Kapitel 9
Ebene und wirbelfreie Strömungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit zwei speziellen Klassen von Strömungen beschäftigen, bei denen sich das Vektorfeld der Geschwindigkeit aus einem Skalarfeld herleiten lässt, den ebenen Strömungen und den wirbelfreien oder Potentialströmungen. Wir beschränken uns dabei wieder auf inkompressible Fluide.

Im ersten Teil dieses Kapitels wollen wir die grundlegenden Eigenschaften dieser beiden Klassen von Strömungen kennen lernen. Wir benötigen dazu zwei kinematische Begriffe, die Wirbelstärke und die Zirkulation (Lehreinheit 9.1). Danach beschäftigen wir uns zunächst mit den ebenen Strömungen (Lehreinheit 9.2) und dann mit den wirbelfreien Strömungen (Lehreinheit 9.3).

Der zweite Teil dieses Kapitels ist der Schnittmenge beider Klassen, den ebenen Potentialströmungen gewidmet. Zunächst werden die Grundgleichungen dafür hingeschrieben (Lehreinheit 9.4). Die für ebene Potentialströmungen typische Berechnungsmethode ist eine Anwendung der Funktionentheorie; sie wird an einigen elementaren Beispielen erläutert (Lehreinheiten 9.5 und 9.6), anschließend auf das klassische Beispiel der Umströmung eines ebenen Kreiszylinders angewendet (Lehreinheit 9.7) und danach durch konforme Abbildung auf die Umströmung von Tragflügelproblemen übertragen (Lehreinheit 9.8). Schließlich werden Auftrieb und Widerstand eines umströmten Körpers berechnet (Lehreinheit 9.9).

Der dritte Teil des Kapitels bringt einige Ergänzungen. Er stellt den ebenen die rotationssymmetrischen Potentialströmungen gegenüber (Lehreinheit 9.10) und erläutert als eine weitere, nicht auf ebene Strömungen beschränkte Methode zur Berechnung von Potentialströmungen die Singularitätenmethode (Lehreinheit 9.11).

LE 9.1 Wirbelstärke und Zirkulation

In dieser Lehreinheit wollen wir zwei wichtige kinematische Begriffe, die Wirbelstärke und die Zirkulation, kennen lernen, die wir zur Untersuchung ebener und wirbelfreier Strömungen benötigen.

Die Rotation der Geschwindigkeit nennen wir Wirbelstärke und bezeichnen sie mit $\underline{\Omega}$:

$$\boxed{\underline{\Omega} := \text{rot}\, \underline{c},} \qquad \boxed{\Omega_i := \epsilon_{ijk} \frac{\partial c_k}{\partial x_j}.} \tag{9.1-1}$$

Es gibt Strömungen, in denen die Wirbelstärke überall verschwindet. Man nennt sie wirbelfreie oder Potentialströmungen; der größte Teil dieses Kapitels ist diesen Strömungen gewidmet. Strömungen, in denen die Wirbelstärke von null verschieden ist, nennt man wirbelbehaftete oder Wirbelströmungen; ihre Gesetze sind Gegenstand des nächsten Kapitels.

In wirbelbehafteten Strömungen bildet neben der Geschwindigkeit auch die Wirbelstärke ein Vektorfeld. Analog zu Stromlinie und Stromröhre im Geschwindigkeitsfeld definiert man dann Wirbellinie und Wirbelröhre im Feld der Wirbelstärke (man sagt dafür auch: im Wirbelfeld): Eine Wirbellinie ist eine Kurve, die in jedem Punkt den Vektor der Wirbelstärke (man sagt dafür auch: den Wirbelvektor) tangiert. Betrachten wir eine beliebige geschlossene Kurve in der Strömung und ziehen durch jeden Punkt dieser Kurve die Wirbellinie, so nennt man die von diesen Wirbellinien gebildete Fläche den Mantel einer Wirbelröhre.

Das Kurvenintegral der Geschwindigkeit längs einer geschlossenen Kurve im Strömungsfeld nennen wir die Zirkulation längs dieser Kurve und bezeichnen es mit Γ:

$$\boxed{\Gamma := \oint \underline{c} \cdot \mathrm{d}\underline{x},} \qquad \boxed{\Gamma := \oint c_i \, \mathrm{d}x_i.} \tag{9.1-2}$$

Unter den Gültigkeitsbedingungen des Stokesschen Satzes (A 50) ist das Flächenintegral der Wirbelstärke über eine Fläche gleich der Zirkulation längs ihrer Randkurve, dann gilt also

$$\boxed{\Gamma := \oint \underline{c} \cdot \mathrm{d}\underline{x} = \int \underline{\Omega} \cdot \mathrm{d}\underline{A}, \quad \Gamma := \oint c_i \, \mathrm{d}x_i = \int \Omega_i \mathrm{d}A_i.} \tag{9.1-3}$$

Der Begriff Wirbelfaden wird in einem doppelten Sinne gebraucht: Man versteht darunter manchmal (analog zum Stromfaden) eine Wirbelröhre, deren Querschnitt so klein ist, dass die Wirbelstärke über den Querschnitt als konstant angesehen werden kann. Meistens jedoch versteht man darunter den Grenzfall einer Wirbelröhre innerhalb einer wirbelfreien Strömung für den Fall, dass der Querschnitt der Wirbelröhre gegen null geht und gleichzeitig die Wirbelstärke der Wirbelröhre so gegen unendlich geht, dass die Zirkulation längs einer die Wirbelröhre umschließenden Kurve konstant bleibt. Für einen Wirbelfaden in diesem zweiten Sinne gilt also

$$\Gamma = \lim_{\mathrm{d}A \to 0} \underline{\Omega} \cdot \mathrm{d}\underline{A}. \tag{9.1-4}$$

Die Analogie von Geschwindigkeitsfeld und Wirbelfeld lässt sich aus folgender Gegenüberstellung erkennen:

Geschwindigkeitsfeld	Wirbelfeld
Stromlinie: tangiert in jedem Punkt den Geschwindigkeitsvektor	Wirbellinie: tangiert in jedem Punkt den Wirbelvektor
Gleichung der Stromlinie: $$\underline{c} \times \mathrm{d}\underline{x} = \underline{0}$$	Gleichung der Wirbellinie: $$\underline{\Omega} \times \mathrm{d}\underline{x} = \underline{0}$$
Stromröhre: wird (in einer richtungsstationären Strömung) von den Stromlinien durch die Punkte einer geschlossenen Kurve gebildet.	Wirbelröhre: wird von den Wirbellinien durch die Punkte einer geschlossenen Kurve gebildet.
Stromfaden: Stromröhre, deren Querschnitt so klein ist, dass alle Strömungsgrößen über den Querschnitt als konstant angesehen werden können.	Wirbelfaden: - (manchmal) Wirbelröhre, deren Querschnitt so klein ist, dass die Wirbelstärke über den Querschnitt als konstant angesehen werden kann. - (meist) Grenzfall einer Wirbelröhre in wirbelfreier Umgebung für den Fall, dass der Querschnitt gegen null geht, aber die Zirkulation längs einer Kurve um die Wirbelröhre herum erhalten bleibt.
Für den Volumenstrom durch eine beliebige Fläche gilt stets $$\dot{V} = \int \underline{c} \cdot \mathrm{d}\underline{A};$$ $\dot{V}$ ist längs einer Strömröhre konstant.	Für die Zirkulation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve gilt unter den Gültigkeitsbedingungen des Stokesschen Satzes $$\Gamma = \int \underline{\Omega} \cdot \mathrm{d}\underline{A};$$ Γ ist längst einer Wirbelröhre konstant.

Anschaulich denkt man bei einem Wirbel an eine Strömung, deren Stromlinien konzentrische Kreise sind. Mit diesem Begriff des Wirbels hat die Wirbelstärke nichts zu tun: Etwa die Strömung in der Umgebung eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Zylinders (Aufgabe 2C von Lehreinheit 8.4) verläuft aus Symmetriegründen auf konzentrischen Kreisen, ist aber wirbelfrei; und die Stromlinien der Hagen-Poiseuille-Strömung in einem runden Rohr (Lehreinheit 5.1) sind Geraden, die

Strömung ist jedoch wirbelbehaftet; vgl. dazu Aufgabe 1.

Die Wirbelstärke $\underline{\Omega}$, die zum Geschwindigkeitsfeld eines starr rotierenden Körpers gehört, ist gerade doppelt so groß wie die (räumlich konstante) Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ des Körpers, vgl. Aufgabe 2:

$$\boxed{\underline{\Omega} = 2\underline{\omega}.} \tag{9.1-5}$$

(In einem starr rotierenden Fluid ist die Wirbelstärke also ebenfalls räumlich konstant.) Für ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld ist eine Winkelgeschwindigkeit zunächst nicht definiert. Man betrachtet dann (9.1-5) als Definitionsgleichung der Winkelgeschwindigkeit oder Drehgeschwindigkeit; für ein beliebiges Geschwindigkeitsfeld ist die Winkelgeschwindigkeit also eine Feldgröße.

Die auf diese Weise definierte Winkelgeschwindigkeit in einem Punkt eines Strömungsfeldes lässt sich auf verschiedene Arten als Mittelwert über eine kleine Umgebung dieses Punktes interpretieren. Man kann z.B. den Drehimpuls in einer kleinen Kugel um diesen Punkt in Bezug auf diesen Punkt ausrechnen; dann ist $\underline{\omega}$ gleich der Winkelgeschwindigkeit, mit der die kleine Kugel starr um eine Achse durch ihren Mittelpunkt rotieren muss, wenn sie bei starrer Rotation denselben Drehimpuls haben soll wie aufgrund des vorliegenden Geschwindigkeitsfeldes[1]. Eine andere anschauliche Interpretation der Winkelgeschwindigkeit wird in der Zusatzaufgabe gegeben.

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Feld der Wirbelstärke

A. für die Strömung in der Umgebung eines rotierenden Zylinders (Aufgabe 2C von Lehreinhet 8.4),
B. für die Hagen-Poiseuille-Strömung (Lehreinheit 5.1).

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Feld der Wirbelstärke für ein mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ starr um die z-Achse rotierendes Fluid!

Zusatzaufgabe

In einem Strömungsfeld mit beliebiger Geschwindigkeitsverteilung betrachten wir einen kleinen Kreis. Berechnen Sie den Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit um die Achse des Kreises für alle Teilchen der Kreisperipherie!

Lösungshinweis: Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem, das die Symmetrien der Aufgabe ausnutzt! Berechnen Sie dann die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Kreisperipherie relativ zur Geschwindigkeit im Kreismittelpunkt; die Tangentialkoordinate dieser Relativgeschwindigkeit, dividiert durch den Radius des Kreises, ergibt die Winkelgeschwindigkeit in diesem Punkt.

[1] Diese Aussage gilt in dieser Form nur für ein inkompressibles Fluid.

LE 9.2 Ebene Strömungen

Für ebene Strömungen lässt sich der Geschwindigkeitsvektor aus einem Skalar herleiten, der Stromfunktion. Das hat erhebliche Vereinfachungen zur Folge, die wir im Folgenden kennen lernen werden.

Man nennt eine Strömung eben, wenn eine kartesische Koordinate der Geschwindigkeit null ist und die anderen beiden Koordinaten von der dritten Ortskoordinate nicht abhängen, wenn also bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems

$$\boxed{\underline{c} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)} \tag{9.2-1}$$

ist. Dann lautet die Kontinuitätsgleichung $(8.3\text{-}4)_1$ einfach

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{9.2-2}$$

und diese Gleichung kann identisch erfüllt werden durch den Ansatz

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{9.2-3}$$

Die auf diese Weise definierte skalare Funktion Ψ nennt man die Stromfunktion. Wir werden sehen, dass man viele wichtige Größen in einer ebenen Strömung bequem durch die Stromfunktion beschreiben kann.

Die Stromlinien

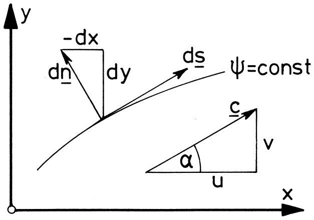
Für einen beliebigen, aber festen Zeitpunkt t_0 ist

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v\, dx + u\, dy,$$

und das ist nach (3.3-1) längs der Stromlinien null. Die Kurven $\Psi(x, y, t_0) = \text{const}$ stellen also die Stromlinien der ebenen Strömung zum Zeitpunkt t_0 da; von daher hat die Stromfunktion ihren Namen.

Der Geschwindigkeitsbetrag

Wir wollen die um 90° im mathematisch positiven Sinn gegen die Strömungsrichtung gedrehte Richtung mit n bezeichnen, dann gilt zu einem beliebigen, aber festen Zeitpunkt t_0



$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = -v\frac{\partial x}{\partial n} + u\frac{\partial y}{\partial n}.$$

Aus der Figur liest man ab:

$$\sin\alpha = -\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{v}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{u}{c},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \frac{v^2 + u^2}{c} = c,$$

$$c = \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \tag{9.2-4}$$

die Normalenableitung der Stromfunktion ergibt also gerade den Betrag der Geschwindigkeit.

Der Volumenstrom

Der Volumenstrom $\dot{V}_{12}$, der zwischen zwei Stromlinien mit den Stromfunktionen $\Psi(x, y, t_0) = \Psi_1$ und $\Psi(x, y, t_0) = \Psi_2$ auf der Breite[1] b hindurchtritt, ist

$$\dot{V}_{12} = \int_{(1)}^{(2)} c\, b\, dn = b\int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial\Psi}{\partial n} dn = b\int_{(1)}^{(2)} d\Psi = b(\Psi_2 - \Psi_1),$$

$$\frac{\dot{V}_{12}}{b} = (\Psi_2 - \Psi_1), \tag{9.2-5}$$

der Volumenstrom pro Breite zwischen zwei Stromlinien ist also gleich der Differenz der Werte ihrer Stromfunktionen.

Die Wirbelstärke

Die Wirbelstärke hat in einer ebenen Strömung offenbar nur eine Koordinate,

$$\text{rot}\,\underline{c} = (0, 0, \Omega(x, y, t)); \tag{9.2-6}$$

setzt man (9.2-1) in (9.1-1) ein, so erhält man

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9.2-7}$$

Wenn man u und v durch Ψ ersetzt, erhält man

$$\Omega = -\Delta\Psi, \tag{9.2-8}$$

[1] Als Breite bezeichnen wir bei ebenen Strömungen jeweils die Ausdehnung in z-Richtung.

die z-Koordinate der Wirbelstärke ist also negativ gleich dem Laplace-Operator der Stromfunktion.

Die Wirbeltransportgleichung

Man kann den Druck aus dem Gleichungssystem (8.3-4) eliminieren, indem man von der Navier-Stokesschen Gleichung die Rotation bildet; diese Gleichung nennt man die Wirbeltransportgleichung.

Wir wollen für den Rest dieser Lehreinheit annehmen, dass die Kraftdichte ein Potential hat, dann tritt auch die Kraftdichte in der Wirbeltransportgleichung nicht mehr auf. Bei einer ebenen Strömung wird die Wirbeltransportgleichung besonders einfach, sie hat dann nämlich nur eine von null verschiedene Koordinate. Von der Navier-Stokesschen Gleichung $(8.3\text{-}4)_2$ existieren dann nur die beiden Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(U + \frac{p}{\rho}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(U + \frac{p}{\rho}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \end{aligned} \tag{9.2-9}$$

Man bildet die einzige von null verschiedene Koordinate der Wirbeltransportgleichung, indem man die zweite dieser Gleichungen nach x differenziert und davon die nach y differenzierte erste Gleichung subtrahiert. Führt man in dieser Gleichung nach (9.2-7) Ω ein, so erhält man

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right). \tag{9.2-10}$$

Da Ω nicht von z abhängt, kann man dafür auch

$$\boxed{\frac{D\Omega}{Dt} = \nu\Delta\Omega} \tag{9.2-11}$$

schreiben[1]. In dieser Form ist die Wirbeltransportgleichung anschaulich interpretierbar: Auf der linken Seite steht die zeitliche Änderung des Betrages der Wirbelstärke für ein Teilchen, die rechte Seite lässt sich wegen des Laplace-Operators als Diffusionsterm auffassen. In einer ebenen Strömung ändert sich die Wirbelstärke eines Teilchens also nur durch Wirbeldiffusion; in einer stationären ebenen Strömung ist die Konvektion von Wirbelstärke gleich der Diffusion von Wirbelstärke.

Reduktion des Differentialgleichungssystems auf eine einzige Differentialgleichung

Für ebene Strömungen kann man das partielle Differentialgleichungssystem (8.4-3) aus Kontinuitätsgleichung und Navier-Stokesscher Gleichung auf eine einzige partielle Differentialgleichung zurückführen:

[1] In dieser Schreibung kommt zwar die Beschränkung auf ebene Strömungen nicht zum Ausdruck, sie gilt aber trotzdem nur unter dieser Einschränkung; die allgemeine Wirbeltransportgleichung wird in Zusatzaufgabe 2 von Lehreinheit 9.3 hergeleitet.

Für ebene Strömungen sind nur die beiden Koordinaten (9.2-9) der Navier-Stokesschen Gleichung von null verschieden, (8.3-4) stellt dann also ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für u, v und p dar, und das System ist von zweiter Ordnung. Man kann daraus zunächst p eliminieren, indem man die beiden Gleichungen (9.2-9) durch die Wirbeltransportgleichung ersetzt; man hat dann zwei partielle Differentialgleichungen für u und v, und das System ist von dritter Ordnung. Schließlich kann man in der Wirbeltransportgleichung nach (9.2-3) die Stromfunktion einführen, sie lautet dann

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_2\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta_2\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta_2\Psi = \nu\Delta_2\Delta_2\Psi \\ \text{mit}\quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.\end{gathered} \tag{9.2-12}$$

Das ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Da die Kontinuitätsgleichung durch die Stromfunktion identisch erfüllt wird, ist damit das Differentialgleichungssystem (8.3-4) auf eine einzige Differentialgleichung zurückgeführt.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Stromfunktion

$$\Psi = \frac{3}{2}ax^2y^2 - \frac{a}{4}\left(x^4 + y^4\right) + k,$$

wobei a und k Konstanten sind.

A. Wie lautet die Stromfunktion, wenn a gegeben ist und im Punkt $P_1 = (1,1)$ der Wert der Stromfunktion 2a beträgt?

B. Wie groß sind die Geschwindigkeitskoordinaten u und v?

C. Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag?

D. Wie groß ist der Volumenstrom $\dot{V}/b$ pro Breiteneinheit zwischen den Stromlinien, die durch die Punkte $P_0 = (0,0)$ und $P_1 = (1,1)$ gehen?

E. Wie groß ist die Wirbelstärke Ω?

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\partial\Psi/\partial s$ für die in Aufgabe 1 gegebene Stromfunktion, wenn s die Koordinate in Richtung der Stromlinien ist!

Aufgabe 3

Wie lautet die Wirbeltransportgleichung für ebene Schleichströmungen?

LE 9.3 Wirbelfreie Strömungen (Potentialströmungen)

Auch für wirbelfreie Strömungen lässt sich der Geschwindigkeitsvektor aus einem Skalar herleiten, dem Geschwindigkeitspotential. Wieder ergeben sich daraus Vereinfachungen bei der Berechnung solcher Strömungen.

In einer wirbelfreien Strömung gilt überall $\underline{\Omega} := \operatorname{rot} \underline{c} = \underline{0}$. Dann lässt sich die Geschwindigkeit als Gradient eines (Geschwindigkeits-)Potentials Φ schreiben, vgl. Zusatzaufgabe 1 von Lehreinheit 2.1:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{rot} \underline{c} = \underline{0} &&\Longleftrightarrow \underline{c} = \operatorname{grad} \Phi, \\ &\epsilon_{ijk} \frac{\partial c_k}{\partial x_j} = 0 &&\Longleftrightarrow c_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \end{aligned}} \tag{9.3-1}$$

Man nennt eine wirbelfreie Strömung deshalb auch eine Potentialströmung.

Die Kontinuitätsgleichung

Setzt man $c_i = \partial\Phi/\partial x_i$ in die Kontinuitätsgleichung $(8.3\text{-}4)_1$ ein, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0,$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0,} \qquad \boxed{\Delta \Phi = 0.} \tag{9.3-2}$$

Das Geschwindigkeitspotential einer wirbelfreien Strömung genügt also der Laplaceschen Differentialgleichung oder Potentialgleichung.

Man kann demnach das Geschwindigkeitspotential (und daraus die Geschwindigkeit) einer wirbelfreien Strömung allein aus der Kontinuitätsgleichung ermitteln; und da die Differentialgleichung (9.3-2) linear ist, kann man (anders als bei wirbelbehafteten Strömungen) zwei Lösungen zu einer neuen Lösung überlagern.

Aus der Theorie der Potentialgleichung ist bekannt, dass eine passende Randbedingung die Vorgabe der Normalenableitung $\partial\Phi/\partial n$ längs des Randes ist. $\partial\Phi/\partial n$ entspricht physikalisch der Normalkoordinate der Geschwindigkeit. Man kann demnach an einer festen Wand das Verschwinden der Normalkomponente der Geschwindigkeit fordern, nicht aber außerdem das Verschwinden der Tangentialkomponente, also Wandhaftung. Das bedeutet, dass Potentialströmungen an einer festen Wand im Allgemeinen die Randbedingung für reibungsfreie Fluide, nicht aber die Randbedingung für newtonsche Fluide erfüllen. Wir werden darauf in der Grenzschichttheorie zurückkommen.

Die Bewegungsgleichung

Für die folgende Diskussion ist es nützlich, die Navier-Stokessche Gleichung (8.3-3) unter Ausnutzung der beiden folgenden vektoranalytischen Identitäten für einen beliebigen Vektor $\underline{A}$ umzuformen, vgl. Zusatzaufgabe 1:

$$\underline{A} \times \mathrm{rot}\, \underline{A} = \mathrm{grad}\, \frac{A^2}{2} - \underline{A} \cdot \mathrm{grad}\, \underline{A}, \tag{9.3-3}$$

$$\mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{A} = \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{A} - \Delta \underline{A}. \tag{9.3-4}$$

Man erhält dann aus (8.3-3) zusammen mit (3.2-8) und (3.5-14), wenn man noch durch das konstante ρ dividiert,

$$\frac{\partial \underline{c}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \left(\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \underline{c} \times \mathrm{rot}\, \underline{c} = \underline{f} - \nu\, \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{c} \tag{9.3-5}$$

und für eine Potentialströmung

$$\frac{\partial \underline{c}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, \left(\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = \underline{f}. \tag{9.3-6}$$

An dieser Gleichung fällt zunächst auf, dass das Zähigkeitsglied weggefallen ist:

In einer wirbelfreien Strömung eines inkompressiblen newtonschen Fluids hat die Zähigkeit auf das Geschwindigkeits- und Druckfeld keinen Einfluss.

Führt man im instationären Glied von (9.3-6) nach (9.3-1) das Geschwindigkeitspotential ein, so lautet die Gleichung

$$\mathrm{grad}\, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = \underline{f}. \tag{9.3-7}$$

Wie in einem ruhenden inkompressiblen Fluid (vgl. Lehreinheit 2.3) muss also auch hier die Kraftdichte $\underline{f}$ stets ein (Kräfte-)Potential U besitzen; es gilt, vgl. (2.2-1):

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\, \underline{f} = \underline{0} &&\Longleftrightarrow\quad \underline{f} = -\mathrm{grad}\, U, \\ &\epsilon_{ijk} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0 &&\Longleftrightarrow\quad f_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}. \end{aligned}} \tag{9.3-8}$$

(Das unterschiedliche Vorzeichen bei der Definition des Potentials in (9.3-1) und (9.3-8) ist Konvention.)

Eine wirbelfreie Strömung ist in einem inkompressiblen newtonschen Fluid nur möglich, wenn auch die Kraftdichte wirbelfrei ist.

Integriert man (9.3-7) zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 des Strömungsfeldes, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial t} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + U_2 - U_1 = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = F(t), \end{aligned} \tag{9.3-9}$$

mit $c = |\text{grad}\,\Phi|$.
Auch diese Gleichung nennt man Bernoullische Gleichung. Speziell für stationäre Strömungen im Schwerefeld fällt sie, wenn man die z-Achse wie in (4.3-2) entgegen der Schwerkraft wählt, mit (4.3-2) zusammen:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \tag{9.3-10}$$

Wie ein Vergleich der Herleitung von (4.3-2) und (9.3-10) zeigt, gilt die Bernoullischen Gleichung in dieser Form

- nur für stationäre Strömungen,
- nur für inkompressible Fluide,
- nur im Schwerefeld

und *entweder*

- auch für wirbelbehaftete Strömungen,
- nur für reibungsfreie Fluide,
- nur längs einer Stromlinie,

oder

- nur für wirbelfreie Strömungen,
- für reibungsfreie und für newtonsche Fluide,
- im ganzen Strömungsfeld.

Hat man aus der Potentialgleichung (9.3-2) das Geschwindigkeitsfeld einer Potentialströmung berechnet, so kann man für eine stationäre Strömung aus der Bernoullischen Gleichung (9.3-10) sofort das Druckfeld ermitteln.

Aufgabe 1

Wir haben jetzt drei verschieden Bernoullische Gleichungen kennen gelernt: die Bernoullische Gleichung der Stromfadentheorie

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial c}{\partial t} ds + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{\Delta p_V}{\rho} = 0, \tag{a}$$

die Bernoullische Gleichung der Gasdynamik

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + g(z_2 - z_1) = 0 \tag{b}$$

und die Bernoullische Gleichung der Potentialtheorie

$$\frac{\partial(\Phi_2 - \Phi_1)}{\partial t} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0. \tag{c}$$

A. Wodurch unterscheidet sich der Gültigkeitsbereich dieser drei Gleichungen in der obigen Form?

Bernoullische Gleichung	nur für stationäre Strömungen (1)	nur für inkompressible Fluide (2)	nur für reibungsfreie Fluide (3)	nur für wirbelfreie Strömungen (4)	nur längs eines Stromfadens (5)
der Stromfadentheorie	□	□	□	□	□
der Gasdynamik	□	□	□	□	□
für Potentialströmmungen	□	□	□	□	□

B. Aus welchen Bilanzgleichungen werden die verschiedenen Bernoullischen Gleichungen gewonnen?

Aufgabe 2

Wir betrachten eine wirbelfreie Strömung eines inkompressiblen newtonschen Fluids mit räumlich konstanter Zähigkeit. Hat die Zähigkeit dann Einfluss auf

A. die Geschwindigkeitsverteilung, ja □ nein □
B. die Druckverteilung, ja □ nein □
C. die Schubspannungsverteilung, ja □ nein □
D. die Dichteverteilung? ja □ nein □

Zusatzaufgabe 1

Beweisen Sie die vektoranalytischen Identitäten (9.3-3) und (9.3-4), indem Sie jeweils die linke Seite in Koordinatenschreibweise übersetzen, den entstandenen Ausdruck mit Hilfe des Entwicklungssatzes (A 23) vereinfachen und das Ergebnis in symbolische Schreibweise zurückübersetzen!

Zusatzaufgabe 2

Leiten Sie die allgemeine Wirbeltransportgleichung ab, indem Sie von der Navier-Stokesschen Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \underline{c}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \underline{c} \times \underline{\Omega} = \underline{f} + \nu \Delta \underline{c}$$

die Rotation nehmen und so weit wie möglich $\underline{c}$ durch $\underline{\Omega}$ ersetzen!

LE 9.4 Die Grundgleichungen für ebene Potentialströmungen

Es ist plausibel, dass Strömungen, die zugleich eben und wirbelfrei sind, besonders einfach zu berechnen sind. In dieser Lehreinheit wollen wir zunächst die Grundgleichungen für ebene Potentialströmungen aufstellen und ihre wichtigsten Eigenschaften behandeln. In den folgenden Lehreinheiten werden wir Lösungsmethoden dafür kennen lernen.

Für ebene Potentialströmungen existiert sowohl ein Geschwindigkeitspotential als auch eine Stromfunktion. Es gilt also in tabellarischer Form

für das Geschwindigkeitspotential nach (9.3-1)	für die Stromfunktion nach (9.2-3)
$$\boxed{u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y},} \qquad (9.4\text{-}1)$$	$$\boxed{u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},} \qquad (9.4\text{-}2)$$
nach (9.3-2)	nach (9.2-8)
$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,} \qquad (9.4\text{-}3)$$	$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0.} \qquad (9.4\text{-}4)$$

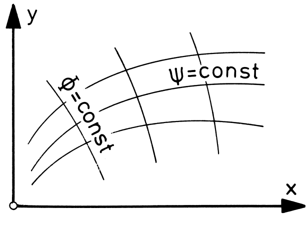
Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion genügen also beide derselben Differentialgleichung, und zwar der ebenen Potentialgleichung.

Beide Größen sind nach (9.4-1) und (9.4-2) durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (9.4\text{-}5)$$

miteinander verknüpft.

Aufgabe 1



Zeigen Sie, dass die Orthogonalitätsrelation

$$\boxed{\text{grad}\,\Phi \cdot \text{grad}\,\Psi = 0} \qquad (9.4\text{-}6)$$

gilt, die Potentiallinien $\Phi = \text{const}$ und die Stromlinien $\Psi = \text{const}$ also ein orthogonales Kurvennetz bilden!

Aufgabe 2

A. Welche Beziehung muss zwischen den Konstanten a und b existieren, damit $\Phi = ax^3y + bxy^3$ eine Potentialfunktion ist?

B. Berechnen Sie für diesen Fall die Stromfunktion Ψ!

C. Wie groß ist der Geschwindigkeitsvektor $\underline{c}$?

LE 9.5 Anwendung der Funktionentheorie (Teil 1)

Eine spezifische Methode zur Berechnung ebener Potentialströmungen ist die Anwendung der Funktionentheorie. Wir wollen sie in den nächsten beiden Lehreinheiten kennen lernen und an einfachen Beispielen erläutern.

Nach (9.4-3) und (9.4-4) genügen Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion einer ebenen Potentialströmung den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Deshalb kann man Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, y)$ und Stromfunktion $\Psi(x, y)$ jeder ebenen Potentialströmung als Realteil und Imaginärteil einer analytischen Funktion[1] $W(z)$ auffassen und umgekehrt Realteil und Imaginärteil jeder analytischen Funktion als Geschwindigkeitspotential[2] und Stromfunktion einer ebenen Potentialströmung[3].

Komplexes Potential und Geschwindigkeit

Es sei $W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ eine analytische Funktion. Dann ist einerseits nach der Kettenregel

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dW}{dz},$$

andererseits ist nach (A 74) mit (9.4-1) und (9.4-2)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv,$$

daraus folgt

$$\boxed{\frac{dW}{dz} = u(x, y) - i\,v(x, y),} \qquad (9.5\text{-}1)$$

die Ableitung der analytischen Funktion $W(z)$ liefert also die Koordinaten der Geschwindigkeit: ihr Realteil ist gleich u, ihr negativer Imaginärteil gleich v. Man nennt deshalb die Funktion $W(z)$ das komplexe Potential der Strömung, deren Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, y)$ und deren Stromfunktion $\Psi(x, y)$ ist. (Statt durch Ableitung des komplexen Potentials nach (9.5-1) lassen sich u und v natürlich auch nach (9.4-1) aus dem Geschwindigkeitspotential oder nach (9.4-2) aus der Stromfunktion berechnen.)

[1] Zum Begriff der analytischen Funktion vgl. die Wiederholungen aus der Funktionentheorie im Anhang.

[2] Man sagt statt Geschwindigkeitspotential in diesem Zusammenhang auch Potentialfunktion.

[3] Es ist üblich, einerseits Realteil und Geschwindigkeitspotential, andererseits Imaginärteil und Stromfunktion zu identifizieren. Mathematisch könnte man genauso gut den Realteil mit der Stromfunktion und den Imaginärteil mit dem Geschwindigkeitspotential gleichsetzen.

Der Betrag der Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$c = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(u + iv)(u - iv)},$$

also ist

$$c = \sqrt{\frac{d\overline{W}}{d\overline{z}} \frac{dW}{dz}}. \tag{9.5-2}$$

Wir wollen im Folgenden einigen wichtige komplexe Potentiale untersuchen. Aus diesen Beispielen als Bausteine werden wir später durch Superposition physikalisch und technisch wichtige Strömungen aufbauen.

Die Parallelströmung

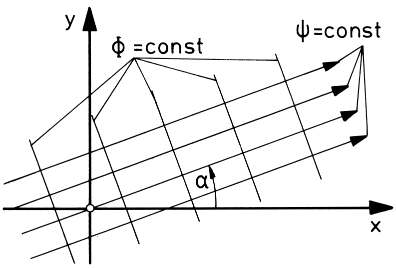
Wir untersuchen als Erstes das komplexe Potential

$$W(z) = ae^{-i\alpha}z + b,$$

wobei a, b und α reelle Konstanten sind.

Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion. Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt mit (A 71) und (A 72)

$$\begin{aligned} W &= a(\cos\alpha - i\sin\alpha)(x + iy) + b \\ &= \underbrace{a[x\cos\alpha + y\sin\alpha] + b}_{\Phi} + i\,\underbrace{a[y\cos\alpha - x\sin\alpha]}_{\Psi} \end{aligned}$$



Die Stromlinien $\Psi = \text{const}$ sind Geraden, die um den Winkel α gegenüber der x-Achse geneigt sind. Die Potentiallinien $\Psi = \text{const}$ stehen auf den Stromlinien senkrecht.

Geschwindigkeit. Ableitung des komplexen Potentials ergibt

$$\begin{aligned} u - iv &= \frac{dW}{dz} = ae^{-i\alpha} = \underbrace{a\cos\alpha}_{u} - i\,\underbrace{a\sin\alpha}_{v}, \\ c &= \sqrt{u^2 + v^2} = a, \end{aligned}$$

d.h. die Konstante a stellt gerade den Betrag der Geschwindigkeit in der Parallelströmung dar.

Physikalische Interpretation. Eine Parallelströmung, die um den Winkel α gegen die x-Achse geneigt ist und deren Geschwindigkeit überall den Betrag c hat, hat das komplexe Potential

$$\boxed{W(z) = ce^{-i\alpha}z.} \tag{9.5-3}$$

Bemerkungen. Eine additive Konstante im komplexen Potential hat keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld, da sie bei der Differentiation herausfällt. $W(z) = ce^{-i\alpha}z+b$ stellt also dieselbe Parallelströmung dar.

Die Richtung der Stromlinien kann man stets auf zweierlei Art bestimmen:

- aus dem Vorzeichen von u und v,

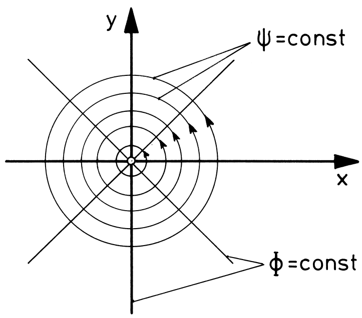
- aus der Regel, dass die Geschwindigkeit auf jeder Stromlinie in die Richtung weist, in der der Wert des Geschwindigkeitspotentials längs der Stromlinie zunimmt.

Der Potentialwirbel

Wir untersuchen als nächstes das komplexe Potential

$$W(z) = -iB \ln \frac{z}{a},$$

wobei a und B reelle Konstanten sind[1].

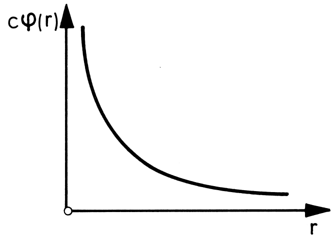


Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion. Zerlegung in Real- und Imaginärteil bei Benutzung von Polarkoordinaten ergibt:

$$W = -iB \ln\left(\frac{r}{a}e^{i\varphi}\right) = +\underbrace{B\varphi}_{\Phi} + i\underbrace{\left(-B\ln\frac{r}{a}\right)}_{\Psi}.$$

Die Stromlinien sind Kreise um den Ursprung $(r = 0)$, die Potentiallinien sind Strahlen vom Ursprung aus.

[1] Mathematisch ist $-iB\ln(z/a) = -iB\ln z + iB\ln a$. Die Konstante a geht also nur in eine additive Konstante des komplexen Potentials ein und ist deshalb physikalisch bedeutungslos. Sie wird eingeführt, um die Regel des Größenkalküls zu erfüllen, dass das Argument einer mathematischen Funktion dimensionslos sein muss.



Geschwindigkeit. Ableitung des komplexen Potentials ergibt:

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = \frac{-iB}{z} = \frac{-iB}{re^{i\varphi}} = \underbrace{-\frac{B}{r}\sin\varphi}_{u} \underbrace{-i\,\frac{B}{r}\cos\varphi}_{v},$$

$$c = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{B}{r} = c_\varphi(r).$$

Die Strömung hat nur eine Umfangskoordinate $c_\varphi(r)$ der Geschwindigkeit, die im Ursprung ($r = 0$) unendlich groß wird.

Physikalische Interpretation. Wir berechnen die Zirkulation der Strömung längs eines Kreises mit dem Radius R: Auf dem Kreis ist $dx = R\,d\varphi$,

$$\Gamma = \oint \underline{c} \cdot d\underline{x} = c_\varphi(R)R \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{B}{R} R 2\pi = 2\pi B$$

unabhängig von R. Die Zirkulation Γ ist also konstant, auch wenn der Radius R des Kreises gegen null geht. Längs der Geraden senkrecht zur Strömungsebene durch den Ursprung liegt also ein Wirbelfaden, der für $B > 0$ mathematisch positiv (entgegen dem Uhrzeigersinn) und für $B < 0$ mathematisch negativ dreht.

Ein Wirbelfaden mit der Zirkulation Γ im Punkt z_0 hat also das komplexe Strömungspotential

$$\boxed{W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z - z_0}{a}.} \qquad (9.5\text{-}4)$$

Für $\Gamma > 0$ ist der Drehsinn des Wirbelfadens mathematisch positiv, für $\Gamma < 0$ mathematisch negativ. Die Konstante a wird aus dimensionellen Gründen eingeführt und ist physikalisch bedeutungslos.

Bemerkungen. Wir haben es hier also mit einer Potentialströmung zu tun, für welche die Zirkulation für einen beliebigen Kreis um den Ursprung nicht verschwindet. Der Grund ist, mathematisch gesprochen, dass die Geschwindigkeit im Ursprung nicht differenzierbar, m.a.W. $W(z)$ dort nicht analytisch ist. Eine solche Stelle in einem Strömungsfeld nennt man singulär. Einen geraden Wirbelfaden inmitten einer im Übrigen wirbelfreien Strömung nennt man auch einen Potentialwirbel.

Für eine Potentialströmung folgt aus der Definition (9.1-2) der Zirkulation

$$\Gamma = \oint \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = \oint d\Phi;$$

die Zirkulation ist also nur dann von null verschieden, wenn das Geschwindigkeitspotential nach einem vollen Umlauf längs der Kurve nicht wieder den Ausgangswert annimmt, also mehrdeutig ist, wie das beim Potentialwirbel der Fall ist.

Aufgabe 1

Gegeben ist das komplexe Strömungspotential $\mathrm{W} = \mathrm{Az}^{\mathrm{n}}$.

A. Bestimmen Sie für $\mathrm{n} = 4, 2, 1, 2/3, 1/2$ das Geschwindigkeitspotential $\Phi(\mathrm{r}, \varphi)$ und die Stromfunktion$\Psi(\mathrm{r}, \varphi)$!

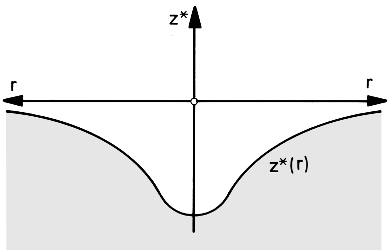
B. Ermitteln Sie aus A die Geschwindigkeitskoordinaten $\mathrm{u}(\mathrm{r}, \varphi)$ und $\mathrm{v}(\mathrm{r}, \varphi)$!

C. Skizzieren Sie die Stromlinienbilder unter Angabe der Strömungsrichtung!

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit eines Potentialwirbels im Ursprung mit der Zirkulation Γ!

Aufgabe 3



In einer Flüssigkeit mit freier Oberfläche sei ein Wirbel gegeben, der durch das komplexe Strömungspotential $\mathrm{W} = -\mathrm{i}\ \mathrm{m} \ln(\mathrm{z}/\mathrm{a})$ beschrieben werden kann. Aufgrund der damit zusammenhängenden Geschwindigkeitsverteilung $\mathrm{c}(\mathrm{r})$ nimmt die freie Flüssigkeitsoberfläche eine Form an, wie sie etwa in der Skizze dargestellt ist.

A. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathrm{c}(\mathrm{r})$ aus W!

B. Berechnen Sie die Geschwindigkeit für $\mathrm{r} \to \infty$!

C. Bestimmen Sie die Flüssigkeitsoberfläche $\mathrm{z}^*(\mathrm{r})$!

D. Berechnen Sie die Zirkulation Γ!

Zusatzaufgabe

Wie lautet das komplexe Potential für die ebene Potentialströmung der Aufgabe 2 von Lehreinheit 9.4?

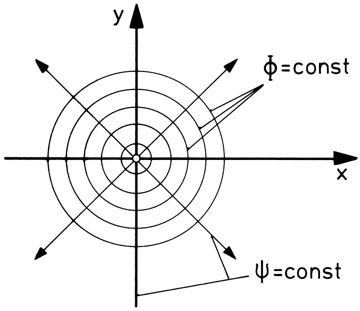
LE 9.6 Anwendung der Funktionentheorie (Teil 2)

Die Quell- oder Senkenströmung

Wir untersuchen jetzt das komplexe Potential

$$W(z) = B \ln \frac{z}{a},$$

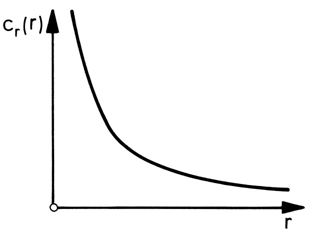
wobei a und B reelle Konstanten sind. Für a gilt dasselbe wie beim Potentialwirbel.



Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion. Zerlegung in Real- und Imaginärteil bei der Benutzung von Polarkoordinaten ergibt:

$$W = B \ln \left(\frac{r}{a} e^{i\varphi} \right) = \underbrace{B \ln \frac{r}{a}}_{\Phi} + i \underbrace{B\varphi}_{\Psi} .$$

Die Stromlinien sind Strahlen vom Ursprung aus, die Potentiallinien Kreise um den Ursprung.



Geschwindigkeit. Ableitung des komplexen Potentials ergibt:

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = \frac{B}{z} = \frac{B}{re^{i\varphi}} = \underbrace{\frac{B}{r} \cos\varphi}_{u} - i \underbrace{\frac{B}{r} \sin\varphi}_{v},$$

$$c = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{B}{r} = c_r(r).$$

Die Strömung hat nur eine Radialkoordinate $c_r(r)$ der Geschwindigkeit, die im Ursprung unendlich groß wird.

Physikalische Interpretation. Wir berechnen den Volumenstrom durch einen Kreiszylinder, dessen Achse senkrecht zur Strömungsebene durch den Ursprung geht und der den Radius R und die Höhe b hat: Es ist $dA = bR\, d\varphi$,

$$\dot{V} = \oint \underline{c} \cdot d\underline{A} = c_r(R) bR \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{B}{R} bR 2\pi = 2\pi Bb$$

unabhängig von R. Der Volumenstrom $\dot{V}$ bleibt also konstant, auch wenn der Radius R des Kreises gegen null geht. In der Zylinderachse muss also eine Linienquelle (für $B > 0$) oder eine Liniensenke (für $B < 0$) liegen. Als Quellstärke Q bezeichnet man den Volumenstrom $\dot{V}$, dividiert durch die Höhe b des Zylinders senkrecht zur

Strömungsebene; es ist also

$$Q = \frac{\dot{V}}{b} = 2\pi B.$$

Eine Linienquelle mit der Quellstärke $Q > 0$ im Punkt z_0 hat also das komplexe Strömungspotential

$$\boxed{W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z - z_0}{a}.} \tag{9.6-1}$$

Für $Q < 0$ beschreibt (9.6-1) eine Liniensenke[1].

Bemerkungen. Wir haben es hier also mit einer inkompressiblen Strömung zu tun, für die der Volumenstrom $\dot{V} = \oint \underline{c} \cdot d\underline{A}$ durch eine geschlossene Fläche von null verschieden ist, die Kontinuitätsgleichung (3.5-13) also verletzt ist. Der Grund ist, mathematisch gesprochen, wieder, dass der Ursprung eine singuläre Stelle des Strömungsfeldes ist. Anschaulich stellt sie eine Linienquelle oder eine Liniensenke inmitten einer im Übrigen quellenfreien und wirbelfreien Strömung dar.

Für den Volumenstrom $\dot{V}_{12}$ auf einer Breite b senkrecht zur Strömungsebene zwischen den beiden Stromlinien Ψ_1 und Ψ_2 gilt in einer ebenen Strömung nach (9.2-5)

$$\dot{V}_{12} = b\,(\Psi_2 - \Psi_1).$$

Der Volumenstrom durch eine geschlossene Fläche ist also nur dann von null verschieden, wenn die Stromfunktion nach einem vollen Umlauf nicht wieder den Ausgangswert annimmt, also mehrdeutig ist, wie das bei der Quellströmung und der Senkenströmung der Fall ist.

Die Dipolströmung

Da die Laplacesche Differentialgleichung linear ist, erhält man durch Überlagerung von komplexen Strömungspotentialen neue komplexe Strömungspotentiale.

Die Überlagerung von einer Quelle und einer Senke gleicher Intensität $|Q|$ im Abstand $2x_0$ auf der x-Achse ergibt:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z + x_0}{a} + \frac{-Q}{2\pi} \ln \frac{z - x_0}{a} = \frac{Q 2x_0}{2\pi a} \frac{\ln \frac{z+x_0}{a} - \ln \frac{z-x_0}{a}}{\frac{2x_0}{a}}.$$

Für $x_0 \to 0$ geht $W \to 0$, d.h. Quelle und Senke löschen sich gegenseitig aus. Wächst aber gleichzeitig die Intensität $|Q|$ so gegen unendlich, dass das Produkt

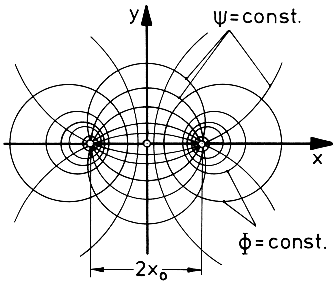
$$M = 2x_0 Q \tag{9.6-2}$$

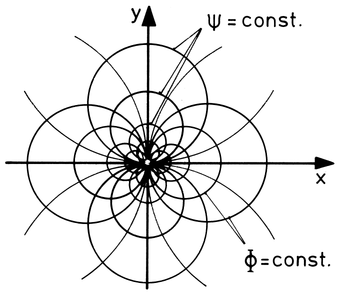
[1] Die Konstante a wird wieder aus dimensionellen Gründen eingeführt und ist physikalisch bedeutungslos.

endlich bleibt, so ergibt sich für $x_0 \to 0$

$$W(z) = \frac{M}{2\pi a}\frac{d}{d\frac{z}{a}}\ln\frac{z}{a} = \frac{M}{2\pi a}\frac{a}{z} = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}.$$

Die Größe M nennt man Dipolmoment.





Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion. Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt:

$$W(z) = \underbrace{\frac{M}{2\pi r}\cos\varphi}_{\Phi} + i\underbrace{\left(-\frac{M}{2\pi r}\sin\varphi\right)}_{\Psi}.$$

Die Stromlinien

$$\Psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\varphi}{r} = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \text{const}$$

sind Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen. Die Potentiallinien

$$\Phi = \frac{M}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \text{const}$$

sind Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen. Eine solche Strömung nennt man eine Dipolströmung.

Geschwindigkeit. Ableitung des komplexen Potentials ergibt:

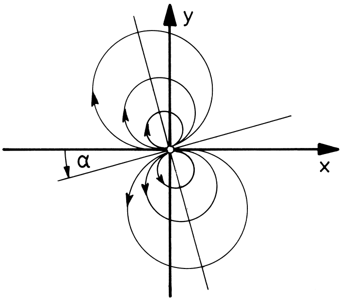
$$u - iv = \frac{dW}{dz} = -\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z^2} = \underbrace{-\frac{M}{2\pi r^2}\cos 2\varphi}_{u} - i\underbrace{\left(-\frac{M}{2\pi r^2}\sin 2\varphi\right)}_{v}.$$

Physikalische Interpretation. Ein Dipol(faden) im Ursprung, dessen Quelle in die negative x-Richtung weist und dessen Dipolmoment M ist, hat das komplexe Potential

$$\boxed{W(z) = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}.} \qquad (9.6\text{-}3)$$

Dabei ist M positiv (und reell).

Bemerkungen. Wir wollen untersuchen, was für eine Strömung durch (9.6-3) dargestellt wird, wenn M negativ oder komplex ist. Wir setzen



$$\mathrm{W(z)} = \frac{\mathrm{M}e^{i\alpha}}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{z}}.$$

Dann ist

$$\mathrm{W(z)} = \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{z}e^{-i\alpha}} = \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{r}e^{i(\varphi-\alpha)}}.$$

Wir erhalten einen Dipol mit dem Dipolmoment M im Ursprung, dessen Quelle in eine Richtung weist, die um den Winkel α gegen die negative x-Richtung gedreht ist.

Offenbar bedeutet ganz allgemein die Substitution $\mathrm{z} \parallel \mathrm{z}e^{-i\alpha}$ im komplexen Potential eine Drehung des Strömungsfeldes um den Ursprung um den Winkel α.

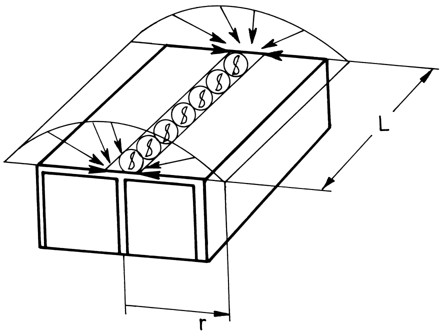
Aufgabe 1

Welche Bedingungen sind in den singulären Stellen

A. eines Potentialwirbels und

B. einer Quell- oder Senkenströmung verletzt?

Aufgabe 2



In der Mitte des Flachdaches einer Werkhalle ist eine Reihe von Ventilatoren angebracht, die Frischluft aus der Umgebung ansaugen. Der Ventilatorschlitz werde durch eine Liniensenke mit dem komplexen Strömungspotential $\mathrm{W(z)} = \mathrm{B}\ln(\mathrm{z}/\mathrm{a})$ angenähert. Berechnen Sie

A. die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors und seinen Betrag,

B. die Quellstärke Q,

C. die Strömungsgeschwindigkeit als Funktion von Q und r und

D. die Druckverteilung $\mathrm{p} - \mathrm{p}_\infty$ auf dem Dach unter Vernachlässigung des Schwerefeldes!

Zusatzaufgabe

So wie man aus einer Quelle und einer Senke durch Grenzübergang einen Dipol gewinnen kann, kann man aus zwei Dipolen mit negativ gleichem Dipolmoment einen so genannten Quadrupol gewinnen. Leiten Sie das komplexe Potential eines Quadrupols ab und skizzieren Sie nach der Anschauung das zugehörige Stromlinienbild!

LE 9.7 Die Umströmung eines Kreiszylinders

Die Potentialströmung um einen ebenen Kreiszylinder ist in mehrfacher Hinsicht interessant: Zunächst ist sie eine einfache und physikalisch sinnvolle Konfiguration, mathematisch ist sie ein Beispiel für das Superpositionsprinzip, und technisch ist sie der Grundstock für die Berechnung der Umströmung um Tragflügelprofile.

Im Folgenden wird die Überlagerung einer Parallelströmung längs der x-Achse, eines Dipols im Ursprung und eines Potentialwirbels im Ursprung diskutiert. Das komplexe Strömungspotential einschließlich einer additiven Konstante ist dann

$$\mathrm{W(z)} = \mathrm{cz} + \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{z}} + \frac{-\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}};$$

$\mathrm{c}, \mathrm{M}, \Gamma, \mathrm{R}$ sind reelle Konstanten.

Nach Einführung von Polarkoordinaten (r, φ) ergibt die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil:

$$\mathrm{W} = \underbrace{\left[\left(\mathrm{cr} + \frac{\mathrm{M}}{2\pi \mathrm{r}}\right)\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi\right]}_{\Phi} + \mathrm{i}\underbrace{\left[\left(\mathrm{cr} - \frac{\mathrm{M}}{2\pi \mathrm{r}}\right)\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}\right]}_{\Psi}.$$

Man erkennt, dass die Stromfunktion den Wert $\Psi = 0$ annimmt, wenn $\mathrm{r} = \mathrm{R}$ ist und gleichzeitig das Dipolmoment den Wert $\mathrm{M} = 2\pi \mathrm{R}^2\mathrm{c}$ hat. Der Kreis mit dem Radius R ist dann also eine Stromlinie. Da das Geschwindigkeitsfeld des Dipols und des Potentialwirbels für $|\mathrm{z}| \to \infty$ verschwindet, bleibt dort nur die Parallelströmung übrig.

Dir Zirkulation um den Kreiszylinder erhält man am einfachsten aus der Beziehung $\Gamma = \oint \mathrm{d}\Phi$. Da $(\mathrm{cr} + \mathrm{M}/2\pi)\cos\varphi$ nach einem Umlauf auf seinen Ausgangswert zurückkehrt, liefert es keinen Beitrag zur Zirkulation. Da für einen Umlauf $\varphi = 2\pi$ ist, ist Γ gerade die Zirkulation.

Die Umströmung eines Kreiszylinders mit dem Radius R um den Ursprung, der mit der Geschwindigkeit c_∞ längs der x-Achse angeströmt wird und deren Zirkulation um den Zylinder Γ ist, ist daher durch das folgende komplexe Strömungspotential gegeben:

$$\mathrm{W(z)} = \mathrm{c}_\infty\left(\mathrm{z} + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{z}}\right) - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}. \qquad (9.7\text{-}1)$$

Die Umströmung eines Kreiszylinders ohne Zirkulation

Für $\Gamma = 0$ folgt

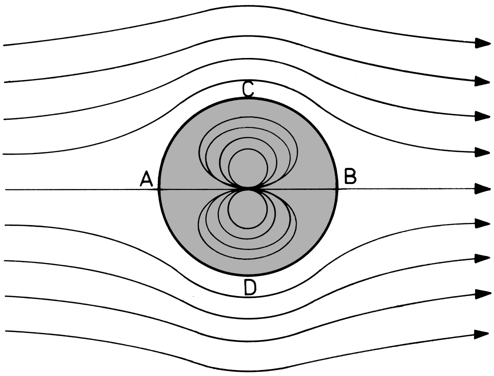
$$\mathrm{W(z)} = \mathrm{c}_\infty \left(\mathrm{z} + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{z}}\right). \tag{9.7-2}$$

Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion. Für Polarkoordinaten (r, φ) ist das Geschwindigkeitspotential analog zum Vorhergehenden

$$\Phi = \mathrm{c}_\infty \left(1 + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2}\right) \mathrm{r} \cos\varphi \tag{9.7-3}$$

und die Stromfunktion

$$\Psi = \mathrm{c}_\infty \left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2}\right) \mathrm{r} \sin\varphi. \tag{9.7-4}$$



Wie schon oben gezeigt, ist der Kreis $\mathrm{r} = \mathrm{R}$ Stromlinie mit $\Psi = 0$. Außerdem ist $\Psi = 0$ auf der x-Achse mit $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Beide Stromlinien schneiden sich in den Punkten A und B, die daher Staupunkte sein müssen. Die Stromlinien, die sich mathematisch im Innern des Zylinders ergeben, sind physikalisch ohne Bedeutung.

Geschwindigkeitsfeld. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{u} - \mathrm{iv} = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}} &= \mathrm{c}_\infty \left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{z}^2}\right) = \mathrm{c}_\infty \left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\right), \\
&= \mathrm{c}_\infty \left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2} \cos 2\varphi\right) - \mathrm{i} \left(-\mathrm{c}_\infty \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2} \sin 2\varphi\right), \\
\mathrm{u} &= \mathrm{c}_\infty \left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2} \cos 2\varphi\right), \\
\mathrm{v} &= -\mathrm{c}_\infty \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{r}^2} \sin 2\varphi, \qquad (9.7\text{-}5) \\
\mathrm{c} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2} &= \mathrm{c}_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^4 - 2\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}\right)^2 \cos 2\varphi}.
\end{aligned}$$

Längs der Zylinderwand ist r = R, dafür erhalten wir

$$\begin{aligned} u &= c_\infty(1-\cos 2\varphi) = 2c_\infty \sin^2\varphi, \\ v &= -c_\infty \sin 2\varphi = -2c_\infty \sin\varphi\cos\varphi, \\ \sqrt{u^2+v^2} &= 2c_\infty|\sin\varphi|. \end{aligned} \tag{9.7-6}$$

Sein Maximum erreicht der Geschwindigkeitsbetrag c in den Punkten C für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und D für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ mit

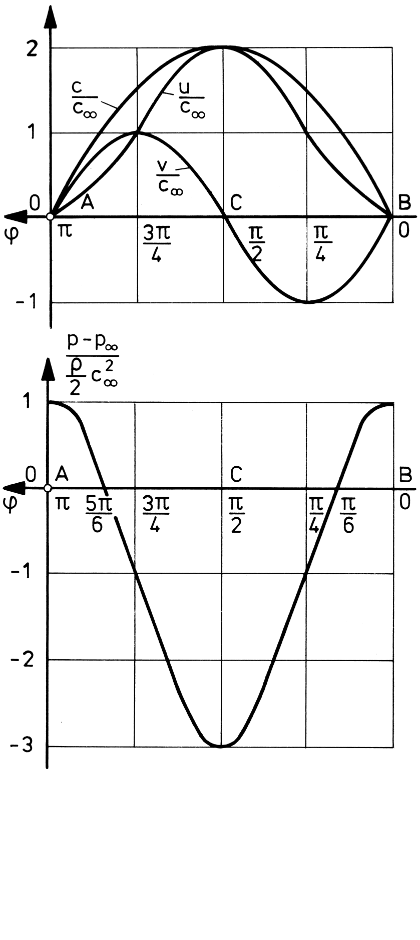
$$c_{max} = 2c_\infty; \tag{9.7-7}$$

in den Staupunkten A für $\varphi = 0$ und B für $\varphi = \pi$ ist er null.

Druckfeld. Herrscht im Unendlichen der Druck p_∞, so lautet die Bernoullische Gleichung (9.3-9) für U = 0 und $\partial\Phi/\partial t = 0$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{c_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}.$$

Mit (9.7-5) ergibt sich für den Druckkoeffizienten



$$\begin{aligned} c_P := \frac{p-p_\infty}{\frac{\rho}{2}c_\infty^2} &= 1 - \left(\frac{c}{c_\infty}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 2\varphi - \left(\frac{R}{r}\right)^4. \end{aligned} \tag{9.7-8}$$

Längs der x-Achse $(\varphi = 0, \pi)$ vor und hinter dem Zylinder $(|r| > R)$ ist:

$$c_P = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right]. \tag{9.7-9}$$

Längs der Zylinderwand (r = R) ist

$$\begin{aligned} c_P &= 2\cos 2\varphi - 1 \\ &= 1 - 4\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{9.7-10}$$

In den Staupunkten A, B ist $c_P = 1$, in den Druckminima C, D ist

$$c_P = -3. \tag{9.7-11}$$

Dir nebenstehende Skizze zeigt den Geschwindigkeits- und Druckverlauf längs der oberen Zylinderwand zwischen $A(\varphi = \pi)$ und $B(\varphi = 0)$.

Die Umströmung eines Kreiszylinders mit Zirkulation

Der gerade untersuchten Zylinderströmung wird ein Potentialwirbel (mathematisch positiv drehend für $\Gamma > 0$) überlagert. Das komplexe Strömungspotential ist dann nach (9.7-1)

$$\mathrm{W(z)} = \mathrm{c}_\infty \left(\mathrm{z} + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{z}}\right) - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}.$$

Durch die überlagerte Strömung verschieben sich die Staupunkte. Ihre Lage folgt aus der Bedingung $\mathrm{c} = 0$:

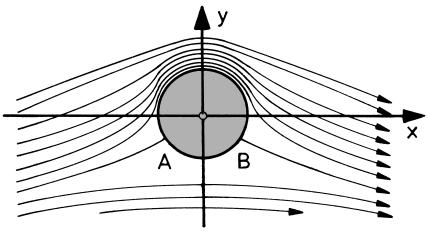
$$\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{c}_\infty \left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{z}^2}\right) - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{z}} = 0$$

ergibt

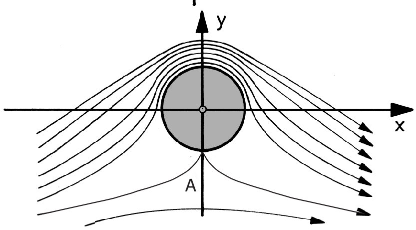
$$\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}\right)^2 - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi \mathrm{R c}_\infty}\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}\right) - 1 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi \mathrm{R c}_\infty} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi \mathrm{R c}_\infty}\right)^2}.$$

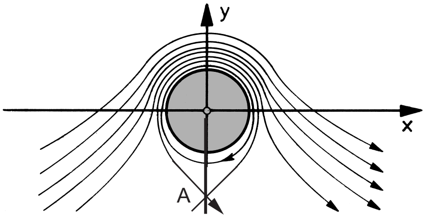
Je nach der Größe von Γ kann man drei Fälle unterscheiden, die zu charakteristischen Stromlinienbildern führen. Für $\Gamma < 0$ (Wirbel im Uhrzeigersinn drehend) ergibt sich (A und B sind wieder Staupunkte):



$\Gamma < 0, \quad |\Gamma| < 4\pi \mathrm{R c}_\infty,$
also $-4\pi \mathrm{R c}_\infty < \Gamma < 0.$



$\Gamma < 0, \quad |\Gamma| = 4\pi \mathrm{R c}_\infty,$
also $\Gamma = -4\pi \mathrm{R c}_\infty.$

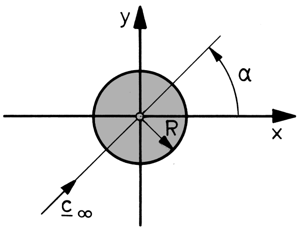


$\Gamma < 0, \quad |\Gamma| > 4\pi R c_\infty,$

also $\Gamma < -4\pi R c_\infty$.

In allen drei Fällen ist der Stromlinienabstand oberhalb des Zylinders offenbar kleiner als unterhalb des Zylinders. Nach der Kontinuitätsgleichung ist der Betrag der Geschwindigkeit also oberhalb des Zylinders größer als unten, und entsprechend ist der Druck nach der Bernoullischen Gleichung oben kleiner als unten. Die Strömung übt auf den Zylinder also eine Kraft in Richtung der positiven y-Achse aus[1].

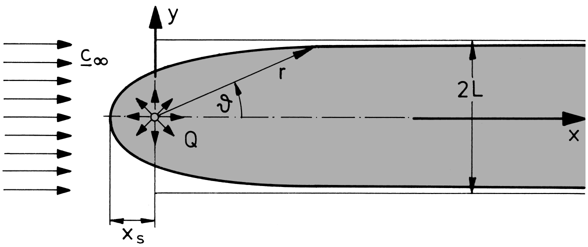
Die allgemeinste Umströmung eines Kreiszylinders



Die allgemeinste Umströmung eines Kreiszylinders mit dem Radius R um den Ursprung, die in großer Entfernung vom Zylinder in eine Parallelströmung übergeht, erhält man, wenn man in (9.7-1) $z \parallel ze^{-i\alpha}$ substituiert und damit das zugehörige Strömungsbild um den Winkel α dreht. Das komplexe Potential lautet dann

$$W(z) = c_\infty \left(ze^{-i\alpha} + \frac{R^2}{ze^{-i\alpha}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{ze^{-i\alpha}}{R}. \tag{9.7-12}$$

Aufgabe 1



Das komplexe Strömungspotential

$$W = c_\infty \left(z + \frac{L}{\pi} \ln \frac{z}{L} \right)$$

beschreibt die Umströmung eines ebenen, halb unendlichen Körpers (L, c_∞ reell).

A. Ermitteln Sie die Koordinate x_S des Staupunktes!

B. Berechnen und skizzieren Sie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung auf der x-Achse ($-\infty \leq x \leq x_S$), wenn der Druck im Unendlichen p_∞ ist! (Normieren Sie Druck und Geschwindigkeit physikalisch sinnvoll!)

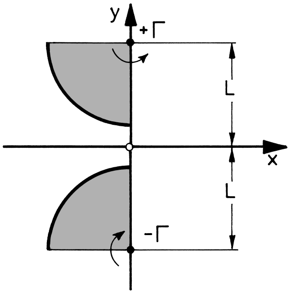
C. In welcher Entfernung vom Staupunkt unterscheidet sich die Geschwindigkeit c auf der x-Achse um 1% von c_∞?

---

[1] Man hat versucht, dieses Phänomen zum Schiffsvortrieb zu nutzen, indem man auf einem Schiff statt eines Segels einen mit Motorkraft angetriebenen, senkrechten, rotierenden Zylinder angebracht hat (Flettner-Rotor).

Aufgabe 2

Eine ebene Düsenströmung z.B. in einer Einlaufdüse nach DIN EN ISO 5108 (Wirbelfadendüse) kann angenähert durch das Geschwindigkeitsfeld von zwei Potentialwirbeln mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation dargestellt werden, wenn die Düsenwände zwei symmetrischen Stromlinien entsprechen, siehe auch Lehreinheit 10.1 Aufgabe 3.



A. Wie lautet das komplexe Strömungspotential $W(z)$, wenn der Abstand der beiden die Strömung erzeugenden Potentialwirbel $2L$ und der Betrag ihrer Zirkulation Γ beträgt?

B. Ermitteln Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, 0)$ in der Düsenachse $(y = 0)$ als Funktion von x und normieren Sie sie mit der Geschwindigkeit $u = u(0, 0)$ im Endquerschnitt!

C. Ermitteln Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(0, y)/u(0, 0)$ im Endquerschnitt der Düse!

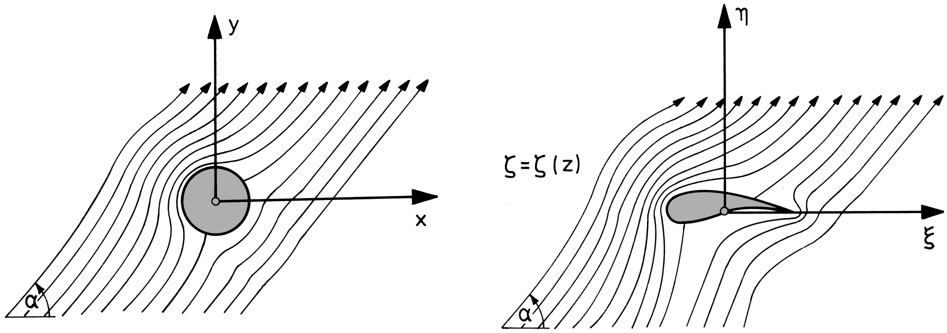
LE 9.8 Die Methode der konformen Abbildung

Wir wollen in dieser Lehreinheit eine Methode behandeln, mit der man aus der Umströmung eines Kreiszylinders die Umströmung eines Zylinders mit beliebiger Kontur, beispielsweise eines Tragflügelprofils, gewinnen kann. Sie ist als Methode der konformen Abbildung bekannt.

Die Methode der konformen Abbildung

Es sei

- $W = W(z)$ das komplexe Potential (9.7-12) der allgemeinsten Umströmung eines Kreises in der z-Ebene und
- $\zeta = \zeta(z)$ die konforme Abbildung[1] dieses Kreises auf eine (dann ebenfalls geschlossene) Kontur in der ζ-Ebene (und damit $z = z(\zeta)$ die konforme Abbildung dieser Kontur in den Kreis in der z-Ebene),



[1] Zum Begriff der konformen Abbildung vgl. die Wiederholungen aus der Funktionentheorie im Anhang.

dann ist

$$W = W(\zeta) \tag{9.8-1}$$

das komplexe Potential der allgemeinsten Umströmung der Kontur in der ζ-Ebene. Man erhält sie, indem man $z = z(\zeta)$ in $W = W(z)$ einsetzt.

Man kann sich diesen grundlegenden Satz folgendermaßen plausibel machen: Für den Imaginärteil von W gilt

$$\Psi(x, y) = \Psi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \Psi(\xi, \eta),$$

die konforme Abbildung $\zeta = \zeta(z)$ bildet also die Kurven $\Psi = \text{const}$ in der z-Ebene konform auf Kurven $\Psi = \text{const}$ in der ζ-Ebene ab. Der Kreis und die Verzweigungsstromlinie in der z-Ebene gehen dabei in die Kontur und eine Verzweigungslinie in der ζ-Ebene über, und die übrigen Kurven $\Psi = \text{const}$ in Kurven, die ohne sich zu schneiden, die Kontur „umströmen". Im Übrigen bildet $\Psi(\xi, \eta)$ den Imaginärteil von $W(\zeta)$, kann also auch formal als Stromfunktion einer Strömung in der ζ-Ebene aufgefasst werden, deren komplexes Potential eben $W(\zeta)$ ist[1].

Für die Geschwindigkeitsverteilung in der ζ-Ebene gilt nach (9.5-1)

$$u(\xi, \eta) - iv(\xi, \eta) = \frac{dW}{d\zeta}. \tag{9.8-2}$$

In der Regel sind W und ζ als Funktionen von z gegeben; man gibt dann die Geschwindigkeitsverteilung in der ζ-Ebene häufig zunächst in Abhängigkeit von z an,

$$u(\xi, \eta) - iv(\xi, \eta) = \frac{dW/dz}{d\zeta/dz} \tag{9.8-3}$$

und muss dann z mit Hilfe der inversen Abbildungsfunktion $z = z(\zeta)$ eliminieren.

Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, die zu einer gegebenen Kontur gehörige Abbildungsfunktion zu ermitteln. Es lassen sich jedoch einfache Beispiele angeben, die in der Geschichte der Tragflügeltheorie auch technische Bedeutung hatten und heute noch dazu dienen können, die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Tragflügelumströmung zu verstehen.

Die ebene Platte

Wir wollen die konforme Abbildung

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z} \tag{9.8-4}$$

untersuchen.

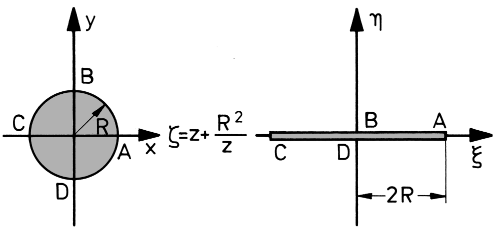
Diese Abbildung bildet den Kreis mit dem Radius R um den Ursprung, der durch

[1] Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es zu jeder geschlossenen Kontur in der ζ-Ebene eine konforme Abbildung $z = z(\zeta)$, die diese Kontur so auf einen Kreis abbildet, dass dem Äußeren der Kontur das Äußere des Kreises, dem Inneren der Kontur das Innere des Kreises und jedem Punkt der Kontur ein Punkt des Kreises entspricht.

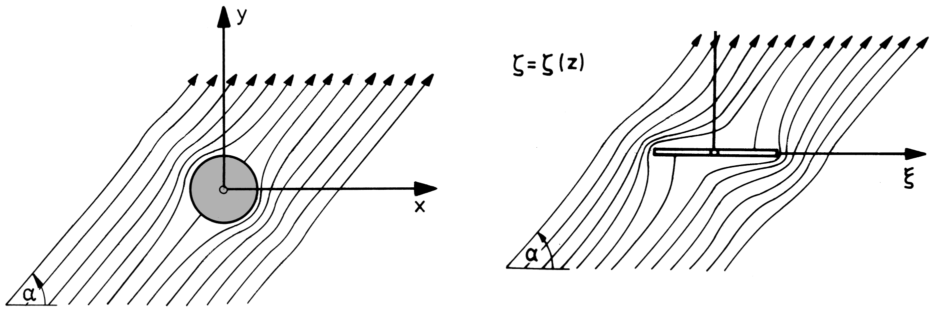
$z = Re^{i\varphi}$ gegeben ist, in die Kurve

$$\zeta = Re^{i\varphi} + Re^{-i\varphi} = 2R\cos\varphi$$

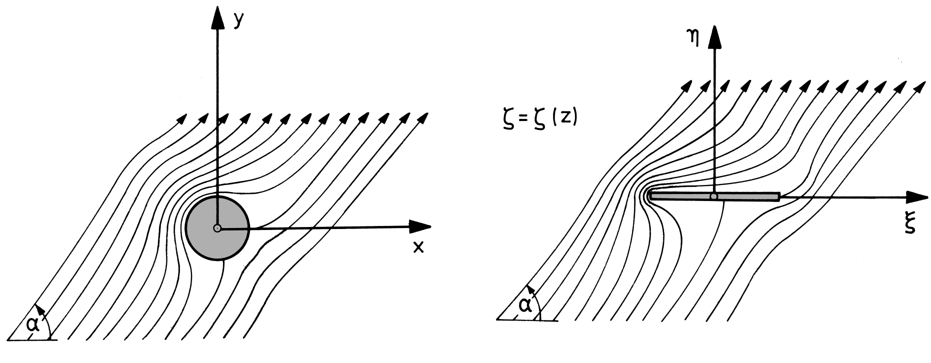
ab. Das ist ein doppelt durchlaufenes Stück der ξ-Achse zwischen $\xi = 2R$ und $\xi = -2R$: Mit Hilfe dieser konformen Abbildung lässt sich demnach die Umströmung einer angestellten unendlich dünnen ebenen Platte berechnen.



Das ist zwar noch ein sehr stark idealisiertes Modell eines Flugzeugtragflügels, selbst daran lassen sich jedoch schon wichtige Eigenschaften einer Tragflügelumströmung untersuchen. Wir beschränken uns hier auf zwei qualitative Stromlinienbilder, einmal die zirkulationsfreie Umströmung unter dem Anstellwinkel α



und die Umströmung mit einer Zirkulation, die gerade so groß ist, dass der hintere Staupunkt in die Hinterkante der ebenen Platte abgebildet wird.

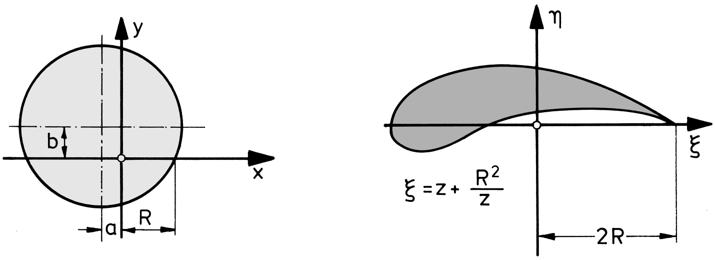


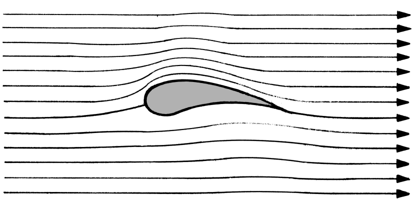
Joukowsky-Profile

Wir wenden dieselbe konforme Abbildung

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z} \qquad (9.8\text{-}5)$$

auf einen Kreis an, der wieder durch den Punkt $x = R$, $y = 0$ geht, dessen Mittelpunkt jedoch im zweiten Quadranten liegt und die Koordinaten $x = -a$, $y = b$ hat. Man erhält als Bild dieses Kreises eine Tragflügelkontur mit einer scharfen (unendlich dünnen) Hinterkante, das um so fülliger (dicker) ist, je größer a ist und um so stärker gewölbt, je größer b ist. Die auf diese Weise erzeugten Profile nennt man Joukowsky-Profile. Sie stellen praktisch brauchbare Annäherungen an Tragflügelprofile dar. Die scharfe Hinterkante hat allerdings zur Folge, dass die Strömung dort um 180° umgelenkt wird; das erfordert



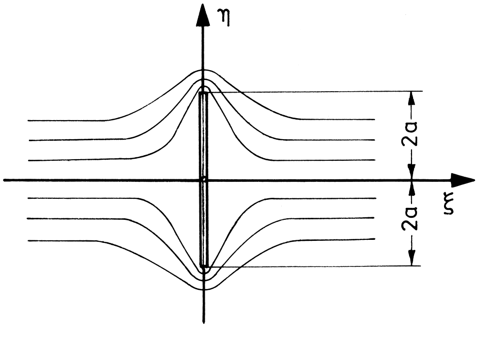


einen negativ unendlichen Druck (und damit nach der Bernoullischen Gleichung eine unendlich große Geschwindigkeit) an der Hinterkante, was natürlich physikalisch unrealistisch ist. Nur wenn man die Zirkulation so groß wählt, dass der hintere Staupunkt in der Hinterkante liegt (Kuttasche Abflussbedingung), tritt diese Singularität nicht auf, und die Strömung fließt glatt ab.

Aufgabe

Die Strömung um eine senkrecht zur Strömungsrichtung angestellte unendlich dünne ebene Platte der Breite 4a kann mittels der konformen Abbildung

$$\zeta = z - \frac{a^2}{z} \qquad (9.8\text{-}6)$$



aus der Umströmung eines Kreiszylinders abgeleitet werden.

A. Bestimmen Sie das Bild des Kreises $z = ae^{i\varphi}$ in der ζ-Ebene!

B. Bestimmen Sie den Verlauf des Geschwindigkeitsbetrages $c(\eta)$ längs der umströmten Platte in der ζ-Ebene!

C. Bestimmen Sie den Druckverlauf $p(\eta)$ längs der Platte in der ζ-Ebene!

Zusatzaufgabe 1

A. Die konforme Abbildung (9.8-6) der vorigen Aufgabe ordnet jedem Punkt ζ zwei Punkte z_1 und z_2 zu. Zeigen Sie, dass die Beträge r_1 und r_2 der beiden komplexen Zahlen z_1 und z_2 die Bedingung $r_1 r_2 = a^2$ erfüllen, dass also für beliebiges ζ der eine Bildpunkt innerhalb und der andere außerhalb des Kreises $z = ae^{i\varphi}$ in der z-Ebene liegt!

B. Berechnen Sie das komplexe Potential $W(\zeta)$, wenn $W(z) = c_\infty(z + a^2/z)$ ist! Überlegen Sie anhand der Verhältnisse für $z \to \infty$, ob z_1 oder z_2 im Außenraum des Kreises liegt!

Zusatzaufgabe 2

A. Berechnen Sie die komplexe Geschwindigkeitsverteilung $u - iv$ in der ζ-Ebene in Abhängigkeit von z für die in dieser Lehreinheit behandelte Umströmung einer unter dem Winkel α angestellten ebenen Platte der Länge $4R$!

B. Wie groß muss Γ sein, damit die Kuttasche Abflussbedingung erfüllt ist? (Lösungshinweis: Wenn der hintere Staupunkt in die Hinterkante abgebildet wird, wird die Geschwindigkeit dort nicht um 180° umgelenkt, d.h. sie wird dort nicht unendlich.)

C. Berechnen Sie für diesen Fall den Geschwindigkeitsverlauf $u = u(\xi)$ auf der Oberseite und auf der Unterseite der Platte!

LE 9.9 Kräfte auf umströmte Körper

Wir wollen eine Formel für die Kraft pro Längeneinheit herleiten, die eine Strömung auf einen quer angeströmten Zylinder beliebiger Kontur ausübt, wenn die Strömung weit entfernt vom Körper eine Parallelströmung ist.

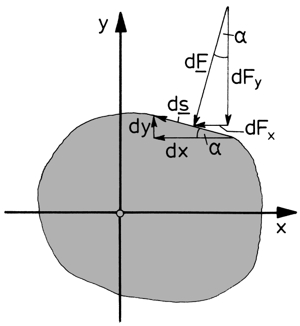
Wir setzen dazu wie bisher voraus

- ein inkompressibles Fluid,
- eine Potentialströmung,
- eine ebene Strömung

und fordern in diesem Abschnitt noch zusätzlich

- ein reibungsfreies Fluid,
- eine stationäre Strömung,
- die Vernachlässigung des Schwerefeldes.

Ist ds ein Element der Körperkontur, so gilt wegen der Reibungsfreiheit für den Betrag dF der Kraft auf ein Oberflächenelement der Länge ds und der Breite b



$$\mathrm{dF} = \mathrm{b\,p\,ds}.$$

Aus der nebenstehenden Figur liest man die folgenden Beziehungen zwischen den Koordinaten und den Beträgen ab:

$$\mathrm{dF_x} = -\mathrm{dF}\sin\alpha,$$
$$\mathrm{dF_y} = -\mathrm{dF}\cos\alpha,$$
$$\mathrm{dx} = -\mathrm{ds}\cos\alpha,$$
$$\mathrm{dy} = \mathrm{ds}\sin\alpha.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{dF_x} = -\mathrm{b\,p\,dy}, \quad \mathrm{dF_y} = \mathrm{b\,p\,dx},$$
$$\mathrm{F_x} = -\mathrm{b}\oint \mathrm{p\,dy}, \qquad \mathrm{F_y} = \mathrm{b}\oint \mathrm{p\,dx}. \tag{9.9-1}$$

Unter Ausnutzung der Stationarität und bei Vernachlässigung des Schwerefeldes ist nach (9.3-9)

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}_\infty + \frac{\rho}{2}(\mathrm{c}_\infty^2 - \mathrm{c}^2).$$

Da für eine beliebige Konstante A $\oint \mathrm{A\,dx} = 0$, $\oint \mathrm{A\,dy} = 0$ ist, bleibt nur übrig

$$\mathrm{F_x} = \frac{\rho}{2}\mathrm{b}\oint \mathrm{c}^2\,\mathrm{dy}, \qquad \mathrm{F_y} = -\frac{\rho}{2}\mathrm{b}\oint \mathrm{c}^2\,\mathrm{dx}. \tag{9.9-2}$$

Wir fassen beide Formeln unter Berücksichtigung von (9.5-2) komplex zusammen:

$$\begin{aligned}\mathrm{F_x} - \mathrm{iF_y} &= \frac{\rho}{2}\mathrm{b}\oint \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{d\overline{W}}}{\mathrm{d\bar{z}}}(\mathrm{dy} + \mathrm{i\,dx}) = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\mathrm{b}\oint \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{d\overline{W}}}{\mathrm{d\bar{z}}}(-\mathrm{i\,dy} + \mathrm{dx}) \\ &= \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\mathrm{b}\oint \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{d\overline{W}}}{\mathrm{d\bar{z}}}\mathrm{d\bar{z}} = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\mathrm{b}\oint \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}}\mathrm{d\overline{W}}.\end{aligned}$$

Nun ist längs der Körperkontur $\mathrm{d}\Psi = 0$, d.h. $\mathrm{d\overline{W}} = \mathrm{dW} = (\mathrm{dW/dz})\,\mathrm{dz}$. Damit erhalten wir die Blasiussche Formel für die Kraft, die von der Strömung mit dem komplexen Potential $\mathrm{W(z)}$ auf den von dieser Strömung umströmten Zylinder der Breite b ausgeübt wird:

$$\mathrm{F_x} - \mathrm{iF_y} = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\mathrm{b}\oint \left(\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dz}}\right)^2 \mathrm{dz}. \tag{9.9-3}$$

Da $|dW/dz|$ für $|z| \to \infty$ gegen eine Konstante, nämlich c_∞, gehen soll, kann man dW/dz in die folgende Reihe entwickeln:

$$\frac{dW}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = A_0^2 + \frac{2A_0A_1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_1}{z^2} + \dots.$$

Nach dem Residuensatz der Funktionentheorie[1]

$$\oint \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \tag{9.9-4}$$

erhält man unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung

$$\oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = 2\pi i \cdot 2A_0A_1,$$

$$F_x - iF_y = -2\pi\rho b A_0 A_1. \tag{9.9-5}$$

Nun kann man die Koeffizienten A_0 und A_1 der Reihenentwicklung leicht physikalisch deuten: Nach (9.5-1) ist

$$\frac{dW}{dz} = u - iv,$$

setzt man links in die Reihenentwicklung ein, und lässt $|z| \to \infty$ gehen, so erhält man

$$A_0 = u_\infty - iv_\infty. \tag{9.9-6}$$

Weiter ist bei Integration über die Körperkontur

$$\oint \frac{dW}{dz} dz = \oint dW = \oint (d\Phi + i\, d\Psi) = \oint d\Phi,$$

da, wie bereits oben ausgenutzt, längs der Körperkontur $d\Psi = 0$ ist. Es folgt

$$\oint \frac{dW}{dz} dz = \oint d\Phi = \oint \text{grad } \Phi \cdot d\underline{x} = \Gamma.$$

Setzt man wieder links die Reihenentwicklung ein, so folgt $2\pi i A_1 = \Gamma$,

$$A_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi}. \tag{9.9-7}$$

[1] vgl. z.B. I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, 18. Auflage, Seite 444, Gleichung (**). Thun usw.: Deutsch 1979.

Setzt man schließlich (9.9-6) und (9.9-7) in (9.9-5) ein, so erhält man $F_x - iF_y = i\rho b(u_\infty - iv_\infty)\Gamma$, oder wenn man das konjugiert Komplexe nimmt,

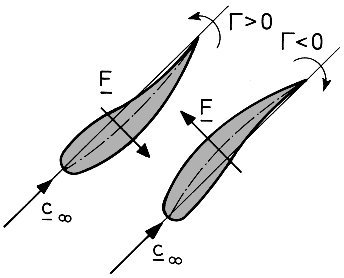
$$\begin{aligned} F_x + iF_y &= -i\rho b(u_\infty + iv_\infty)\Gamma, \\ F_x &= \rho b v_\infty \Gamma, \qquad F_y = -\rho b u_\infty \Gamma, \end{aligned} \tag{9.9-8}$$

$$\boxed{F = \rho b c_\infty \Gamma.} \tag{9.9-9}$$

Das ist der Kutta-Joukowskysche Auftriebssatz:

Für die Kraft, die von einer stationären, wirbelfreien, ebenen Strömung eines inkompressiblen und reibungsfreien Fluids auf einen Abschnitt der Breite b eines unendlich langen, quer angeströmten Zylinders beliebigen Querschnitts ausgeübt wird, gilt:

1. Die Kraft in Anströmrichtung (Widerstand) verschwindet (d'Alembertsches Paradoxon).
2. Die Kraft senkrecht zur Anströmrichtung (Auftrieb) beträgt $F = \rho b c_\infty \Gamma$ (Kutta-Joukowskyscher Auftriebssatz im engeren Sinne)[1].

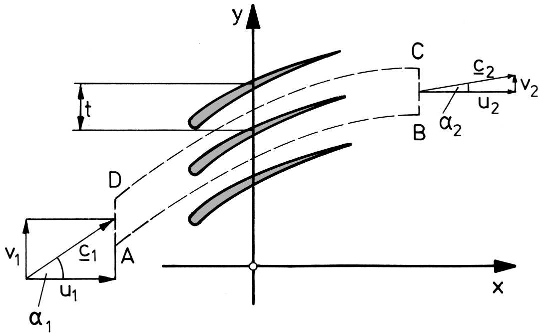


Ist die Zirkulation positiv, so ist die Kraft um 90° im mathematisch negativen Sinn gegen die Anströmrichtung gedreht; ist die Zirkulation negativ, so ist die Kraft um 90° im mathematisch positiven Sinn gegen die Anströmrichtung gedreht.

[1] Im Gegensatz zu dem durch die Schwerkraft verursachten hydrostatischen Auftrieb nennt man diesen durch die Strömung hervorgerufenen Auftrieb den hydrodynamischen Auftrieb.

Aufgabe

Eine Strömung werde durch ein feststehendes ebenes Schaufelgitter abgelenkt. Das Fluid sei inkompressibel, und das Gitter werde reibungsfrei und wirbelfrei durchströmt.



Gegeben sind die Gitterteilung t, die Breite b der Schaufeln senkrecht zur Zeichenebene, der Anströmwinkel α_1, der Druck p_1 und die Geschwindigkeit c_1 weit vor dem Gitter sowie der Abströmwinkel α_2 hinter dem Gitter.

A. Berechnen Sie die Kraft $\underline{F}$ auf eine Schaufel, indem Sie die Kontinuitätsgleichung und den Impulssatz auf den Kontrollraum ABCD anwenden! Die Volumenkraft werde vernachlässigt.

B. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Richtung der Kraft $\underline{F}$ auf die Schaufel, der Richtung der Anströmgeschwindigkeit $\underline{c}_1$ und der Richtung der Abströmgeschwindigkeit $\underline{c}_2$?

C. Wie ist der Kutta-Joukowskysche Auftriebssatz (9.9-8) für die hier behandelte Strömung vermutlich zu verallgemeinern, in der sich (anders als bei der Ableitung von (9.9-8)) Anströmgeschwindigkeit und Abströmgeschwindigkeit unterscheiden?

D. Prüfen Sie ihre Vermutung, indem Sie die Kraft auf eine Schaufel mit Hilfe des verallgemeinerten Kutta-Joukowskyschen Auftriebssatzes berechnen und das Ergebnis mit dem nach A errechneten vergleichen!

Zusatzaufgabe

Berechnen Sie für die Umströmung der ebenen Platte nach Zusatzaufgabe 2B von Lehreinheit 9.8 die Koordinaten und den Betrag der resultierenden Kraft auf die Platte!

LE 9.10 Rotationssymmetrische Potentialströmungen

Mit dieser Lehreinheit verlassen wir die ebenen Potentialströmungen und wenden uns den rotationssymmetrischen Potentialströmungen zu. Auch für diese Gruppe von Strömungen existiert neben dem Geschwindigkeitspotential eine Stromfunktion. Wir wollen in dieser Lehreinheit die Grundgleichungen und einige wichtige Eigenschaften für rotationssymmetrische Potentialströmungen kennen lernen.

Man nennt eine Strömung rotationssymmetrisch, wenn bei geeigneter Wahl eines Zylinderkoordinatensystems die Umfangskoordinate c_φ der Geschwindigkeit null ist und die beiden anderen Koordinaten unabhängig von φ sind:

$$\boxed{c = (c_r(r,z,t), 0, c_z(r,z,t)).} \tag{9.10-1}$$

Die Kontinuitätsgleichung div $\underline{c} = 0$ lautet dann nach (A 57)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rc_r) + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0. \tag{9.10-2}$$

Sie wird identisch erfüllt durch eine Stromfunktion Ψ, für die

$$c_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad c_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{9.10-3}$$

gilt[1]. Die Wirbelstärke hat nach (A 58) nur in Umfangsrichtung eine von null verschiedene Koordinate, und zwar ist mit (9.10-3)

$$\Omega = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r} = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)\right]. \tag{9.10-4}$$

Für eine Potentialströmung gilt nach (9.3-1) $\underline{c} = \operatorname{grad} \Phi$; für eine rotationssymmetrische Potentialströmung heißt das nach (A 56)

$$c_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad c_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{9.10-5}$$

Wir erhalten also in Analogie zu den Gleichungen (9.4-1) bis (9.4-4) in tabellarischer Form

für das Geschwindigkeitspotential nach (9.10-5)	für die Stromfunktion nach (9.10-3)
$c_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, c_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$ (9.10-6)	$c_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, c_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$ (9.10-7)
Setzt man (9.10-5) in (9.10-2) ein, so erhält man	Wegen rot $\underline{c} = \underline{0}$ folgt aus (9.10-4)
$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$ $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$ (9.10-8)	$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0,$ $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$ (9.10-9)

[1] Die hier eingeführte Stromfunktion hat eine andere Dimension als die auf Seite 219 eingeführte Stromfunktion einer ebenen Strömung, die wir ebenfalls mit Ψ bezeichnet haben.

Ein Vergleich mit (A 62) zeigt, dass nur das Geschwindigkeitspotential der rotationssymmetrischen Laplaceschen Differentialgleichung genügt; die Stromfunktion genügt einer anderen Differentialgleichung. Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion sind auch nicht über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (9.4-5), sondern über die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{9.10-10}$$

miteinander verknüpft. Man kann also Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion nicht als Realteil und Imaginärteil einer analytischen Funktion interpretieren, es existiert kein komplexes Potential, die Funktionentheorie ist nicht anwendbar. Es gilt aber wieder die Orthogonalitätsrelation

$$\text{grad}\ \Phi \cdot \text{grad}\ \Psi = 0, \tag{9.10-11}$$

vgl. Aufgabe 1.

Wie bei allen Potentialströmungen kann man auch bei rotationssymmetrischen Potentialströmungen durch Überlagerung neue Strömungen gewinnen. Wir wollen jetzt zwei einfache rotationssymmetrische Potentialströmungen näher untersuchen; ihre Überlagerung wollen wir dann als Aufgabe 3 behandeln.

Die Parallelströmung

Die gleichförmige Strömung mit der Geschwindigkeit c_∞ haben wir in Lehreinheit 9.5 als ebene Potentialströmung behandelt. Legt man die z-Achse eines Zylinderkoordinatensystems in die Strömungsrichtung, so kann man sie auch als rotationssymmetrische Potentialströmung auffassen. Ihr Geschwindigkeitsfeld $c_r = 0$, $c_\varphi = 0$, $c_z = c_\infty$ hat das Potential $\Phi = c_\infty z$ und für die Stromfunktion folgt aus (9.10-10) dann

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = c_\infty r, \quad \Psi = c_\infty \frac{r^2}{2},$$

wenn wir additive Konstanten bei Φ und Ψ jeweils weglassen.

Die Parallelströmung in z-Richtung mit der Geschwindigkeit c_∞ wird also beschrieben durch

$$\Phi = c_\infty z \qquad \Psi = c_\infty \frac{r^2}{2}. \tag{9.10-12}$$

Die Punktquelle

Wir betrachten jetzt ein Punktquelle, von der gleichmäßig nach allen Seiten der Volumenstrom Q ausgeht; den Volumenstrom einer Punktquelle nennt man deren Quellstärke[1]. Legen wir den Ursprung eines Zylinderkoordinatensystems in die Punktquelle, so

[1] Die hier eingeführte Quellstärke hat eine andere Dimension als die auf Seite 233 eingeführte Quellstärke, die wir ebenfalls mit Q bezeichnet haben.

lautet das Geschwindigkeitsfeld der Quellströmung

$$c_r = \frac{Q}{4\pi} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad c_\varphi = 0, \quad c_z = \frac{Q}{4\pi} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{9.10-13}$$

Man kann das leicht verifizieren: Für jeden Punkt des Feldes gilt $c_r/c_z = r/z$, d.h. die Geschwindigkeit ist in jedem Punkt in Richtung des Radiusvektors vom Ursprung gerichtet. Der Betrag der Geschwindigkeit ist

$$c = \sqrt{c_r^2 + c_z^2} = \frac{Q}{4\pi(r^2 + z^2)},$$

d.h. für alle Punkte der Kugel $r^2 + z^2 = \text{const}$ gleich, und der Volumenstrom durch eine solche Kugel ist $\dot{V} = c \cdot 4\pi(r^2 + z^2)$. Indem man von (9.10-13) nach (A 58) die Rotation bildet, kann man sich auch davon überzeugen, dass (9.10-13) eine Potentialströmung darstellt.

Das zugehörige Geschwindigkeitspotential gewinnt man aus (9.10-6) durch Integration, es lautet

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

wie man durch Bildung des Gradienten nach (A 56) bestätigen kann. Entsprechend gewinnt man aus (9.10-7) durch Integration die Stromfunktion

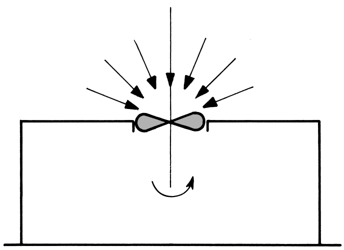
$$\Psi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Eine Punktquelle der Quellstärke Q im Ursprung wird also beschrieben durch

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \qquad \Psi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \tag{9.10-14}$$

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass auch für rotationssymmetrische Potentialströmungen die Orthogonalitätsrelation (9.10-11) gilt!



Aufgabe 2

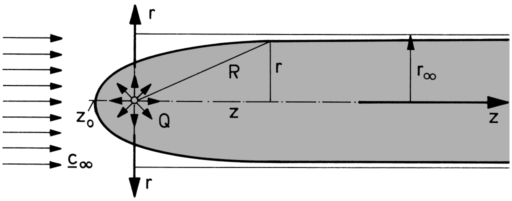
In der Mitte des Flachdaches einer Werkhalle ist ein Ventilator angebracht, der Frischluft von außen ansaugt. Der Ventilator wirke im Halbraum oberhalb des Daches als Punktsenke, der vom Ventilator angesaugte Volumenstrom sei Q.

A. Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit auf dem Dach als Funktion des Abstands R vom Ventilator!

B. Berechnen Sie den Druck auf dem Dach als Funktion von R, wenn im Abstand R_1 der Druck p_1 herrscht!

Aufgabe 3

Durch Überlagerung einer Parallelströmung in z-Richtung und einer Punktquelle im Ursprung des Koordinatensystems entsteht ein Strömungsbild, das als die Umströmung eines einseitig unendlichen Drehkörpers gedeutet werden kann:



A. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion der resultierenden Strömung!
B. Berechnen Sie die Geschwindigkeitskoordinaten c_r und c_z und den Geschwindigkeitsbetrag!
C. Berechnen Sie die Koordinaten des Staupunktes als Funktion von Q und c_∞!
D. Berechnen Sie den Radius r_∞ des Drehkörpers im Unendlichen! (Lösungshinweis: Die Körperkontur ist Stromlinie und geht durch den Staupunkt.)
E. Berechnen Sie das Druckfeld $p(r, z)$!

LE 9.11 Die Singularitätenmethode

Da für axialsymmetrische Potentialströmungen kein komplexes Potential existiert, lässt sich die Funktionentheorie, insbesondere die Methode der konformen Abbildung, darauf nicht anwenden. In der letzten Lehreinheit dieses Kapitels lernen wir als eine Methode zur Berechnung beliebiger Potentialströmungen die Singularitätenmethode kennen.

Wir haben inkompressible Potentialströmungen als Strömungen in einem Teil des Raumes kennen gelernt, wo das Geschwindigkeitsfeld wirbel- und quellenfrei ist, d.h. $\operatorname{rot} \underline{c} = \underline{0}$ und $\operatorname{div} \underline{c} = 0$ gilt. Diese beiden Bedingungen sind physikalisch von unterschiedlicher Qualität:

Die Bedingung $\operatorname{div} \underline{c} = 0$ folgt für inkompressible Medien aus der Kontinuitätsgleichung, ist also in der Natur stets erfüllt. Trotzdem enthielten unsere Beispiele fast immer Bereiche (Punkte oder Linien), wo diese Bedingung verletzt war; außerdem wurde dort die Geschwindigkeit unendlich groß. An diesen Stellen (man nennt sie singuläre Stellen oder Singularitäten) entspricht die rechnerische Strömung also nicht einer wirklichen Strömung, sie liegen außerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereiches der rechnerischen Strömung, z.B. im Inneren des umströmten Rotationskörpers von Aufgabe 3 von Lehreinheit 9.10.

Die Bedingung $\operatorname{rot} \underline{c} = \underline{0}$ folgt aus keinem Naturgesetz, sondern ist eine Forderung, welche die Allgemeinheit unserer Betrachtungen bisher eingeschränkt hat. Sofern unsere Beispiele Bereiche (Linien) enthielten, wo diese Bedingung verletzt war, trat dort ebenfalls eine unendlich große Geschwindigkeit auf, was natürlich physikalisch unmöglich ist. Diese Stellen sind also auch singulär und liegen damit außerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereiches der rechnerischen Strömung, z.B. in der Achse eines mit Zirkulation umströmten Kreiszylinders.

Man kann nun jede Potentialströmung entstanden denken durch eine Verteilung von Singularitäten (einerseits Quellen, Senken, Dipolen, Quadrupolen, usw., andererseits Potentialwirbeln) außerhalb ihrer physikalischen Begrenzung. Für eine Potentialströmung, die aus (einem oder mehreren) Wirbeln entstanden gedacht werden kann, gibt es einen besonderen Ausdruck: Man sagt, sie sei durch die Wirbel induziert worden. Dies ist aber nur eine Redeweise, wie das Beispiel des mit Zirkulation umströmten Kreiszylinders zeigt; die Wirbel sind real gar nicht vorhanden, folglich können sie auch keine Strömung induzieren (=verursachen). Trotzdem eröffnet diese Überlegung eine anschauliche und auch praktisch bedeutsame weitere Methode (neben der Anwendung der Funktionentheorie) zur Berechnung von Potentialströmungen.

Als Beispiel diene eine rotationssymmetrische Strömung: Das Geschwindigkeitspotential Φ für eine Parallelströmung längs der z-Achse mit n Punktquellen oder -senken der unterschiedlichen Quellstärke Q_k an den Stellen z_k auf der z-Achse lautet nach $(9.10\text{-}14)_1$

$$\Phi(r,z) = c_\infty z - \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{\sqrt{r^2+(z-z_k)^2}}. \tag{9.11-1}$$

Bei einer geschlossenen Kontur endlicher Länge müssen die Quellstärken Q_k die Nebenbedingung

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k = 0 \tag{9.11-2}$$

erfüllen, d.h. es müssen Quellen $(Q_k > 0)$ und Senken $(Q_k < 0)$ vorhanden sein.

Günstiger ist meist eine kontinuierliche Verteilung von Quellen mit der Elementarquellstärke $dQ_k = q(z_k)dz_k$ zwischen den Punkten $z_0 \le z_k \le z_1$ auf der z-Achse. Das Geschwindigkeitspotential lautet dann

$$\Phi(r,z) = c_\infty z - \frac{1}{4\pi}\int_{z_0}^{z_1}\frac{q(z_k)\,dz_k}{\sqrt{r^2+(z-z_k)^2}}. \tag{9.11-3}$$

Für eine geschlossene Kontur endlicher Länge besteht wieder die Nebenbedingung

$$\int_{z_0}^{z_1} q(z_k)dz_k = 0. \tag{9.11-4}$$

Bei vorgegebener Kontur ist die Quellstärke pro Längeneinheit $q(z_k)$ so zu bestimmen, dass die Normalkomponente des resultierenden Geschwindigkeitsfeldes auf der Körperkontur verschwindet. Diese Bedingung führt auf eine Integralgleichung zur Bestimmung von $q(z_k)$.

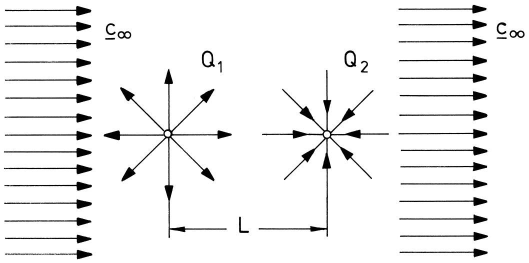
Bei vorgegebener Kontur können die Singularitäten auch auf der Konturoberfläche angesetzt werden. Die Singularitätenmethode bietet damit gegenüber der Methode der konformen Abbildung auch den Vorteil, dass die Umströmung vorgegebener Profile berechnet werden kann.

Aufgabe 1

Die allgemeinste ebene Umströmung eines Kreiszylinders haben wir in der Lehreinheit 9.7 behandelt. Wie kann man sich diese Umströmung nach der Singularitätenmethode entstanden denken?

Aufgabe 2

Die Skizze zeigt die Überlagerung einer Punktquelle mit der Ergiebigkeit Q_1, einer Punktsenke mit der Ergiebigkeit Q_2 und eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit c_∞.



A. Welche Bedingung müssen die Ergiebigkeiten Q_1 und Q_2 erfüllen, damit eine geschlossenen Kontur entsteht?

B. Zeichnen Sie in die Skizze qualitativ die Stromlinien für diesen Fall ein!