación es la “dual” de la otra). Como \mathbf{P}_k^{2*} es isomorfo a \mathbf{P}_k^2 y ya hemos demostrado la condición suficiente del teorema de Desargues en \mathbf{P}_k^2 , obtenemos el resultado (para más detalles puedes consultar las págs. 154–155 de “Geometry”, de M. Audin). \square

Concluimos esta subsección mostrando cómo utilizar la dualidad para hallar los subespacios invariantes de una proyectividad. Primero definimos la aplicación dual de una aplicación proyectiva:

Definición 9.29. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre \mathbf{k} y sean $\mathbf{P}(V_1)$ y $\mathbf{P}(V_2)$ los espacios proyectivos correspondientes. Sea ϕ una aplicación lineal de V_1 a V_2 y sea f la aplicación proyectiva de $\mathbf{P}(V_1)$ a $\mathbf{P}(V_2)$ inducida por ϕ . Recordemos que la *aplicación lineal dual* de ϕ es

$$\begin{aligned} \phi^* : V_2^* &\longrightarrow V_1^* \\ \omega &\longmapsto \omega \circ \phi. \end{aligned}$$

Llamamos *aplicación proyectiva dual* de f y la denotamos por f^* a la aplicación proyectiva de $\mathbf{P}(V_2)^*$ a $\mathbf{P}(V_1)^*$ inducida por ϕ^* .

Observación 9.30. Sean \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V_1)$ y $\mathbf{P}(V_2)$ y sean B_1 y B_2 bases de V_1 y de V_2 asociadas a \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 respectivamente. Sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y de B_2 y sean \mathcal{R}_1^* y \mathcal{R}_2^* referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V_1)^*$ y $\mathbf{P}(V_2)^*$ cuyas bases asociadas sean B_1^* y B_2^* respectivamente (decimos que \mathcal{R}_1^* es la *referencia dual* de \mathcal{R}_1 y que \mathcal{R}_2^* es la *referencia dual* de \mathcal{R}_2). Recuerda que

$$M_{B_2^*, B_1^*} \phi^* = (M_{B_1, B_2} \phi)^t.$$

Por tanto, una matriz $(M_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2} f)^t$ es una matriz asociada a f^* respecto a \mathcal{R}_2^* y \mathcal{R}_1^* .

Ejercicio 9.31. (1) Sea H un hiperplano proyectivo de $\mathbf{P}(V_2)$ que no contiene a la imagen de f . Demuestra que $f^{-1}(H)$ es un hiperplano proyectivo de $\mathbf{P}(V_1)$ y que f^* envía H a $f^{-1}(H)$.

(2) Demuestra que $\Omega(\text{im} f)$ es el centro de f^* .

A continuación usamos el concepto de aplicación dual para calcular de manera sistemática los hiperplanos invariantes por una proyectividad:

Corolario 9.32. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre \mathbf{k} y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo. Un hiperplano H de $\mathbf{P}(V)$ es invariante por f si y solamente si $H \in \mathbf{P}(V)^*$ es un punto fijo de f^* . Por tanto, si f viene inducida por un automorfismo ϕ de V , el problema de hallar los hiperplanos invariantes por f se reduce a hallar los autovalores y autovectores (¡estos últimos son elementos de V^* , es decir, son formas lineales!) de ϕ^* .

Demostración. Sea H un hiperplano invariante por f . Esto quiere decir que $f(H) = H$, lo que es equivalente a $H = f^{-1}(H)$. El ejercicio 9.31 (1) nos dice que en ese caso H corresponde a un punto de $\mathbf{P}(V)^*$ que es fijo por f^* . \square

Ejercicio 9.33. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre \mathbf{k} y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo.

(1) Demuestra que el conjunto de puntos fijos de f se puede escribir, de forma única, como una unión disjunta finita

$$\text{Fij}(f) = \Lambda_1 \amalg \cdots \amalg \Lambda_s$$

de subespacios proyectivos no vacíos Λ_i de $\mathbf{P}(V)$.

(2) Demuestra que el conjunto de los puntos de $\mathbf{P}(V)^*$ correspondientes a los hiperplanos invariantes por f se puede escribir, de forma única, como una unión disjunta finita

$$\Omega_1 \amalg \cdots \amalg \Omega_s,$$

donde cada Ω_i es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)^*$ isomorfo a Λ_i .

(3) Concluye que, en particular, existe una biyección entre el conjunto de puntos fijos de f y el conjunto de hiperplanos invariantes por f .

Indicación: observa que si M es una matriz cuadrada de orden $n + 1$, el polinomio característico de M es el mismo que el polinomio característico de M^t . Observa también que, para todo $\lambda \in \mathbf{k}$, el rango de las matrices $M - \lambda I_{n+1}$ y $M^t - \lambda I_{n+1}$ coincide.

Finalmente usaremos el corolario 9.32 para dar un método sistemático para hallar *todos* los subespacios invariantes por una proyectividad:

Ejercicio 9.34. Sea \mathbf{k} un cuerpo *algebraicamente cerrado* (es decir, todo polinomio de grado positivo en una variable con coeficientes en \mathbf{k} tiene al menos una raíz; esto ocurre, por ejemplo, si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$). Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre \mathbf{k} , sea f una proyectividad de $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo y sea Λ un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$ invariante por f .

- (1) Demuestra que existe un punto fijo de f contenido en Λ .
 - (2) Demuestra que existe un hiperplano invariante por f que contiene a Λ .
- Indicación: (2) es el enunciado dual de (1), por lo que puedes obtener (2) aplicando (1) a f^* .

Observación 9.35. Dada una proyectividad f de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n sobre \mathbf{k} en sí mismo, ya vimos, en la proposición 8.20, cómo hallar sus puntos fijos. El corolario 9.32 y el ejercicio 9.34 nos proporcionan además un método sistemático para hallar todos los subespacios invariantes de una proyectividad cuando el cuerpo \mathbf{k} es algebraicamente cerrado (por ejemplo, $\mathbf{k} = \mathbf{C}$).

En efecto, en este caso, comenzamos hallando todos los hiperplanos invariantes por f . Para cada hiperplano invariante H por f , consideramos $f|_H$. Por el corolario 8.6 y la proposición 8.14, (3) sabemos que $f|_H$ es una proyectividad de H en H . Hallamos entonces todos los hiperplanos invariantes Λ por $f|_H$, que no serán sino los subespacios de $\mathbf{P}(V)$ de codimensión 2, contenidos en H e invariantes por f . Por ello, como este proceso lo realizamos para todos los hiperplanos H invariantes por f y, según el ejercicio 9.34, (2), todo subespacio Λ de codimensión 2, invariante por f , está contenido en algún hiperplano H invariante por f , encontramos así todos los subespacios de codimensión 2 invariantes por f . Repitiendo este argumento para todo subespacio invariante Λ de codimensión 2 (es decir, hallando, para cada Λ , los hiperplanos invariantes de la proyectividad $f|_\Lambda$ de Λ en sí mismo), obtenemos todos los subespacios de codimensión 3 invariantes por f . Continuamos el argumento hasta encontrar todos los subespacios invariantes de codimensión $n - 1$, es decir, hasta encontrar todas las rectas invariantes (aunque podríamos, no hace falta encontrar de esta manera los puntos invariantes por f , ya que estos son los puntos fijos y los podemos hallar directamente usando la proposición 8.20).

Observación 9.36. Si el cuerpo \mathbf{k} no es algebraicamente cerrado (por ejemplo, si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$), también se puede usar el ejercicio 9.34 para hallar todos los subespacios invariantes por una proyectividad f de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n en sí mismo. En este caso, lo que haremos es *extender el cuerpo de escalares* de \mathbf{k} a $\bar{\mathbf{k}}$, donde $\bar{\mathbf{k}}$ es la *clausura algebraica* de \mathbf{k} (si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, entonces $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{C}$ y a hacer esto le denominamos *complejificar* el problema). Vemos cómo se lleva a cabo esto en el caso concreto en que f es una proyectividad de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$ en $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$. En este caso f está representada por una matriz M respecto de la referencia canónica de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$. La matriz M es una matriz $(n + 1) \times (n + 1)$ cuyos elementos son números reales, que son también números complejos, pues $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Por ello, M define una proyectividad $f_{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ en $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ (¡la matriz M sigue siendo invertible sobre \mathbf{C} !). Aplicamos ahora a $f_{\mathbf{C}}$ el método descrito en la observación 9.35. De esta forma encontraremos todos los subespacios invariantes por $f_{\mathbf{C}}$. Estos subespacios invariantes son subespacios proyectivos de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$. Aquellos de entre esos subespacios que sean además subespacios proyectivos de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$ serán los subespacios invariantes por f que buscamos.

Si fijamos una referencia proyectiva, es relativamente sencillo generalizar la construcción anterior al caso general en que $\mathbf{P}(V)$ sea un espacio proyectivo real. No nos detenemos en el caso en que \mathbf{k} es un cuerpo arbitrario, ya que para esto necesitamos definir la clausura algebraica $\bar{\mathbf{k}}$ de un cuerpo \mathbf{k} (brevemente, $\bar{\mathbf{k}}$ es el cuerpo “más pequeño” de entre aquellos cuerpos F que contienen a \mathbf{k} y satisfacen la propiedad de que todo polinomio no constante en una variable y con coeficientes en \mathbf{k} tiene alguna raíz en F) y esto se escapa del ámbito

de este curso. De todas formas, si conociéramos $\bar{\mathbf{k}}$, el proceso sería el mismo que hemos visto, ya que, al igual que \mathbf{R} y \mathbf{C} , los cuerpos \mathbf{k} y $\bar{\mathbf{k}}$ cumplen $\mathbf{k} \subset \bar{\mathbf{k}}$.