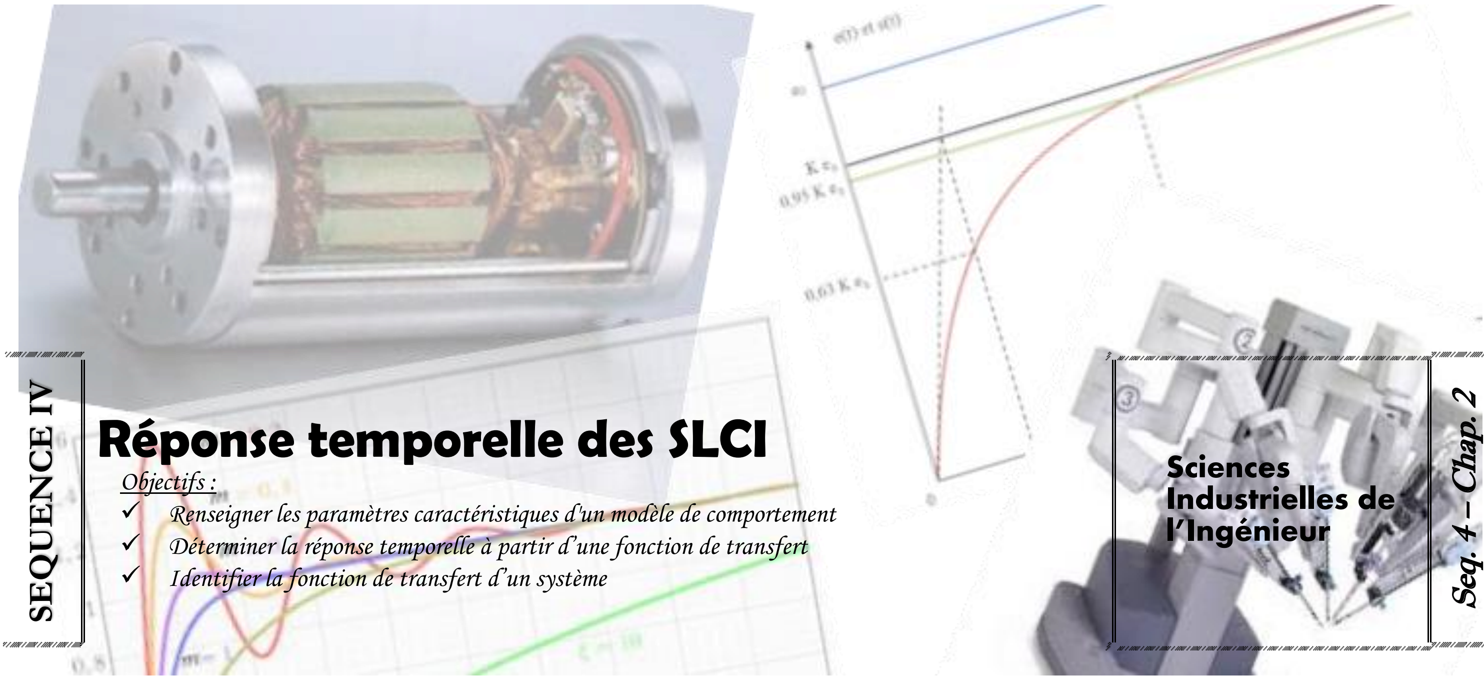


SEQUENCE IV

Réponse temporelle des SLCI

Objectifs :

- ✓ *Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement*
- ✓ *Déterminer la réponse temporelle à partir d'une fonction de transfert*
- ✓ *Identifier la fonction de transfert d'un système*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 4 – Chap. 2

Chapitre 2

Cours

Déterminer la réponse d'un second ordre

Prérequis

- ✓ *Séquence 2*

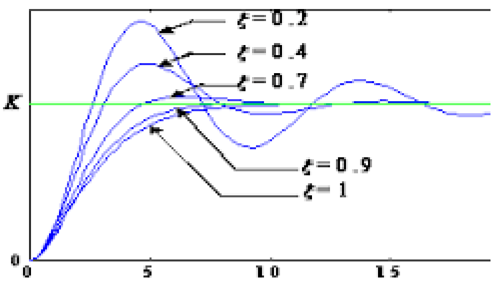
Objectifs

- ✓ *Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement du second ordre*
- ✓ *Déterminer la réponse temporelle d'un système du second ordre*

Savoir-faire associés

M. II. 5 / R. I. 1. a / R. I. 2. a

PLAN DU CHAPITRE



Exemple de réponse temporelle d'un second ordre

Le comportement d'un système du deuxième ordre est caractérisé par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants. La transformée de Laplace conduit à l'écriture de la fonction de transfert (lorsque les conditions initiales sont tout nulles).

Définition 1 – Système du deuxième ordre : L'équation différentielle associée est :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

La fonction de transfert est donc :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

Avec :

- ω_0 : la pulsation propre
- ξ : le facteur d'amortissement
- K : le gain statique

Cette forme de la fonction de transfert est la forme canonique (la constante du polynôme du dénominateur vaut 1). Seule la réponse indicielle (entrée échelon) sera étudiée dans ce cours.

I. Réponse indicielle :

Soit en entrée du système du deuxième ordre la fonction $e(t) = E_0 \cdot u(t)$. On applique la transformée de Laplace :

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

La sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Cette expression n'est pas disponible dans le tableau des transformées de Laplace. La transformée de Laplace inverse nécessite au préalable une décomposition en éléments simples. Celle-ci dépend des racines du polynôme du dénominateur (les pôles de la fonction de transfert) :

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1\right) \cdot p = 0$$

On trouve p=0 ainsi que les racines du polynôme du second degré qui dépendent du signe du discriminent :

$$\Delta = 4 \cdot \frac{(\xi^2 - 1)}{\omega_0^2}$$

On distingue les trois cas :

- Si l'amortissement est faible (ξ<1), alors Δ<0 et il y a deux racines complexes conjuguées
- Si l'amortissement est critique (ξ=1), alors Δ=0 et il y a une racine réelle double
- Si l'amortissement est important (ξ>1), alors Δ>0 et il y a deux racines réelles distinctes

A. Régime apériodique

Lorsque l'amortissement est fort, $\xi > 1$, la réponse est amortie (régime apériodique).

Dans le cas où $\xi>1$, le dénominateur possède deux racines réelles :

$$p = -\xi \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Sachant que ξ et ω_0 sont positifs, on vérifie que les deux pôles sont à partie réelle négative ce qui assure un comportement stable. La sortie peut s'écrire sous forme factorisée :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot p}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit sous la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p - p_1)} + \frac{\gamma}{(p - p_2)}$$

Après mise sous le même dénominateur et identification des constantes, la sortie s'écrit :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p} - \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\frac{1}{p_2 \cdot (p - p_2)} - \frac{1}{p_1 \cdot (p - p_1)}\right)$$

La transformée de Laplace inverse s'obtient à l'aide du tableau des transformées de Laplace :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{p_2 \cdot t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 \cdot t}}{p_1}\right)\right) \cdot u(t)$$

La réponse à un échelon d'amplitude E_0 d'un système du deuxième ordre fortement amorti ($\xi>1$) s'écrit :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}\right)\right) \cdot u(t)$$

L'expression est la superposition d'un échelon et de deux exponentielles, il n'y a donc pas de dépassements et la courbe converge vers $K\,E_0$. La constante 1 représente la réponse permanente tandis que les deux exponentielles représentent les réponses transitoires.

Propriété 1 : Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 1 :

- Valeur à l'origine : $\mathbf{s(0) = 0}$
- Asymptote à l'infini : $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{s(t) = K \cdot E_0}$
- La tangente à l'origine horizontale

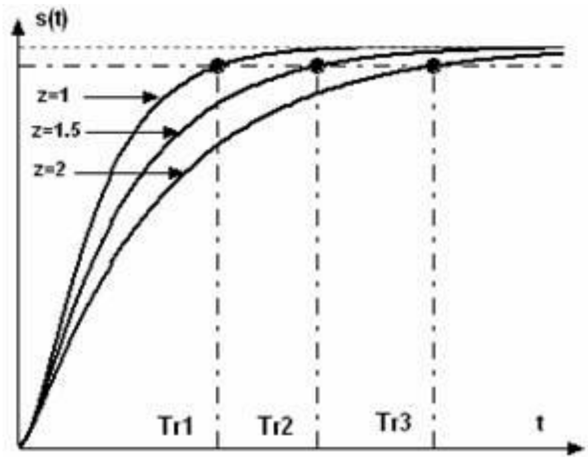


Figure 1 : *Réponse à un échelon d'un système du second ordre – régime apériodique*

B. Régime apériodique critique

Lorsque l'amortissement est critique, soit $\xi = 1$, la réponse est amortie (régime apériodique, critique).

Dans le cas où $\xi = 1$, l'équation caractéristique admet une racine double :

$$p = -\omega_0$$

Cette valeur étant négative, le système est stable. La sortie peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0}{(p + \omega_0)^2 \cdot p}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit sous la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p + \omega_0)} + \frac{\gamma}{(p + \omega_0)^2}$$

Après réduction au même dénominateur puis identification des coefficients du polynôme, la sortie s'écrit :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot (\frac{1}{p} - \frac{1}{(p + \omega_0)} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2})$$

La transformée de Laplace inverse s'obtient à partir du tableau des transformées de Laplace :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot u(t) \cdot (1 - (1 + t \cdot \omega_0) \cdot e^{-\omega_0 \cdot t})$$

Propriété 2 : Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 2 :

- Valeur à l'origine : $\mathbf{s(0) = 0}$
- Asymptote à l'infini : $\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = K \cdot E_0$
- La tangente à l'origine horizontale

Comme dans le cas amortissement fort, la réponse ne présente pas de dépassements et converge vers $K\,E_0$. Pour $\xi = 1$, on a le temps de réponse le plus court sans dépassement.

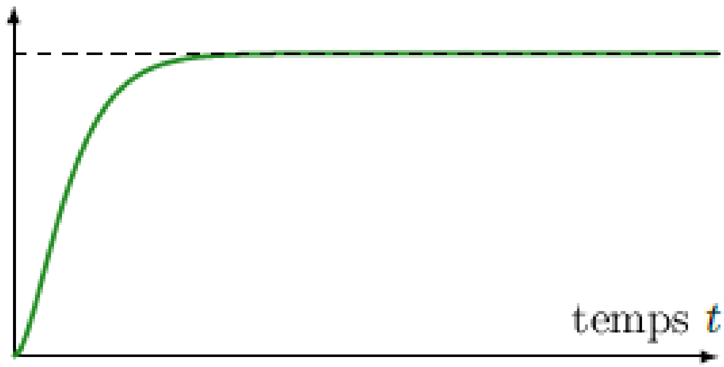


Figure 2 : *Réponse à un échelon d'un système du second ordre – régime apériodique critique*

C. Régime pseudo-périodique

Dans le cas où $\xi < 1$, le dénominateur possède deux racines complexes conjuguées :

$$p = -\xi \cdot \omega_0 \pm i \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

Les constantes ξ et ω_0 sont réelles et positives donc le système est stable car les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

La décomposition en éléments simples dans l'espace des réels conduits à :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0^2}{(p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2) \cdot p} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta \cdot p + \gamma}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$$

Après réduction au même dénominateur et identification, on trouve la décomposition :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}\right)$$

que l'on met sous la forme de somme d'éléments du tableau des transformées de Laplace :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p + \xi \cdot \omega_0}{(p + \xi \cdot \omega_0)^2 + \omega_0^2 \cdot (1-\xi^2)} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}}{(p + \xi \cdot \omega_0)^2 + \omega_0^2 \cdot (1-\xi^2)}\right)$$

On en déduit alors la réponse temporelle par application de la transformée inverse de Laplace :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot u(t) \cdot \left(1 - e^{-\omega_0 \cdot \xi \cdot t} \cdot \left(\cos\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot t\right)\right)$$

L'expression de $s\ (t)$ est la superposition d'un échelon et d'une sinusoïde amortie par une exponentielle.

Propriété 3 : Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 3 :

- Fonction oscillante (partie sinusoïdale) qui représente donc des dépassements et amortie (exponentielle décroissante).
- Valeur à l'origine : $\mathbf{s(0) = 0}$
- Asymptote à l'infini : $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} s(t) = K \cdot E_0}$
- La tangente à l'origine horizontale

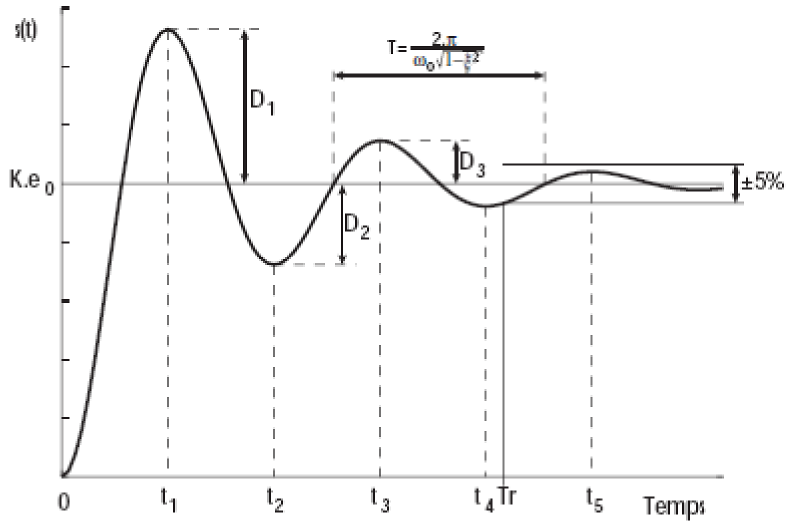


Figure 3 : *Réponse à un échelon d'un système du second ordre – régime pseudo-périodique*

Définition 2 – Signal pseudo-périodique : Le signal de sortie n'est pas périodique mais sachant qu'il est issu du produit d'une exponentielle et d'une fonction sinusoïdale, il est courant de parler de pseudo-période et de pseudo-pulsation. Elles ont pour valeurs :

- $T_a = \frac{2\cdot\pi}{\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}}$, pseudo-période en seconde
- $\omega_a = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$, pseudo-pulsation en seconde

D. Dépassement

Une recherche des extrema de s (t) permet de déterminer les caractéristiques des dépassements. L'amplitude du dépassement dépendant de l'entrée E_0, il est plus communément exprimé en pourcentage.

Définition 3 – $k^{ième}$ dépassement : On caractérise le $k^{ième}$ dépassement, définit à l'instant t_k par son amplitude absolue D_k ou son amplitude relative $D_k^{\%}$:

- $t_k = \frac{k\cdot\pi}{\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}}$
- $D_k = K \cdot E_0 \cdot e^{-K\cdot\frac{\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- $D_k^{\%} = 100 \cdot e^{-K\cdot\frac{\pi\cdot\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Lorsque l'amortissement est faible (**ξ** <1), il devient intéressant de quantifier les dépassements. L'expression analytique existe, mais il est souvent plus simple de se référer à l'abaque des dépassements relatifs (Figure 4) qui précise le pourcentage de dépassement par rapport à la valeur à convergence, en fonction de l'amortissement **ξ**.

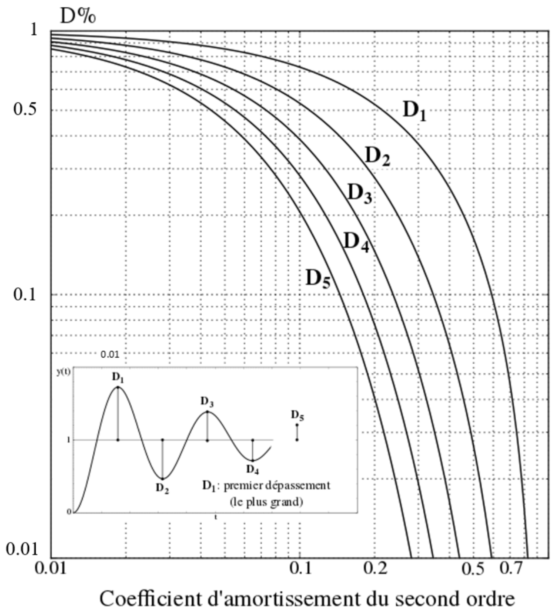


Figure 4 : *Influence du coefficient d'amortissement sur le dépassement*

II. Rapidité

L'étude précédente permet de dégager un certain nombre de propriétés remarquables utile pour l'évaluation des performances du système. La forme de la réponse dépend de l'amortissement ξ (voir Figure 5) :

- Si l'amortissement est supérieur ou égale à 1, la réponse est non oscillante et ne présente donc pas de dépassements ;
- Si l'amortissement est inférieur à 1, la réponse est oscillante et présente des dépassements.

Dans les trois cas, la réponse converge vers K E_0, ce qui justifie l'appellation "gain statique" pour K, comme dans le cas du premier ordre.

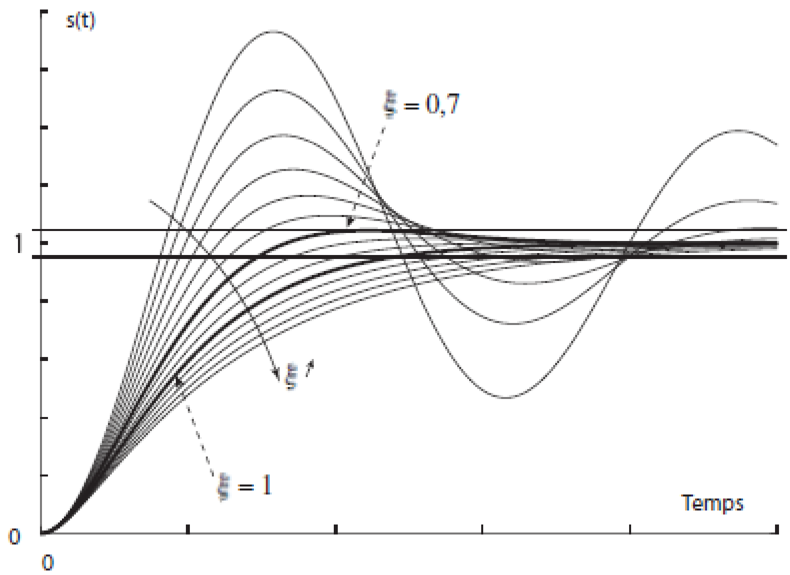


Figure 5 : *Influence du coefficient d'amortissement sur la réponse temporelle d'un second ordre*

Le temps de réponse à 5% ne peut pas être obtenu analytiquement comme dans le cas du premier ordre. Un abaque. des temps de réponse réduit (Figure 6) permet néanmoins de conclure sur le critère de rapidité : à partir de ξ, l'abaque donne le produit $\omega_0 \cdot t_{r,5\%}$, ce qui permet de déduire $t_{r,5\%}$.

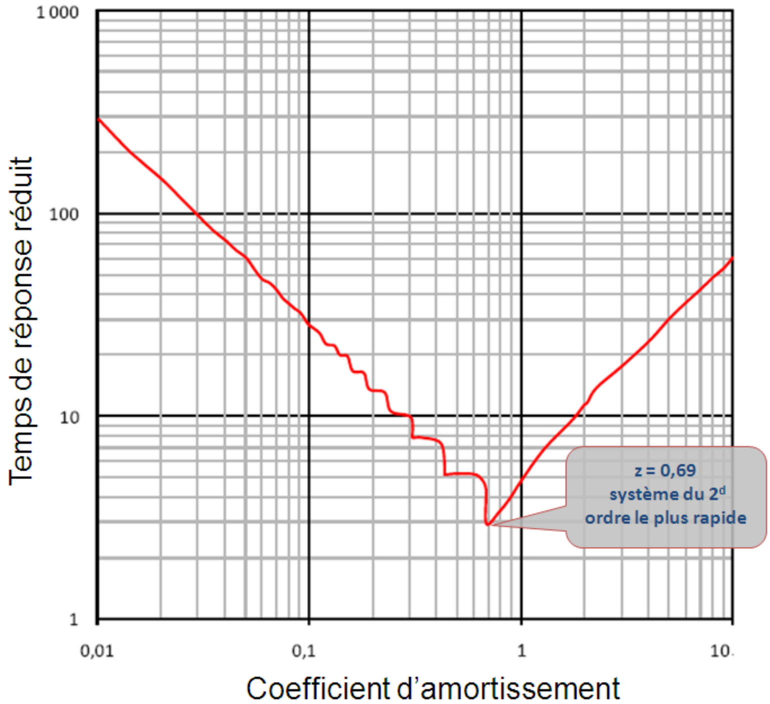


Figure 6 : *Evolution du coefficient d'amortissement sur le temps de réponse réduit*

Propriété 4 – Rapidité d'un second ordre : L'amortissement critique $\boldsymbol{\xi} = 1$ correspond au deuxième ordre le plus rapide sans dépassement. L'abaque des temps de réponse met en évidence la valeur caractéristique de $\boldsymbol{\xi} = 0,69$ pour laquelle le temps de réponse réduit est minimum : elle correspond au deuxième ordre le plus rapide avec dépassements. Plus généralement, l'abaque montre que si l'amortissement est trop faible ou trop important, le système est plus lent.