Dipartimento di Ingegneria
Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

Comportamento meccanico dei materiali

Lecture 3 – Modellazione costitutive

INTRODUZIONE

- Il legame costitutivo stabilisce le relazioni tra sforzi e deformazioni necessaria per descrivere la risposta meccanica di un materiale soggetto all’azione di carichi(spostamenti) esterni.

- Il legame costitutivo viene determinato sulla base di una serie di ipotesi conseguenti alle osservazioni sperimentali della risposta di un materiale soggetto a stati di sforzo semplici.

- Non esiste una legge unica per la risposta meccanica di un materiale.

INTRODUZIONE

- Due possibili approcci:

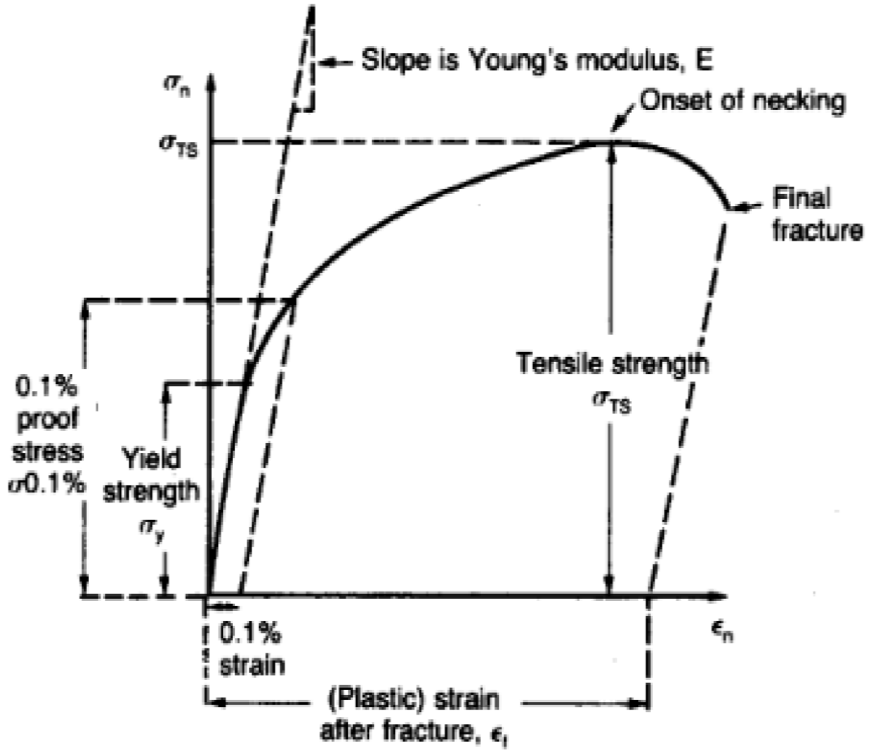
  - **Modellazione fenomenologica.** Si basa sull'evidenza dei dati sperimentali che cerca di interpolare con opportune funzioni matematiche i cui parametri vanno determinati attraverso operazioni di fitting.
  - PROS: pochi parametri, semplicità
  - CONS: i parametri non hanno significato fisico, funzionano bene per un campo di combinazioni di sforzo/def/temp/strain rate etc. limitato.

  - **Modellazione *physically-based***. Si basano sulla modellazione dei meccanismi che governano le deformazioni. Possono richiedere numerose equazioni.
  - PROS: sono efficaci su un campo di condizioni operative molto ampio. I parametri hanno spesso un significato fisico
  - CONS: molti parametri, necessità di condurre molte prove sperimentali

REQUISITI PER UNA MODELLAZIONE ELASTO-PLASTICA

- Identificazione della condizione di snervamento – distinzione tra deformazioni elastiche e plastiche
- Nel regime elastico il legame costitutivo è lineare
- Nel regime plastico, il legame costitutivo è non lineare e di solito più complesso.

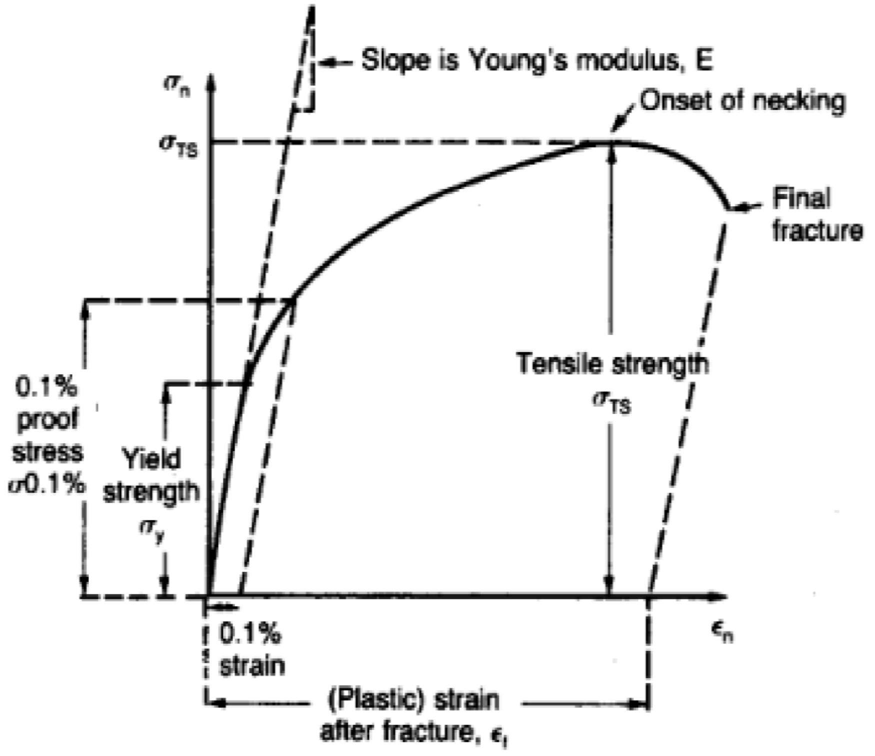
- Il legame sforzo deformazione dipende da:
  - Temperatura
  - Velocità di deformazione
  - Stato di sforzo (pressione/taglio)
  - Composizione
  - Trattamento termico
  - Microstruttura



- Nel caso di sforzo uniassiale la deformazione plastica inizia ad accumularsi quando $\sigma=\sigma_Y$

- Per uno stato di sforzo puramente idrostatico (***p***) non causa deformazione plastico
- Lo scorrimento plastico avviene solo a causa delle componenti di sforzo di taglio (componente deviatorica del tensore degli sfrorzi, s_{ij})
- Hy: esiste una superficie nello spazio delle sollecitazioni che separa il regime elastico da quello plastico
- Hy: il criterio di snervamento stabilisce le condizioni per la comparsa di deformazione plastica

- Il criterio di snervamento deve essere una funzione degli invarianti del tensore degli sforzi



- Secondo von Mises: «Lo snervamento avviene quando il secondo invariante del deviatore del tensore degli sforzi (J2) raggiunge un valore critico *k*»

$\tau_{max} = k$ snervamento o deformazione plastica

$\tau_{max} < k$ deformazione elastica

Caso uniassiale $\sigma_1 = \sigma_Y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$,

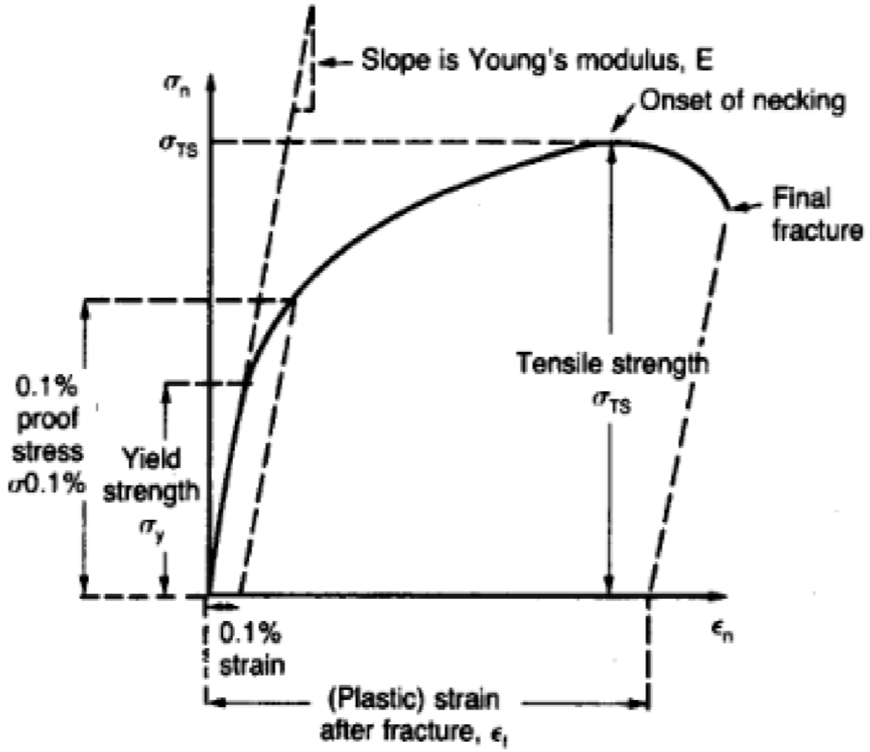
$$k = \frac{\sigma_Y}{2}$$

Caso taglio puro $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_Y$ e $\sigma_2 = 0$,

$$k = \tau_Y$$

Da cui:

$$k = \tau_Y = \frac{\sigma_Y}{2}$$



CRITERIO DI SNERVAMENTO: TRESCA

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- «Lo snervamento avviene quando lo sforzo di taglio massimo τ_{max} raggiunge un valore critico *k* »

$J_2 - k^2 = 0$ snervamento o deformazione plastica

$J_2 < k^2$ deformazione elastica

Caso uniassiale $\sigma_1 = \sigma_Y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$,

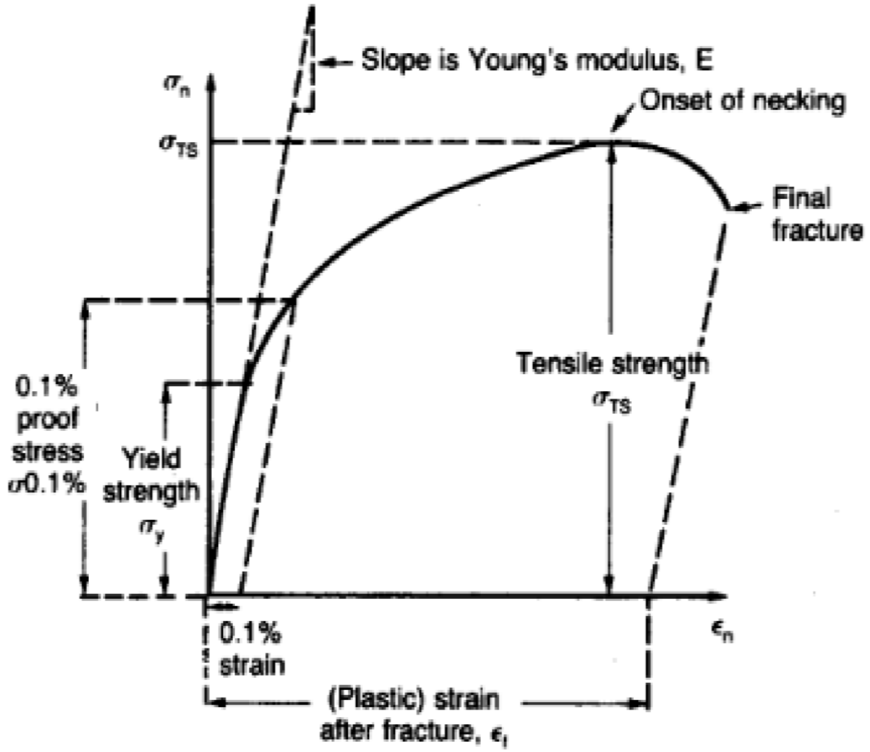
$$k = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$$

Caso taglio puro $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_Y$ e $\sigma_2 = 0$,

$$k = \sigma_Y$$

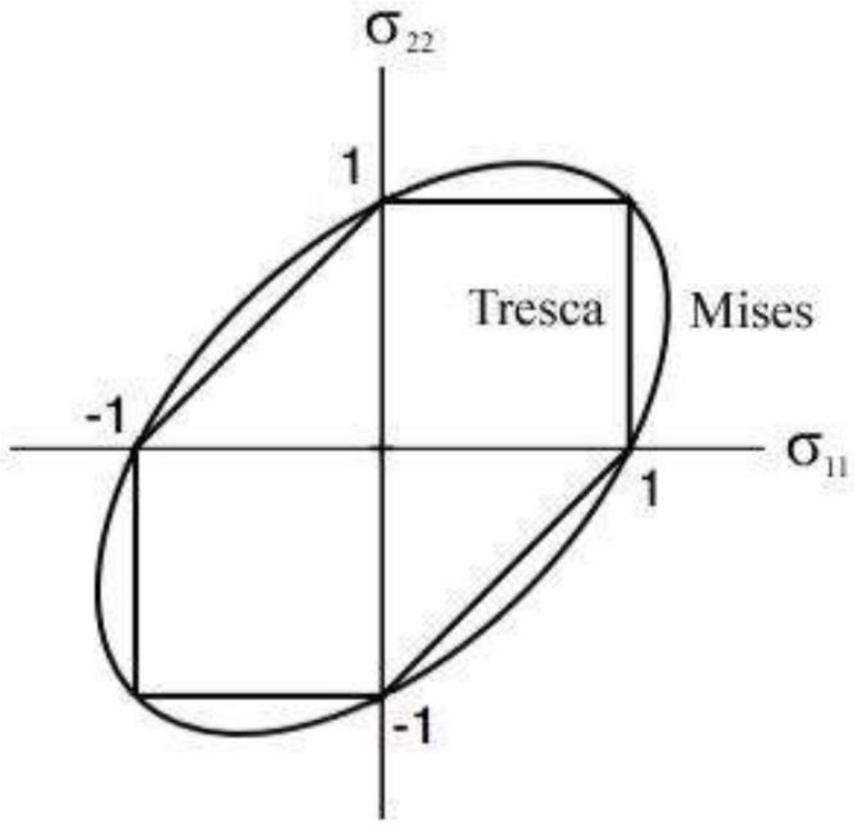
Da cui:

$$k = \tau_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$$



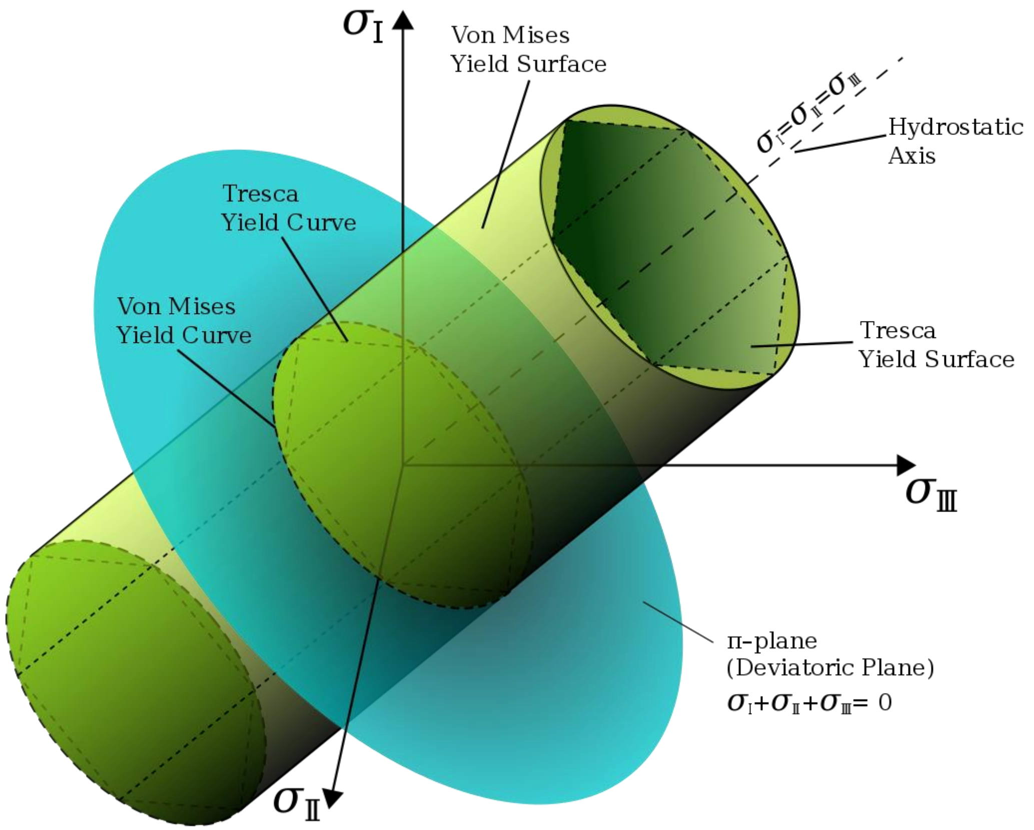
Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Nello piano degli sforzi il criterio di von Mises è rappresentato da un'ellisse il cui semi asse maggiore è $\sigma_Y\sqrt{2}$ mentre il minore è $\sigma_Y\sqrt{2/3}$



SUPERFICIE DI SNERVAMENTO

- Entrambi i criteri di snervamento possono essere rappresentati nello spazio delle tensione da una superficie cilindrica orientata secondo angoli uguali rispetto a σ_1, σ_2, σ_3
- Uno stato di sforzo rappresentato da un punto all'interno del cilindro rappresenta uno stato di sforzo elastico
- Lo snervamento avviene quando il punto giace sulla superficie
- Il raggio del cilindro è la componente deviatorica dello sforzo.
- L'asse del cilindro rappresenta la componente idrostatica dello sforzo.

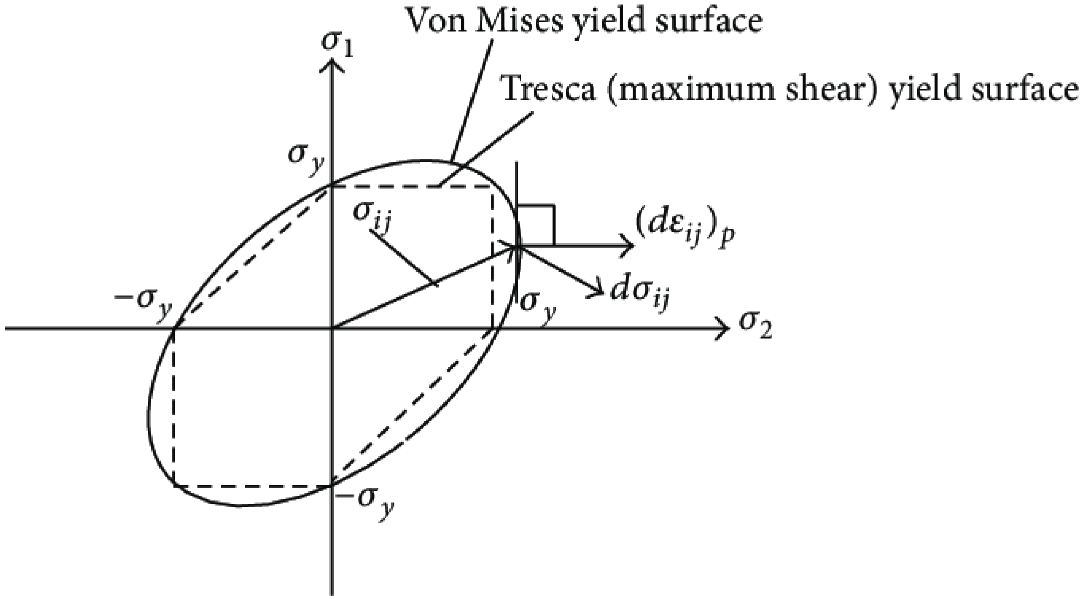


CONDIZIONE DI NORMALITÀ

- «Il vettore della deformazione plastica totale deve essere normale alla superficie di snervamento» Drucker (1951)
- Durante la deformazione plastica si deve compiere del lavoro: il rateo dell’energia dissipata (lavoro di deformazione) deve essere non negativo.

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0$$

- Il vettore dell’incremento di deformazione plastico $d\varepsilon_{ij}^{p}$ deve essere nomale alla superficie di snervamento.
- Di conseguenza: la legge di normali implica che la superficie di snervamento deve essere SEMPRE convessa.



INCRUDIMENTO ISOTROPICO

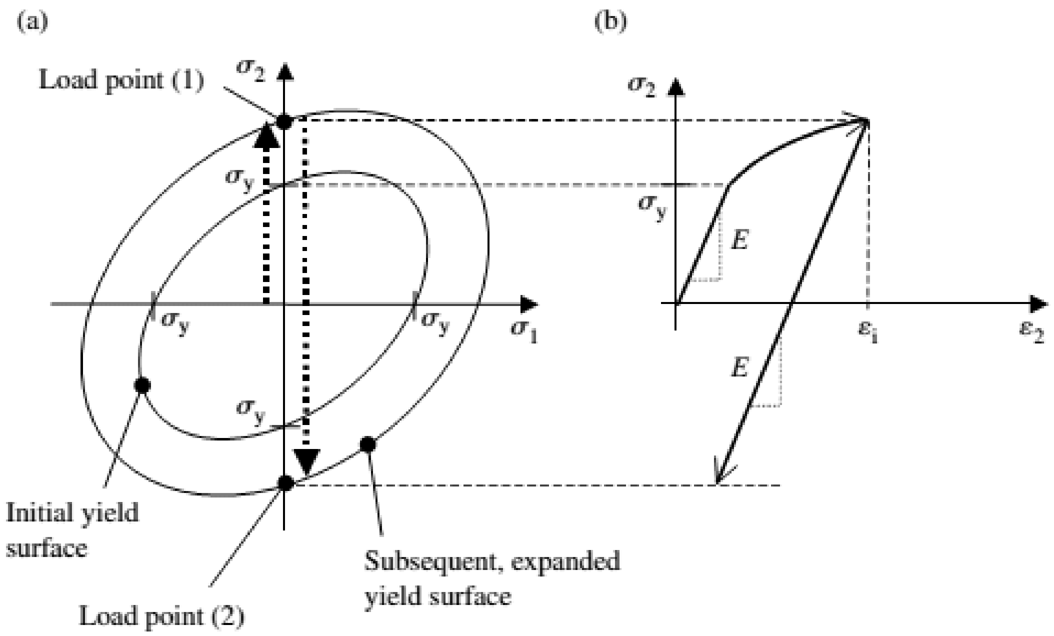
- In generale la superficie di snervamento è definita come:

$$F = f(J_2) - \sigma_Y\left(\varepsilon_{eq}^{p}\right) = 0$$

$$F = \sigma_{eq} - \sigma_Y\left(\varepsilon_{eq}^{p}\right) = 0$$

L'incrudimento isotropico tenie conto dell'evidenza sperimentale che lo sforzo necessario per produrre ulteriore deformazione cresce con il valore assoluto della deformazione.

Assumendo un comportamento simmetrico in trazione e compressione, si ha che la superficie di snervamento si espande mantenendo fisso il suo centro nello spazio delle tensioni.



- La superficie di snervamento non cambia in forma e dimensione ma semplicemente trasla nello spazio delle tensioni.
- Lo si usa per tener conto dell'effetto Baushinger

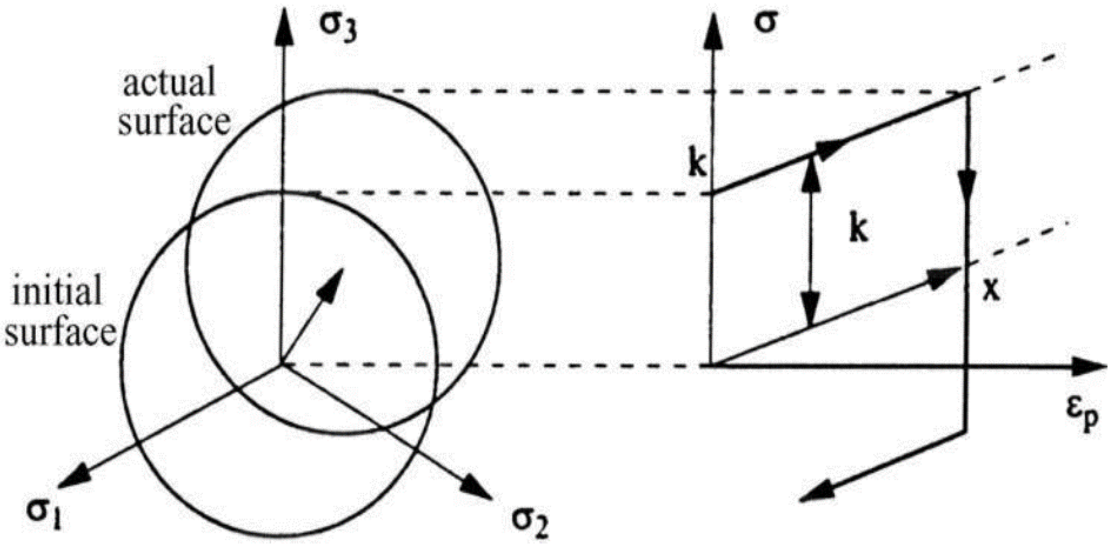
- La superficie di snervamento iniziale è data da:

$$F = f(\sigma_{ij}) - \sigma_Y = 0$$

Mentre la successiva al primo stress reversal:

$$F = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \sigma_Y = 0$$

Il tensore α_{ij} è detto back stress.



Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

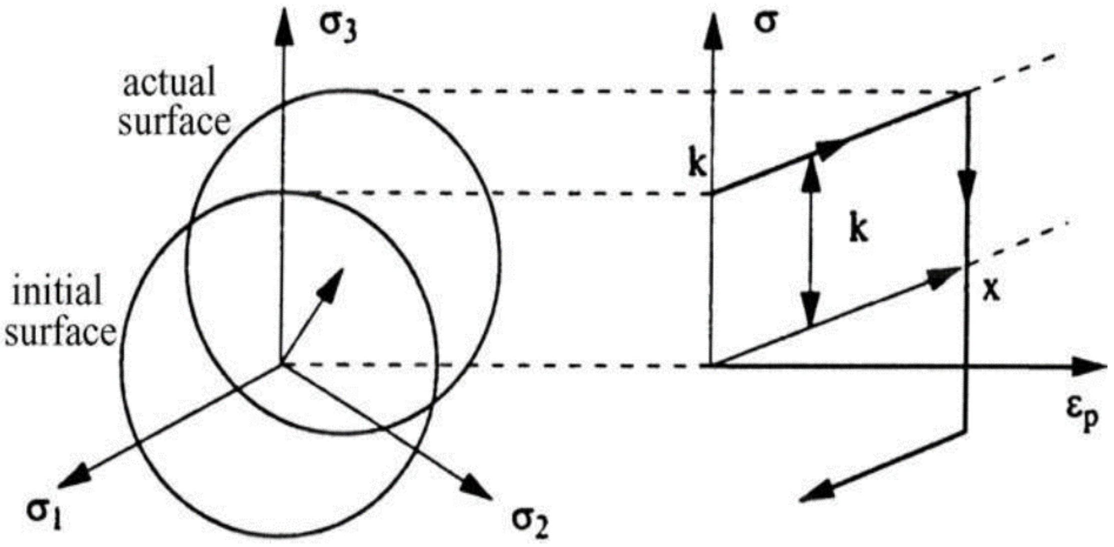
- In plasticità l'ipotesi che l'incremento di deformazione plastica ed il deviatore del tensore dello sforzo abbiano la stessa direzione principale prende il nome di **legge di flusso plastico**.
- **Carico**: la generica condizione di sforzo per cui si ha deformazione plastica è quando lo stato di sforzo è sulla superficie di snervamento, ovvero

$$d\sigma : \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0$$

Questa condizione quando uguale a zero è detta anche di «carico neutro»: lo stato di sforzo si muove sulla superficie.

- **Scarico**:

$$d\sigma : \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} < 0$$



LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

- In plasticità l'ipotesi che l'incremento di deformazione plastica ed il deviatore del tensore dello sforzo abbiano la stessa direzione principale prende il nome di **legge di flusso plastico**.
- Questo si formalizza come segue:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

dove $d\lambda > 0$ è il parametro di incrudimento. Per analogia formale:

- La legge è detta «legge associativa»
- La funzione *f* è detta potenziale plastico

Questa legge è facilmente giustificata in quanto per materiale perfettamente plastico $d\sigma = 0$ quando $d\varepsilon_p > 0$,

$$d\sigma: \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \; e \; d\sigma: d\varepsilon_{ij}^{p} = 0$$

Condizioni di carico-scarico

- $d\lambda \geq 0, \quad f \leq 0, \quad d\lambda \cdot f = 0$

Condizione di consistenza

È necessaria per chiudere il set di equazioni e ottenere $d\lambda$: $\mathrm{d}f = 0$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} d\varepsilon_{ij}^{p} = 0$$

da cui si deriva che:

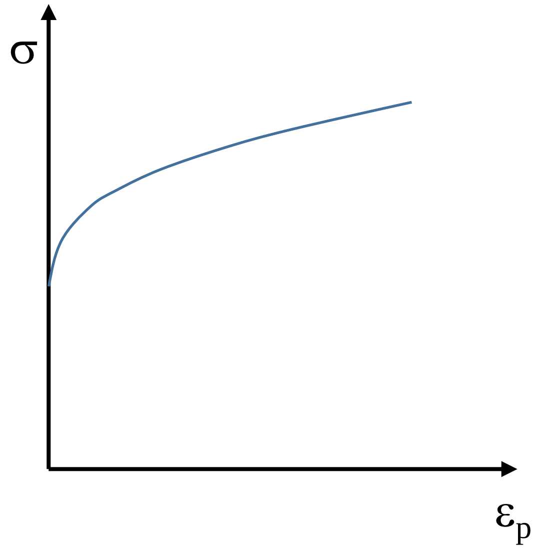
$$d\lambda = d\varepsilon_{eq}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{p} d\varepsilon_{ij}^{p}}$$

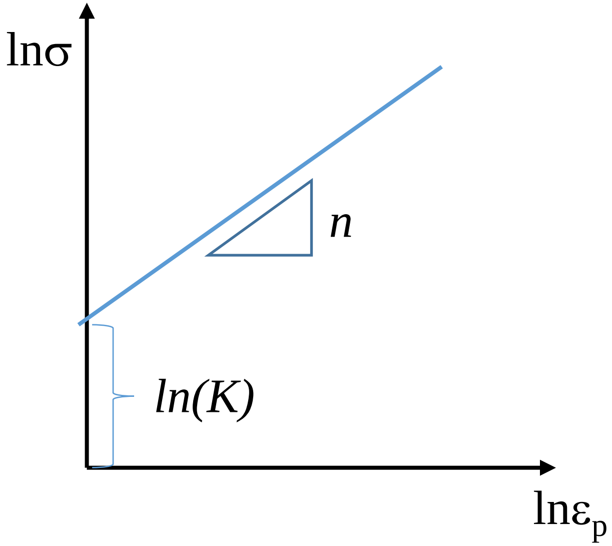
LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

- Approccio fenomenologico
- La curva di flusso è spesso espressa con una legge di potenza,

$$\sigma(\varepsilon_p) = K\varepsilon_p^n$$

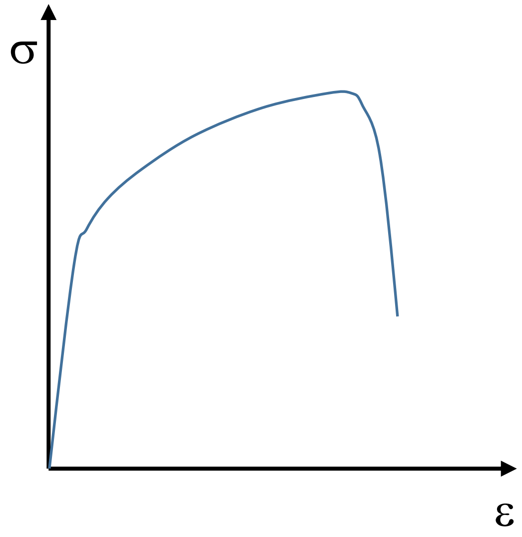
- Questa espressione descrive abbastanza bene la risposta di diverse classi di metalli e leghe: ma solo in termini di stress ingegneristico rispetto alla deformazione ingegneristica! (funziona meno bene in termini di tensione vera vs def. logaritmica)
- I vantaggi di questa espressione sono:
    - Solo due parametri che possono essere facilmente determinati mediante adattamento lineare sul piano sforzo-deformazione(log-log)
    - L'esponente di incrudimento è la pendenza della retta nel diagramma doppio log.





LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

L'esponente di incrudimento ha anche il significato della deformazione plastica in condizione di strizione incipiente (onset necking)



- Condizione di Considère all'incipiente strizione :
  - Durante la deformazione in trazione la sezione netta resistente si riduce (per effetto della contrazione laterale). Di conseguenza il carico necessario alla deformazione deve diminuire
  - Analogamente, durante la trazione il materiale incrudisce e per tanto il carico necessario per la deformazione deve aumentare
  - Alla strizione i due effetti compensano (sono uguali)

$$\varepsilon_p = \varepsilon_u \rightarrow \ \sigma = \sigma_u$$

$$Aumento\ per\ incrudimento: \quad d\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} d\varepsilon_p$$

$$Riduzione\ dello\ sforzo\ a\ seguito\ della\ riduzione\ dei\ area: \quad d\sigma = \frac{d\sigma}{dA} dA = \frac{d}{dA}\left(\frac{P}{A}\right) dA = \frac{P}{A}\left[-\frac{dA}{A}\right] = \sigma d\varepsilon_p \rightarrow \left.\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}\right)\right|_{\varepsilon_p=\varepsilon_u} = \sigma_u$$

LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Pertanto sostituendo:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_u \rightarrow \sigma_u = K\varepsilon_u^n$$

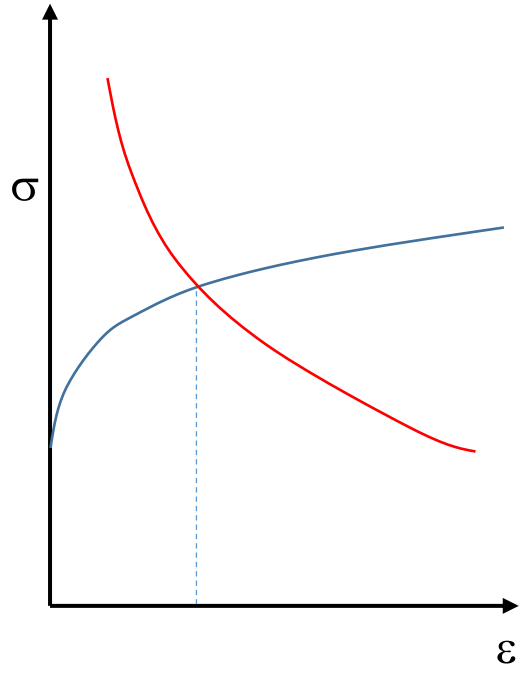
$$\varepsilon_p = \varepsilon_u \rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = Kn\varepsilon_u^{n-1} = \sigma_u$$

$$Kn\varepsilon_u^{n-1} = K\varepsilon_u^n$$

$$n = \varepsilon_u$$

- L'esponente di incrudimento è il valore della deformazione plastica alla strizione!

- Per una legge di flusso plastico qualunque, il punto di strizione si trova incrociando la legge di flusso con la sua derivata



LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- La relazione di Ramberg–Osgood fu proposta per descrivere la relazione non lineare tra sforzi e deformazioni nel regime prossimo allo snervamento

- E' particolarmente utile per metalli e leghe che incrudiscono con una transizione dolce dal regime elastic a quello elastic-plastico.

- L'espressione fornisce la deformazione totale in funzione dello sforzo è data

- Come la legge di potenza funziona bene per interpolare dati di trazione in forma di grandezze ingegneristiche

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + K\left(\frac{\sigma}{E}\right)^m$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \alpha\frac{\sigma}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_Y}\right)^{m-1} \qquad \sigma \geq \sigma_Y$$

LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Un buon candidato per una espressione per la legge di flusso plastico deve poter prevedere la saturazione dello sforzo per grandi deformazioni

- Una espressione molto efficace è quella di Voce:

$$\sigma = \sigma_Y + R\left[1 - \exp\left(-\varepsilon_p/b\right)\right]$$

- Se necessario è possibile aggiungere più termini

$$\sigma = \sigma_Y + \sum_{i=1}^{n} R_i\left[1 - \exp\left(-\varepsilon_p/b_i\right)\right]$$

- Oggi, con l’uso dei FEM non c’è più la necessitate di disporre di una espressione matematicamente semplice

- Nei FE; la legge di flusso può essere data in forma tabulare o attraverso una subroutine

- Il limite principale della legge di Potenza è che prevede sforzo infinito per deformazione infinita: questo è non corretto dal punto di vista fisico.

LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

- Leggi di flusso plastic che considerano l'effetto della temperatura e della velocità di deformazione

- Cowper and Symonds:

$$\sigma = \left(A + B\varepsilon_p^m\right)\left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D}\right)^{1/q}\right]$$

- Johnson and Cook:

$$\sigma = \left(A + B\varepsilon_p^m\right)\left[1 + C log\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0}\right)^m\right]$$

LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

- Modelli «modificati»
  - Necessità di comprendere tutti e tre i regimi (bassi, alti e altissimi strain rate)

  - Modified Johnson-Cook (Bonora et al. 2014)

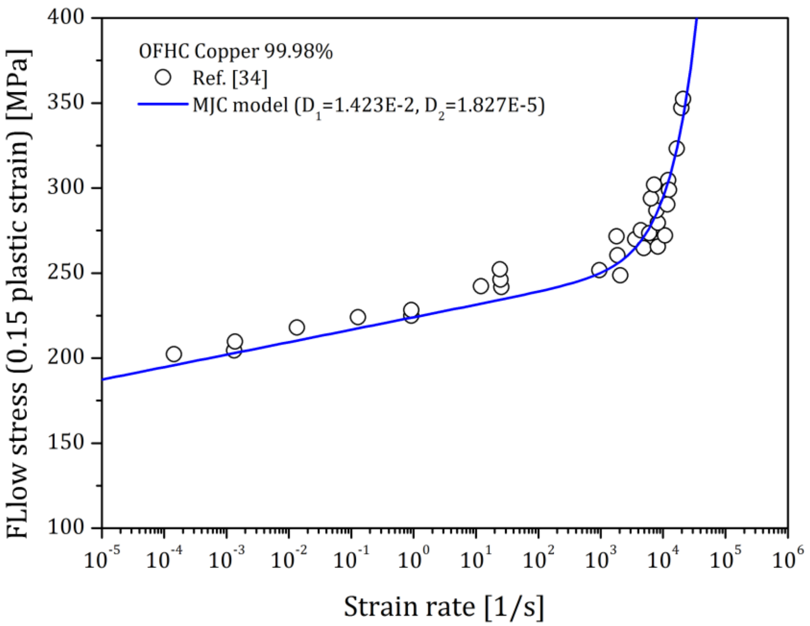
$$\sigma_y\left(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T\right) = \left[\sigma_{y0} + \sum_i^n R_i\left(1 - \exp(-\varepsilon_p / b_i)\right)\right]\left(1 + D_1 \ln \dot{\varepsilon}_p^* + D_2\, \dot{\varepsilon}_p^*\right)\left(1 - T^{*m}\right)$$

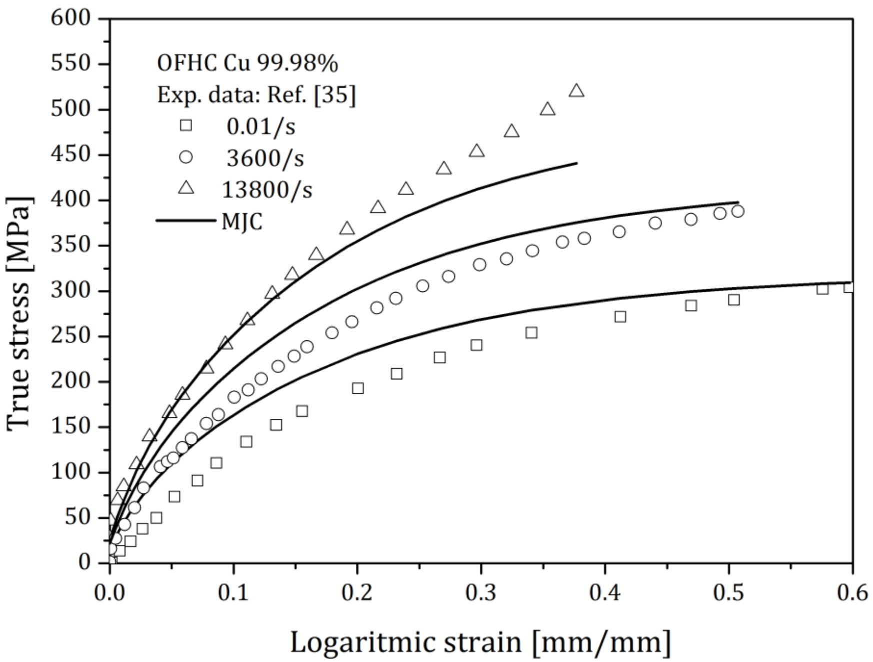
    - Curva di flusso plastico secondo una più generale legge di Voce

    - Termine lineare nello strain rate

LEGGE DI FLUSSO PLASTICO

- Modelli «modificati»
  - Necessità di comprendere tutti e tre i regimi (bassi, alti e altissimi strain rate)





- Leggi di derivazione pseudo-physically-based

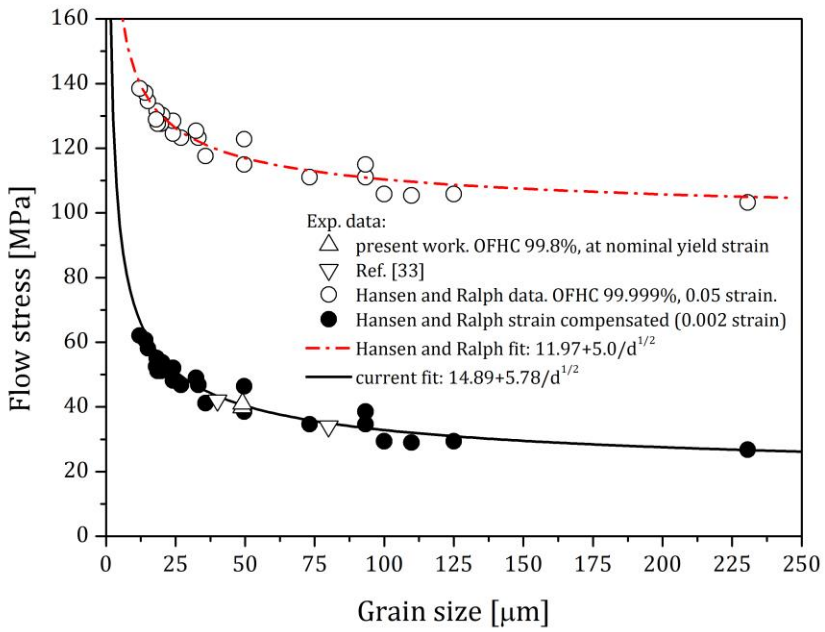
- Zerilli-Armstrong (1987): $\sigma = A + [C_1 + C_2\varepsilon^{0.5}]exp[-(C_3 + C_4 ln\dot{\varepsilon})T] + C_5\varepsilon^n$

$$BCC: C_2 = 0$$

$$FCC: C_1 = C_5 = 0$$

- Il termine A è l'athermal stress funzione del grain size secondo la relazione Hall-Petch:

$$\sigma_Y = \sigma_0 + \frac{k}{\sqrt{d}}$$



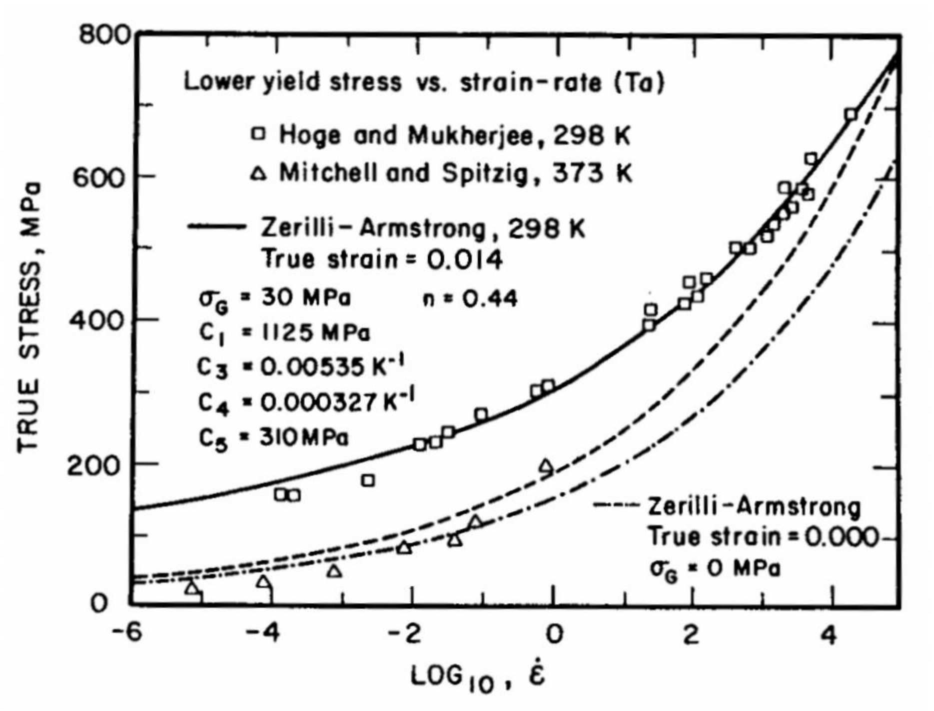
Validating Material Modelling of OFHC Copper Using Dynamic Tensile Extrusion (DTE) Test at Different Impact Velocity N Bonora, G Testa, A Ruggiero, G Iannitti, M Hörnqvist- APS Shock Compression of Condensed Matter, 2015

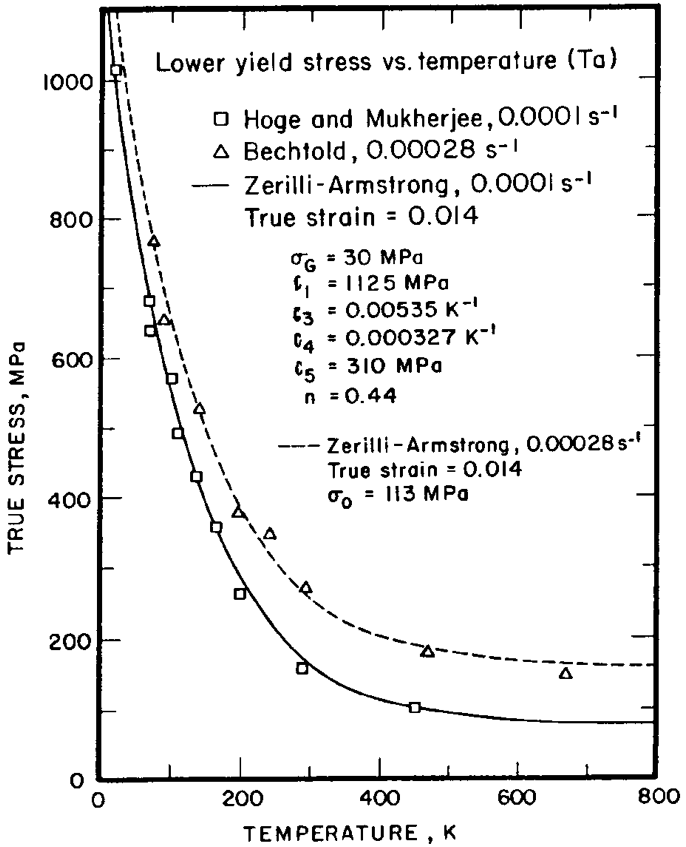
Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Leggi di derivazione pseudo-physically-based

- Zerilli-Armstrong (1987): $\sigma = A + [C_1 + C_2\varepsilon^{0.5}]exp[-(C_3 + C_4 ln\dot{\varepsilon})T] + C_5\varepsilon^n$

$$BCC\colon C_2 = 0 \quad FCC\colon\ C_1 = C_5 = 0$$





- **Modified Rusinek-Klepaczko model (MRK2)**
  - Il modello assume che lo snervamento sia composto da tre termini:

$$\bar{\sigma} = \frac{E(T)}{E_0}\left[\bar{\sigma}_{ath} + \bar{\sigma}_{th}\right] + \bar{\sigma}_{vd}$$

  - Il termine atermico secondo Hall-Petch: $\bar{\sigma}_{ath} = Y + \frac{k}{\sqrt{d_0}}$

  - Termine termicamente attivato:

$$\bar{\sigma}_{th} = \sigma_0^* \left\langle 1 - \xi_1 \left(\frac{T}{T_m}\right) \log\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{max}}{\dot{\varepsilon}_p}\right)\right\rangle^{1/\xi_2}$$

$$\sigma_0^* = \bar{R}_0\left[1 - \exp(-\varepsilon_p / \varepsilon_p^0)\right]$$

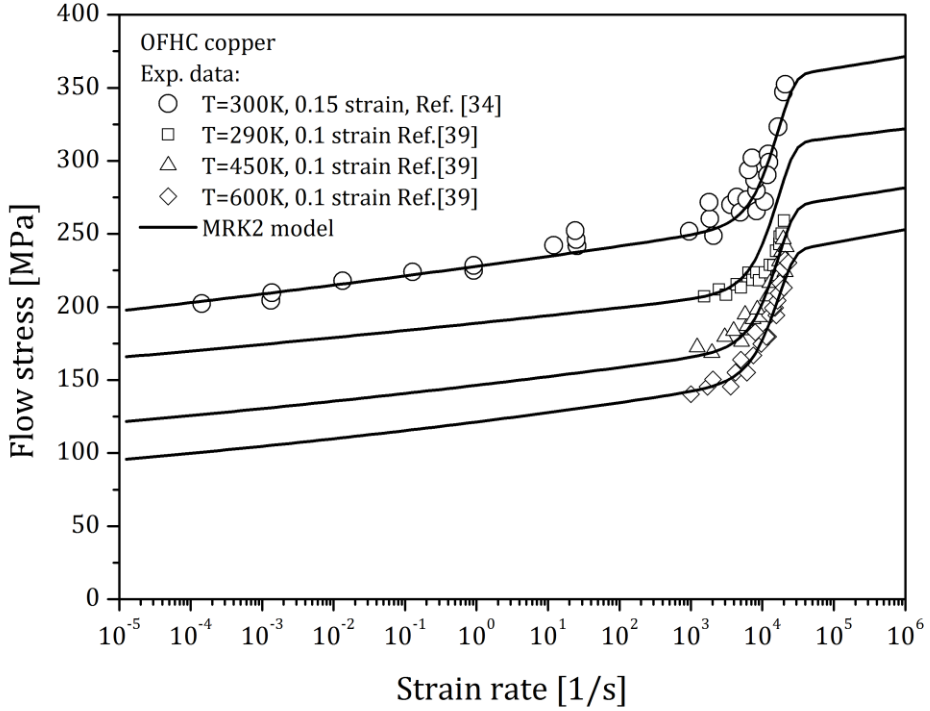
  - Viscous drag:

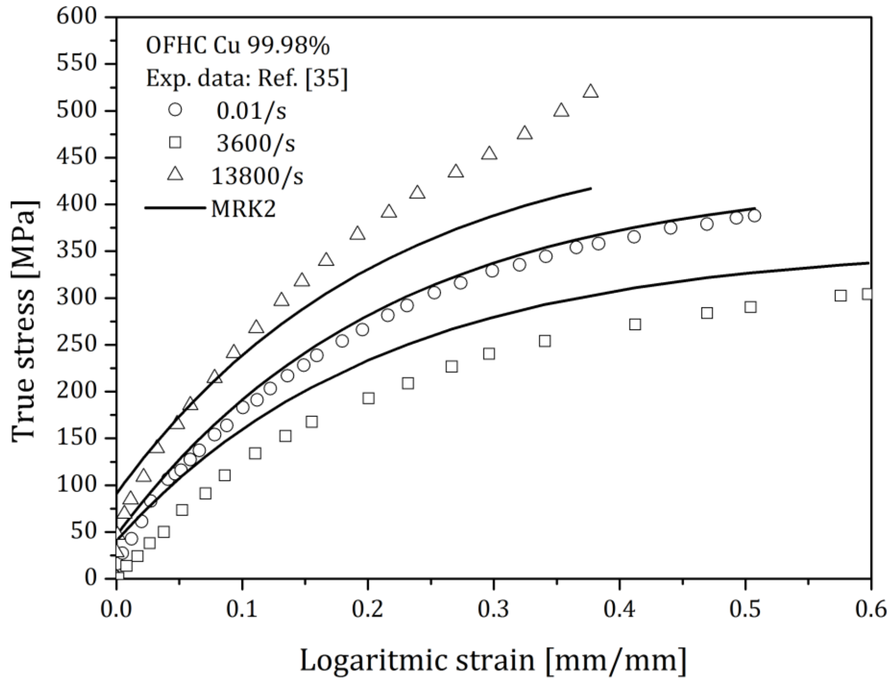
$$\sigma_{vd} = \chi_{lim}^0 \left\{1 - \frac{T}{T_m}\exp\left[\theta^*\left(1 - \frac{T_m}{T}\right)\right]\right\}\left[1 - \exp(-\dot{\varepsilon}_p / \dot{\varepsilon}_{lim})^{\nu}\right]$$

MODELLI COSTITUTIVI PER ELEVATI STRAIN RATE: MODELLO MRK2

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- **Modified Rusinek-Klepaczko model (MRK2)**





LETTURE SUGGERITE

- Brnic, Josip. Analysis of Engineering Structures and Material Behavior. John Wiley & Sons, 2018.