PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Cálculo Vectorial e Geometria Analítica

O estudo dos **referenciais cartesianos** começa no **ensino básico**, mais concretamente no 5º ano de escolaridade, a propósito dos **gráficos cartesianos** enquanto modo de **representação de dados**, no domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD5-1):

1. Identificar um «**referencial cartesiano**» como um par de retas numéricas não coincidentes que se intersetam nas respetivas origens, das quais uma é fixada como «**eixo das abcissas**» e a outra como «**eixo das ordenadas**» (os «**eixos coordenados**»), designar o referencial cartesiano como «**ortogonal**» quando os eixos são perpendiculares e por «**monométrico**» quando a unidade de comprimento é a mesma para ambos os eixos.
2. Identificar, dado um plano munido de um referencial cartesiano, a «**abcissa**» (respetivamente «**ordenada**») de um ponto P do plano como o número representado pela interseção com o eixo das abcissas (respetivamente ordenadas) da reta paralela ao eixo das ordenadas (respetivamente abcissas) que passa por P e designar a abcissa e a ordenada por «**coordenadas**» de P.
3. Construir, num plano munido de um referencial cartesiano ortogonal, o «**gráfico cartesiano**» referente a dois conjuntos de números tais que a todo o elemento do primeiro está associado um único elemento do segundo, representando nesse plano os pontos cujas abcissas são iguais aos valores do primeiro conjunto e as ordenadas respetivamente iguais aos valores associados às abcissas no segundo conjunto

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Mais tarde, já no 3º ciclo, é abordada a noção de **gráfico de função numérica de variável numérica** e introduz-se, num caso particular, a noção de **equação** de um conjunto de pontos do plano (FSS7-1):

9. Identificar, fixado um referencial cartesiano num plano, o «**gráfico cartesiano**» de uma dada função numérica f de variável numérica como o conjunto G constituído pelos pontos P do plano cuja ordenada é a imagem por f da abcissa e designar o gráfico cartesiano por «**gráfico de f**» quando esta identificação não for ambígua e a expressão «$y = f(x)$» por «**equação de G**».

Ainda no 7º ano examinam-se alguns exemplos de gráficos cartesianos, nomeadamente **gráficos de sequências** (FSS7-5):

3. Representar, num plano munido de um referencial cartesiano, **gráficos de sequências**.

No 8º ano estudam-se os gráficos das **funções afins**, reconhecendo-se que se identificam com as retas "não verticais" (FSS8-1):

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

1. Demonstrar, utilizando o **teorema de Tales**, que as **retas não verticais** num dado plano **que passam pela origem** de um referencial cartesiano nele fixado são os **gráficos das funções lineares** e justificar que o coeficiente de uma função linear é igual à ordenada do ponto do gráfico com abcissa igual a 1 e à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas dos pontos da reta, designando-o por «**declive da reta**» no caso em que o referencial é ortogonal e monométrico.

2. Reconhecer, dada uma função $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R})$ que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo b um número real) se obtém do gráfico da função f por **translação** de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0,0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$.

3. Reconhecer que as **retas não verticais** são os gráficos das **funções afins** e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar a por «**declive**» da reta e b por «**ordenada na origem**».

6. Reconhecer que os pontos do plano de abcissa igual a c (sendo c um dado número real) são os pontos da **reta vertical** que passa pelo ponto de coordenadas $(c, 0)$ e designar por **equação** dessa reta a equação «$x = c$».

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Ainda no 8º ano interpreta-se geometricamente o **conjunto-solução** de um **sistema** de duas equações de **1º grau** (ALG8-8):

3. **Interpretar geometricamente** os **sistemas de duas equações de 1.º grau** num plano munido de um **referencial cartesiano** e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções («sistema impossível»), ou uma única solução («sistema possível e determinado») ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das duas equações equivalentes do sistema («sistema possível e indeterminado»).

Finalmente no 9º ano introduz-se, apenas como informação, um exemplo de **parábola** enquanto gráfico cartesiano de uma função e **interpreta-se geometricamente** o **conjunto-solução** de uma **equação de 2º grau** (FSS9-3)

1. **Saber**, fixado um referencial cartesiano no plano, que o gráfico de uma função dada por uma expressão da forma $f(x) = ax^2$ (a número real não nulo) é uma curva designada por «**parábola de eixo vertical e vértice na origem**».
2. Reconhecer que o conjunto-solução da **equação de 2.º grau** $ax^2 + bx + c = 0$ é o conjunto das abcissas dos pontos de **interseção** da **parábola** de equação $y = ax^2$, com a **reta** de equação $y = -bx - c$.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

A abordagem do domínio Geometria Analítica no 10º ano é, evidentemente, ocasião para que se **revejam** e **consolidem** estes **pré-requisitos** incluídos no programa de Ensino Básico, devendo levar-se em conta que no primeiro ano em que o novo programa entra em vigor destina-se a alunos que não frequentaram o novo programa do básico.

Ao longo desta apresentação ficará claro como a **Geometria Euclidiana sintética**, não figurando como **tópico específico** do programa do secundário, nele surge no entanto inúmeras vezes de forma essencial e motivada, no desenvolvimento de outros tópicos.

No programa do 10º ano relativo a este domínio começa-se por introduzir o conceito de «referencial **ortonormado**», como referencial **ortogonal** e **monométrico** em que a **unidade de comprimento** comum aos eixos coincide com uma **unidade pré-fixada** e que será a utilizada para o cálculo de **medidas de comprimento** no plano em questão. Em particular, mais tarde, esta unidade de comprimento poderá ser a que se identifica com o comprimento dos segmentos orientados que definem **vectores** a que se atribui a **norma 1** - daí a designação "ortonormado" (GA10-1):

1. Designar por «**referencial ortonormado**» um referencial **ortogonal** e **monométrico** de um dado plano, tal que a **unidade de comprimento** comum aos eixos coordenados coincide com uma unidade de comprimento **pré-fixada** e, dados números reais a_1 e a_2, designar por «$A(a_1, a_2)$», o ponto A de abcissa a_1 e ordenada a_2 nesse referencial.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Em seguida generaliza-se a noção de **equação cartesiana**, introduz-se a de **inequação cartesiana**, deduz-se a fórmula para o cálculo da **distância entre dois pontos** a partir das respectivas coordenadas e calculam-se as coordenadas do **ponto médio de um segmento**, conhecidas as coordenadas dos extremos.

Desta maneira torna-se possível deduzir algumas equações e inequações cartesianas de partes do plano caracterizadas por propriedades envolvendo distâncias entre pontos e pontos médios de segmentos (GA10-1):

2. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a **medida da distância** entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, e representá-la por « $d(A, B)$».
3. **Demonstrar**, dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abcissas a e b respetivamente, que a **abcissa do ponto médio** do segmento de reta de extremos A e B é igual a $\frac{a+b}{2}$.
4. +**Reconhecer**, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, as **coordenadas do ponto médio** do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

5. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado, por «**equação cartesiana**» (respetivamente por «**inequação cartesiana**») de um conjunto C uma equação (respetivamente inequação) cujas soluções são as coordenadas dos pontos de C.

Utilizando os instrumentos que acabámos de referir são deduzidas as inequações dos **semiplanos** e as equações cartesianas das **circunferências** (e inequações dos **círculos**) bem como das **elipses** com centro na origem do referencial e focos no eixo dos xx. Estas últimas merecem particular destaque, já que o novo programa prescreve que este estudo se faça com rigor, **deixando de ser facultativo**

Com efeito, parte-se de uma **definição geométrica** da elipse baseada na **propriedade focal** e pretende-se que a partir desta seja **deduzida** a equação, na situação acima considerada.

O programa ainda em vigor determinava, para o 10º ano:

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
(*) Referência à elipse como deformação da circunferência.	A equação da elipse deve aparecer a partir da circunferência por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

E no 11º ano:

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).	Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).

Tratando-se apenas de uma indicação metodológica não era entendida como **obrigatória**.

Por outro lado, uma vez que a elipse aparecia no 10º ano como "deformação da circunferência", muitas vezes a propriedade focal era apresentada no 11º ano como **definição alternativa**, por vezes *ad hoc*, sem se **legitimar** este procedimento. Com efeito só será aceitável apresentar definições alternativas de um objecto matemático mostrando que se trata de **condições equivalentes** ou, pelo menos, informando de que essa equivalência tem lugar. Embora a própria **equação** a que se chegava pelos dois processos alternativos pudesse servir de **justificação** para essa equivalência muitas vezes esse facto não era destacado.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

No programa de 2013 a elipse aparece nos seguintes termos (GA10-1):

8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por «**elipse**» o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P,A) + d(P,B) = 2a$, por «**focos da elipse**» os pontos A e B, por «**centro da elipse**» o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por «**eixo maior da elipse**» o número $2a$ (e a por «**semieixo maior da elipse**»), interpretando-o geometricamente.
9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a **mediatriz** de $[AB]$ interseta a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\,\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «**eixo menor da elipse**» (e b por «semieixo menor da elipse»).

Note-se que nestes dois descritores não há ainda qualquer menção de um sistema de coordenadas, ou seja, trata-se de questões puramente de **Geometria sintética**.

Nada impede, no entanto, que se aborde o resultado expresso no segundo descritor utilizando um sistema de coordenadas adequado, o que pode ser feito de um modo que cumpra integralmente o propósito de demonstrar rigorosamente o resultado.

Metas Curriculares

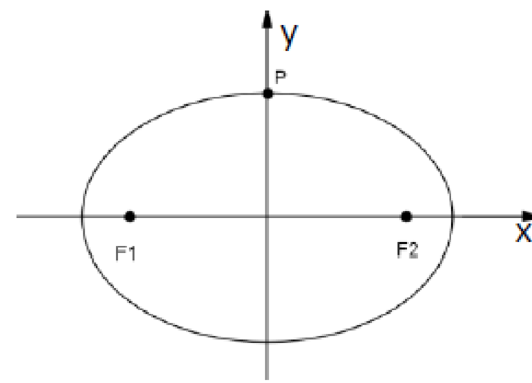
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

No caderno de apoio do 10º ano propõe-se dois exemplos relativos a este descritor que se considera serem correspondentes a diferentes **níveis de desempenho**, embora esta demonstração seja daquelas que não é exigida a todos os alunos, como fica assinalado.

No primeiro exemplo apresenta-se já a elipse num plano com um **sistema de coordenadas** adequado, ao passo que no segundo propõe-se a demonstração do resultado apenas decomposto em duas alíneas, **sem mais sugestões** e podendo ser cumprido com auxílio ou não de um sistema de coordenadas:

1.9

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado e dado $c > 0$, a elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e de eixo maior $2a$ $(a > c > 0)$. Seja P o ponto de interseção da elipse com o semi-eixo positivo das ordenadas.



   1.1. Justifique que $\overline{F_1P} = \overline{F_2P}$.

   1.2. Indique, justificando, a medida comum de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$.

   1.3. Conclua que $\overline{OP} = \sqrt{a^2 - c^2}$.

2. *Dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$ em determinado plano, resolva as seguintes questões:

   2.1 Prove que a mediatriz de $[AB]$ interseta a elipse exatamente em dois pontos C e D situados em semiplanos opostos de fronteira AB e interseta a reta AB no ponto médio do segmento $[CD]$, que coincide com o centro O da elipse.

   2.2 Prove que tomando $b = \frac{1}{2}\,\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Feita esta introdução da elipse e de algumas das suas propriedades básicas ficamos aptos a deduzir a respetiva **equação cartesiana**, o que se requer no seguinte descritor (GA10-1):

10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c, 0)$ e $B(c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

Ao pretender-se um "**reconhecimento**", assinalado com um sinal +, entende-se que é exigível a **todos os alunos** que saibam argumentar de algum modo a razão de ser da **equação da elipse**, embora se admitam diferentes **níveis de desempenho**, exemplificados no caderno de apoio com dois exercícios, uma alínea do primeiro assinalada com * e o segundo com **:

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

1.10	1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $F_1(-4{,}0)$ e $F_2(4{,}0)$. 1.1. Qual o valor que deve tomar o número real d por forma que um ponto $P(x,y)$ pertença à elipse de focos F_1 e F_2 e semieixo maior a, $(a>4)$ quando e apenas quando $d=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}$? 1.2. *Considere que $a=5$. Mostre que um ponto $P(x,y)$ pertence à elipse referida na alínea anterior quando e apenas quando $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. 1.3. Tendo em conta a alínea 1.2, calcule as coordenadas dos pontos A_1 e A_2 em que a elipse interseta o eixo das abcissas, as coordenadas dos pontos B_1 e B_2 em que a elipse interseta o eixo das ordenadas e o eixo menor $b=\overline{B_1B_2}$. 1.4. Verifique, neste exemplo, que $b=\sqrt{a^2-c^2}$, onde $c=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ é a semidistância focal. 2. **Considere num plano munido de um referencial ortonormado, dois números reais a e c $(a>c>0)$ e os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. 2.1. Justifique que a equação $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ é a equação da elipse de focos F_1 e F_2 e de semieixo maior a. 2.2. Mostre que a equação da alínea anterior é equivalente a $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$. 2.3. Escreva a equação da alínea anterior utilizando no primeiro membro apenas as constantes a e b, onde b representa o semieixo menor da elipse.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Os vetores foram introduzidos no ensino básico, no 8º ano, associados ao conceito de **segmento orientado** e ao conceito de **translação.**

Os segmentos orientados aparecem no programa do básico no 6º ano a propósito da **adição de números racionais**, introduzindo-se a noção de **orientação positiva** ou **negativa** de um segmento orientado em dada recta numérica (NO6-3):

1. Identificar um segmento orientado como um segmento de reta no qual se escolhe uma origem de entre os dois extremos e representar por $[A,B]$ o segmento orientado $[AB]$ de origem A, designando o ponto B por extremidade deste segmento orientado.
2. Referir, dados dois números racionais a e b representados respetivamente pelos pontos A e B da reta numérica, o segmento orientado $[A,B]$ como «orientado positivamente» quando a é menor do que b e como «orientado negativamente» quando a é maior do que b.

Note-se que a noção de segmento orientado poderia ter sido formalizada, muito simplesmente identificando o segmento orientado $[A,B]$ com o par ordenado de pontos (A,B).

Esta noção de **orientação** surge como uma primeira abordagem da noção de **sentido**, no caso particular em que apenas se consideram segmentos orientados numa dada **recta numérica**.

Metas Curriculares

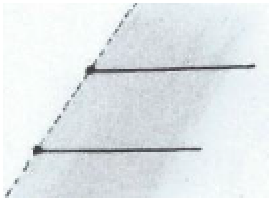
Cálculo Vectorial e Geometria Analítica

Cálculo vectorial

O conceito em que vai assentar a noção geral de **sentido** de um segmento orientado (e depois de um vector) do plano ou do espaço é o de **sentido de uma semirreta**, introduzido no 5º ano, a propósito de critérios de igualdade de ângulos (GM5-1):

8. Identificar duas semirretas com a mesma reta suporte como tendo «o mesmo sentido» se uma contém a outra.

9. Identificar duas semirretas com retas suporte distintas como tendo «o mesmo sentido» se forem paralelas e estiverem contidas num mesmo semiplano determinado pelas respetivas origens.



Note-se que este conceito **de sentido** e mais tarde de **direcção e sentido** de um **segmento orientado** ou **vetor**, bem como o próprio conceito de **vetor**, nunca chegam a ser completamente **formalizados**, pois, sem serem nomeadas como tal, o que se define são **relações de equivalência** ("**ter a mesma direcção**", "**ter a mesma direcção e sentido**", "**equipolência**") e formalmente o que se chamaria "**direcção**", "**sentido**" "**vetor**" seriam as classes de equivalência associadas a estas relações no conjunto dos segmentos orientados do plano ou do espaço.

Metas Curriculares

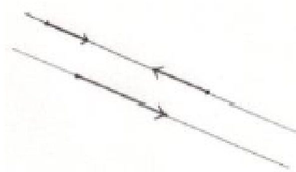
Cálculo Vectorial e Geometria Analítica

Cálculo vectorial

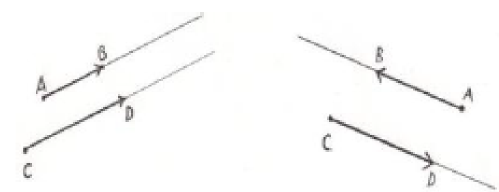
No 8º ano, tendo como objectivo introduzirem-se os **vetores** e as **translações**, desenvolve-se o estudo dos **segmentos orientados** (GM8):

Vetores, translações e isometrias

3. Construir e reconhecer propriedades das translações do plano



1. Identificar segmentos orientados como tendo «a mesma direção» quando as respetivas retas suportes forem paralelas ou coincidentes.



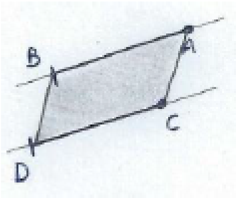
2. Identificar segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ como tendo «a mesma direção e sentido» ou simplesmente «o mesmo sentido» quando as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ tiverem o mesmo sentido e como tendo «sentidos opostos» quando tiverem a mesma direção mas não o mesmo sentido.
3. Identificar, dado um ponto A, o segmento de reta $[AA]$ e o segmento orientado $[A, A]$ de extremos ambos iguais a A como o próprio ponto A e identificar, dada uma qualquer unidade de comprimento, o comprimento de $[AA]$ e a distância de A a ele próprio como 0 unidades, e considerar que o segmento orientado $[A, A]$ tem direção e sentido indefinidos.
4. Designar por comprimento do segmento orientado $[A, B]$ o comprimento do segmento de reta $[AB]$, ou seja, a distância entre as respetivas origem e extremidade.

Metas Curriculares

Cálculo Vectorial e Geometria Analítica

Cálculo vectorial

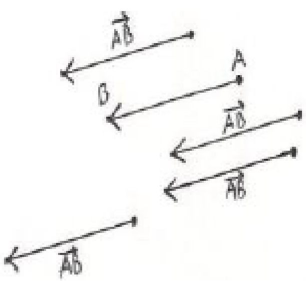
5. Identificar segmentos orientados como «equipolentes» quando tiverem a mesma direção, sentido e comprimento e reconhecer que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ de retas suportes distintas são equipolentes quando (e apenas quando) $[ABDC]$ é um paralelogramo.



O **critério do paralelogramo** para a **equipolência** é particularmente importante; no caso de uma mesma reta suporte, podemos utilizar uma **reta numérica**, traduzindo-se então a equipolência na igualdade da diferença entre as abcissas da extremidade e da origem dos segmentos orientados.

Os **vetores** aparecem como objetos **indefinidos** (como se se tratasse de objetos "**primitivos**" de uma nova teoria) mas **caracterizados** pelo modo como se **associa** um **vector** a um **conjunto de segmentos orientados equipolentes**:

6. Saber que um «vetor» fica determinado por um segmento orientado de tal modo que segmentos orientados equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos orientados não equipolentes determinam vetores distintos, designar esses segmentos orientados por «representantes» do vetor e utilizar corretamente os termos «direção», «sentido» e «comprimento» de um vetor.



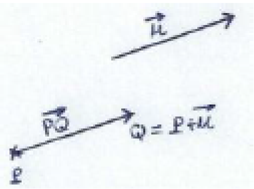
7. Representar o vetor determinado pelo segmento orientado $[A, B]$ por $\overrightarrow{AB}$.
8. Designar por «vetor nulo» o vetor determinado pelos segmentos orientados de extremos iguais e representá-lo por $\vec{0}$.

Cálculo Vectorial e Geometria Analítica

Cálculo vectorial

Em seguida introduzem-se algumas noções básicas relativas à noção de vetor, nomeadamente a definição de vetores **colineares** e **simétricos**, de **soma de um ponto com um veto**r, de **translação**, de **composição de translações** (não se aborda no básico a noção geral de composição de funções) e finalmente de **adição de vetores**:

9. Identificar dois vetores não nulos como «colineares» quando têm a mesma direção e como «simétricos» quando têm o mesmo comprimento, a mesma direção e sentidos opostos, convencionar que o vetor nulo é colinear a qualquer outro vetor e simétrico dele próprio e representar por $-\vec{u}$ o simétrico de um vetor $\vec{u}$.
10. Reconhecer, dado um ponto P e um vetor $\vec{u}$, que existe um único ponto Q tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ e designá-lo por « $P + \vec{u}$».

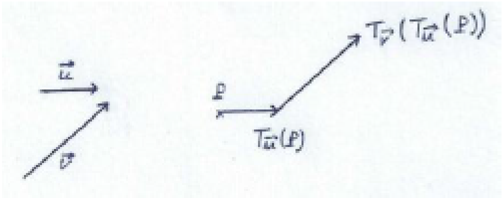


11. Identificar a «translação de vetor $\vec{u}$» como a aplicação que a um ponto P associa o ponto $P + \vec{u}$ e designar a translação e a imagem de P respetivamente por $T_{\vec{u}}$ e por $T_{\vec{u}}(P)$.

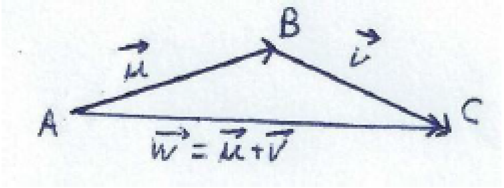
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

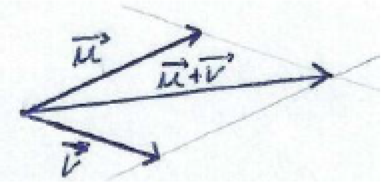
12. Identificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a «composta da translação $T_{\vec{v}}$ com a translação $T_{\vec{u}}$» como a aplicação que consiste em aplicar a um ponto P a translação $T_{\vec{u}}$ e, de seguida, a translação $T_{\vec{v}}$ ao ponto $T_{\vec{u}}(P)$ obtido.



13. Representar por «$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$» a composta da translação $T_{\vec{v}}$ com a translação $T_{\vec{u}}$ e reconhecer, dado um ponto P, que $(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})(P) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$.
14. Reconhecer que $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ é uma translação de vetor $\vec{w}$ tal que se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e designando por C a extremidade do representante de $\vec{v}$ de origem B ($\vec{v} = \overrightarrow{BC}$), então $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ e designar $\vec{w}$ por $\vec{u} + \vec{v}$ («regra do triângulo»).



15. Reconhecer que se podem adicionar dois vetores através da «regra do paralelogramo».



Finalmente estudam-se algumas **propriedades algébricas** básicas das operações acima referidas bem como das **translações** e introduz-se a noção de reflexão deslizante, bem com algumas propriedades gerais das isometrias do plano.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Note-se que no Ensino básico **não é introduzida** a noção de **diferença** de vetores nem de **norma** de vetor ou de **produto de um vetor por um escalar**. Também não são definidas as **coordenadas** de um vetor em dado referencial cartesiano.

Esse facto não impede que, em situações particulares, sejam utilizados vetores determinados por segmentos orientados dados pelas **coordenadas** dos respetivos extremos, como ocorre, por exemplo no descritor FSS8-1.2, já atrás recordado:

Reconhecer, dada uma função $f: D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R})$ que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo b um número real) se obtém do gráfico da função f por translação de vetor definido pelo **segmento orientado** de origem no ponto de **coordenadas** $(0,0)$ e extremidade de **coordenadas** $(0, b)$.

No entanto, **não se dispõe**, nesta fase, de um cálculo vetorial "**em coordenadas**", pelo que as justificações e cálculos que seja necessário efectuar (nomeadamente para cumprir o descritor acima) apenas podem basear-se nas definições e propriedades atrás referidas.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Como acima foi sugerido é possível interpretar um vetor como uma **classe de equivalência** para a **relação de equipolência**, ficando assim provada a possibilidade de definir um objeto matemático com as propriedades que se requeriam aos vetores na introdução feita no 8.º ano; embora essa abordagem **não faça parte** dos programas do ensino básico e secundário, constitui um tópico complementar de interesse para os professores. Permite em particular compreender em que sentido preciso podemos afirmar que **vetores** e **translações** são objetos matemáticos que se podem **identificar** uns com os outros.

Para uma revisão destes conceitos, aplicações, propriedades, e respetivas justificações geométricas podem consultar-se as referidas Metas curriculares e os Cadernos de Apoio do 2.º ciclo, NO6-3, e do 3.º ciclo, GM8-3.5 a 3.18 e o Texto Complementar de Geometria do 3.º ciclo, 8.º ano, 3.1 a 3.16.

No 10º ano introduz-se a noção de **norma** de vetor, bem como novas operações, nomeadamente o **produto de um vetor por um escalar** e a **subtracção** de vetores. Mais uma vez é obviamente recomendável que antes se **revejam** adequadamente os conteúdos acima referidos do Ensino básico relativos a vectores. No Caderno de Apoio do 10º ano, na Informação Complementar para o professor relativa aos descritores GA10-3.1 a 3.4 podem encontrar-se orientações neste sentido.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Limitemo-nos aqui a recordar como pode ser estabelecida a **coerência** da definição de **soma de vetores**, através da verificação de que a composição de translações é uma translação. Essa coerência foi implicitamente **admitida** no ensino básico, mas pode constituir um tópico de interesse para os **professores** e para alunos do ensino secundário mais interessados, pelo que se indica como pode ser justificada.

Da própria definição de **translação** e de **composição de aplicações** resulta que, se $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ for uma translação, terá de ser determinada por um vector $\vec{w}$ que pode ser obtido de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pela **regra do triângulo**; com efeito, fixado um ponto A do plano, e sendo $C = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(A)) = (A + \vec{u}) + \vec{v}$, se $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ for uma translação de certo vector $\vec{w}$, terá de ser $C = A + \vec{w}$, ou seja, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

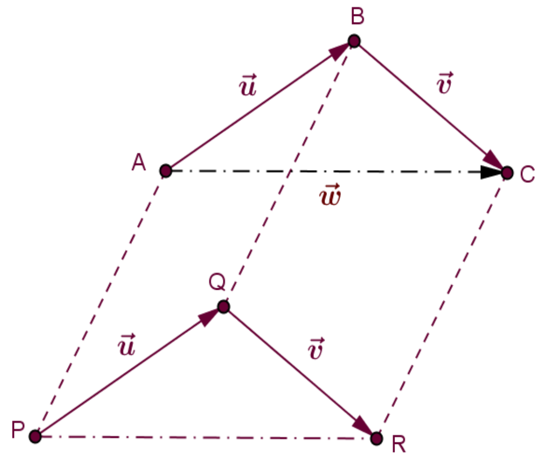
Resta então apenas provar que, para **qualquer ponto** P do plano,

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(P) = P + \vec{w},$$

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Essa igualdade pode ser justificada utilizando a construção geométrica ao lado (ilustra-se o caso em que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares e o ponto P não está na reta AB, onde $B = A + \vec{u}$, nem na reta AC, podendo os restantes casos ser tratados de modo análogo).



Pelo critério do paralelogramo para a equipolência de segmentos orientados sabemos que $[ABQP]$ e $[BCRQ]$ são paralelogramos e pretendemos provar que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$, ou seja, que $[ACRP]$ também é um paralelogramo.

Ora, o facto de $[ABQP]$ e $[BCRQ]$ serem paralelogramos tem também como consequência que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QB}$ e $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{RC}$, pelo que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{RC}$ e portanto $[PACR]$ é um paralelogramo, tratando-se do mesmo quadrilátero que $[ACRP]$, que é, portanto, de facto, um paralelogramo e assim, como pretendíamos provar, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Examinemos agora as **novas operações** introduzidas no 10º ano, nomeadamente o **produto** de um vetor **por um escalar** e a **subtracção** de vetores, além da noção de **norma**.

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento e dado um vetor $\vec{v}$, a «norma do vetor $\vec{v}$» como a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representá-la por «$\|\vec{v}\|$».
2. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ e um número real (também designado por «escalar») λ, o «produto de $\vec{v}$ por λ» («$\lambda\vec{v}$») como o vetor de norma $|\lambda|\|\vec{v}\|$ (fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas), com a direção e sentido de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda > 0$ e com a direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda < 0$, **justificar** que $\lambda\vec{v}$ **não depende da unidade de comprimento** fixada e que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, vetor simétrico de $\vec{v}$.
3. **Justificar**, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, que um vetor $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$ se e apenas existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, e que, nesse caso, λ é único.
4. **Justificar**, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que existe um e somente um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, provando que $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$, designar $\vec{w}$ por «diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$» e representá-lo por «$\vec{u} - \vec{v}$».

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Na definição de produto de um vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ não nulo por um escalar $\lambda \neq 0$, para além de se definir sem qualquer ambiguidade a **direcção** e **sentido** do vector produto (direcção igual e sentido igual ou oposto ao do vector $\vec{v}$, consoante λ é positivo ou negativo), a respectiva **norma** é dada, à partida, para uma **unidade de medida** de comprimento **pré-fixada**.

No entanto, facilmente se conclui que o vetor produto **não depende** da **unidade de comprimento** escolhida, **justificação** que é requerida aos alunos.

Com efeito a definição é dada de tal modo que $|\lambda|$ é igual ao **quociente** entre a **norma do vector produto** e a **norma do vector $\vec{v}$**; ora as normas são, por definição, **medidas de comprimento** de segmentos de recta e como o quociente de duas medidas de comprimento **não depende** da unidade de medida comum (*cf.* GM7-7.2), se um dado vector produto tiver **norma** com a propriedade enunciada na definição, para uma dada **unidade de medida** (equivalente ao quociente pela norma de $\vec{v}$ ser igual a $|\lambda|$), o mesmo se passará para **qualquer** unidade de medida.

Por outras palavras, os "vectores produto" obtidos considerando-se, na respectiva definição, **diferentes unidades de comprimento**, e que têm à partida direcção e sentido bem determinados, têm todos também o **mesmo comprimento**, ou seja, trata-se sempre do **mesmo vector**.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Outro modo de justificar a coerência da definição de produto $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$ de um vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ não nulo por um escalar λ, é começar por notar que o vector produto pode ser "materializado" (através de um dos seus representantes) na **recta numérica** AB, tomando $\dot{A}B$ para semi-recta dos números não negativos e $\overline{AB}$ para unidade de comprimento.

Agora, sendo P o ponto dessa recta numérica de abcissa λ, é imediato, a partir da definição de $\lambda\vec{v}$ (para esta unidade de medida de comprimento) que este vector deve identificar-se com $\overrightarrow{AP}$. Fixada qualquer outra unidade de comprimento e sendo m a medida do comprimento do segmento $[AB]$ nessa nova unidade, uma vez que o quociente das medidas de comprimento de dois dados segmentos é independente da unidade de medida comum (*cf.* mais uma vez GM7-7.2) sabemos que o comprimento de $[AP]$ na nova unidade será igual a $|\lambda|m$, ou seja, a norma de $\lambda\vec{v}$ será dada por $|\lambda|\|\vec{v}\|$, qualquer que seja a unidade de comprimento fixada para o cálculo das normas.

Assim, o vector $\lambda\vec{v}$ **não depende**, de facto, da escolha da **unidade de comprimento**.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

A propriedade expressa no descritor 3.3 pode ser facilmente justificada. Por um lado, é imediato, a partir da definição do produto de um vector por um escalar, que $\lambda\vec{v}$ é **colinear** a $\vec{v}$.

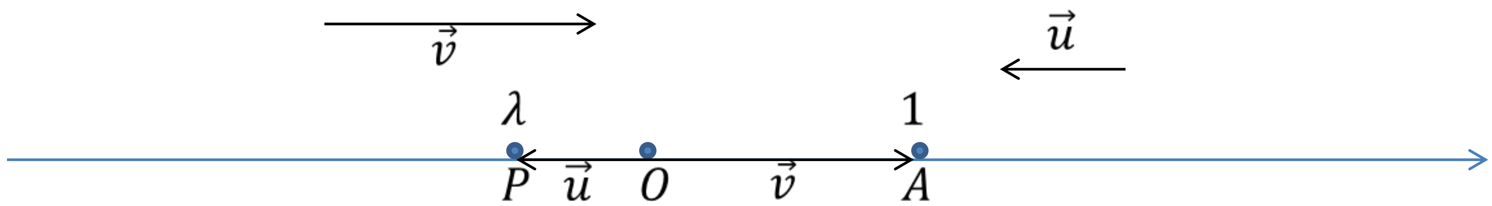
Reciprocamente, considerando um vetor $\vec{u}$ **colinear** a $\vec{v}$, se existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, temos $\|\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{v}\| \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$, pelo que, considerando o único número real λ de módulo $\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ (valor **independente** da **unidade de comprimento** fixada para o cálculo das normas, como acima ficou estabelecido) que é **positivo** se os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tiverem o **mesmo** sentido e **negativo** se tiverem sentidos **opostos**, tem-se, por definição de produto de vector por escalar, $\boldsymbol{\vec{u} = \lambda\vec{v}}$ e este λ é o **único escalar** para o qual tem lugar esta igualdade, já que, quando não é nulo, tem módulo e sinal bem determinados.

O escalar λ pode ainda ser materializado utilizando segmentos orientados com extremos numa mesma **recta numérica** e origens coincidentes com a **origem** dessa recta numérica e que representem os dois vectores colineares dados. Com efeito, Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem **colineares** ($\vec{v} \neq 0$), fixemos um ponto arbitrário O para **origem** da recta numérica e o ponto $A = O + \vec{v}$, para ponto de **abcissa 1**;

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial



Sendo $P = O + \vec{u}$, P é um ponto da recta OA, já que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direcção (e portanto as rectas OA e OP, não podendo ser rectas paralelas distintas, têm de **coincidir**). Portanto, como atrás se concluiu a propósito da coerência da definição de produto de um vector por um escalar, sendo λ a abcissa de P, teremos $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Quanto à subtracção, a definição do vector diferença $\vec{u} - \vec{v}$ de determinados vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ reproduz a **definição habitual** de diferença quando em dado conjunto está definida uma operação de **adição** comutativa. Dados vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é fácil, neste caso, justificar a existência de um e apenas um vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$, pois, a existir um tal vector, adicionando $-\vec{v}$ a ambos os membros desta igualdade obtemos:

$$\vec{u} + (-\vec{v}) = (\vec{w} + \vec{v}) + (-\vec{v}) = \vec{w} + \big(\vec{v} + (-\vec{v})\big) = \vec{w} + \vec{0} = \vec{w}$$

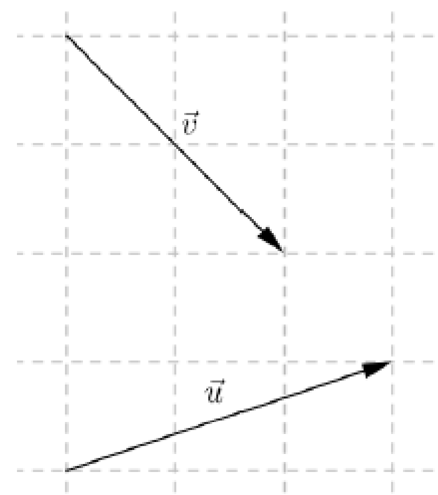
Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Ou seja, o único vector $\vec{w}$ que pode satisfazer à igualdade requerida é o vector $\vec{u} + (-\vec{v})$ e é fácil verificar que, de facto, a respectiva soma com $\vec{v}$ é igual a $\vec{u}$, utilizando mais uma vez a propriedade **associativa** da adição de vectores e a propriedade algébrica característica do **simétrico**. Assim, a **diferença** de vectores está sempre bem definida e é igual à **soma** do **aditivo** com o **simétrico do subtractivo**, tal como para números reais: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Para além desta justificação algébrica, poderá aproveitar-se a ocasião para rever os conceitos acima referidos, construindo geometricamente a diferença de vetores em casos concretos ou num caso geral e comparando com a construção da soma de um vetor com o simétrico de outro. Apresentam-se abaixo dois possíveis exercícios com esses objectivos.



1. Na ilustração figuram dois segmentos orientados que representam vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
   1.1. Reproduza, no caderno, dois segmentos orientados com a mesma origem P que representem, respetivamente, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e, utilizando a regra do paralelogramo ou a regra do triângulo, construa o vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$.
   1.2. Construa o vetor soma de $\vec{u}$ com $-\vec{v}$ e justifique que é igual a $\vec{w}$.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

2. **Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, prove, recorrendo a uma construção geométrica e utilizando diretamente as definições de diferença e de soma de vetores, bem como a de simétrico de um vetor, que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

É requerido aos alunos, em seguida, que **reconheçam** as **propriedades algébricas** básicas envolvendo a nova operação de **produto por escalar** (GA10-3):

5. +**Reconhecer**, dado um vetor $\vec{v}$ e números reais λ e μ, que $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.

6. +**Reconhecer**, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e números reais λ e μ que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

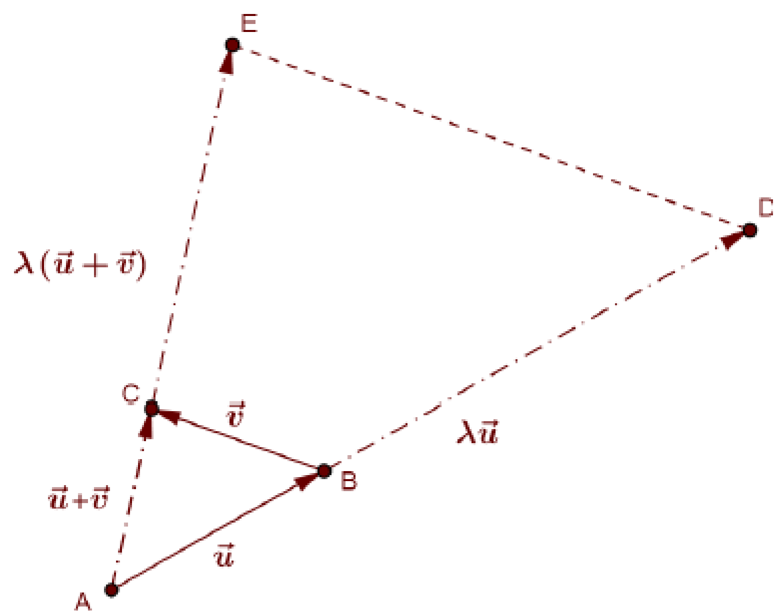
Estes reconhecimentos estão assinalados com o sinal +; assim, no caderno de apoio, relativamente ao descritor 3.6 apresentam-se exemplos correspondentes a diferentes **níveis de desempenho**, esperando-se que o nível mais básico esteja ao alcance da generalidade dos alunos:

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

1. *Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares e $\lambda > 0$; pretendemos provar que $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Para o efeito, fixado um ponto A do plano, seja $B = A + \vec{u}$, $C = B + \vec{v}$ e $D = A + \lambda\vec{u}$, como se ilustra na figura junta.



   1.1. Justifique que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

   1.2. Sendo $E = A + \lambda(\vec{u}+\vec{v})$ e utilizando o Teorema de Tales, justifique que as retas BC e DE são paralelas.

   1.3. Conclua da alínea anterior que $\overline{DE} = \lambda\overline{BC}$.

   1.4. Justifique que as semirretas $\dot{B}C$ e $\dot{D}E$ têm o mesmo sentido e conclua, utilizando também as alíneas anteriores, que $\overrightarrow{DE} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{v}$. [Sugestão: para comparar os sentidos das referidas semirretas note que, por construção, os pontos C e E estão numa mesma semirreta de origem no ponto A da reta BD.]

   1.5. Conclua finalmente que $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

2. **Utilizando uma construção idêntica à do exercício anterior, prove que, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares e $\lambda < 0$, $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

3. *Considere vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares, $\vec{u} \neq \vec{0}$; fixando um ponto O do plano, e sendo $A = O + \vec{u}$, $B = O + \vec{v}$, considere uma reta numérica OA de origem O.
   3.1. Justifique que B é um ponto da reta OA.
   3.2. Demonstre a igualdade $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ traduzindo-a numa equação envolvendo as abcissas dos pontos A e B na referida reta numérica.

4. Considere um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ e números reais λ e μ; prove que $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$, comparando as normas, direcções e sentidos dos dois vetores, a partir da definição de produto de um vetor por um escalar.

Quanto ao descritor 3.5, esta propriedade é trivial se $\vec{v} = 0$ e pode ser facilmente justificada se $\vec{v} \neq 0$ recorrendo mais uma vez a uma **recta numérica** de origem O qualquer e o **ponto de abcissa 1** coincidente com $O + \vec{v}$. Sabemos então que $O + \lambda\vec{v}$, $O + \mu\vec{v}$ e $O + (\lambda + \mu)\vec{v}$ são os pontos dessa recta numérica de **abcissas** λ, μ e $\lambda + \mu$ e, efectuando a adição dos vectores $\lambda\vec{v}$ e $\mu\vec{v}$, aplicando a "**regra do triângulo**" a partir do ponto O, o vector soma $\overrightarrow{OP}$ é exactamente o que tem abcissa $\lambda + \mu$, pela **definição geométrica** conhecida de **adição de números** representados numa recta numérica (*cf.* Metas Curriculares do ensino básico, NO6-3.3 e NO8-2.7).

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

Estamos agora aptos a introduzir as **coordenadas** dos vetores relativamente a um dado referencial, o que permite efetuar **operações com vetores** operando sobre as respetivas **coordenadas**, ou seja, reduzindo-as a **operações sobre números** reais(GA10-4):

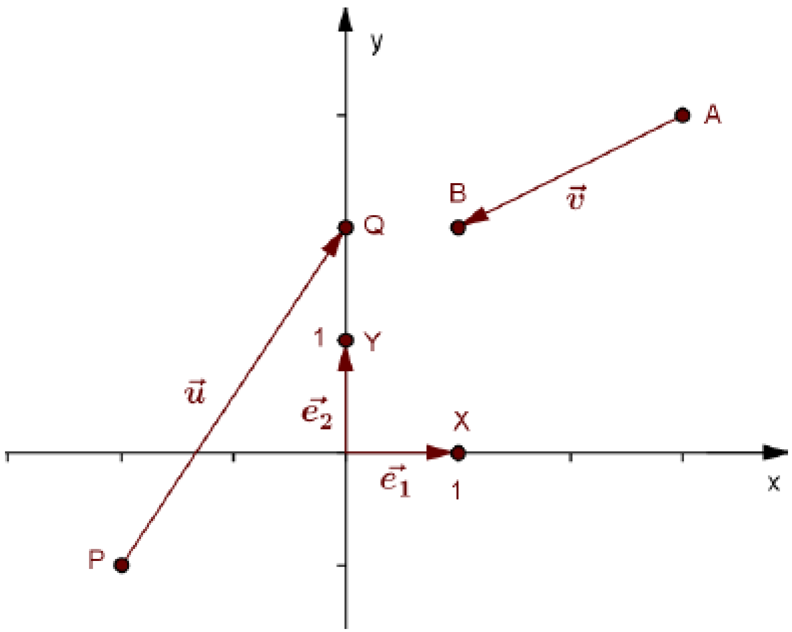
1. +**Reconhecer**, fixada uma **unidade de comprimento**, um plano munido de um **referencial ortonormado** de origem O e um **vetor** $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1{,}0)$, $Y(0{,}1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\boldsymbol{\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2}$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ por uma «**base** do espaço vetorial dos vetores do plano», (v_1, v_2) por «**coordenadas** do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)» e representar por «$\vec{v}(v_1, v_2)$» o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2).
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A, o «**vetor-posição** do ponto A» como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e **justificar** que as coordenadas do vetor-posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto.

Mais uma vez o reconhecimento pedido em 4.1 pode ser efetuado com diferentes níveis de desempenho, como se exemplifica no caderno de apoio:

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

1. Na figura junta representa-se um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dois segmentos orientados $[A,B]$ e $[P,Q]$ onde $A(3,3)$, $B(1,2)$, $P(-2,-1)$ e $Q(0,2)$. Considere os pontos $X(1,0)$, $Y(0,1)$ e os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$.



   1.1. Sendo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, determine, utilizando uma construção geométrica, um vetor $\vec{v}_1$ com a direção de $\vec{e}_1$ e um vetor $\vec{v}_2$ com a direção de $\vec{e}_2$ tais que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

   1.2. Quantas soluções diferentes existem para a alínea anterior? Justifique.

   1.3. Conclua que existe um e somente um par ordenado de números reais (v_1, v_2) tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, designando este par como «coordenadas do vetor $\vec{v}$», e determine-o.

   1.4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, resolva uma exercício idêntico ao das alíneas anteriores, substituindo $\vec{v}$ por $\vec{u}$.

Metas Curriculares

Cálculo vetorial

1.5. Sendo $P'(-2{,}3)$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{P'P}$, resolva uma exercício idêntico ao das alíneas 1.1 a 1.3, substituindo $\vec{v}$ por $\overrightarrow{w}$.

1.6. Justifique que as coordenadas dos pontos $O + \vec{v}$, $O + \vec{u}$ e $O + \overrightarrow{w}$ têm de ser iguais às coordenadas respectivamente dos vetores $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\overrightarrow{w}$ (ditos «vetores posição» dos referidos pontos) e represente estes vetores através de segmentos orientados de origem O.

2. *Considere um plano munido de um referencial ortonormado de origem O, os pontos $X(1{,}0)$, $Y(0{,}1)$, os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e um vetor $\vec{v}$ desse plano.

2.1. Fixado um ponto A nesse plano e sendo $B = A + \vec{v}$ mostre, utilizando a regra do triângulo, que existe um e somente um ponto C tal que se $\vec{v}$ for igual à soma de um vetor $\vec{v}_1$ com a direção de $\vec{e}_1$ com um vetor $\vec{v}_2$ com a direção de $\vec{e}_2$ então $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{CB}$.

2.2. Conclua da alínea anterior que existe um e somente um par ordenado de números reais (v_1, v_2) tal que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, designando este par por «coordenadas do vetor $\vec{v}$».

2.3. Justifique que as coordenadas do ponto $P = O + \vec{v}$ são iguais às coordenadas do vetor $\vec{v}$ (dito «vetor posição» do ponto P).

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

A partir daqui torna-se fácil **justificar** as **regras habituais** para operar com vectores dados pelas respectivas **coordenadas**, bem como a relação entre as coordenadas de dois pontos A e B e a do vector $\overrightarrow{AB}$ (GA10-4):

3. **Justificar**, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ, que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ e que dois vetores não nulos são **colineares** se e somente se as respetivas coordenadas forem todas não nulas e os **quocientes** das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.

4. **Justificar**, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, começando por justificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, identificar, a «**diferença entre os pontos B e A**» como o vetor $\overrightarrow{AB}$, representá-la por «$B - A$» e justificar que, para todo o vetor $\vec{v}$ e para quaisquer pontos A e B do plano, $B - A = \vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

5. **Justificar**, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ desse plano, que o ponto $A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$.
6. **Justificar**, fixada uma unidade de comprimento e um plano munido de um referencial ortonormado que para qualquer vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$.

No caderno de apoio encontram-se exemplos relativos a estas justificações que, nesta fase, são bastante simples:

1. Considere um plano munido de um referencial ortonormado, vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, um número real λ, os pontos $X(1{,}0)$, $Y(0{,}1)$ e os vetores (da base canónica do espaço vetorial dos vetores do plano) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$.
   1.1. Justifique que $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$ e que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$.
   1.2. Utilizando as propriedades algébricas conhecidas das operações com vetores, conclua que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$ e que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$, começando por determinar expressões para estes vetores como combinações lineares dos vetores da base canónica.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Cálculo vetorial

1.3. Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e justifique que são colineares se e somente se as respetivas coordendadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.

2. Considere um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano.

   2.1. Justifique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

   2.2. Atendendo à alínea anterior e ao que se sabe acerca das coordenadas do vetor posição de um ponto e das coordenadas da diferença de dois vetores, justifique que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

   2.3. Dado um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ e utilizando a alínea anterior mostre que o ponto $P = A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$, começando por designar essas coordenadas por (x_1, x_2) e notando que, por definição, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$.

3. Fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ tomando por unidade de comprimento a unidade comum dos eixos coordenados, mostre que $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$, utilizando o Teorema de Pitágoras.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Geometria analítica e Cálculo vetorial no espaço

A generalização ao **espaço** tanto da **Geometria analítica**, em particular da noção de **referencial cartesiano** (neste caso apenas se tratam os referenciais **ortogonais**) como do **cálculo vetorial** é uma ocasião privilegiada para se reverem alguns conhecimentos básicos de **Geometria euclidiana tridimensional**, nomeadamente no que diz respeito a propriedades da noção de **ortogonalidade** de retas e planos no espaço. No caderno de apoio do 10º ano encontram-se textos e exemplos relativos aos objetivos gerais GA10-7 que podem ser consultados para esse efeito e como orientação para o cumprimento dos respetivos descritores.

Trata-se de mais uma ocasião em que no programa do **Ensino Secundário** se revê, aplica e consolida a **Geometria euclidiana sintética** abordada no **Ensino Básico**.

Produto escalar

O **produto escalar** ou **interno** é introduzido no 11º ano, tendo-se optado por uma definição “**puramente geométrica**” que traduz de forma mais expressiva o que se pretende obter com esta operação (que não é “interna”, apesar do nome com que é também designada!); apenas depois de se introduzir também a noção de **ângulo de dois vetores**, prova-se finalmente que o produto interno pode ser **calculado** pela fórmula habitual envolvendo as **normas** dos vetores e o **cosseno** do ângulo por eles formado (GA11-2):

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Produto escalar

1. Identificar, **fixada uma unidade de comprimento**, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o «**produto escalar** (ou **interno**) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$» como o **número** $\overline{\boldsymbol{OP}} \times \overline{\boldsymbol{OQ'}}$, (respetivamente o **número** $-\overline{\boldsymbol{OP}} \times \overline{\boldsymbol{OQ'}}$) onde, fixado um ponto O, $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' é a **projeção ortogonal** de Q na reta OP, se $\overrightarrow{OQ'}$ e $\overrightarrow{OP}$ tiverem o **mesmo** sentido (respetivamente se tiverem sentidos **contrários**), **reconhecendo** que este valor é **independente** da escolha do ponto O, identificar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como **nulo** se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por «$\vec{u} \,.\, \vec{v}$».
2. Identificar, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, «**ângulo** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$» como qualquer ângulo convexo, nulo ou raso POQ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, **reconhecendo** que têm todos a mesma **amplitude**, designar também essa amplitude por «ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$» quando essa designação não for ambígua, e representá-la por «$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$».
3. **Provar**, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Requerem-se depois algumas justificações elementares relativas à **comutatividade**, **perpendicularidade** de vetores e relação entre **produto interno** e **norma**.

Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Produto escalar

Quanto às propriedades **algébricas** do produto interno relativas à **adição** e **produto por escalar**, devem ser conhecidas e utilizadas pelos alunos e, em particular, permitem uma **justificação** muito simples da **fórmula** habitual para calcular o produto interno conhecidas as **coordenadas** dos vectores operandos relativamente a um referencial ortogonal.

A respetiva demonstração, no entanto, é das que se considera corresponder a um **nível de desempenho** elevado e como tal estão assinaladas, ao contrário da referida **justificação**. No entanto é importante que os professores e alunos tenha consciência da importância de se evitar o **círculo vicioso** que poderia consistir, por exemplo, em utilizar a fórmula para o cálculo do produto interno por coordenadas para justificar a "bilinearidade" enquanto se pretende justificar essa fórmula por utilização dessa mesma propriedade algébrica… (GA11-2):

8. **+Provar**, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e um número real λ, que $(\lambda\vec{u})\,.\,\vec{v} = \lambda(\vec{u}\,.\,\vec{v})$.
9. **+Provar**, dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$.
10. **Justificar**, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, começando por **justificar** que $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2} = 1$ e $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = 0$.

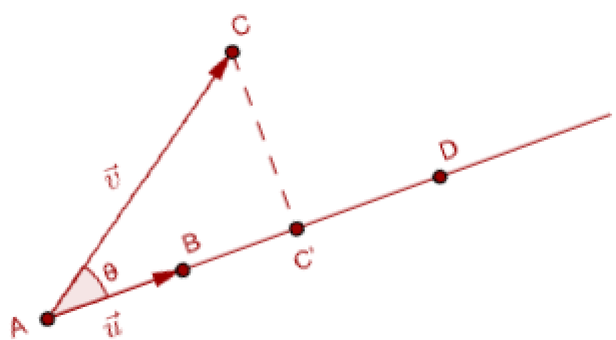
Metas Curriculares

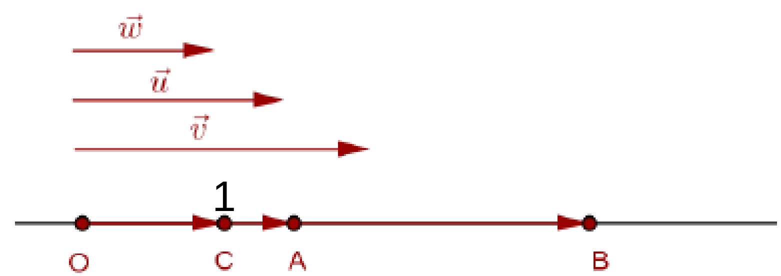
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Produto escalar

12. **Justificar**, fixado um referencial ortonormado do **espaço** e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço, que $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, começando por **justificar** que $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_3} = 1$ e $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3} = 0$.

Ilustra-se finalmente o modo como estes tópicos são tratados no caderno de apoio do 11º ano, reproduzindo-se algumas construções relativas às demonstrações acima assinaladas com o sinal +, mais uma vez ocasião para utilização de conhecimentos de **Geometria Euclidiana sintética**:





Metas Curriculares

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Produto escalar