CAPÍTULO 1

Números índices

1. INTRODUCCIÓN

En el curso anterior se ha estudiado la descripción de variables aisladas tanto cuantitativas como cualitativas así como las relaciones entre distintas variables a través de la regresión y la correlación. Las distribuciones de frecuencias tanto unidimensionales como multidimensionales están referidas a un sólo período temporal, es decir, no se ha tenido en cuenta la variable tiempo en el estudio de las variables económico-sociales. En el presente capítulo y el que le sigue vamos a tratar de la descripción de fenómenos socioeconomicos a lo largo del tiempo a través de la construcción de lo que se denominan **números índices** y el análisis clásico o descriptivo de las series temporales.

Existen un gran número de fenómenos socioeconomicos cuyo significado y estudio alcanza distintos niveles de complejidad. Ejemplos de estos fenómenos pueden encontrarse en el análisis de factores como el nivel de inflación, el nivel de desarrollo, etc. Los números índices que estudiaremos en el presente capítulo constituyen el instrumental analítico más adecuado para estudiar la evolución de una serie de magnitudes económicas a través de las cuales podemos dar respuesta a cuestiones tales como si la coyuntura económica es positiva o negativa, si el nivel de inflación es adecuado o no o si nuestro ritmo de crecimiento económico permite o no permite crear empleo.

Un **número índice** puede definirse como una medida estadística que nos permite valorar la variación relativa de una magnitud simple o compleja a lo largo del tiempo o del espacio. Lo más habitual es que se estudie la evolución de la magnitud a lo largo del tiempo, con lo que hay que establecer un **período inicial o base** sobre el que se va comparando la evolución de la magnitud o variable estadística.

El procedimiento de comparación es muy sencillo. Supongamos, por ejemplo, que queremos estudiar la evolución de la producción de automóviles, siendo X_0 el valor de la misma en el período base (un año determinado) y X_t los automóviles fabricados en otro período t distinto del base que se denomina **período de comparación**.

El índice de evolución de *0* a *t* expresado en tantos por cien será:

$$I_0^t = \frac{X_t}{X_0} \times 100 \qquad [1.1]$$

La expresión [1.1] toma el valor 100 en el período base ya que $X_t = X_0$, y en los demás períodos fluctuará de acuerdo con la evolución de la magnitud. El hecho de que $I_0^t < 100$ implica que $X_t < X_0$ (en el período de comparación se han producido menos automóviles que en el año base). Si $I_0^t > 100$ entonces $X_t > X_0$, indicando que la evolución ha sido positiva en el recorrido del período base *0* al período de comparación *t*.

La elaboración de números índices tienen sentido en las variables de naturaleza cuantitativa. La expresión [1.1] está definida mediante un cociente entre magnitudes expresadas en la misma unidad con lo que es independiente de las unidades de medida en que venga expresada la variable, con lo que se pueden efectuar agregaciones de distintos índices construyéndose indicadores de evolución general de fenómenos socioeconomicos.

2. CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS ÍNDICES

Los números índices se clasifican atendiendo a la naturaleza de las magnitudes que miden (simples o complejas) y a la importancia relativa de cada componente dentro del conjunto en el caso de las complejas. Según estos criterios tenemos los siguientes tipos de números índices:

- **Números índices simples**: Surgen cuando se estudia la evolución a lo largo del tiempo de una única magnitud (no admite desagregación). Sería el caso, por ejemplo, de estudiar la evolución del precio de la leche, de una determinada marca en los últimos diez años.

  Luego dada una magnitud simple X_i su número índice simple será en el período t el siguiente:

$$I_{it} = \frac{X_{it}}{X_{i0}} \times 100 \qquad [1.2]$$

I_{it} = Número índice en el período t de la magnitud *i*

X_{it} = Valor de la magnitud *i* en el período t.

X_{i0} = Valor de la magnitud *i* en el período base.

Los números índices simples se emplean con gran difusión en el mundo de la empresa a la hora de estudiar, entre otras variables, las producciones y ventas de los distintos artículos que fabrican y lanzan al mercado.

- **Números índices complejos sin ponderar**: Surgen cuando se estudia la evolución de una magnitud que tiene más de un componente y a todos ellos se les asigna la misma importancia o peso relativo. Así, por el ejemplo, la magnitud compuesta puede ser el precio de un conjunto de productos lácteos (queso, leche y mantequilla) estableciéndose la hipótesis de que los tres componentes tengan la misma importancia o peso en el consumo de los hogares. Como en la realidad los componentes de una magnitud compleja tienen pesos distintos, estos índices tienen poco uso en el mundo de la economía.

  Su elaboración no plantea ninguna dificultad. Supongamos que la magnitud compleja que nos interesa tiene N componentes (1, 2, ..., *i*, ..., *N*). En primer lugar se elaborarían los índices simples de cada componente $I_{1t}, I_{2t},..., I_{it},..., I_{Nt}$; siendo el índice complejo sin ponderar la media aritmética simple todos ellos.

$$I_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{it} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{X_{it}}{X_{io}} \times 100 \qquad [1.3]$$

- **Números índices complejos ponderados**: Surgen cuando a los componentes de la magnitud compleja que se está estudiando se le asigna a cada uno un determinado coeficiente de ponderación w_i. Este tipo de números índices son los que realmente se emplean en el análisis de la evolución de los fenómenos complejos de naturaleza económica: índice de precios de consumo (IPC), índice de producción industrial (IPI), índice de precios hoteleros (IPH), etc.

  Su formulación general es inmediata ya que basta con introducir en la expresión [1.3] los coeficientes de ponderación de los *N* componentes $(w_1, w_2,..., w_i,..., w_N)$:

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} I_{it} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{X_{it}}{X_{i0}} \times 100 \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \qquad [1.4]$$

En los apartados que siguen vamos a ocuparnos de la elaboración de índices concretos: índices de precios, de cantidades o cuánticos, de valor, etc., que son los que habitualmente se construyen y utilizan en el ámbito económico-empresarial.

3. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

Para terminar esta exposición de la elaboración general de números índices diremos que de forma ideal deberían cumplir las siguientes propiedades:

1. *Existencia:* El número índice debe concretarse en un valor real y finito distinto de cero.
2. *Identidad:* Si se hacen coincidir los períodos base y de comparación el índice vale la unidad si se expresa en tantos por uno, o cien si es en tantos por 100:

$$I_0^0 = \frac{X_0}{X_0} = 1$$

3. *Inversión:* El producto de dos índices en los que se han invertido los períodos base y de comparación es igual a la unidad:

$$I_0^t \cdot I_t^0 = 1$$

4. *Circular:* Es una generalización de la de inversión. Si generalizamos a tres períodos *t', t, o,* tendremos:

$$I_0^{t_1} \cdot I_{t_1}^t \cdot I_t^0 = 1$$

5. *Proporcionalidad:* Si la magnitud varía en proporción 1 + *K, y* fijado el período de comparación, el número índice también varía en la misma proporción. Sea $X_t' = X_t + KX_t = (1+K)X_t$.

$$I_{it}^{'} = \frac{X_{it}^{'}}{X_{i0}} = \frac{(1+k)X_{it}}{X_{i0}} = \frac{X_{it}}{X_{io}} + K \cdot \frac{X_{it}}{X_{io}} = I_{it} + K \cdot I_{it}$$

Estas propiedades, que se cumplen en general para los números índices simples, no suelen cumplirse todas en el caso de los índices complejos o de varias componentes.

En los apartados siguientes nos ocuparemos de la elaboración de índices concretos: índices de precios, de cantidades, de valor, etc., que son los que más se utilizan en el ámbito económico y empresarial.

4. ÍNDICES DE PRECIOS

La magnitud que vamos a considerar en este caso concreto es el precio. Los números índices de precios se clasificarán también en:

- Números índices de precios
  - Simples (se estudia el precio de un solo producto o servicio)
  - Complejos (se refiere a un precio con varios componentes)
    - Sin ponderar
      - Sauerbeck
      - Bradstreet-Dutot
    - Transitorias
      - Laspeyres
      - Paasche
      - Edgeworth
      - Fisher

4.1. Índices simples de precios

Se designa la magnitud precio del único componente del índice simple i por p. Luego la expresión del índice simple de un precio para el período t será:

$$P_{it} = \frac{p_{it}}{p_{i0}} x100 \qquad [1.5]$$

Siendo:

P_{it} = Número índice simple de precios del componente *i* en el período *t*.

p_{it} = Precio del componente *i* en período *t*.

p_{i0} = Precio del componente *i* en el período base.

EJEMPLO 1.1.

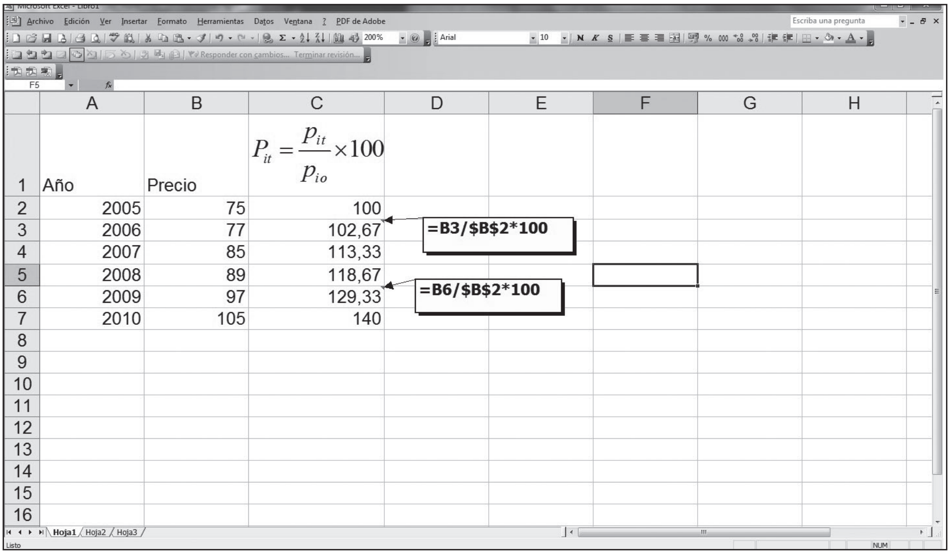
Los precios expresados en euros corrientes de las habitaciones de un determinado hotel, en el período 2005-2010, han sido: 75, 77, 85, 89, 97 y 105. Obtenga la serie de números índices simples de la magnitud precio del producto tomando como período base 2005.

Solución:

Años	$P_{it} = \dfrac{p_{it}}{p_{io}} \times 100$
2005	$\dfrac{75}{75} \times 100 = 100$
2006	$\dfrac{77}{75} \times 100 = 102.7$
2007	$\dfrac{85}{75} \times 100 = 113.3$
2008	$\dfrac{89}{75} \times 100 = 118.7$
2009	$\dfrac{97}{75} \times 100 = 129.3$
2010	$\dfrac{105}{75} \times 100 = 140.0$

Si se observa la serie de los números índices simples vemos la evolución de la magnitud a lo largo del período observándose que de 2005 a 2006 el precio ha crecido un 2,7 por 100, de 2005 a 2008 un 18,7 por 100 y en todo el período un 40 por 100. Como se ha comentado anteriormente los índices, al estar definidos por cociente no dependen de las unidades de medida.

Este ejercicio, al igual que los demás que aparecen a lo largo del tema, pueden resolverse fácilmente con ayuda de la hoja de cálculo *Microsoft Office Excel 2003* como puede verse en la figura 1.1.



	A	B	C
1	Año	Precio	$P_{it} = \dfrac{p_{it}}{p_{io}} \times 100$
2	2005	75	100
3	2006	77	102,67
4	2007	85	113,33
5	2008	89	118,67
6	2009	97	129,33
7	2010	105	140

Figura 1.1. Obtención de índices simples.

4.2. Índices complejos de precios sin ponderar

En este caso la magnitud cuya evolución medimos es compleja ya que intervienen en su definición varios componentes, es decir, los precios de varios bienes. El índice complejo se puede definir empleando dos criterios: el de la media aritmética simple que nos lleva a la obtención del índice de Sauerbeck o el de la media agregativa simple por el que construimos el índice de Bradstreet-Dutot. Pasamos a detallar su definición.

***a*) Índice media aritmética de índices simples o de Sauerbeck**

Si tenemos N componentes del índice compuesto de precios, se deben obtener, en primer lugar, los índices simples, para cada uno de los precios de los artículos i. El índice de Sauerbeck será la media aritmética no ponderada de los mismos:

$$P_S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_{it} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\times 100 \qquad [1.6]$$

EJEMPLO 1.2

Los precios de tres artículos en el período 2006-2008 han sido los siguientes:

ARTÍCULOS	AÑOS		
	2006	2007	2008
Artículo 1	85	89	97
Artículo 2	2100	2300	2400
Artículo 3	900	1200	1400

Tomando como período base 2006, obtenga la serie de los números índices complejos sin ponderar de Sauerbeck del precio de los tres artículos.

Solución:

En primer lugar, se obtienen los índices simples de los tres componentes:

ÍNDICES SIMPLES	2006	2007	2008
$P_{10}^{\ t} = \frac{p_{1t}}{p_{10}} x100$	$\frac{85}{85} \times 100 = 100$	$\frac{89}{85} \times 100 = 104{,}7$	$\frac{97}{85} \times 100 = 114{,}1$
$P_{20}^{\ t} = \frac{p_{2t}}{p_{20}} x100$	$\frac{2.100}{2.100} \times 100 = 100$	$\frac{2.300}{2.100} \times 100 = 109{,}5$	$\frac{2.400}{2.100} \times 100 = 114{,}3$
$P_{30}^{\ t} = \frac{p_{3t}}{p_{30}} x100$	$\frac{900}{900} \times 100 = 100$	$\frac{1.200}{900} \times 100 = 133{,}3$	$\frac{1.400}{900} \times 100 = 155{,}6$

En segundo lugar, se aplica la expresión [1.6] para las tres componentes de los siendo la serie de los índices de Sauerbeck:

AÑOS	$P_{S,0}^{\ t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \times 100$
2006	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \times 100 = \frac{1}{3} \cdot 300 = 100$
2007	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \times 100 = \frac{1}{3} \cdot 347{,}5 = 115{,}8$
2008	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \times 100 = \frac{1}{3} \cdot 384{,}0 = 128{,}0$

Observando esta serie de índices complejos sin ponderar vemos que el precio de los productos considerados ha aumentado un 28 por 100 en el período 2006-2008.

Este ejercicio, se puede resolver fácilmente con ayuda de la hoja de cálculo *Microsoft Office Excel 2003* tal y como se observa en la figura 1.2.

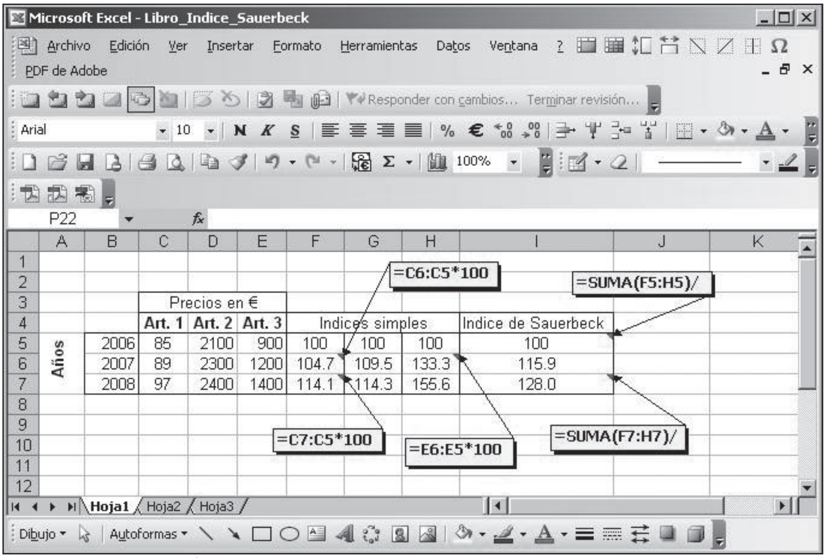


Figura 1.2. Índice de precios compuesto sin ponderar de Sauerbeck.

b) *Índice de la media agregativa simple o de Bradstreet-Dutot*

El concepto de **media agregativa** se emplea sólo en la elaboración de números índices. En el índice de Sauerbeck se obtiene una media aritmética de **índices de precios simples relativos**, ya que los índices simples son cocientes de precios de los períodos de comparación con el base. La media agregativa se define como el cociente entre la media aritmética simple de los *N* precios en el momento *t* de comparación y la misma media en el período 0:

$$P_{BD} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_{it}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_{i0}} \times 100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0}} \times 100 \qquad [1.7]$$

EJEMPLO 1.3

Obtener el índice de Bradstreet-Dutot para los datos del ejemplo 1.2 tomando como período base 2006.

Solución

En primer lugar obtenemos el numerador y denominador de la expresión [1.7] sumando simplemente las filas del ejemplo 1.2:

AÑOS	$P_{BD}=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}p_{it}}{\sum_{i=1}^{3}p_{i0}}\times 100$
2006	$\dfrac{3.085}{3.085}\times 100=100$
2007	$\dfrac{3.589}{3.085}\times 100=116{,}3$
2008	$\dfrac{3.897}{3.085}\times 100=126{,}3$

Este ejercicio, se puede resolver fácilmente con ayuda de la hoja de cálculo *Microsoft Office Excel 2003*, tal y como vemos en la figura 1.3.

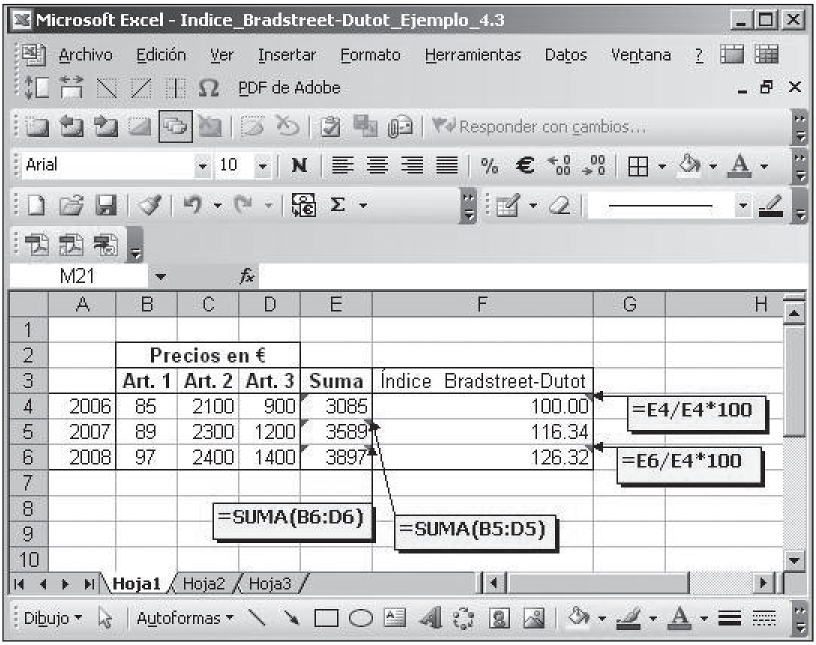


Figura 1.3. Índice de precios compuesto sin ponderar de Bradstreet-Dutot.

4.3. Índices complejos de precios ponderados

Este tipo de índices son los más representativos del fenómeno que se pretende estudiar y por tanto son los que se utilizan realmente. Los índices complejos sin ponderar tienen el grave inconveniente que a todos los componentes se les da el mismo peso cuando en los casos reales de los fenómenos económicos esto no ocurre. Así pues, si analizamos la composición del gasto familiar, lo que se gastan las familias en leche es mucho mayor que lo que se gastan en queso o mantequilla, por ejemplo.

Otro grave inconveniente que tiene, por ejemplo, el índice de la media agregativa es que al sumar precios absolutos, no relativos, dependen de las unidades de medida de la variable. Así, si el precio de la mantequilla en vez de referirse a un kilogramo del producto se refiere a 250 gramos, evidentemente el sumatorio varía y el índice agregativo también. Estos problemas se eliminan con la construcción de índices complejos ponderados que vamos a estudiar seguidamente.

a) *Índice de precios de Laspeyres*

La distinta tipología de índices de precios complejos ponderados se genera a partir de los diferentes coeficientes de ponderación que se utilizan para cada componente. Estos coeficientes asignan a cada elemento la importancia relativa que tiene dentro del conjunto. Los índices de precios que pueden elaborarse son muy variados si tenemos en cuenta el circuito de las transacciones económicas: precios de salida de fábrica, al por mayor, al consumidor, etc. Las ponderaciones que se utilicen estarán basadas en el **valor de las transacciones** en la fase comercial que se considere. Si son precios al por mayor, será el valor de las transacciones entre mayoristas y minoristas; si son precios al consumidor serán los valores de los intercambios entre el comercio minorista y los consumidores.

El índice de precios de Laspeyres utiliza como coeficientes de ponderación el valor de las transacciones en el período base. En economía entendemos por **valor** el producto del precio por la cantidad: $V_{i0} = p_{i0} \cdot q_{i0}$. Luego si en la expresión [1.6] que es el índice complejo sin ponderar introducimos estos coeficientes de ponderación $w_i = p_{i0} \cdot q_{i0}$ para cada componente tendremos:

$$P_L = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0} q_{i0}} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0} q_{i0}} x100 \qquad [1.8]$$

El índice de precios de Laspeyres tiene la ventaja de que las ponderaciones $p_{i0} \cdot q_{i0}$ del período base se mantienen fijas para todos los períodos considerados; pero por contra aparece el inconveniente de que su representatividad disminuye a medida que nos alejamos de dicho período.

b) Índice de precios de Paasche

El índice de precios de Paasche utiliza como coeficientes de ponderación el producto de las cantidades consumidas en el período corriente valoradas a los precios del período base, es decir, $w_i = p_{i0} \cdot q_{it}$. Así pues dicho índice será:

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot p_{i0} q_{it}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0} q_{it}} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0} q_{it}} x100 \qquad [1.9]$$

En la expresión [1.9] puede observarse que las ponderaciones ya no son fijas sino variables. El índice de Paasche tiene la ventaja de que los pesos relativos de los distintos componentes se actualizan en cada período, con el agravante de complejidad y costes de tener que contabilizar precios y cantidades en cada período, mientras que en la expresión [1.8] sólo se actualizan periódicamente los precios p_{it}.

c) Índice de precios de Edgeworth

En este índice se utiliza como coeficientes de ponderación la suma de los utilizados en los casos de Laspeyres y Paasche:

$$w_i = p_{i0} \cdot q_{i0} + p_{i0} \cdot q_{it} \, .$$

Luego su expresión será:

$$P_E = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it} \left(q_{i0} + q_{it} \right)}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0} \left(q_{i0} + q_{it} \right)} x100 \qquad [1.10]$$

La expresión [1.10] también puede adquirir la forma siguiente que es más práctica para su cálculo:

$$P_E = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{i0} + \sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i0} q_{i0} + \sum_{i=1}^{N} p_{i0} q_{it}} x100 \qquad [1.11]$$

d) ***Índice de precios de Fisher***

Este índice se define como la media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche:

$$P_F = \sqrt{P_L \cdot P_P} \qquad [1.12]$$

EJEMPLO 1.4

Además de los precios de los artículos, para el período 2006-2008, del Ejemplo 1.2, tenemos las cantidades que se han consumido en dicho período, concentrándose la información estadística en la siguiente tabla:

Artículos	**2006**		**2007**		**2008**	
	Precio (euros)	**Cantidad (unidades)**	**Precio (euros)**	**Cantidad (unidades)**	**Precio (euros)**	**Cantidad (unidades)**
1. Artículo 1	85	600	89	650	97	700
2. Artículo 2	2.100	30	2.300	40	2.400	45
3. Artículo 3	900	15	1.200	18	1.400	20

Utilizando los datos del anterior cuadro obtener los índices de precios de Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher de 2008 tomando como período base 2006.

Solución:

En primer lugar vamos a obtener una tabla de cálculos donde se incluyan los valores de los numeradores y denominadores de las expresiones [1.8], [1.9] y [1.11].

Artículos	$q_{i06} \cdot p_{i06}$	$q_{i06} \cdot q_{i08}$	$p_{i07} \cdot q_{i07}$	$p_{i07} \cdot q_{i06}$
1	51.000	58.200	67.900	59.500
2	63.000	72.000	108.000	94.500
3	13.500	21.000	28.000	18.000
Sumas	**127.500**	**151.200**	**203.900**	**172.000**

$$P_L = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{i08} q_{i06}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i06} q_{i06}} \times 100 = \frac{151.200}{127.500} \times 100 = 118,59$$

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{i08} q_{i08}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i06} q_{i08}} \times 100 = \frac{203.900}{172.000} \times 100 = 118,55$$

$$P_E = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{i08} q_{i06} + \sum_{i=1}^{N} p_{i08} q_{i08}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i06} q_{i06} + \sum_{i=1}^{N} p_{i06} q_{i08}} \times 100 = \frac{151.200 + 203.900}{127.500 + 172.000} \times 100 = 118,56$$

$$P_F = \sqrt{118,6 \cdot 118,5} = 118,57$$

En la figura 1.4 tenemos los mismos resultados si hubiésemos usado *Microsoft Office Excel 2003*:

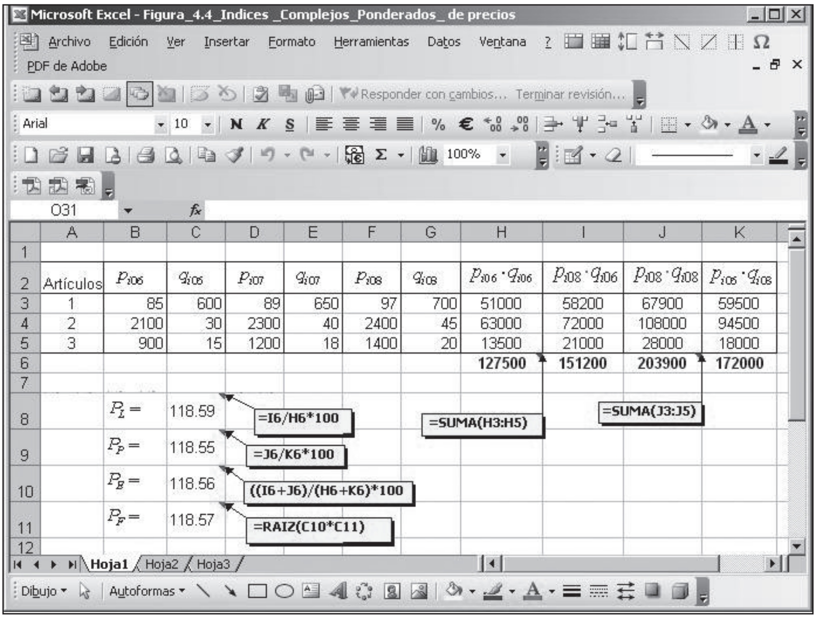


Figura 1.4. Índices de precios compuestos ponderados.

5. ÍNDICES DE CANTIDADES O CUÁNTICOS

Para cualquier magnitud, y por supuesto para las cantidades, siempre se podrán elaborar números índices simples, cuando se utilice un solo artículo, números índices complejos sin ponderar, si utilizamos cualquier tipo de media sin ponderar en los índices simples relativos o utilizando el concepto de media agregativa). Por tanto, si existe homogeneidad entre los bienes siempre se podrán construir índices de Sauerbeck y de Bradstreet-Dutot. Para no ser repetitivos al tratar las cantidades vamos a formular sólo los índices complejos ponderados de Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher.

En economía existe una gran variedad de cantidades, pero las más relevantes son los volúmenes producidos por las empresas de una serie de artículos que son denominados bien por las propias empresas (bienes intermedios o de producción) o por las familias (bienes de consumo final). Los índices cuánticos complejos ponderados miden la evolución de estas magnitudes a lo largo del tiempo estableciéndose los adecuados coeficientes de ponderación.

a) Índice cuántico de Laspeyres

Los coeficientes de ponderación el valor de las cantidades consumidas en el período base a precios de ese mismo período $w_i = q_{i0} \cdot p_{i0}$, siendo q_{i0} las unidades producidas o consumidas de artículo i en el periodo base y p_{i0} puede ser el **precio final de venta** si nos referimos a cantidades vendidas o consumidas o puede ser el **valor añadido por unidad producida** si nos referimos a un índice de cantidades producidas. Hay que tener en cuenta que el valor añadido por unidad es equivalente a un precio que nos da la verdadera importancia relativa del artículo. El índice cuántico de Laspeyres se formula como:

$$Q_L = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot q_{i0} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} p_{i0}} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_{it} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} p_{i0}} x100 \qquad [1.13]$$

Esta expresión de Laspeyres es la que más se utiliza, ya que nos da la evolución de la cantidad en términos reales o constantes al utilizar los precios del período base.

b) *Índice cuántico de Paasche*

En este caso los coeficientes de ponderación, con el mismo sentido económico del índice de Laspeyres, de precio final o valor añadido por unidad, según sean cantidades consumidas o producidas, serán $w_i = q_{i0} \cdot p_{it}$. Así pues dicho índice será:

$$Q_P = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot q_{i0} p_{it}}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} p_{it}} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_{it} p_{it}}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} p_{it}} x100 \quad [1.14]$$

En la expresión [1.14] puede observarse que se utilizan los precios de cada periodo de comparación, al variar t.

c) Índice cuántico de Edgeworth

En este caso, al igual que ocurría en el índice de precios, los coeficientes de ponderación se obtienen sumando las utilizadas por el índice cuántico de Laspeyres y el índice cuántico de Paasche: $w_i = q_{i0} \cdot p_{i0} + q_{i0} \cdot p_{it}$. Su desarrollo será:

$$Q_E = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot q_{i0} \left(p_{i0} + p_{it} \right)}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} \quad p_{i0} + p_{it}} x100 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} q_{it} \left(p_{i0} + p_{it} \right)}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} \left(p_{i0} + p_{it} \right)} x100 = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_{it} p_{i0} + \sum_{i=1}^{N} q_{it} p_{it}}{\sum_{i=1}^{N} q_{i0} p_{i0} + \sum_{i=1}^{N} q_{i0} p_{it}} x100 \quad [1.15]$$

d) Índice cuántico de Fisher

Este índice se define como la media geométrica de los índices cuánticos de Laspeyres y Paasche:

$$Q_F = \sqrt{Q_L \cdot Q_P} \quad [1.16]$$

EJEMPLO 1.5

De la tabla de precios y cantidades del Ejemplo 1.4 obtener los índices cuánticos de Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher para 2007 tomando como periodo base 2006.

Solución:

En primer lugar vamos a obtener una tabla de cálculos donde se incluyan los valores de los numeradores y denominadores de las expresiones [1.13], [1.14] y [1.15].

Artículos	$q_{i06} \cdot p_{i06}$	$q_{i06} \cdot q_{i08}$	$p_{i07} \cdot q_{i07}$	$p_{i07} \cdot q_{i06}$
1	51.000	55.250	57.850	53.400
2	63.000	84.000	92.000	69.000
3	13.500	16.200	21.600	18.000
Sumas	**127.500**	**155.450**	**171.450**	**140.400**

$$Q_L = \frac{\sum_{i=1}^{3} q_{i07}\, p_{i06}}{\sum_{i=1}^{3} q_{i06}\, p_{i06}} \times 100 = \frac{155.450}{127.500} \times 100 = 121,92$$

$$Q_P = \frac{\sum_{i=1}^{3} q_{i07}\, p_{i07}}{\sum_{i=1}^{3} q_{i06}\, p_{i07}} \times 100 = \frac{171.450}{140.400} \times 100 = 122,12$$

$$Q_E = \frac{\sum_{i=1}^{3} q_{i07}\, p_{i06} + \sum_{i=1}^{3} q_{i07}\, p_{i07}}{\sum_{i=1}^{3} q_{i06}\, p_{i06} + \sum_{i=1}^{3} q_{i06}\, p_{i07}} \times 100 = \frac{155.450 + 171.450}{127.500 + 140.400} \times 100 = 122,02$$

$$Q_F = \sqrt{Q_L \cdot Q_P} = \sqrt{121,92 \times 122,12} = 122,02$$

La figura 1.5 nos muestra los mismos resultados utilizando *Microsoft Office Excel 2003*:

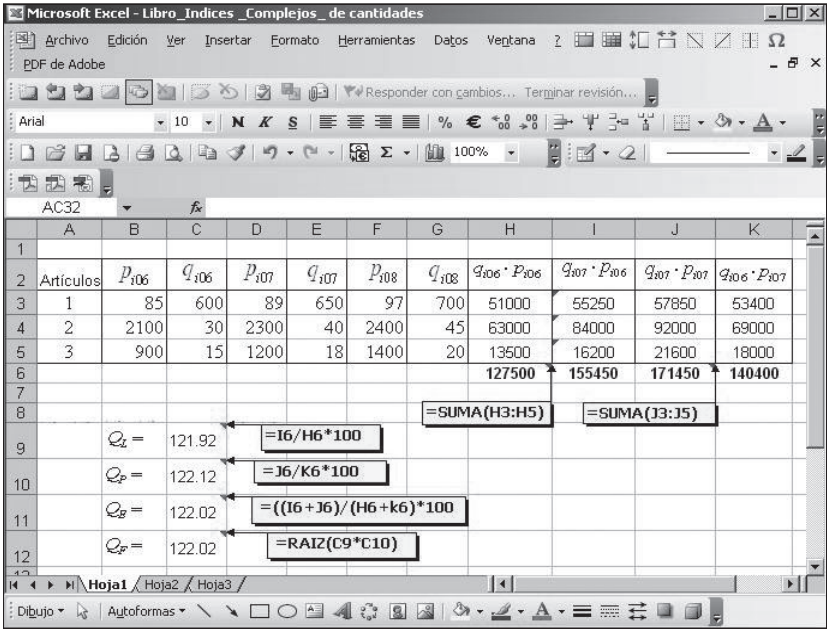


Figura 1.5. Índices cuánticos compuestos ponderados.

EJEMPLO 1.6

En una industria auxiliar del automóvil se fabrican tres componentes. La estadística de las unidades producidas en los años 2008 y 2009 y de los valores añadidos (v.a) por unidad, expresados en euros, son los siguientes

COMPONENTES	2007		2008	
	q_{i0}	$v.a/unidad = p_{i0}$	q_{it}	$v.a/unidad = p_{it}$
1	5.000	20	6.900	25
2	8.000	10	10.000	12
3	6.000	30	10.000	35

Obtener los índices de producción de Laspeyres y de Paasche de 2008 con base 2007

Solución:

Como en los ejemplos anteriores, comenzamos obteniendo los numeradores y denominadores de Q_L y Q_P:

COMPONENTES	2007		2008	
	$q_{i07} \cdot p_{i07}$	$q_{i08} \cdot p_{i07}$	$q_{i08} \cdot p_{i08}$	$q_{i07} \cdot p_{i08}$
1	100.000	120.000	150.000	125.000
2	80.000	100.000	120.000	96.000
3	180.000	300.000	350.000	210.000
Sumas	**360.000**	**520.000**	**620.000**	**431.000**

$$Q_L = \frac{\sum_{i=1}^{3} q_{i08}\, p_{i07}}{\sum_{i=1}^{3} q_{i07}\, p_{i07}} \times 100 = \frac{520.000}{360.000} \times 100 = 144,44$$

$$Q_P = \frac{\sum_{i=1}^{3} q_{i08}\, p_{i08}}{\sum_{i=1}^{3} q_{i07}\, p_{i08}} \times 100 = \frac{620.000}{431.000} \times 100 = 143,85$$

Si lo hacemos con *Microsoft Office Excel 2003*, tenemos la figura 1.6:

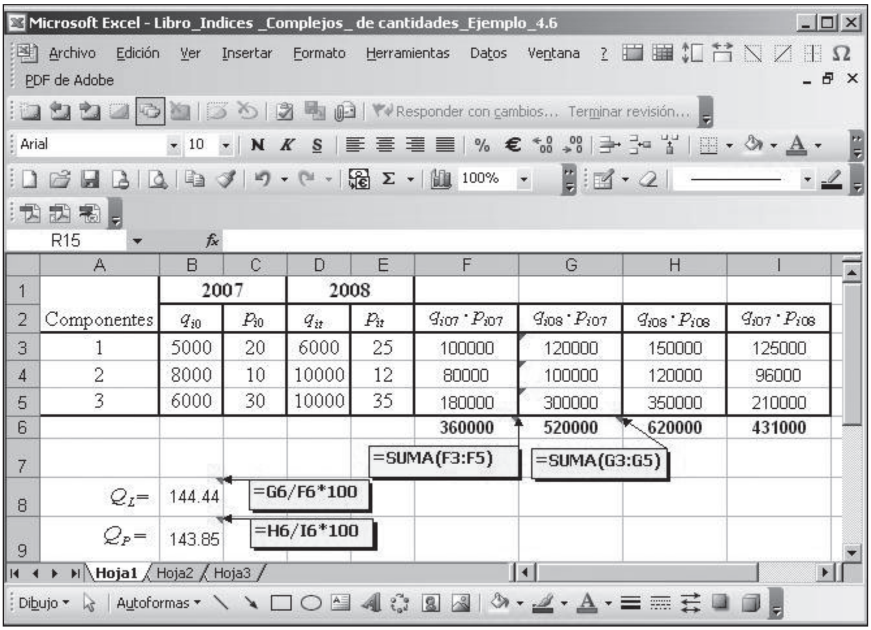


Figura 1.6. Índices cuánticos compuestos ponderados del ejemplo 1.6.

6. PROPIEDADES QUE CUMPLEN LOS ÍNDICES COMPLEJOS PONDERADOS DE PRECIOS Y DE CANTIDADES

Al estudiar de una forma genérica los números índices se comentó que deberían de cumplir una serie de propiedades ideales: existencia, identidad, inversión, circular y de proporcionalidad. Así como los índices simples las cumplen su gran mayoría, los índices complejos ponderados no verifican algunas de ellas.

En el cuadro siguiente se resumen qué índices cumplen las propiedades indicadas en el apartado 1.2 de este capítulo.

Propiedades / Índices	Existencia	Identidad	Inversión	Circular	Propicionalidad
Sauerbeck	Sí	Sí	No	No	Sí
Bradstreet-Dutot	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Laspeyres	Sí	Sí	No	No	Sí
Paasche	Sí	Sí	No	No	Sí *
Edgeworth	Sí	Sí	Sí	No	Sí *
Fisher	Sí	Sí	Sí	No	Sí *

La propiedad de proporcionalidad en los índices de Paasche, Edgeworth y Fisher se verifica pero con cierta limitación en el campo económico, pues al variar los precios en una cierta proporción k, difícilmente las cantidades permanecerán constantes. Por tanto, tenemos que suponer que las cantidades no varían frente a los cambios de precios para que esta propiedad la verifiquen los tres índices señalados.

Tal y como muestra la tabla, el índice de Bradstreet-Dutot es el que cumple todas las propiedades pero su utilización es muy limitada por tratarse de un índice complejo no ponderado.

El índice más utilizado será el de Laspeyres, pues de los ponderados es el único que cumple la propiedad de proporcionalidad.

El índice de Laspeyres, tanto de precios como cuántico, es el más utilizado en los indicadores generales de precios y producción que elaboran todos los países. Su diseño y posterior cálculo exige una rigurosa selección de sus componentes para que sea representativo del fenómeno que se pretende estudiar a través de su estructura de coeficientes de ponderación que como sabemos se refieren al período base, la estructura de los coeficientes de ponderación es cada vez menos representativa con lo que hay que fijar un nuevo período base y establecer con las investigaciones adecuadas una nueva estructura de ponderaciones. En los enlaces de series de números índices que tienen distinta base nos apoyamos en la propiedad de inversión que como se ha indicado anteriormente no la cumple el índice de Laspeyres; pero se actúa en la práctica como si se cumpliera ante la necesidad de efectuar dichos empalmes.

7. ÍNDICES EN CADENA

Los índices estudiados anteriormente y, en concreto, el de Laspeyres y el de Paasche, frecuentemente los más utilizados para hacer un estudio a corto plazo, pero si el estudio es a largo plazo estos índices no son los más adecuados, pues las ponderaciones quedan desfasadas con el paso del tiempo y no corresponden a la situación actual y la base se aleja perdiendo actualidad y en consecuencia calidad.

Para evitar esto, se introducen los **índices en cadena**, que se obtienen a partir de una generalización de enlaces o empalmes de índices para los cuales la base de cada índice es siempre el período de comparación del índice precedente, es decir:

$$I_0^t = I_0^1 \cdot I_1^2 \cdot \ldots \cdot I_{t-1}^t$$

lo cual nos permite obtener una serie de índices referidos todos ellos a la misma base.

$$\begin{aligned}
&I_0^1 \\
&I_0^2 = I_0^1 \cdot I_1^2 \\
&I_0^3 = I_0^1 \cdot I_1^2 \cdot I_2^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&I_0^t = I_0^1 \cdot I_1^2 \cdot \ldots \cdot I_{t-1}^t
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.7

Los precios de un determinado artículo han sido 20, 22, 26, 28 y 32 euros para el período 2004-2008, respectivamente. Obtener la serie de índices referidos al año 2004 y el índice I_{04}^{08} para esos precios.

Solución:

Aplicando la definición de índice en cadena mediante la generalización de valores tenemos:

$$I_{04}^{05} = \frac{22}{20} \times 100 = 105,5\%$$

$$I_{04}^{06} = I_{04}^{05} \cdot I_{05}^{06} = \frac{22}{20} \times \frac{26}{22} 100 = 130\%$$

$$I_{04}^{07} = I_{04}^{05} \cdot I_{05}^{06} \cdot I_{06}^{07} = \frac{22}{20} \times \frac{26}{22} \times \frac{28}{26} 100 = 140\%$$

$$I_{04}^{08} = I_{04}^{05} \cdot I_{05}^{06} \cdot I_{06}^{07} \cdot I_{07}^{08} = \frac{22}{20} \times \frac{26}{22} \times \frac{28}{26} \times \frac{32}{28} 100 = 160\%$$

Al mismo resultado se llega mediante:

$$I_{04}^{08} = \frac{32}{20} \times 100 = 160\%$$

8. CAMBIO DE BASE EN UNA SERIE DE NÚMEROS ÍNDICES

Si se tiene una serie de números índices cuyo período base es el año cero: $I_0^0, I_0^1, ..., I_0^t, ..., I_0^n$, puede interesarnos cambiar la base *0* si está muy alejada en el tiempo del período *t* de comparación. Este cambio del período base no implica efectuar un profundo estudio para determinar nuevos coeficientes de ponderación en el caso de los índices complejos, sino simplemente apoyarse en las propiedades de inversión y circular que nos permiten obtener el coeficiente técnico que transforma la serie dada en la nueva con un período base distinto.

Supongamos que la serie dada con período base *0* se quiere transformar en una nueva con un período base t' que esté más cercano en el tiempo al período actual de comparación. En la serie original existirá un número índice $I_0^{t'}$ que corresponde al nuevo período base que se ha elegido t'. El índice $I_0^{t'}$ es el elemento fijo que nos sirve de enlace técnico en la transformación de una serie en otra. Al considerar los tres períodos $t', t, 0$, la propiedad circular nos dice:

$$I_0^{t'} \cdot I_{t'}^{t} \cdot I_t^0 = 1 \qquad [1.17]$$

De la expresión [1.17] nos interesa despejar la nueva serie de índices con el nuevo período base $t', I_{t'}^t$, es decir:

$$I_0^{t'} \cdot I_{t'}^{t} = \frac{1}{I_t^0} = I_0^t \qquad [1.18]$$

La expresión [1.18] surge de la propiedad de inversión que dice $I_0^t \cdot I_t^0 = 1$. Despejando $I_{t'}^t$, en la expresión [1.18]:

$$I_{t'}^t = \frac{I_0^t}{I_0^{t'}} \qquad [1.19]$$

La expresión [1.19], al ser un cociente de índices expresados en tantos por 100, nos da como resultado un índice en tantos por uno. I_0^t es el término general de la serie dada de número índices y varía desde hasta $I_0^0 = 100$ hasta I_0^t.

Es decir, si tenemos la serie I_0^t de números índices referidos al período base 0 y queremos efectuar un cambio de base del período 0 al período base t', tendríamos la serie $I_{t'}^t$:

Período	Índice I_0^t	Índice $I_{t'}^t$
0	$I_0^0 = 100$	$I_{t'}^0$
1	I_0^1	$I_{t'}^1$
⋮	⋮	⋮
i	I_0^i	$I_{t'}^i$
⋮	⋮	⋮
t'	$I_0^{t'}$	$I_{t'}^{t'} = 100$
⋮	⋮	⋮
t	I_0^t	$I_{t'}^t$

donde:

$$I_{t'}^i = \frac{I_0^i}{I_0^{t'}}, \quad i = 0, 1, \ldots, t', \ldots, t$$

El término $I_0^{t'}$ es fijo ya que es el valor que toma la serie dada justo en t', que es el nuevo período base.

Se denomina *coeficiente de transformación* o *coeficiente de enlace técnico* de la serie dada en base 0 a la nueva serie en base t', al cociente:

$$I_{t'}^0 = \frac{I_0^0}{I_0^{t'}} = \frac{100}{I_0^{t'}} \qquad [1.20]$$

Luego para pasar una serie en base 0 a un nuevo período base t', bastará multiplicar cada uno de los elementos de la serie original, por el coeficiente de transformación a la nueva base t', es decir, por $I_{t'}^0$.

EJEMPLO 1.8

Dada la siguiente serie de números índices de precios hoteleros (IPH) con período base 2002, efectuar un cambio de base al período 2006.

Año	IPH (base 2002)
2002	100
2003	102,7
2004	104,5
2005	105,8
2006	108
2007	110,6
2008	111,4
2009	104,8
2010	102,4

Solución:

El ejemplo se puede resolver de dos formas:

a) Aplicando la expresión [1.19] expresada en tantos por 100:

$$I_{06}^{t} = \frac{I_{02}^{t}}{I_{02}^{06}} \times 100$$

$$I_{06}^{01} = \frac{I_{02}^{02}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{100}{108} \times 100 = 92,59$$

$$I_{06}^{03} = \frac{I_{02}^{03}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{102}{108} \times 100 = 95,09$$

$$I_{06}^{04} = \frac{I_{02}^{04}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{104,5}{108} \times 100 = 96,76$$

$$I_{06}^{05} = \frac{I_{02}^{05}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{105,8}{108} \times 100 = 97,96$$

$$I_{06}^{06} = \frac{I_{02}^{06}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{108}{108} \times 100 = \mathbf{100}$$

$$I_{06}^{07} = \frac{I_{02}^{07}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{110,6}{108} \times 100 = 102,41$$

$$I_{06}^{08} = \frac{I_{02}^{08}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{111,4}{108} \times 100 = 103,15$$

$$I_{06}^{09} = \frac{I_{02}^{09}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{104,8}{108} \times 100 = 97,04$$

$$I_{06}^{10} = \frac{I_{02}^{10}}{I_{02}^{06}} \times 100 = \frac{102,4}{108} \times 100 = 94,81$$

b) Aplicando a la serie original, el coeficiente de transformación que en este caso será, según la expresión [1.20]:

$$I_{06}^{06} = \frac{I_{02}^{02}}{I_{02}^{06}} = \frac{100}{108} = 0.9259$$

$I_{06}^{t} = I_{02}^{t} \times 0,9259$
$100 \times 0,9259 = 92,59$
$102,7 \times 0,9259 = 95,09$
$104,5 \times 0,9259 = 96,76$
$105,8 \times 0,9259 = 97,96$
$108 \times 0,9259 = 100,00$
$110,6 \times 0,9259 = 102,41$
$111,4 \times 0,9259 = 103,15$
$104,8 \times 0,9259 = 97,04$
$102,4 \times 0,9259 = 94,81$

Hay que resaltar que, en los cambios de base de una serie de números índices, el coeficiente de transformación se aplica a todos y cada uno de los componentes de la serie.

9. RENOVACIÓN Y ENLACE DE SERIES DE NÚMEROS ÍNDICES CON DISTINTAS BASES

9.1 Renovación de componentes y de coeficientes de ponderación en los números índices complejos

En el mundo de la economía los números índices representan fenómenos complejos: la evolución general de los precios del conjunto de bienes y servicios que adquieren las familias o unidades de consumo final, la evolución del Producto Interior Bruto de un país, el comportamiento de un mercado de valores mobiliarios (índices bursátiles), etc. Por tanto, el proceso de elaboración de un número índice complejo ponderado implica la adopción de una serie de decisiones: elección de los componentes que entrarán a formar parte del índice para que este sea representativo en su conjunto, elección del período base y tipo de índice que se va a utilizar

(Laspeyres, Paasche, etc.) teniendo en cuenta el coste asociado a la fórmula elegida. Precisamente teniendo en cuenta dicho coste, es el índice de Laspeyres el más empleado ya que, como vimos, sus coeficientes de ponderación, cuya determinación requiere costosísimos análisis y toma de datos, están referidos al período base. Luego a medida que nos alejamos de dicho período, como la actividad económica está sujeta a una constante evolución por cambios en los hábitos de consumo y en los procesos tecnológicos, el conjunto de los componentes y sus coeficientes de ponderación dejan de ser representativos del fenómeno objeto de estudio. La solución es someter al índice a una profunda revisión de forma periódica, volviendo a elegir los componentes más representativos y sus nuevos coeficientes de ponderación.

9.2. Enlace o empalme de series de números índices con distinta base

La necesidad de la renovación periódica, justificada como se ha señalado anteriormente por una variación del contexto socioeconómico que pretende medir, nos lleva a contar con dos series de índices que tienen períodos base distintos y hay que enlazarlos o empalmarlos para poder estudiar el fenómeno comparando su evolución con una única base. El período base que se mantiene es el de la serie que lo tiene más cercano al momento actual de comparación aplicando el **coeficiente de enlace o empalme** a la serie más antigua.

El concepto o definición de este coeficiente de enlace es el mismo que hemos dado en los cambios de base dentro de una misma serie, aplicándose ahora sólo a los elementos de la serie que tenga la base más antigua, ya que nos interesa hacer el estudio de la evolución con la base más moderna que es la más representativa. Si la serie con base más antigua es $I_0^0, I_0^1, ..., I_0^t, ..., I_0^n$ e $I_0^{t'}$ e coincide con el período base de la serie más moderna, el coeficiente de enlace será:

$$I_{t'}^{0} = \frac{I_0^0}{I_0^{t'}} = \frac{100}{I_0^{t'}}$$

que es la expresión [1.20].

EJEMPLO 1.9

Se tienen las siguientes series de índices de precios hoteleros con base en los años 2002 y 2008 obtenidos según la formula de Laspeyres:

Años	IPH (base 2002)	IPH (base 2008)
2002	100	
2003	102,7	
2004	104,5	
2005	105,8	
2006	108	
2007	110,6	
2008	111,4	100
2009	104,8	94,1
2010	102,4	92

Enlazar las dos series con base en 2008

Solución:

El coeficiente de enlace será:

$$CE = \frac{I_{02}^{02}}{I_{02}^{08}} = \frac{100}{111,4} = 0,9259$$

Aplicando este coeficiente de enlace a la serie más antigua con base 2001, la serie enlazada será:

Años	I_{08}^{t}
2002	100 × 0.9259 = 89.77
2003	102.7 × 0.9259 = 92.19
2004	104.5 × 0.9259 = 93.81
2005	105.8 × 0.9259 = 94.97
2006	108 × 0.9259 = 96.95
2007	110.6 × 0.9259 = 99.28
2008	100
2009	94.1
2010	92

Obsérvese que el coeficiente de enlace sólo se aplica a la serie con base en 2002 para que quede conectada con la que tiene base más actualizada que es la del año 2008. También hay que resaltar que se actúa como si el índice de precios de Laspeyres cumpliese la propiedad circular aunque sabemos que no es cierto.