

Capítulo 9

Líneas de Transmisión

Introducción

Las líneas de transmisión confinan la energía electromagnética a una región del espacio limitada por el medio físico que constituye la propia línea, a diferencia de las ondas que se propagan en el aire, sin otra barrera que los obstáculos que encuentran en su camino. La línea está formada por conductores eléctricos con una disposición geométrica determinada que condiciona las características de las ondas electromagnéticas en ella.

En los sistemas de comunicaciones, las líneas de transmisión encuentran numerosas aplicaciones no sólo en el transporte de señales entre una fuente y una carga, sino también como circuitos resonantes, filtros y acopladores de impedancia. Algunas de las aplicaciones más comunes incluyen el transporte de señales telefónicas, datos y televisión, así como la conexión entre transmisores y antenas y entre éstas y receptores.

El análisis de las líneas de transmisión requiere de la solución de las ecuaciones del campo electromagnético, sujetas a las condiciones de frontera impuestas por la geometría de la línea y, en general, no puede aplicarse la teoría clásica de circuitos, ya que ésta se ocupa de circuitos con parámetros concentrados, en tanto que en una línea los parámetros son distribuidos. Dichos parámetros son: resistencia, inductancia, capacidad y conductancia y, en los circuitos eléctricos convencionales, están concentrados en un solo elemento o componente bien localizado físicamente. Se considera que, en un circuito, los parámetros son concentrados cuando las dimensiones físicas de sus componentes, incluyendo los hilos de conexión, son mucho menores que la longitud de onda de la energía manejada por el circuito. Si las dimensiones del circuito y sus componentes son comparables a la longitud de onda o menores que ésta, el circuito debe considerarse como de parámetros distribuidos y su tratamiento requiere de la teoría de líneas de transmisión, derivada de la teoría del campo electromagnético. Así en una línea de transmisión, la resistencia, inductancia, capacidad o conductancia no pueden considerarse concentradas en un punto determinado de la línea, sino distribuidos uniformemente a lo largo de ella.

Una de las líneas más simples es la constituida por un par de hilos conductores paralelos¹ y se le designa como *línea de pares* o *línea abierta*. Este tipo de línea, con diversas variantes se utiliza extensamente en telefonía y transmisión de datos, así como para la conexión de transmisores y antenas en las bandas de MF y HF. Otro tipo de línea de uso muy frecuente en sistemas de banda ancha como la telefonía multicanal, televisión y RF hasta frecuencias del orden de 1 GHz, es la línea coaxial. A frecuencias superiores se emplean *guías de onda*, constituidas por tubos huecos de material conductor de sección rectangular, circular o elíptica.

9.1 Parámetros primarios de la línea

Se designan como *parámetros primarios* de la línea los siguientes:

- *Resistencia en serie por unidad de longitud, R*, expresada en Ω/m .
- *Inductancia en serie por unidad de longitud* en Hy/m .
- *Capacidad en paralelo por unidad de longitud, C*, en fd/m .
- *Conductancia en paralelo por unidad de longitud, G*, en S/m .

La resistencia depende la resistividad de los conductores y de la frecuencia. En altas frecuencias, la resistencia aumenta con la frecuencia debido al efecto pelicular (*skin*), ya que la corriente penetra sólo una pequeña capa cercana a la superficie del conductor. La inductancia es consecuencia del hecho de que todo conductor por el que circula una corriente variable tiene asociada una inductancia. Como la línea está formada por dos o más conductores separados por un dieléctrico, constituye, por tanto, un condensador cuya capacidad depende del área de los conductores, su separación y la constante dieléctrica del material que los separa. Finalmente, la conductancia es consecuencia de que el dieléctrico no es perfecto y tiene resistividad finita, por lo que una parte de la corriente se “fuga” entre los conductores y, junto con la resistencia en serie contribuye a las pérdidas o atenuación en la línea.

9.2 Ecuaciones de la línea de transmisión

Supóngase un elemento infinitesimal de una línea abierta de dos conductores paralelos, con parámetros primarios R , L , C y G , que puede suponerse tan pequeño

¹ Estrictamente hablando, la línea más simple es la constituida por un solo alambre conductor, utilizando la tierra como circuito de retorno de la corriente. Este tipo de línea se designa como *no balanceada*.

como se quiera de modo que los parámetros del circuito puedan considerarse concentrados en la forma que se muestra en la figura 9.1.

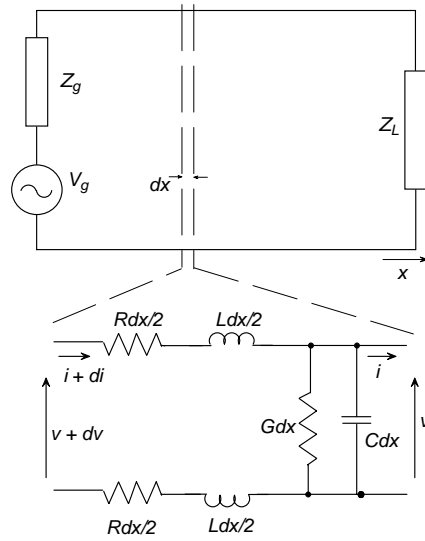


Fig. 9.1. Elemento infinitesimal de una línea de transmisión.

El valor total de la resistencia en este elemento infinitesimal es Rdx ya que la resistencia por unidad de longitud R está distribuida uniformemente a lo largo de las dos ramas del elemento infinitesimal de longitud total dx . El hecho de considerarla dividida en dos ramas o concentrarla en una sola es arbitrario y lo mismo ocurre con la inductancia. La capacidad y la conductancia en paralelo están, respectivamente, concentradas en un solo elemento. El voltaje y la corriente a la entrada del elemento infinitesimal son $v + dv$ e $i + di$, respectivamente y a la salida, v e i . La caída de voltaje a lo largo de dx es dv y la corriente di circula a través de la conductancia y la capacidad.

Suponiendo variaciones senoidales para el voltaje y la corriente y empleando notación fasorial, pueden aplicarse las leyes de Kirchoff al circuito anterior, ahora de parámetros concentrados, con lo que se tiene:

$$dv = i(R + j\omega L)dx \tag{9.1}$$

$$di = v(G + j\omega C)dx \tag{9.2}$$

$$\frac{dv}{dx} = (R + j\omega L)i = zi \tag{9.3}$$

$$\frac{di}{dx} = (G + j\omega C)v = yv \quad (9.4)$$

Donde $z = R + j\omega L$, es la impedancia en serie por unidad de longitud e $y = G + j\omega C$, la admitancia en paralelo, también por unidad de longitud.

Tomando la segunda derivada de las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = zyv \quad (9.5)$$

$$\frac{d^2i}{dx^2} = zyi \quad (9.6)$$

Y, la solución general de las ecuaciones (9.5) y (9.6) puede expresarse como:

$$V(x) = V^+ e^{-\gamma x} + V^- e^{\gamma x} \quad (9.7)$$

$$I(x) = I^+ e^{-\gamma x} + I^- e^{\gamma x} \quad (9.8)$$

Donde:

$$\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (9.9)$$

Se define como *constante de propagación* de la línea que, como se ve de (9.9), es compleja y puede escribirse como:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (9.10)$$

Donde α es la *constante de atenuación*, expresada en nepers/m y β la *constante de fase* en rad/m.

Las ecuaciones (9.7) y (9.8) son las soluciones de la *ecuación de onda* para el voltaje y la corriente en la línea y conviene analizar su significado, utilizando para ello la ecuación (9.7), siendo la argumentación igualmente válida para la (9.8).

La ecuación (9.7) representa una onda de voltaje *vista desde el extremo del generador* que, con ayuda de (9.10) puede escribirse como:

$$V(x) = V^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + V^- e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (9.11)$$

Y, en función del tiempo en forma compleja:

$$V(x) = V^+ e^{-\alpha x} e^{-j(\omega t - \beta x)} + V^- e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \quad (9.12)$$

Un análisis similar puede hacerse para la corriente, obteniéndose una ecuación de onda para la corriente, formalmente igual a (9.12). El primer término de la derecha representa un voltaje de amplitud V^+ en el extremo del generador, que decrece exponencialmente a lo largo de la línea según $e^{-\alpha x}$ como se muestra en la figura 9.2. Esta componente de la onda, que viaja del generador hacia la carga se designa como *onda incidente*.

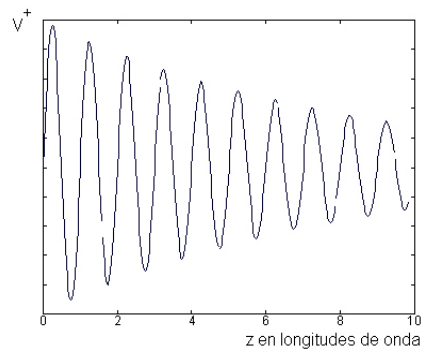


Fig. 9.2. Onda incidente vista desde el generador.

El segundo término de la derecha representa una onda de voltaje que viaja en dirección opuesta a la onda incidente, cuya amplitud en el extremo del generador es V^- . Vista desde el generador, la amplitud de la onda es creciente al aumentar x , como se muestra en la figura 9.3. Se trata de una *onda reflejada* por la carga.

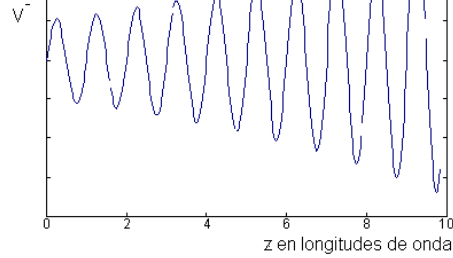


Fig. 9.3. Onda reflejada por la carga, vista desde el generador.

Es importante notar que las gráficas anteriores *no están trazadas respecto al tiempo*, sino a la distancia desde el generador, designada aquí como x , representan la distribución del voltaje a lo largo de la línea, para la onda incidente en el primer caso, y para la reflejada en el segundo. De hecho, la distribución del voltaje en la línea está dada por la suma de las ondas incidente y reflejada como indica la ecuación (9.7), lo que da lugar a una *onda estacionaria* a lo largo de la línea.

Este proceso es análogo al que ocurre cuando una onda electromagnética no confinada, que viaja en un medio de impedancia característica Z_1 , incide sobre la frontera de un segundo medio de impedancia diferente, Z_2 . Una parte de la energía de la onda incidente se transmite hacia el segundo medio y otra se refleja hacia el primero. En el caso de la línea de transmisión, el primer medio sería la propia línea y el segundo la impedancia de carga. Si la impedancia de carga es igual al complejo conjugado de la impedancia característica de la línea, toda la energía es absorbida en la carga, en caso contrario, una parte de la energía incidente vuelve al generador.

9.3 Impedancia característica

En las ecuaciones (9.7) y (9.8), V^+ , V^- , I^+ e I^- son las constantes de integración cuyos valores resultan de aplicar las condiciones de frontera a la solución de las ecuaciones de la línea. Tales condiciones de frontera están representadas aquí por la impedancia de carga y el voltaje aplicado a la línea. De estas cuatro constantes, solamente dos son independientes, ya que:

$$I^+ = \frac{V^+}{\sqrt{\frac{z}{y}}} = \frac{V^+}{Z_0} \quad (9.13)$$

$$I^- = -\frac{V^-}{Z_0} \quad (9.14)$$

Donde:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (9.15)$$

Se define como *impedancia característica* de la línea que, junto con la constante de propagación, se designan como *parámetros secundarios de la línea* y son independientes de la longitud de ésta. La impedancia característica de una línea depende de la permitividad, permeabilidad, frecuencia y geometría de la línea. Como se ve de (9.15), la impedancia característica es, en general, compleja, es decir:

$$Z_0 = R_0 + jX_0 \quad (9.16)$$

Si la frecuencia es suficientemente alta como para que se cumpla que $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$, (9.15) puede aproximarse como:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9.17)$$

Y, en tales condiciones, la impedancia característica es real, es decir, puramente resistiva y no depende de la frecuencia, únicamente de la inductancia y capacidad distribuidas y, esta última, a su vez, de la permitividad del dieléctrico.

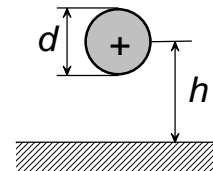
Como se mencionó antes, la impedancia característica de una línea es, entre otras cosas, una propiedad geométrica de la línea, de modo que *dicha impedancia característica es la misma, independientemente de la longitud de la línea.*

9.4 Impedancia característica de algunas líneas de uso frecuente²

En todas las fórmulas: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, donde $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, es la permitividad del espacio libre y ε_r es la permitividad relativa o *constante dieléctrica*.

Un solo hilo conductor cerca de tierra

$$Z_0 = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \log\left(\frac{4h}{d}\right) \quad \text{para } d \ll h$$

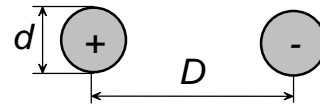


Línea bifilar abierta en el aire

² Reference Data for Radio Engineers. 5th. Edition. Hoard W. Sams & Co., Inc. Indianapolis, 1973.

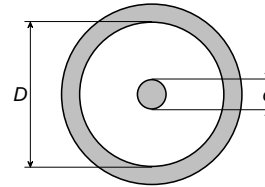
$$Z_0 = 120 \cosh^{-1} \left(\frac{D}{d} \right)$$

$$\approx 276 \log \left(\frac{2D}{d} \right)$$



Línea coaxial.

$$Z_0 = \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \log \left(\frac{D}{d} \right)$$

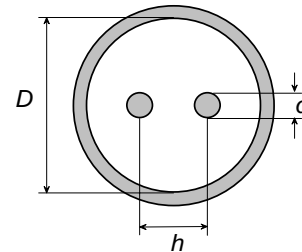


Línea balanceada con blindaje.

Para $D \gg d$; $h \gg d$

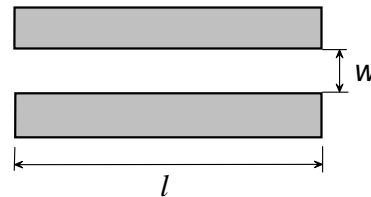
$$Z_0 = \frac{276}{\sqrt{\epsilon}} \log \left[2v \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2} \right]$$

$$v = h/d \quad \sigma = h/D$$



Línea de cintas paralelas

$$Z_0 \approx \frac{377w}{l} \quad \text{Para } w/l < 0.1$$



9.5 Corriente y voltaje en la línea de transmisión. Coeficiente de reflexión

Las expresiones (9.7) y (9.8) representan el voltaje y la corriente a lo largo de la línea de transmisión, con dos componentes, una onda directa que viaja del generador hacia la carga y otra que viaja de la carga hacia el generador. De acuerdo con esto, la onda reflejada en la línea de transmisión puede describirse como un voltaje, acompañado de una corriente que circula de la carga hacia el generador y que de-

crece exponencialmente según se aleja de la carga. Así, el voltaje reflejado puede expresarse en términos desde la *distancia medida desde la carga*, z , como:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_L e^{-\gamma z} \\ I(z) &= -\frac{V(z)}{Z_0} = -\frac{V_L}{Z_0} e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (9.18)$$

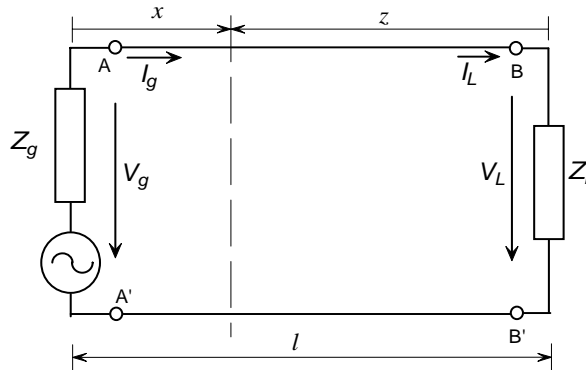


Fig. 9.4. Voltaje y corriente en la línea de transmisión.

En la figura 9.4 se indican los voltajes y corrientes en la línea de transmisión:

- Z_g = Impedancia interna del generador.
- V_g = Voltaje en las terminales del generador.
- I_g = Corriente en el extremo del generador.
- Z_L = Impedancia de carga.
- V_L = Voltaje en las terminales de la carga.
- I_L = Corriente en el extremo de la carga.
- z = Distancia medida desde el extremo de la carga.

Ahora bien, el voltaje en las terminales de la carga es la suma de dos voltajes: uno *incidente*, debido al generador, V_i , y otro *reflejado* por la carga, V_r . La relación entre el voltaje reflejado y el incidente se designa como *coeficiente de reflexión*, Γ :

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_L/Z_0 - 1}{Z_L/Z_0 + 1} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (9.19)$$

El coeficiente de reflexión es, en general, complejo y, aunque se expresa en términos de la situación en la carga, puede expresarse en cualquier punto a distancia z de ésta como:

$$\Gamma(z) = |\Gamma_L| e^{-2\alpha z} \quad (9.20)$$

Donde Γ_L es el valor del coeficiente de reflexión en la carga, dado por la magnitud de (9.19). Cuando la atenuación en la línea es cero ($\alpha = 0$), el coeficiente de reflexión tiene la misma magnitud en toda la línea, pero si $\alpha \neq 0$, la magnitud de la onda reflejada se reduce según aumenta la distancia a la carga como indica (9.20).

La relación entre el voltaje y la corriente en la carga y los voltajes de las ondas incidente y reflejada puede deducirse de las ecuaciones anteriores y está dado por:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{V_L}{1 + \Gamma} = \frac{V_L + I_L Z_0}{2} \\ V_r &= \Gamma V_i = \frac{\rho V_L}{1 + \Gamma} = \frac{V_L - I_L Z_0}{2} \end{aligned} \quad (9.21)$$

El voltaje y la corriente en un punto dado de la línea de transmisión son la suma de los voltajes y corrientes de la onda incidente y reflejada, respectivamente, según se definen en (8.21). Estos resultados pueden escribirse también en términos de funciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_L \cosh \gamma z + I_L Z_0 \sinh \gamma z \\ I(z) &= I_L \cosh \gamma z + \frac{V_L}{Z_0} \sinh \gamma z \end{aligned} \quad (9.22)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \cosh \gamma z &= \frac{e^z + e^{-\gamma z}}{2} \\ \sinh \gamma z &= \frac{e^z - e^{-\gamma z}}{2} \end{aligned} \quad (9.23)$$

Son el coseno y el seno hiperbólicos, respectivamente.

9.6 Impedancia de entrada de una línea de transmisión con cualquier impedancia de carga

Si la línea está terminada en su impedancia característica, Z_0 , la impedancia que se ve desde las terminales AA' del generador, será también Z_0 . Si $Z_L \neq Z_0$, la impedancia vista desde el generador será ahora Z_i , diferente de Z_0 . Puede demostrarse que la impedancia de entrada de la línea en estas condiciones está dada por:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_0 \cosh \gamma l + Z_L \sinh \gamma l} \quad (9.24)$$

En que l es la longitud total de la línea. Es importante notar que la fórmula anterior es igualmente válida para calcular la impedancia vista desde las terminales de la carga, BB', hacia el generador, si la impedancia de éste no es igual a la impedancia característica.

En líneas de bajas pérdidas, $\alpha \approx 0$, con lo que $\cosh \gamma l \approx \cos \beta l$ y $\sinh \gamma l \approx \sin \beta l$ y la impedancia de entrada se reduce a:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_L \sin \beta l} \quad (9.25)$$

Impedancia de entrada de una línea terminada en cortocircuito. En este caso $Z_L = 0$ y $\Gamma_L = 1 \angle 180^\circ$ y, de (9.25):

$$Z_i = Z_{sc} = jZ_0 \tan \beta l \quad (9.26)$$

Impedancia de entrada de una línea terminada en circuito abierto. En estas condiciones, $Z_L = \infty$ y $\Gamma_L = 1 \angle 0^\circ$. La impedancia de entrada es:

$$Z_i = Z_{oc} = -jZ_0 \cot \beta l \quad (9.27)$$

Donde Z_{sc} y Z_{oc} denotan las impedancias en cortocircuito (*short circuit*) y en circuito abierto (*open circuit*), respectivamente.

Impedancia de entrada de una línea terminada en una reactancia pura. En estas condiciones:

$$\Gamma_L = 1 \angle \left[\pi \pm \tan^{-1} \left(\frac{|X|}{Z_0} \right) \right] \quad (9.28)$$

La impedancia en un punto a una distancia x del generador está dada por³:

$$Z(x) = Z_0 \frac{\pm jX \cos \beta x + jZ_0 \operatorname{sen} \beta x}{\mp X \operatorname{sen} \beta x + Z_0 \cos \beta x} \quad (9.29)$$

Donde $Z_L = 0 \pm jX$ y, si ahora se hace $\pm X/Z_0 = \tan \beta z$, donde $z = l - x$, la distancia medida desde la carga, (9.29) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} Z(x) &= jZ_0 \frac{\tan \beta z + \tan \beta x}{1 - \tan \beta z \tan \beta x} \\ &= jZ_0 \tan \beta(l + d) \end{aligned} \quad (9.30)$$

Comparando (9.30) con (9.26) se infiere que una línea terminada en una reactancia pura $Z_L = jX_L$, se comporta de manera similar a una línea terminada en cortocircuito, pero de diferente longitud. Si la terminación es inductiva, el cortocircuito aparece a una distancia aparente $l + z$, mayor que la longitud l de la línea, en tanto que si es capacitiva, la distancia aparente es $l - z$, menor que la longitud real de la línea.

9.7 Constante de propagación

La constante de propagación definida como:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (9.25)$$

puede desarrollarse elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, e igualando las partes reales e imaginarias, con lo que se obtienen las siguientes expresiones para las constantes de atenuación y de fase:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (9.26)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (9.27)$$

Línea de bajas pérdidas. Se define como *línea de bajas pérdidas* aquella en la que se cumplen las condiciones siguientes:

³ Karakash, J.J. *Transmisión Lines and Filter Networks*. The MacMillan Company. New York, 1950.

$$\begin{aligned}\omega L &\gg R \\ \omega C &\gg G\end{aligned}\quad (9.28)$$

Con lo que las constantes de atenuación y fase se reducen a:

$$\alpha \cong \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + G \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad (9.29)$$

$$\beta \cong \omega \sqrt{LC} \quad (9.30)$$

De (9.26) se observa que α , la constante de atenuación, es función de la frecuencia, por lo que la atenuación no es uniforme en toda la banda y la línea introduce distorsión que en algunos casos puede ser severa, alterando considerablemente la señal recibida. A fin de ilustrar esto, en la figura 4 se muestra la variación de la constante de atenuación, entre 300 y 3400 Hz, de una línea telefónica con los siguientes parámetros primarios: $R = 0.0533 \Omega/\text{m}$; $L = 6.21 \times 10^{-7} \text{ H/m}$; $C = 3.85 \times 10^{-11} \text{ f/m}$; $G = 9.32 \times 10^{-10} \text{ S/m}$.

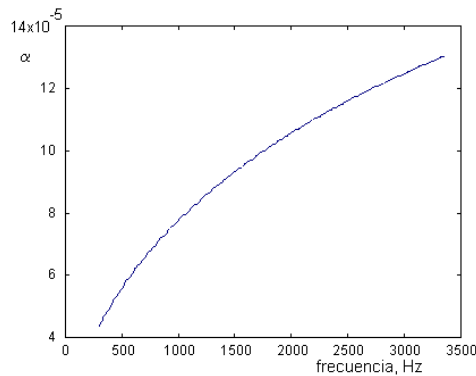


Fig. 9.5. Constante de atenuación de una línea telefónica.

Para esta línea particular, la constante de atenuación varía desde alrededor de 4×10^{-5} neper/m hasta 13.5×10^{-5} neper/m en la parte alta de la banda. Estas cifras resultan más significativas si se supone una línea, por ejemplo, de 25 km y se expresa la atenuación en dB ($1 \text{ dB} = 8.686 \text{ neper}$). La atenuación mínima resulta de 8.69 dB en bajas frecuencias, y la máxima, de 29.32 dB en altas frecuencias. Es decir, los componentes de alta frecuencia de la señal sufren, en esta línea, una atenuación de 20.63 dB respecto a los de baja frecuencia. Para señales de voz, la distorsión resultante tendría como consecuencia la pérdida del timbre de la voz origi-

nal y, posiblemente, la inentiligibilidad del mensaje, lo que obliga emplear técnicas para corregir esta situación y hacer que la atenuación sea la misma a todas las frecuencias de la banda. La técnica más frecuente es la *ecualización* y consiste en predistorsionar la señal de modo que se compense la característica de atenuación del sistema. En el caso anterior, la señal puede predistorsionarse, o *ecualizarse* a la entrada de la línea mediante un filtro cuya característica sea la inversa de la atenuación en la línea, como se muestra en la figura 9.6.

En el campo de la telefonía esta ecualización puede realizarse en los repetidores, que son amplificadores intercalados en la línea para restaurar el nivel de la señal a lo largo de ésta.

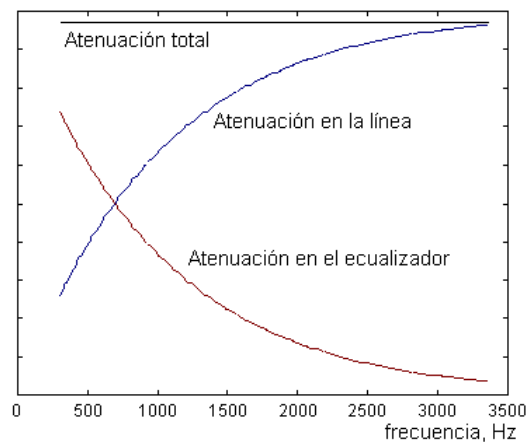


Fig. 9.6. Compensación de la atenuación.

Se emplea también una técnica conocida como *pupinización*⁴, que consiste en intercalar *bobinas de carga* a ciertos intervalos en la línea de transmisión, de modo que se consigue una característica similar a la de la figura 9.6, es decir de atenuación constante. Para ello, la inductancia de las bobinas que se intercalan debe cumplir la condición de que:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (9.31)$$

⁴ Esta técnica se debe a Michael Pupin (1838-1935), físico e ingeniero americano, de origen yugoslavo.

9.8 Línea infinita

En una línea hipotética de longitud infinita, la onda viaja sólo en una dirección y, por consecuencia, no hay onda reflejada, de modo que el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea, a una distancia x del generador, de acuerdo a (9.7) y (9.8) es:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_g e^{-\gamma x} \\ I(x) &= \frac{V_g}{Z_0} e^{-\gamma x} \end{aligned} \quad (9.32)$$

En que V_g designa al voltaje del generador; V^+ en (8.7). La impedancia $Z(x)$ en cualquier punto x de la línea es, por consecuencia:

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \quad (9.33)$$

De acuerdo a lo anterior, una línea terminada (cargada) en su impedancia característica, Z_0 se comporta como una línea infinita, en la que no hay reflexión de energía de la carga hacia el generador. Si una línea está terminada en su impedancia característica⁵, toda la potencia se absorbe o disipa en la carga. Como la onda reflejada no es aprovechable en la carga, es deseable que la onda reflejada sea mínima o nula.

9.9 Transformador de $\lambda/4$

Una aplicación frecuente de las líneas de transmisión es como transformadores o acopladores de impedancia. Supónganse que es necesario conectar entre sí dos impedancias diferentes Z_1 y Z_2 de modo que no haya reflexión y se tenga la máxima transferencia de potencia. En lugar de utilizar un acoplador convencional con parámetros concentrados, como los tratados en el capítulo 3, el acoplamiento es posible mediante una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda de impedancia Z_0 , como se ilustra en la figura 9.7.

⁵ Esto es válido si la impedancia característica de la línea es puramente resistiva. Si es compleja, la terminación debe ser en una carga cuya impedancia sea el conjugado complejo de la impedancia característica.

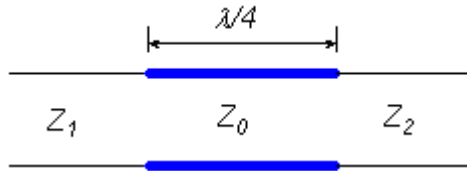


Fig. 9.7. Transformador de $\lambda/4$.

En estas condiciones:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \tag{9.40}$$

Utilizando (9.34) se tiene:

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + jZ_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{Z_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + jZ_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{Z_0^2}{Z_2} \tag{9.41}$$

Con lo que, para cumplir la condición de acoplamiento, la impedancia característica de la línea de $\lambda/4$ debe ser:

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2} \tag{9.42}$$

9.10 Relación de onda estacionaria (ROE⁶)

Cuando una línea no está acoplada, es decir, terminada en su impedancia característica, parte de la energía incidente sobre la carga es reflejada hacia el generador. La relación entre el voltaje de la onda reflejada y el de la incidente es el *coeficiente de reflexión*, ya definido por (9.19). Este hecho da lugar a que a lo largo de la línea se forme una *onda estacionaria*, con máximos y mínimos de voltaje y corriente, a distancias fijas a lo largo de la línea y que tiene la forma mostrada en la figura 9.8.

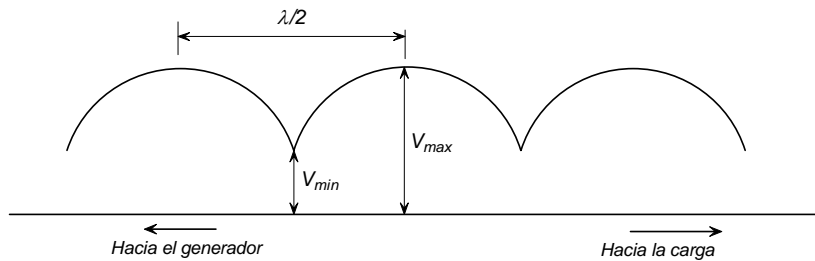


Fig. 9.8. Onda estacionaria.

⁶ En inglés SWR (*Standing Wave Ratio*) o VSWR (*Voltage Standing Wave Ratio*).

Se define como *relación de onda estacionaria de voltaje* o simplemente *relación de onda estacionaria (ROE)* a:

$$ROE = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} \quad (9.43)$$

La ROE es siempre real y positiva, en el rango $1 \leq ROE \leq \infty$. Cuando la línea está acoplada, $Z_L = Z_0$ y no hay onda reflejada. En esas condiciones $ROE = 1$. Si la línea está terminada en circuito abierto o en cortocircuito, hay reflexión total y $ROE = \infty$. La relación de onda estacionaria es importante, ya que a diferencia del coeficiente de reflexión, es un parámetro fácil de medir y da una indicación de las condiciones de funcionamiento de la línea y del acoplamiento de ésta a la carga y al generador.

El voltaje máximo de la onda estacionaria, V_{\max} , ocurre cuando los voltajes incidente y reflejado están en fase, es decir:

$$|V_{\max}| = |V_i| + |V_r| \quad (9.44)$$

En tanto que el mínimo ocurre cuando tienen fases opuestas:

$$|V_{\min}| = |V_i| - |V_r| \quad (9.45)$$

Relación entre el coeficiente de reflexión y ROE. De la definición del coeficiente de reflexión, Γ , en (9.19), se obtiene que:

$$|\Gamma| = \frac{|V_{\max}| - |V_{\min}|}{|V_{\max}| + |V_{\min}|} = \frac{ROE - 1}{ROE + 1} \quad (9.46)$$

La ecuación (9.46) proporciona la magnitud del coeficiente de reflexión, pero no su fase.

La separación entre un máximo y un mínimo es de $\lambda/4$ y entre dos máximos o dos mínimos, de $\lambda/2$, donde λ es la *longitud de onda en la línea* (véase sección 9.14).

9.11 Reflexión total

Si la línea está terminada en un cortocircuito la reflexión en la carga es total y la onda estacionaria de voltaje tiene la forma mostrada en la figura 9.9, en que los mínimos están separados entre sí una distancia de $\lambda/2$.

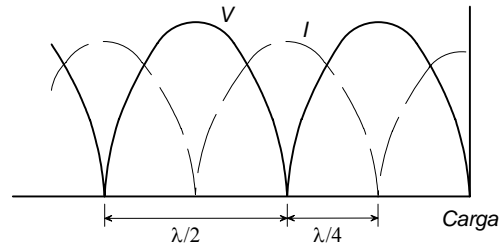


Fig. 9.9. Reflexión total.

El valor de ROE en estas condiciones es ∞ , ya que $|V_{\min}| = 0$. En una línea terminada en un cortocircuito, el voltaje en la carga es mínimo (cero) y la corriente es máxima. La reflexión en la carga afecta a la distribución tanto de voltaje como de corriente en la línea. La corriente reflejada hacia el generador no cambia de fase, en tanto que el voltaje sufre una inversión de fase de 180° . En un punto a una distancia de la carga de $\lambda/4$ de la carga la corriente llega a cero en tanto que el voltaje alcanza un máximo. A media longitud de la carga la situación se invierte y el voltaje es cero y la corriente máxima. Este patrón de la onda estacionaria se mantiene a lo largo de la línea y el valor de ROE es constante en ella si la línea no tiene pérdidas.

La situación es similar si la línea está terminada en un circuito abierto, excepto que ahora en la carga se tiene un mínimo de corriente y un máximo de voltaje. Si la línea está terminada en una carga cualquiera, de impedancia Z_L , la onda estacionaria tendrá una forma semejante a la de la figura 9.10, en que en la carga no hay un máximo ni un mínimo de voltaje.

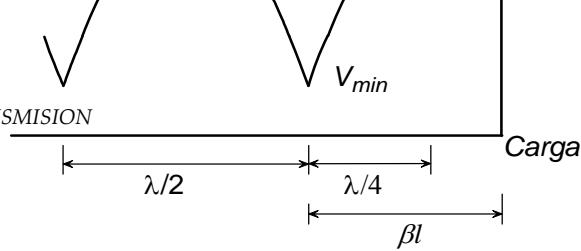


Fig. 9.10. Onda estacionaria con una carga Z_L .

La distancia de la carga al primer mínimo de voltaje no será ahora $\lambda/2$ como en el caso de la línea terminada en cortocircuito, ni $\lambda/4$ como para la terminación en circuito abierto, sino una distancia βl . El voltaje mínimo, en general, tampoco será cero. Conocida esta distancia, es posible determinar el valor de la impedancia de carga. Este cálculo se puede realizar con suma facilidad mediante la Carta de Smith que se tratará más adelante.

9.12 Línea ranurada

El voltaje de la onda estacionaria puede medirse fácilmente con una *línea ranurada* que, para el caso de líneas coaxiales es una sección de línea con una ranura por la que se desliza una sonda montada en un carro deslizante sobre una escala calibrada, con un detector cuya salida proporciona el voltaje inducido por la onda en la línea. En la figura 9.11 se ilustra una línea coaxial ranurada típica.

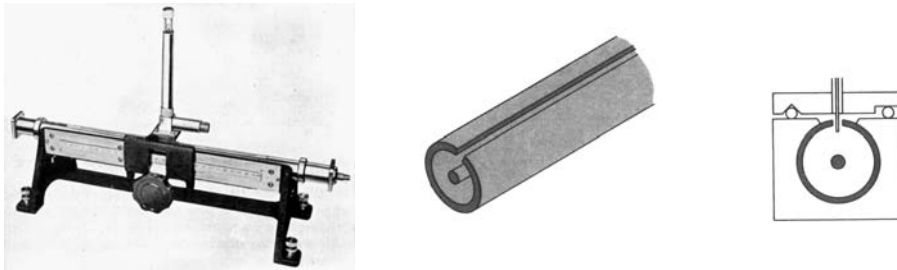


Fig. 9.11. Línea coaxial ranurada.

La línea ranurada se inserta entre la carga y el generador o la línea que lo conecta a la carga y se localizan los máximos o los mínimos de voltaje y la distancia a que ocurren desde la carga. Por lo general se prefiere utilizar los mínimos de voltaje a los máximos, ya que éstos son más pronunciados y proporcionan mayor precisión en la medida. En la región de los mínimos de voltaje la pendiente es más aguda que en los máximos y esto permite reducir el error en la medición.

La misma técnica se aplica en las mediciones en guías de onda, utilizando guías ranuradas como la mostrada en la figura 9.12.

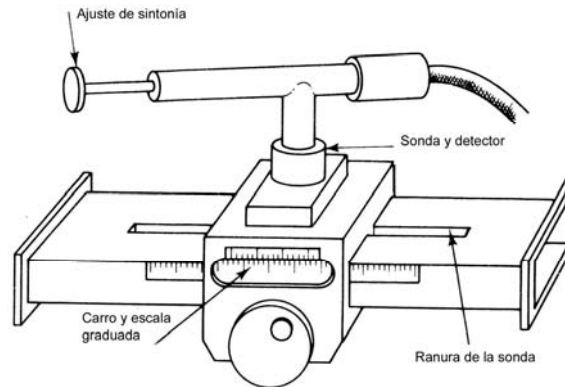


Fig. 9.12. Guía de onda ranurada.

9.13 Longitud de onda y velocidad de propagación en la línea

La longitud de onda en la línea se define como la distancia que debe recorrer la onda para que su fase cambie 2π radianes o 360° . En (9.12), la fase de la onda la distancia x está dada por βx , de modo que habrá un cambio de fase de 2π radianes cuando $\beta x = 2\pi$ y, en esas condiciones $x = \lambda$, la longitud de onda en la línea, con lo que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (9.47)$$

Esta longitud de onda no es, en general, la misma que la longitud de onda en el espacio libre dada por:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} \quad (9.48)$$

donde c es la velocidad de propagación de la energía electromagnética en el espacio libre, e igual a la velocidad de la luz (3×10^8 m/s) y f es la frecuencia en Hz. En un medio cualquiera, de permitividad $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ y permeabilidad $\mu = \mu_0 \mu_r$, la velocidad de propagación de la energía electromagnética es:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r}\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r}} \quad (9.49)$$

y como $\mu_r = 1$ para dieléctricos, y además:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (9.50)$$

Se tiene que la velocidad de propagación en la línea es:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (9.51)$$

la longitud de onda en la línea también puede expresarse como:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} \quad (9.52)$$

Con lo que se tiene que la velocidad de propagación (*velocidad de fase*) en la línea es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (9.53)$$

En líneas de RF con dieléctrico de aire, la longitud de onda en la línea es cercana a la del espacio libre, pero en cables con dieléctrico sólido de constante dieléctrica ϵ_r , la longitud de onda en la línea es:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (9.54)$$

En muchas aplicaciones es necesario cortar tramos de líneas de transmisión a longitudes precisas, por ejemplo $\lambda/4$, $\lambda/2$, etc., y para ello, debe utilizarse la longitud de onda en la línea dada por (9.52) y no la longitud de onda en el espacio libre.

La constante de propagación puede expresarse mediante una serie de Taylor para mostrar el comportamiento asintótico de las constantes de atenuación y de fase cuando $R \ll j\omega L$ y $G \ll j\omega C$. Este tratamiento queda fuera del alcance de estas notas⁷

9.14 Velocidades de fase y de grupo⁸

En las soluciones de las ecuaciones del campo para medios de propagación guiada como es el caso de las líneas de transmisión y las guías de onda, se presentan dos

⁷ Puede consultarse, por ejemplo, *Transmission Lines and Wave Propagation*. Philip C. Magnusson. Allyn and Bacon, Boston, 1970.

⁸ Jordan, E.C. and Balmain, K.G. *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd Ed. Prentice-Hall, Inc. 1968.

velocidades: la velocidad de fase y la velocidad de grupo. Intentaremos aquí explicar la diferencia.

La velocidad de fase es la velocidad con que se propagan las superficies de igual fase en un medio guiado. Esta no es, necesariamente, la velocidad con que se propaga la energía y, si se considerara el caso más simple de propagación de una onda electromagnética confinada entre dos planos conductores paralelos en el aire, se encuentra que la velocidad de propagación en esas condiciones es mayor que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el espacio libre. En una guía de planos paralelos, no puede existir una onda cuyas componentes del campo sean transversales a la dirección de propagación, lo que se designa como modo TEM o transversal electromagnético. La velocidad de la onda o velocidad de fase es siempre mayor que la velocidad en el espacio libre. Por otra parte, la velocidad con que se propaga la energía a lo largo de la guía siempre es menor que la velocidad en el espacio libre. La relación entre estas velocidades puede comprenderse mejor si se considera la propagación de ondas en el agua que se aproximan a un rompeolas en la costa, con un ángulo θ respecto a éste, como se ilustra en la figura 9.13.

La velocidad de las ondas puede determinarse midiendo la distancia λ entre crestas sucesivas y registrando la frecuencia f cuando las crestas pasan frente a un punto de observación fijo. La velocidad c con que viajan las ondas estará dada por:

$$c = \lambda f \quad (9.55)$$

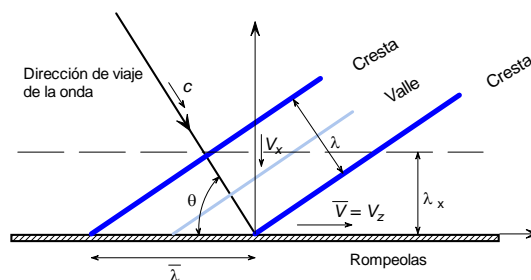


Fig. 9.13. Rompeolas.

Supóngase que no se puede o no se desea hacer la medición en el agua. En tal caso se puede medir el ángulo θ y la longitud de onda $\bar{\lambda}$ entre las crestas a lo largo del rompeolas. La velocidad en la dirección z estará dada por:

$$\bar{v} = \bar{\lambda} f \quad (9.56)$$

Evidentemente, $\bar{\lambda}$ y \bar{v} serán mayores que λ y c respectivamente y estarán relacionadas con éstas por:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\cos \theta} \\ \bar{v} &= \frac{c}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (9.57)$$

Cuando θ es pequeño, la dirección de viaje de la onda es casi paralela al rompeolas y la velocidad \bar{v} con que viajan las crestas a lo largo de éste es casi igual a c , la velocidad en el espacio libre. Sin embargo, cuando θ alcanza un valor cercano a 90° la velocidad con que viajan las crestas a lo largo del rompeolas tiende a infinito. De acuerdo a lo anterior, la velocidad de fase puede tener valores mayores a la velocidad de la luz. Esto parece estar en contradicción con el principio establecido por la Teoría de la Relatividad en que la velocidad de la luz es la *velocidad última*, o máxima a la que puede viajar la materia o la energía. Sin embargo, no es así, ya que la velocidad de fase no es la velocidad a la que se transporta la energía electromagnética, sino a la que se mueven los puntos de una determinada fase.

En el caso de propagación guiada, la velocidad de transporte de la energía electromagnética es la *velocidad de grupo*, que tiene un significado más general que el descrito antes. Para transportar información, siempre es necesario modular, de una u otra forma, la portadora transmitida. A causa de la modulación se forman grupos de frecuencias, por lo general centradas alrededor de la portadora, que se propagan en el medio de transmisión. Si la velocidad de fase es función de la frecuencia, las ondas de diferentes frecuencias en el grupo viajarán con velocidades ligeramente diferentes y se combinan para formar una “envolvente de modulación” que se propaga como una onda con velocidad de grupo v_g , definida como:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (9.58)$$

La relación entre las velocidades de fase y de grupo puede definirse como:

$$v_g v_p = \frac{1}{\mu \epsilon} \quad (9.59)$$

Y en el espacio libre o en el aire en que $\mu = \mu_0$ y $\epsilon = \epsilon_0$, $v_g v_p = c^2$.

9.15. Análisis gráfico de las líneas de transmisión: Carta de Smith

El análisis de las líneas de transmisión puede simplificarse utilizando alguno de varios métodos gráficos, de los que el más importante es la *Carta de Smith*^{9,10}, mostrada en la figura 9.14 y que es la más utilizada. La carta o diagrama de Smith se basa en dos conjuntos de círculos ortogonales, uno de ellos representa la relación R/Z_0 , en que R es la componente resistiva de la impedancia característica. El segundo conjunto de círculos, representa la relación X/Z_0 , en que X es la componente reactiva de la impedancia de la línea. Estas coordenadas se obtienen mediante una transformación conforme correspondientes a una relación de onda estacionaria dada, o lo que es lo mismo a la magnitud del coeficiente de reflexión en la carga, para una línea de transmisión sin pérdidas. La teoría de la Carta de Smith es amplia y no se trata aquí.

En la figura 9.15 se muestran los círculos de resistencia y reactancia constante que componen la la Carta de Smith, así como los círculos de ROE constante, que habitualmente no figuran en la carta y, eventualmente, es necesario trazarlos con compás. Estos círculos de ROE constante, son también de la magnitud del coeficiente de reflexión de acuerdo a (9.46).

⁹ Smith, P. H. "Transmission Line Calculator". *Electronics*, vol. 12, p. 29. Jan. 1939.

¹⁰ Smith, P. H. "An Improved Transmission Line Calculator", *Electronics*, vol. 17, p. 130. Jan 1944.

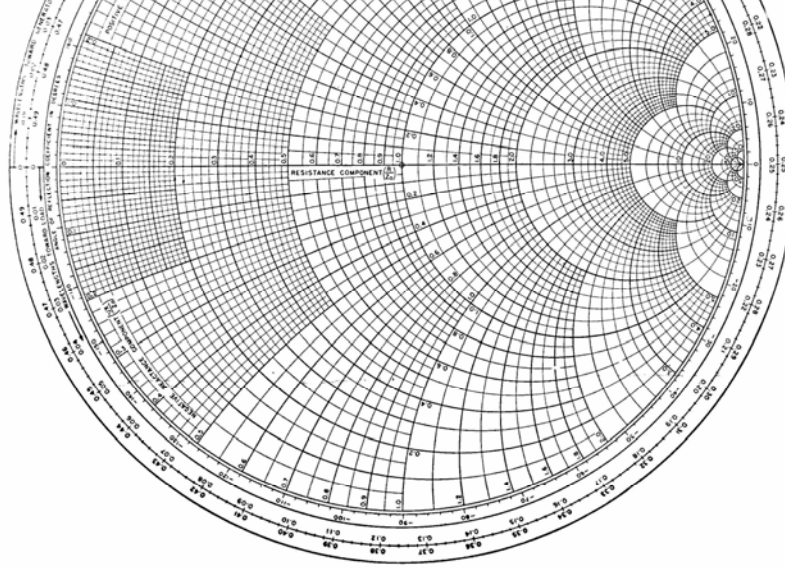


Fig. 9.14. Carta de Smith.

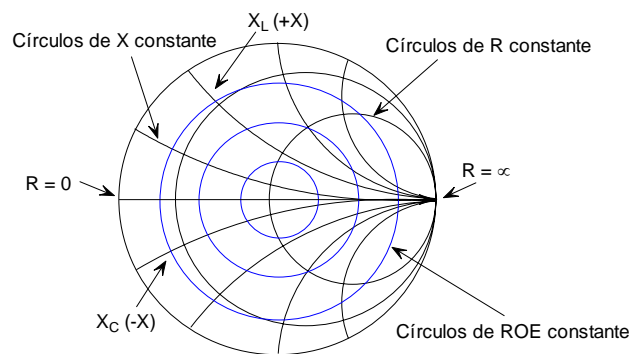


Fig. 9.15. Círculos en la Carta de Smith.

El centro de la gráfica corresponde al valor $Z = 1 + j0$. El círculo externo corresponde a valores de reactancias puras ($R = 0$), en tanto que el eje horizontal corresponde a valores de resistencias puras ($X = 0$). Las reactancias en la mitad superior son positivas (inductivas) y negativas (capacitivas) las de la parte inferior. De hecho, en la Carta de Smith puede representarse cualquier valor complejo *no realizable*. El extremo izquierdo de la gráfica corresponde a un cortocircuito, en tanto que el extremo derecho corresponde a un circuito abierto. El recorrido total sobre la gráfica equivale a una longitud en la línea de $\lambda/2$ (180° eléctricos). Si la gráfica se recorre en sentido de las manecillas del reloj (dextrógiro), equivale a avanzar en la línea moviéndose de la carga hacia el generador. En sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj), se avanza del generador hacia la carga.

9.15.1 Algunas propiedades de la Carta de Smith

Un aspecto importante en que es necesario insistir cuando se utiliza la Carta de Smith, es que una vuelta completa de 360° , equivale a recorrer *media longitud de onda* (180° eléctricos o π radianes eléctricos) en la línea, bien sea en dirección a la carga o al generador. La Carta de Smith representa todo el plano complejo y ofrece un método gráfico de cálculo con números complejos. Como todo método gráfico, la precisión es inferior a la que se puede obtener por métodos analíticos de cálculo. En la práctica, casi nunca se necesitan precisiones mayores que las que proporciona este método gráfico y, prueba de ello es que a pesar de todas las herramientas de cálculo electrónico de que se dispone en la actualidad, la Carta de Smith sigue usándose desde hace casi setenta años. Aquí mencionaremos sólo algunas de las aplicaciones y ejemplos más sencillos, suficientes para lo que se requiere en el contexto de este trabajo. En la realidad, las aplicaciones son innumerables y algunas de ellas pueden encontrarse en la bibliografía.

Recíproco de la impedancia (admitancia)

El recíproco de una impedancia $Z_1 = R_1 + jX_1$ es:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 + jX_1} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - j \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = R_2 - jX_2 \quad (9.60)$$

En la Carta de Smith el recíproco de Z_1 se obtiene directamente como sigue:

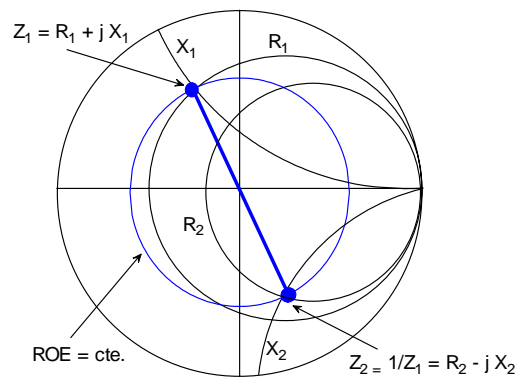
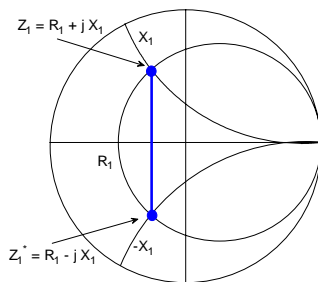


Fig. 9.16. Recíproco de Z .

- Se localiza en la gráfica el punto correspondiente a Z_1 en la intersección de los círculos correspondientes a R_1 y X_1 como se muestra en la figura 9.16.
- Se traza el círculo de ROE constante que pasa por ese punto.
- Se traza una recta que pase por el centro de la gráfica hasta cortar al círculo de ROE constante diametralmente opuesto.
- En ese nuevo punto se intersectan dos círculos, uno de resistencia y otro de reactancia, cuyos valores corresponden al recíproco de Z_1 .



De acuerdo a esto, en la Carta de Smith es posible trabajar tanto con impedancias como con admitancias.

Complejo conjugado. El complejo conjugado de $Z_1 = R_1 + jX_1$ es $Z_1^* = R_1 - jX_1$. El procedimiento para obtenerlo en la gráfica es muy simple y se ilustra en la figura 9.17.

Fig. 9.17. Z conjugada.

Coefficiente de reflexión.

El módulo del coeficiente de reflexión puede obtenerse a partir de la relación de onda estacionaria, dada por el radio del círculo de ROE constante, mediante (9.43). También es posible determinar directamente en la carta el valor del ángulo de dicho coeficiente. En el borde exterior del diagrama circular, suelen presentarse dos escalas, una que da el ángulo del coeficiente de reflexión y otro que da la distancia en longitudes de onda, medida desde la carga hacia el generador.

9.15.2 Ejemplos de empleo de la Carta de Smith.

- Supóngase que se requiere determinar la impedancia de entrada de una línea sin pérdidas, cuya longitud es de $\lambda/10$ (36° eléctricos) y que está terminada por una impedancia de carga de $21 + j24 \Omega$, si la impedancia característica de la línea es de 60Ω .

El primer paso consiste en la normalización de la impedancia de carga respecto a la impedancia característica:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{21 + j24}{60} = 0.35 + j0.40$$

El valor anterior es el punto P de entrada a la carta, en que la coordenada angular, indicada sobre la circunferencia del círculo unitario en la figura 9.18, es aproximadamente 0.066λ , que equivale a una longitud eléctrica de 23.8° .

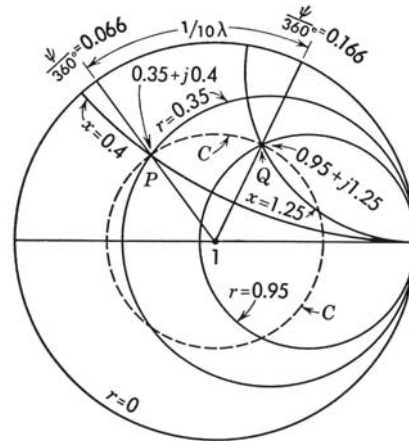


Fig. 9.18.

Como la longitud de la línea es de 36° o $\lambda/10$, moviéndose sobre el círculo C de ROE constante, hasta el punto en que se interseca la línea radial trazada a 0.166λ ($0.066\lambda + 0.1\lambda$), se obtiene el punto Q , que representa la impedancia de entrada normalizada, cuyo valor es aproximadamente $0.95 + j1.25$. La impedancia de entrada, vista en las terminales del generador se obtiene multiplicando la impedancia normalizada por Z_0 , lo que da como resultado un valor de $57 + j75 \Omega$. Lo anterior equivale a utilizar la ecuación (9.34), con la que se obtiene un resultado de $56.5 + j75.03 \Omega$, prácticamente el mismo, pero algo más laborioso.

2. Hallar la longitud de una línea sin pérdidas en cortocircuito que presenta una reactancia normalizada de (a) $+2j$ y (b) $-0.5j$ en las terminales de entrada¹¹.

¹¹ Sander, K.F. and Reed, G.A. *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*. Cambridge University Press. Cambridge, UK. 1978.

Como la línea está terminada en un corto circuito $Z_L = 0 + j0$, que corresponde al punto A en la figura 9.16. El coeficiente de reflexión para es punto es $\Gamma_L = 1 \angle 180^\circ = -1$. A cualquier otro valor de la distancia z , medida desde la carga hacia el generador el coeficiente de reflexión será $\Gamma(z) = \Gamma_L \exp(2j\beta z)$. A partir de A se recorre la gráfica sobre el círculo externo, que corresponde a $ROE = \infty$ o, lo que es lo mismo $|\Gamma| = 1$, hasta cortar el círculo correspondiente a $X = 2$, marcado como punto B en la figura. Sobre el borde de la carta se lee la longitud requerida de 0.176λ .

El mismo proceso se sigue para localizar el punto C, correspondiente a una reactancia de $-0.5j$. En este caso se recorre más de medio círculo (0.25λ), por lo que la distancia a la carga es $0.25\lambda + 0.176\lambda = 0.426\lambda$.

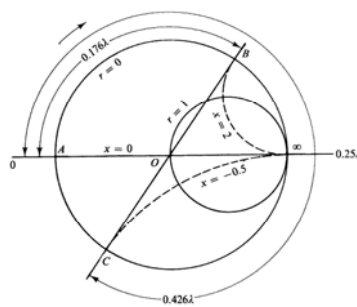
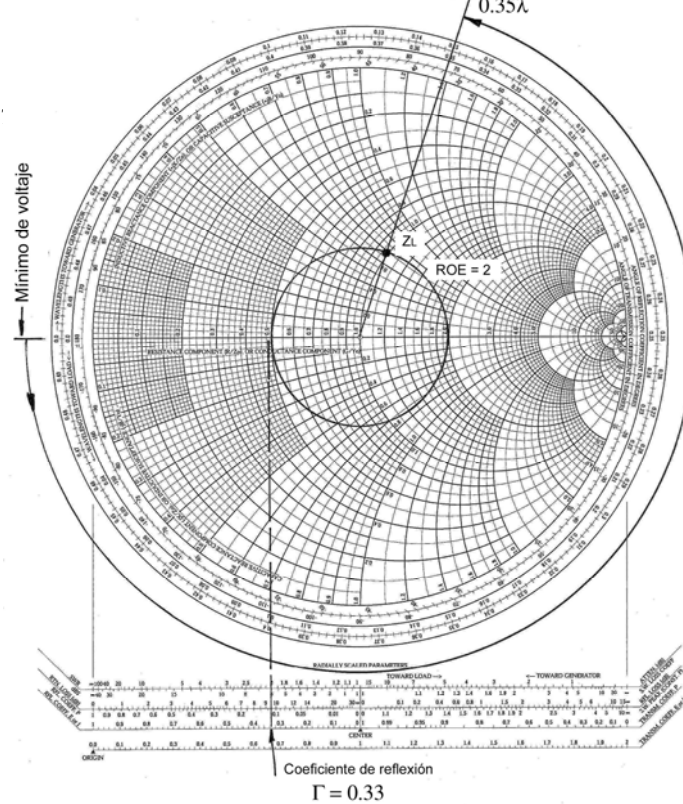


Fig. 9.19.

3. En una línea de transmisión se mide una $ROE = 2$ y una distancia de la carga al primer mínimo de 0.35λ . Determinar la impedancia de carga.

El problema se resuelve gráficamente como se muestra en la figura siguiente.



4. Una línea tiene una impedancia característica de 50Ω y está terminada en una impedancia de $30 + j40 \Omega$. Determinar el valor de la impedancia de entrada si la línea tiene una longitud de 60° eléctricos.

Se normaliza primero la impedancia de carga respecto a Z_0 : $z_L = 0.6 + j0.8$ y se localiza este punto sobre la gráfica. Se traza a continuación un círculo, con centro en el centro de la gráfica, que pase por el punto correspondiente a z_L . En este caso el círculo corresponde a $ROE = 3$. Se avanza sobre ese círculo una distancia de 60° eléctricos en dirección al generador, que equivalen a 120 sobre la gráfica, y se localiza un punto a $z_i = 1.95 - j1.3$. Esta es la impedancia de entrada normalizada. La impedancia de entrada se obtiene multiplicando el valor anterior por la impedancia característica de la línea. Así $Z_i = 97.5 - j65 \Omega$.

9.16. Aspectos prácticos en las líneas de transmisión

Línea balanceada. Se designa como *línea balanceada* aquella en que los voltajes de los conductores son simétricos respecto a tierra., por ejemplo las líneas de pares, de dos a cuatro conductores. Entre estas se encuentran las antiguas líneas telefónicas y telegráficas soportadas por postes, las líneas de pares utilizadas en cables telefónicos y otros tipos de líneas como se muestran en la figura 9.20, utilizadas en

aplicaciones de audio, televisión y otros sistemas electrónicos y de comunicaciones.

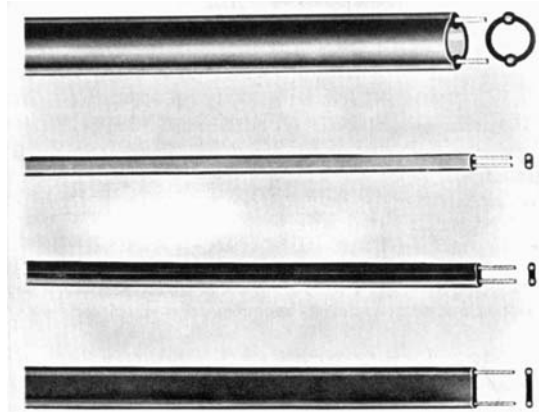


Fig. 9.20. Varios tipos de líneas abiertas o de pares.

Las líneas balanceadas, de dos conductores paralelos se emplean en sistemas de comunicaciones para conectar antenas en que se requieren características balanceadas, por ejemplo dipolos abiertos o doblados, antenas rómbicas, etc. Estas líneas pueden tener dieléctrico de aire, como en el caso de líneas telefónicas montadas en postes o emplear dieléctricos sólidos, generalmente de plástico como las mostradas en la figura 9.20. Algunas de las líneas de microcinta, construidas en circuitos impresos, pueden ser también del tipo no balanceado.



Líneas no balanceadas. En este tipo de líneas, uno de los conductores suele estar conectado a tierra y el ejemplo más abundante es la línea o cable coaxial, utilizada extensamente en los sistemas de comunicaciones y que se ilustra en la figura 9.21.

Fig. 9.21. Cable coaxial.

Radiación en líneas de transmisión. Cualquier sistema de conductores eléctricos por los que circula corriente, tiende a radiar energía electromagnética cuando la separaciones entre ellos se acerca a media longitud de onda de la frecuencia de funcionamiento. La radiación ocurre más fácilmente en una línea abierta que en una coaxial, cuyo conductor exterior actúa como

pantalla o blindaje del conductor interior. Por esta razón las líneas abiertas raras veces se emplean a frecuencias mayores de unas decenas de MHz, en tanto que las líneas coaxiales pueden utilizarse a frecuencias hasta de 18 GHz o más.

En las líneas de transmisión cualquier radiación es de importancia, ya que por una parte añade pérdidas al sistema y por otro, además de constituir una fuente de interferencia para otros sistemas de comunicaciones, puede modificar el patrón de radiación de las antenas que alimenten.

Para una línea bifilar abierta, no resonante, la potencia radiada está dada aproximadamente por la siguiente fórmula^{12,13}:

$$P_{RAD} = 160I^2 \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \text{ watts} \quad (9.61)$$

Si la longitud es al menos 20 veces mayor que la separación entre conductores y ésta, menor que λ . En la fórmula anterior, D/λ es la separación entre conductores en longitudes de onda e I , la corriente rcm (rms) en la línea. Esta potencia es el doble de la que radia un dipolo alimentado con la misma corriente que la línea y con una longitud igual a la separación entre los conductores de ésta.

Tipos de líneas. En el mercado se encuentra una sorprendente variedad de líneas de transmisión dictada por las múltiples aplicaciones. Una consulta a cualquier catálogo resulta de lo más ilustrativa¹⁴, además de proporcionar información de considerable interés y utilidad. Las líneas pueden ser rígidas o flexibles, con dieléctrico de aire o dieléctricos sólidos, de perfil liso o corrugado. Dependiendo de la potencia que deben manejar, se encuentran líneas de diámetros que van desde unos cuantos mm hasta más de 15 cm. Las líneas flexibles o semiflexibles son atractivas en el sentido de que pueden doblarse, dentro de ciertos límites, para adaptarse a la forma de las estructuras de soporte. Por otra parte, las líneas rígidas pueden soportar potencias muy grandes y emplean el aire como dieléctrico, lo que redundaría en pérdidas menores que en las líneas con dieléctrico sólido. En cualquier caso, tanto unas como otras tienen ventajas y desventajas como se verá más adelante.

Las líneas rígidas con dieléctrico de aire consisten de un conductor interior y otro exterior, concéntrico, con separadores de dieléctrico de baja pérdida, como teflón u otros similares, espaciados uniformemente para mantener rígidamente la separación entre los conductores, como se ilustra en la figura 9.22. El conductor exterior

¹² Sterba, E. J. and Feldman, C. B. "Transmision Lines for Short Wave Radio Systems". *Proc. I.R.E.* Vol. 20, p. 1163. Jul. 1932.

¹³ Terman, F. E. *Radio Engineers' Handbook*. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1943.

¹⁴ Véase por ejemplo <http://www.andrew.com>.

de las líneas rígidas suele estar desnudo, si bien en algunas puede estar recubierto de material plástico para evitar la posibilidad de corrosión.

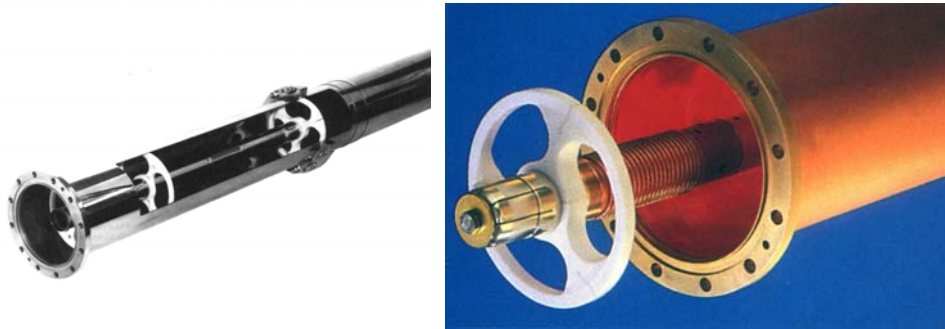


Fig. 9.22. Línea rígida.

Líneas flexibles. Las líneas o cables coaxiales flexibles o semiflexibles se utilizan extensamente en todos los sistemas de comunicaciones de potencias medias y altas. Pueden ser de dieléctrico de aire o sólido y tanto el conductor interior como el exterior están corrugados y suelen estar recubiertas de hule o plástico para evitar la corrosión. Tienen la ventaja de poderse transportar en carretes, con más facilidad que las líneas rígidas y su montaje, al ser de una sola pieza, resulta relativamente más fácil que el de éstas. En la figura 9.23 se ilustra este tipo de líneas.



(a) Dieléctrico sólido



(b) Dieléctrico de aire

Fig. 9.23. Líneas semiflexibles.

En la figura 9.24 se muestran algunos aspectos del montaje de una línea semiflexible de $6\frac{1}{2}$ '' (16.5 cm) de diámetro.



Fig. 9.24. Montaje de una línea de transmisión de 6.5".

9.17 Atenuación

La atenuación en las líneas de transmisión es causada por la resistividad intrínseca de los conductores, así como por las pérdidas en el dieléctrico y es directamente proporcional a la frecuencia, entre otras cosas, como consecuencia del efecto pelicular en los conductores y del factor de pérdidas en el dieléctrico. En la mayoría de los dieléctricos empleados habitualmente en las líneas, como el teflón, polietileno, aire, etc., el factor de pérdidas es muy pequeño, del orden de 2×10^{-4} , por lo que las pérdidas en el dieléctrico son pequeñas comparadas con las pérdidas en los conductores. La atenuación varía con la raíz cuadrada de la frecuencia y, para conductores de cobre, es válida la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{0.013}{Z_0} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right) \sqrt{f} \quad \text{dB/m} \quad (9.62)$$

Donde f es la frecuencia en MHz y Z_0 , la impedancia característica de la línea coaxial dada por:

$$Z_0 = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \left(\frac{D}{d} \right) \quad (9.63)$$

En que ϵ_r es la permitividad relativa o constante dieléctrica. De (9.62) puede determinarse que la atenuación es mínima para $D/d = 3.59$, lo que resulta en una impedancia de 77Ω para el aire.

De lo anterior se ve que hay un compromiso de diseño entre la optimización de la línea para la potencia pico, la potencia promedio o la atenuación. Por lo general, la mayoría de las líneas comerciales tienen impedancias de 50 o 75 Ω y, ocasionalmente, de 60 Ω . La línea de 50 Ω proporciona un compromiso adecuado entre la impedancia de 30 Ω , óptima para la potencia pico y la de 60 Ω , óptima para la potencia promedio. Si la potencia promedio es el factor principal, debe emplearse una línea de 50 Ω o de 60 Ω . sin embargo, si la atenuación es lo más importante, la línea más adecuada deberá ser de 75 Ω . La atenuación en una línea de 50 Ω será aproximadamente un 8% mayor que la de una de 75 Ω con diámetros iguales del conductor externo.

9.18 Capacidad de potencia.

La capacidad de manejo de potencia de una línea de transmisión está limitada por el voltaje de ruptura del dieléctrico que depende, básicamente, de las características del propio dieléctrico y de la separación entre los conductores. En el cálculo del voltaje máximo de pico en una línea de transmisión es necesario tener en cuenta el tipo de modulación empleada. En FM la potencia promedio y la potencia pico son iguales, en tanto que en AM completa la potencia pico es hasta cuatro veces la potencia de la portadora sin modulación y, en transmisión digital de televisión, la potencia pico puede ser hasta diez veces o más que la potencia efectiva. Este es un factor de máxima importancia en la selección de la línea de transmisión adecuada para una aplicación específica. En la práctica las líneas utilizadas en aplicaciones de potencias altas¹⁵ son invariablemente líneas coaxiales, ya sean rígidas o semi-flexibles. Cuanto mayor sea la potencia¹⁶ que se maneje, mayor deberá ser el diámetro de la línea.

La potencia que puede manejar una línea está determinada por dos factores, uno, la máxima potencia de pico, determinada por la intensidad de campo eléctrico (el voltaje de ruptura) y otro, la potencia promedio, determinada por la temperatura del conductor interior¹⁷. Para un cable coaxial, la intensidad del campo eléctrico es máxima cerca de la superficie externa del conductor interior y la intensidad máxima puede calcularse como:

¹⁵ El término "potencia alta" es ambiguo. Aquí podemos suponer como tales a las potencias superiores a 1 Kw.

¹⁶ En esta sección hablamos indistintamente de potencia o voltaje, la relación entre una y otro es, simplemente, $W = V^2/Z_0$

¹⁷ *Engineering Handbook*. 8th Ed. National Association of Broadcasters. Washington D.C. 1992.

$$E_{\max} = \frac{0.706}{d} \sqrt{\frac{W}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}} \quad \text{volt/cm} \quad (9.64)$$

Donde W es la potencia en watts, D el diámetro interno del conductor exterior y d el diámetro del conductor interior. E_{\max} es mínima cuando la relación D/d es igual a 1.65, lo que da como resultado una impedancia de 30Ω para una línea con dieléctrico de aire. El cálculo de la limitación de la potencia promedio para una línea coaxial involucra modelos térmicos complejos. Una optimización aproximada indica que la relación D/d óptima debe ser igual a 2.72, lo que resulta en una impedancia de 60Ω .

Al seleccionar una línea de transmisión para una aplicación determinada es necesario aplicar un factor de seguridad para salvaguardar la línea de daños por arcos eléctricos a causa del voltaje de pico o sobrecalentamiento que pueden dañar la línea de forma permanente. Los fabricantes de líneas de transmisión pueden utilizar diferentes factores de seguridad para los valores que especifican. Este es un aspecto importante a considerar cuando se consultan los catálogos.

La causa principal del calentamiento es la potencia promedio y, para los cables semiflexibles su especificación se basa en la temperatura máxima del conductor interno que permite el funcionamiento seguro a largo plazo, para el dieléctrico particular utilizado en la línea. Puesto que la especificación de la potencia promedio está limitada por la temperatura, que a su vez aumenta al aumentar las pérdidas en la línea, la potencia promedio máxima permitida se reduce al aumentar la frecuencia. En la tabla siguiente se dan las fórmulas para el cálculo de la potencia promedio para el caso de sistemas analógicos.

Tipo de modulación	Cálculo de la potencia promedio
AM	$P_{PROM} = P_C(1 + m^2/2)$
FM	$P_{PROM} = P_C$
TV analógica	$P_{PROM} = 0.8P_{TV}$

En la tabla anterior, P_C es la potencia de la portadora sin modulación y P_{TV} es la potencia en el pico de sincronismo. En el caso de televisión la potencia promedio incluye las potencias de vídeo y audio y la fórmula anterior sólo es válida para el

caso analógico. En televisión digital, la potencia pico en el sistema ATSC¹⁸ es del orden de 10 dB superior a la potencia promedio. En el sistema DVB¹⁹ esta relación es de 10 a 11 dB.

9.19 Frecuencia de corte.

En las líneas de transmisión, el modo principal de propagación es el electromagnético transversal (TEM), en el que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y, a su vez, perpendiculares a la dirección de propagación.

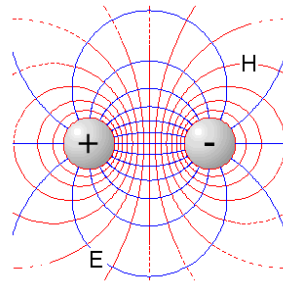


Fig. 9.25. Campo TEM.

Si la frecuencia aumenta, se generan otros modos de propagación, como el TE (transversal eléctrico) o TM (transversal magnético) que, si bien ocurren en guías de onda, son indeseables en las líneas coaxiales. La frecuencia a la cual empiezan a aparecer estos modos indeseables se designa como *frecuencia de corte* y los cables coaxiales no deben utilizarse a frecuencias superiores a la de corte. La frecuencia de corte, f_c es inversamente proporcional a las dimensiones de los conductores y a la constante dieléctrica y está dada por:

$$f_c (\text{GHz}) = \frac{19.1}{\sqrt{\epsilon_r} (D + d)} \quad (9.65)$$

En que D y d están en centímetros.

¹⁸ ATSC = American Television Standards Committee. Sistema utilizado en Estados Unidos, Canadá, México y Corea del Sur.

¹⁹ DVB = Digital Video Broadcasting. Sistema utilizado en casi todo el mundo.

La consideración de la frecuencia de corte es importante en aplicaciones de transmisión de televisión de alta potencia en la banda de UHF, dado que el diámetro de las líneas puede ser de más de 15.5 cm (6.125 pulgadas). Las especificaciones de los fabricantes suelen dar la máxima frecuencia de funcionamiento, que es algo menor a la frecuencia de corte.

9.20 Irregularidades en las líneas de transmisión

Las irregularidades en una línea de transmisión modifican sus parámetros primarios y, por consecuencia, sus características de funcionamiento. Entre ellas se cuentan principalmente las variaciones en sus dimensiones, características del dieléctrico, radiación y conexiones. Las causas típicas son dobleces, uniones defectuosas, inhomogeneidades en el dieléctrico, humedad y condensación, etc.

Un aspecto importante en las líneas semiflexibles es el radio de curvatura al que pueden doblarse sin alterar sus características, que suele especificarse por el fabricante. Si la línea se dobla a radios de curvatura menores, la distancia entre conductores en la zona curvada cambia y, por consecuencia, cambia también la impedancia dando lugar a reflexiones en ese punto. En la figura 9.26 se muestra este aspecto en el montaje de líneas en una torre.



Fig. 9.26. Curvatura en líneas semiflexibles.

En las líneas rígidas se emplean codos especiales como los mostrados en la figura 9.27 que garantizan el valor uniforme de la impedancia en toda la línea.

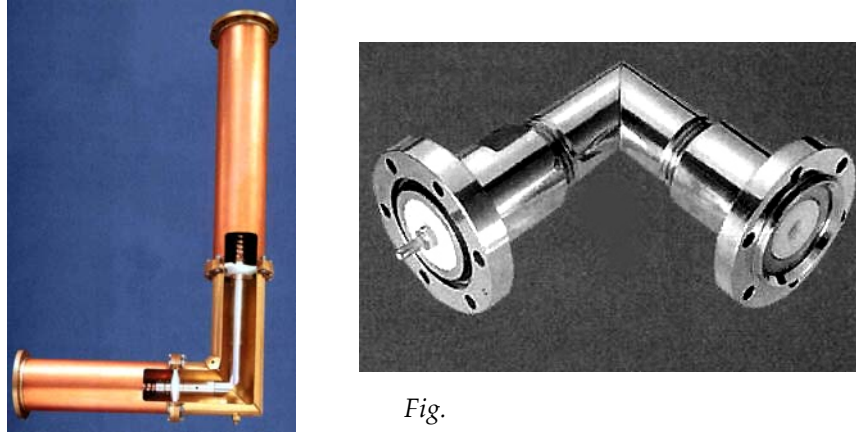


Fig.

9.27. Codos en líneas rígidas.

Problemas

9.1. Una línea telefónica de par abierto tiene las siguientes constantes distribuidas: $R = 6.5 \Omega/\text{Km}$, $L = 2.25 \text{ mh}/\text{Km}$, $C = 5.5 \text{ nf}/\text{Km}$ y $G = 2.125 \mu\text{S}/\text{m}$. Utilizando un programa de cálculo como MATLAB® u otro similar, (a) hacer una gráfica de la magnitud y fase de la impedancia característica en la banda de voz de 0.3 a 3.4 KHz.

9.2. Una línea de transmisión de 200 Km tiene los siguientes parámetros: $R = 12.5 \Omega/\text{Km}$, $L = 37.5 \text{ mh}/\text{Km}$, $C = 1.875 \text{ nf}/\text{Km}$ y $G = 0.625 \mu\text{S}/\text{Km}$. La línea está terminada en una impedancia de carga de $4470 + j0 \Omega$ y el voltaje en ésta es de $4\cos(4000t)$. Calcular: (a) La corriente en el extremo transmisor. (b) El voltaje en el extremo transmisor y (c) La corriente a 58.5 Km de la carga.

9.3. Las constantes de una línea telefónica son: $R = 10.33 \Omega/\text{Km}$, $L = 3.67 \text{ h}/\text{Km}$, $C = 8.18 \text{ nf}/\text{Km}$ y $G = 0.8 \mu\text{S}/\text{Km}$. Calcular y hacer una gráfica de la velocidad de propagación, como función de la frecuencia en el rango de 10 Hz a 10 KHz.

- a) Calcular y hacer una gráfica de la atenuación en el mismo rango de frecuencias.
- b) Calcular y hacer una gráfica de $|Z_0|$ en el mismo rango de frecuencias.
- c) Calcular y hacer una gráfica del ángulo de fase de Z_0 en ese rango de frecuencias.
- d) Repetir los cálculos a, b y c suponiendo que $G = 0$.

9.4. A una frecuencia de 800 Hz, la atenuación y velocidad de propagación en una línea de transmisión son de 0.003 neper/Km y 232.000 Km/s respectivamente. Suponiendo que la longitud de la línea es una longitud de onda y que está terminada en su impedancia característica, calcule $I(x)/I_g$ en función de la distancia x medida desde el extremo del generador.

9.5. Demostrar que la impedancia de entrada de una línea de transmisión terminada en una impedancia de carga Z_L puede expresarse como:

$$Z_i = Z_{CA} \frac{Z_{CC} + Z_L}{Z_{CA} + Z_L}$$

Donde Z_{CC} y Z_{CA} son las impedancias en cortocircuito y en circuito abierto respectivamente

9.6. Una línea coaxial de baja pérdida tiene una capacidad y una inductancia distribuidas de 98 pF/m y 246 nH/m respectivamente. Calcular: (a) La capacidad de una línea de 1.5 m de longitud, utilizada como sonda de osciloscopio. (b) Z_0 . (c) La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea. (d) discutir en qué medida afecta la capacidad distribuida a la respuesta en frecuencia, si la sonda se va utilizar en un osciloscopio de 100 MHz.

9.7. Un cable coaxial con pérdidas insignificantes tiene una impedancia característica de 50Ω y la velocidad de propagación es de 2×10^8 m/s. Hallar la inductancia y la capacidad distribuidas.

9.8. Demostrar que si en una línea se cumple que $R/L \gg G/C$, en el rango de frecuencias en que $R \ll \omega L$, la atenuación es:

$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{neper/m}$$

- 9.9. Una línea de transmisión con dieléctrico de aire tiene una longitud de 20 m. (a) ¿Cuál es la longitud de la línea en longitudes de onda?. (b) ¿Cuál es el valor de β a 10 MHz y cuál a 100 MHz?. (c) ¿Cuál es la velocidad de propagación a esas frecuencias?.
- 9.10. Demuestre que dos cargas resistivas, R_1 y R_2 , producen la misma relación de onda estacionaria si $R_1 R_2 = Z_0^2$.
- 9.11. Demuestre que cuando la impedancia de carga de una línea es resistiva, de valor R_L , entonces $ROE = R_L/Z_0$ si $R_L > Z_0$ y $ROE = Z_0/R_L$ si $R_L < Z_0$.
- 9.12. Una línea de transmisión de 30 m de longitud tiene una carga tal que sólo está presente la onda incidente. La potencia en el extremo de la carga es 1.2 dB menor que en el generador. Calcule α en dB/m y en neper/m.
- 9.13. Una línea de transmisión tiene una impedancia característica de 50Ω y está terminada en una resistencia pura. Calcule y haga una gráfica de la magnitud y fase del coeficiente de reflexión como función de la resistencia de carga, para valores de ésta entre 0 y 250Ω .
- 9.14. Una línea de transmisión con $Z_0 = 50 \Omega$ está terminada en una reactancia pura. Calcule y haga una gráfica de la magnitud y fase del coeficiente de reflexión en función de la reactancia de carga, para valores de ésta en el rango de $-j100 \Omega$ a $+j100 \Omega$.
- 9.15. En una línea de transmisión con dieléctrico de aire, la conductancia es prácticamente despreciable. Demuestre que, en estas condiciones, la constante de atenuación, α , de una línea de RF es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia.
- 9.16. En una línea de transmisión con dieléctrico sólido, las pérdidas en el dieléctrico a frecuencias muy altas son mucho mayores que las pérdidas debidas a la resistencia de la línea. En estas condiciones, ¿Cómo varía la constante de atenuación con la frecuencia?.

