Recurrencias

Def. Progresión geométrica. Es una sucesión infinita de números, como: 5, 45, 135, … donde el cociente de cualquier término entre su predecesor es una constante, llamada ***razón común***. (Para nuestro ejemplo es 3, ya que 3: 15 = 3(5), 45 = 3(15), etc.)

Si $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una progresión geométrica, entonces

$$a_1/a_0 = a_2/a_1 = \ldots = a_{n+1}/a_n = r, \text{ la razón común.}$$

En la anterior progresión geométrica particular, tenemos que $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$

Sin embargo, la relación de recurrencia $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, no define una única progresión geométrica.

La sucesión 7, 21, 63, 189, … también satisface la relación.

Para distinguir la relación $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, necesitamos conocer uno de los términos de la sucesión. Por lo tanto, $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 5$

Recurrencias

La relación de recurrencia $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, no define una única progresión geométrica.

La sucesión 7, 21, 63, 189, … también satisface la relación.

Para distinguir la relación $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, necesitamos conocer uno de los términos de la sucesión. Por lo tanto, $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 5$

Mientras que $a_{n+1} = 3a_n$, $n \geq 0$, $a_1 = 21$, identifica a 7, 21, 63, …

Como a_{n+1} sólo depende de su predecesor inmediato, la relación es de ***primer orden***

La forma general de esa ecuación es $a_{n+1} = da_n$, $n \geq 0$, donde d es una constante

Recurrencias

Los valores como a_0 o a_1, que se dan además de la relación de recurrencia, se conocen como condiciones de frontera.

Regresemos a la relación de recurrencia

$$a_{n+1} = 3a_n, \qquad n \geq 0, \qquad a_0 = 5.$$

Los primeros cuatro términos de esta sucesión son

$$a_0 = 5,$$
$$a_1 = 3a_0 = 3(5),$$
$$a_2 = 3a_1 = 3(3a_0) = 3^2(5), \text{ y}$$
$$a_3 = 3a_2 = 3(3^2(5)) = 3^3(5).$$

Estos resultados sugieren que para cualquier $n \geq 0$, $a_n = 5(3^n)$

Recurrencias

Por ejemplo. Para calcular a_{10} basta calcular $5(3^{10}) = 295,245$ ya no necesitamos iniciar en a_0 y seguir agregando hasta 10

La solución general de la relación de recurrencia

$$a_{n+1} = da_n, \qquad \text{donde } n \geq 0, \qquad d \text{ es una constante} \qquad \text{y } a_0 = A$$

es única y está dada por

$$a_n = Ad^n, \qquad n \geq 0.$$

Recurrencias – Ejercicio 1

Resuelva la relación de recurrencia $a_n = 7a_{n-1}$, donde $n \geq 1$ y $a_2 = 98$

Esta es solo la forma alternativa de $a_{n+1} = 7a_n$, donde $n \geq 0$ y $a_2 = 98$

Por lo tanto, la solución general tiene la forma $a_n = a_0\,(7^n)$.

Como $a_2 = 98 = a_0\,(7^2)$, esto implica que $a_0 = 2$ y $a_n = 2(7^n)$, $n \geq 0$ es la única solución

Recurrencias – Ejercicio 2

Determine a_{12} si $a^2_{n+1} = 5a^2_n$, donde $a_n > 0$ para $n \geq 0$ y $a_0 = 2$

Aunque esta relación no es lineal respecto de a_n como las antes vistas, podemos hacer un cambio de variable para poder resolverla de manera similar.

Si $b_n = a^2_n$, entonces la nueva relación $b_{n+1} = 5b_n$ para $n \geq 0$ y $b_0 = 4$ es lineal

Cuya solución es $b_n = 4 * 5^n$. Por lo tanto $a_n = 2(\sqrt{5})^n$ para $n \geq 0$ y $a_{12} = 31,250$

La relación de recurrencia lineal general de primer orden con coeficientes constantes tiene la forma $a_{n+1} + c\, a_n = f(n)$, $n \geq 0$, donde c es constante y f(n) es una función en el conjunto de los naturales.

TAREA – Recurrencias

1.- Encuentre una relación de recurrencia, con una condición inicial, que determine de manera única cada una de las siguientes progresiones geométricas.

a) 2, 10, 50, 250, …
b) 6, -18, 54, -162, …
c) 1, 1/3, 1/9, 1/27, …
d) 7, 14/5, 28/25, 56/125, …

2.- Encuentre la solución general para cada una de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0, n \geq 0$
b) $4a_n - 5a_{n-1} = 0, n \geq 1$
c) $3a_{n+1} - 4a_n = 0, n \geq 0, a_n = 5$
d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0, n \geq 1, a_4 = 81$

3.- Si a_n , $n \geq 0$ es una solución de la relación de recurrencia a_{n+1} , $- da_n = 0$ y $a_3 = 153/49$, $a_5 = 1377/2401$, ¿cuánto vale d?

Formando una Recurrencia – Burbuja

Para determinar la función de complejidad en tiempo de f(n) cuando usamos una lista de números de tamaño $n \geq 1$, contamos el total de comparaciones realizadas para ordenar los n números dados de forma ascendente

Si a_n denota el número de comparaciones necesarias para ordenar n números de esta forma, entonces nuestra relación de recurrencia es de la forma:

$$\text{Si } a_n = a_{n-1} + (n - 1),\ n \geq 2,\ a_1 = 0$$

Esto surge de lo siguiente: dada una lista de n números, hacemos n-1 comparaciones para subir el número mas pequeño hasta el inicio de la lista. La sublista restante de (n – 1) números requiere entonces de a_{n-1} comparaciones para ordenarla completamente.

Formando una Recurrencia – Burbuja

Esta es una relación lineal de primer orden con coeficientes constantes, pero el término (n – 1) la hace no homogénea. Por lo que debemos ver algunos términos para ver si existe algún patrón.

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = a_1 + (2 - 1) = 1$$

$$a_3 = a_2 + (3 - 1) = 1 + 2$$

$$a_4 = a_3 + (4 - 1) = 1 + 2 + 3$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

En general, $a_n = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) = [(n - 1)n]/2 = (n^2 - n)/2$.

Por tanto, **$T(n) = n^2$** para el método de la burbuja

Función generatriz

Sea la sucesión 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, …

En este caso $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 20$, $a_5 = 30$, $a_6 = 42$ y

$$a_1 - a_0 = 2 \qquad a_4 - a_3 = 8$$
$$a_2 - a_1 = 4 \qquad a_5 - a_4 = 10$$
$$a_3 - a_2 = 6 \qquad a_6 - a_5 = 12$$

Estos cálculos sugieren la relación de recurrencia

$$a_n - a_{n-1} = 2n, \qquad n \geq 1, \quad a_0 = 0$$

Como resolver esta relación???

Función generatriz – Func. Complejidad

$a_1 - a_0 = 2$
$a_2 - a_1 = 4$
$a_3 - a_2 = 6$
$. \quad . \quad .$
$. \quad . \quad .$
$. \quad . \quad .$
$a_n - a_{n-1} = 2n$

Al sumar estas ecuaciones, la suma del lado izquierdo contiene a_i y $-a_i$ $\forall i$, $1 \leq i \leq n - 1$

Así, obtenemos $a_n - a_0 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$
$= 2(n(n + 1) / 2) = n^2 + n$

Como $a_0 = 0$, tenemos que
$a_n = n^2 + n$ para $n \in N$ es la **función de complejidad**

Ejercicio – Hallar la función de Complejidad

Dada la siguiente relación: $a_n = n * a_{n-1}$, donde $n \geq 1$ y $a_0 = 1$

Solución. Escribamos los primeros cinco términos de la relación.

$a_0 = 1$

$a_1 = 1 * a_0 = 1$

$a_2 = 2 * a_1 = 2 * 1$

$a_3 = 3 * a_2 = 3 * 2 * 1$

$a_4 = 4 * a_3 = 4 * 3 * 2 * 1$

Por lo tanto, $a_n = n!$ y la solución es la función discreta a_n $n \geq 0$

Que cuenta las permutaciones de n objetos.

Recurrencia lineal homogénea de 2do. orden

Sea $k \in Z^{+}$ y Cn ($\neq 0$), $C_{n-1,}$ $C_{n-2,}$ $\ldots_{,}$ $C_{n-k,}$ ($\neq 0$), números reales.
Si a_n, $n \geq 0$, es una función discreta, entonces

$$C_n\, a_n + C_{n-1}\, a_{n-1} + C_{n-2}\, a_{n-2} + \ldots + C_{n-k}\, a_{n-k} = f(n), \qquad n \geq k$$

Es una relación de recurrencia lineal (Con coeficientes constantes) de *orden k*.

Cuando $f(n) = 0$ para todo $n \geq 0$, decimos que la relación es homogénea; en otro caso, es no homogénea.

Recurrencia lineal homogénea de orden 2

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

Buscamos una solución de la forma $a_n = cr^n$, donde $c \neq 0$ y $r \neq 0$
Si sustituimos $a_n = cr^n$ en $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$, obtenemos

$$C_n cr^n + C_{n-1} cr^{n-1} + C_{n-2} cr^{n-2} = 0$$

Si $c \neq 0$ y $r \neq 0$ esto se convierte en $C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0$
una ecuación cuadrática llamada la ***ecuación característica***.

Las raíces r_1, r_2 de esta ecuación están en alguno de los tres casos siguientes:

a) r_1, r_2 son números reales distintos
b) r_1, r_2 son complejos conjugados
c) r_1, r_2 son reales pero, $r_1 = r_2$

En todos los casos r_1, r_2 son las raíces características

Ejercicio – Resolver la siguiente relación de recurrencia siguiente

$a_n + a_{n-1} - 6\, a_{n-2} = 0$, donde $n \geq 2$, y $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Si $a_n = cr^n$ con $c, n \neq 0$, obtenemos $cr^n + cr^{n-1} - 6cr^{n-2} = 0$ de donde se sigue la ecuación característica $r^2 + r – 6 = 0$

$$0 = r^2 + r – 6 = (r + 3)\,(r – 2) \rightarrow r = 2, -3$$

Puesto que tenemos 2 raíces reales distintas, $a_n = 2^n$ y $a_n = (-3)^n$ son soluciones [al igual que $b(2^n)$ y $d(-3)^n$ con b, d constantes arbitrarias].
Son soluciones *linealmente independientes*. Ya que no existe una constante real k tal que $(-3)^n = k(2^n)$ para todo $n \in N$.

Escribimos $a_n = c_1(2^n) + c_2(-3)^n$ como solución general, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejercicio – Resolver la siguiente relación de recurrencia siguiente (Cont. …)

$$a_n + a_{n-1} - 6\, a_{n-2} = 0, \text{ donde } n \geq 2, \text{ y } a_0 = 1, a_1 = 2$$

Si $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$, entonces c_1 y c_2 quedan determinadas de la forma siguiente:

$$1 = a_0 = c_1(2)^0 + c_2(-3)^0 = c_1 + c_2$$

$$2 = a_1 = c_1(2)^1 + c_2(-3)^1 = 2c_1 - 3c_2$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, vemos que $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

Por lo tanto, $a_n = 2^n$, $n \geq 0$ es la única solución de la relación de recurrencia dada.

Fibonacci – Recurrencia $2^{do.}$ orden

Sea la recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donde $n \geq 0$, y $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Como en el ejemplo previo, Sea $F_n = cr^n$, para $c, r \neq = 0$, $n \geq 0$

Al sustituir obtenemos $cr^{n+2} = cr^{n+1} + cr^n$ de aquí tenemos la ecuación característica

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Las raíces características son $r = (1 \pm \sqrt{5}) / 2$, de modo que la solución general es

$$F_n = c_1 [(1+\sqrt{5}) / 2]^n + c_2 [(1-\sqrt{5}) / 2]^n$$

Para encontrar c_1 , c_2 usamos los valores iniciales dados y obtenemos

$$0 = F_n = c_1 + c_2 , \quad 1 = F_1 = c_1 [(1+\sqrt{5}) / 2] + c_2 [(1-\sqrt{5}) / 2]$$

Como $-c_1 = c_2$, tenemos que $2 = c_1 (1+\sqrt{5}) - c_1 (1 - \sqrt{5})$, así $c_1 = 1 / \sqrt{5}$

La solución general queda como:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n \geq 0.$$

Ejercicio – Recurrencia 2$^{do.}$ orden

Para $n \geq 0$, sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (cuando $n = 0$, $S = \phi$} y sea a_n el numero de subconjuntos de S que no contiene enteros consecutivos. Encuentre y resuelva una ecuación de recurrencia para a_n.

Por ejemplo. $a_3 = 5$ ya que $S = \{1, 2, 3\}$ tiene a ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$ como subconjuntos sin enteros consecutivos.

Sea $n \geq 2$ y $S = \{1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n\}$ Si $A \subseteq S$ y a se cuenta en a_n, hay dos posibilidades:

a) $n \in A$: Cuando esto ocurre, $(n-1) \notin A$ y $A - \{n\}$ se contaría en a_{n-2}
b) $n \notin A$: En este caso, A se contaría en a_{n-1}

Ejercicio – Recurrencia 2do. Orden (Cont…)

Estos casos abarcan todas las posibilidades y son mutuamente disjuntos, por lo que podemos concluir que la relación de recurrencia de este problema es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, donde $n \geq 2$ y $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Ahora, podemos despejar a_n , pero si observamos que $a_n = F_{n+2}$, $n \geq 0$
Entonces el resultado de Fibonacci implica que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right], \qquad n \geq 0.$$