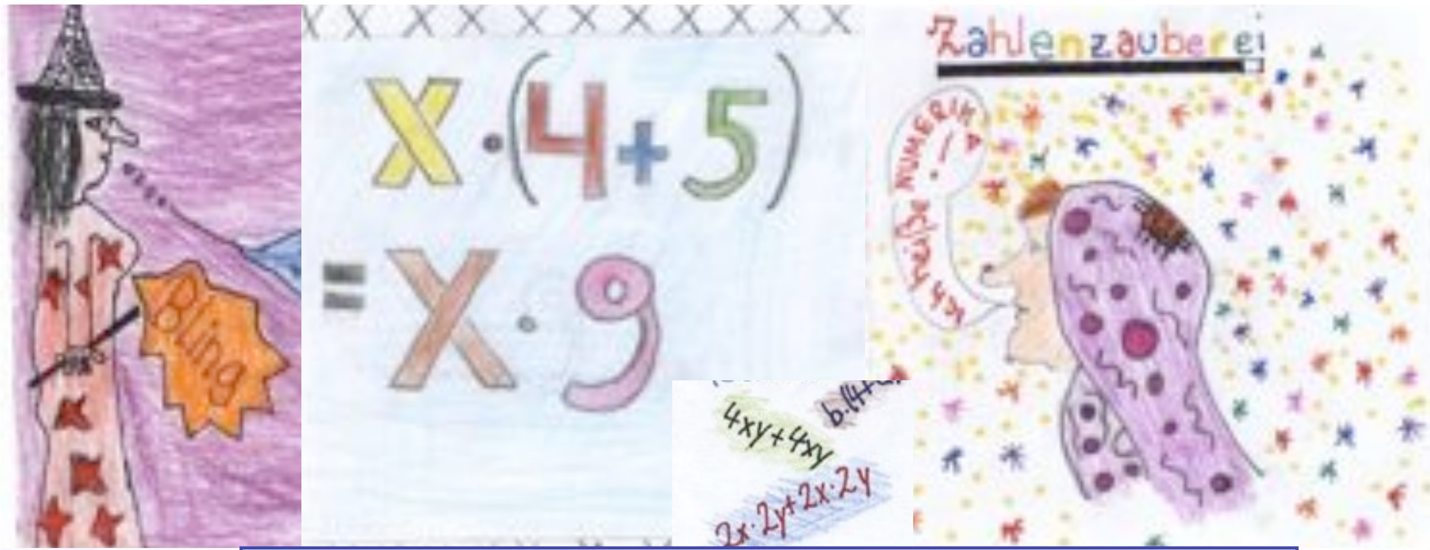
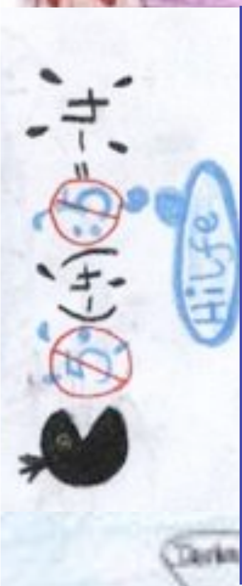




Landeslehrerprüfungsamt
Außenstelle beim
Regierungspräsidium Freiburg

Staatliches Seminar für Didaktik
und Lehrerbildung (Gymnasien)
Rottweil

Zweite Staatsprüfung für die Laufbahn
des höheren Schuldienstes an Gymnasien

Schriftliche Dokumentation im Fach Mathematik:

X-beliebig?

Dialogisches Lernen im Themenbereich Terme (Klasse 7 (G8))

von Studienreferendarin Maren Distel (Kurs 65)

Fachleiter: Ulrich Wagner

1 Einleitung

Im Vorwort zu „Eine kurze Geschichte der Zeit“ schreibt STEPHEN W. HAWKING [1]:

Man hat mir gesagt, dass jede Gleichung in einem Buch die Verkaufszahlen halbiert. Ich beschloss also, auf mathematische Formeln ganz zu verzichten. Schließlich habe ich doch eine Ausnahme gemacht: Es handelt sich um die berühmte Einsteinsche Formel $E=mc^2$. Ich hoffe, dies wird nicht die Hälfte meiner potenziellen Leser verschrecken.

In der vorliegenden Arbeit wimmelt es nur so von mathematischen Formeln und Termen. Da diese Dokumentation hauptsächlich von Mathematiklehrern[1] gelesen wird fürchte ich allerdings nicht um das Interesse der Leserschaft. Vielmehr möchte ich des Lesers Neugier auf die hier zu findenden Terme wecken, denn sie wurden nahezu alle von Schülern meiner Klasse 7 aufgestellt.
Diese Schüler stehen am Anfang ihrer algebraischen Karriere. Eine „Karriere“, die – laut Interviewergebnissen von GÜNTHER MALLE – die Hälfte aller Schulabgänger mit erheblichen Schwierigkeiten im Umgang mit Variablen beendet [2].

Die in meiner Klasse 11 zu beobachtenden Schwierigkeiten beim Lösen einfacher Gleichungen und beim Aufstellen von Termen bestätigen, dass auch heute noch – mehr als ein Jahrzehnt nach MALLES Untersuchungen - bei der Vermittlung algebraischer Grundkenntnisse in der Schule etwas falsch läuft.

Der bahnbrechende Erfolg von HAWKINGS Bestseller mag ein Indiz dafür sein, dass sich viele Menschen gegen Formelschreibweisen wehren und keinen Zugang zu diesen algebraischen Notationen haben. Oder, um es mit den Worten meiner Cousine Friederike auszudrücken: „Jetzt im Medizinstudium habe ich ein Statistikbuch entdeckt, das den Stoff mit Worten und nicht (nur) mit Formeln erklärt. Plötzlich verstehe ich alles!“

Die vorliegende Arbeit dokumentiert den Versuch, meinen Schülern der Klasse 7 den Start in das Thema Terme und Termvereinfachungen auf spielerische und „entdeckenlassende" Art und Weise näher zu bringen. Einige Aspekte der Methode des dialogischen Mathematikunterrichts nach GALLIN / RUF eignen sich meiner Meinung nach hierzu besonders gut. Sie hätten sicher auch meiner Cousine das Algebralernen in der Schule erleichtert…

Zunächst werde ich im Kapitel 2 erläutern, worin für mich der fachliche und didaktisch-methodische Reiz lag, eine dialogisch unterrichtete Unterrichtseinheit im Themenbereich Terme zu halten. Anschließend werde ich im Kapitel 3 die Planungsphase, die eine dialogische Unterrichtseinheit erfordert, näher beleuchten. In Kapitel 4 beschreibe ich dann die Durchführung der Unterrichtseinheit Terme und werde eine direkte Reflexion ausgewählter Unterrichtsstunden und Schülernotizen vornehmen. Im Kapitel 5 finden Sie schließlich eine zusammenfassende Gesamtanalyse der gehaltenen Unterrichtseinheit.

[1] Wenn im Folgenden von Lehrern bzw. Schülern die Rede ist so schließen diese Bezeichnungen zugunsten einer flüssigen Lesbarkeit beide Geschlechter mit ein.

2 Warum eine dialogische Unterrichtseinheit über Terme?

2.1 Fachliche Überlegungen

2.1.1 Die drei Aspekte des Variablenbegriffs

Der Nutzen von Variablen und algebraischen Formeln liegt laut MALLE darin, "allgemeine Sachverhalte darzustellen" [2]. Diese eigentlich einfache Erkenntnis erschließt sich Schülern oft nicht. Sie sollte daher – ausgehend von der Wortform eines Sachverhalts – behutsam über das Finden von Abkürzungen (sprich: Variablen) langsam entwickelt werden.
Der Weg zu dieser Erkenntnis kann durch verschiedene Tätigkeiten mit Formeln / Termen geebnet werden, hinter denen je ein oder auch mehrere der drei Aspekte des Variablenbegriffs hervortreten:

Tabelle 1: Aspekte des Variablenbegriffs (in Anlehnung an MALLE [2], S. 46)

Aspekt des Variablenbegriffs	**Charakteristika des Aspekts**	**Tätigkeit, bei der dieser Aspekt besonders zum Tragen kommt**
Gegenstandsaspekt	Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl oder Denkgegenstand	Zahlenzauberei (vgl. 4.4)
Einsetzungsaspekt	Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen einsetzen darf	Erstellung von Wertetabellen
Kalkülaspekt /Rechenaspekt	Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf	Termumformungen; Gleichungen lösen

In jeder Tätigkeit mit Variablen sind die drei Aspekte von Bedeutung: der Variablenbegriff kann also nicht auf einen davon reduziert werden.

MALLE erwähnt noch einen weiteren Aspekt: die „Variable als Veränderliche". Dieser ermöglicht es den Schülern, Abhängigkeiten in Formeln zu erkennen und bereitet sie auf den Funktionenbegriff vor. Dass dieser Aspekt in der dokumentierten Einheit ausgeklammert wurde, bedeutet nicht, dass er im elementaren Algebraunterricht keinen Platz haben sollte (für Unterrichtsanregungen: siehe MALLE [2], S. 88ff.).

2.1.2 Elementare Algebra – mehr als nur „Buchstabenrechnen"

Welch großer Gewinn hinter der "Darstellung allgemeiner Sachverhalte mit Hilfe von Variablen" steckt, lässt sich so formulieren ([2], S. 10):

Die Möglichkeit, mit Variablen Sachverhalte allgemein darzustellen lässt sich einsetzen zu allgemeinem <u>Problemlösen</u>, allgemeinem <u>Kommunizieren</u> (Mitteilen), allgemeinem <u>Argumentieren</u> (Begründen, Beweisen) und allgemeinem <u>Explorieren</u>.

In diesen Kompetenzen (vgl. auch 2.2.2 und 2.2.3) sieht MALLE die Begründung dafür, dass jeder Mensch die Sprache der elementaren Algebra beherrschen sollte. Didaktisch-methodische Wege, die dem Lehrer mit seinen Schülern hierzu zur Verfügung stehen werden in 2.2 näher beleuchtet.

2.2 Methodisch-didaktische Überlegungen

2.2.1 Algebraunterricht früher: 2 Extrembeispiele

GÜNTHER MALLE versucht in seinem sehr lesenswerten Buch „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ mit Hilfe von Interviews eine Erklärung für die Schwierigkeiten, die viele Schüler mit dem „Buchstabenrechnen“ haben, zu finden. Er führt u.a. zwei Unterrichtsideologien an, die früher (und auch noch heute?) weit verbreitet waren (vgl. [2], S. 14-26):

- Die Übungsideologie: Termumformungsregeln werden (vom Lehrer) bereitgestellt. Anschließend bearbeiten die Schüler dann unzählige stereotype Übungs- und Textaufgaben.
- Die Erklärungsideologie geht davon aus, dass man durch „klare und saubere Erklärungen Verständnisschwierigkeiten ausräumen und Fehler vermeiden kann“.

Beide Ideologien, auch die Kombination aus beiden, sind laut MALLE zum Scheitern verurteilt:
Beim stereotypen Üben der falschen, da meist zu komplexen Termumformungen kommt das *bewusste* Anwenden von Umformungsregeln zu kurz, das Wesentliche gerät aus dem Blickfeld: einfache Terme können weder aufgestellt noch korrekt interpretiert werden.
Die Erklärungsideologie muss scheitern, da sich hier laut GALLIN/RUF „der Unwissende dem Diktat des Wissenden [hier: der Lehrperson] unterwirft“ [3]: eigenes, konstruktives Reflektieren bleibt also außen vor. Zudem krankt die Erklärungsideologie daran, dass hierbei – teils in Form von grotesker Begriffshaarspalterei - hauptsächlich über die algebraischen Inhalte wie Variablen, Terme und Gleichungen *gesprochen* wird, diese Inhalte aber kaum *gebraucht* werden [2].

2.2.2 Der Themenbereich Terme und die neuen Bildungsstandards

Die Schüler meiner Klasse 7c gehören zu dem Schülerjahrgang, der als erster das Gymnasium nach nur acht Jahren mit dem Abitur abschließen wird. Für diese sog. G8-Klassen sind die Bildungsstandards verbindlich. Sie geben vor, welche allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen die Schüler in dem jeweiligen Fach auf einer Klassenstufe erwerben sollen.
Die Strukturierung letzterer, also der inhaltsbezogenen Kompetenzen, erfolgt anhand sog. „Leitideen“. Charakteristisch für die Leitideen ist, dass sie über Fachinhalte hinweg Kompetenzen festlegen, die vernetztes und sachübergreifendes Denken fördern sollen [4]. So orientieren sich die Kompetenzen für das Thema Terme und Termumformungen nicht nur an der Leitidee „Variable“, sondern auch an den Leitideen „Vernetzung“ sowie „Modellieren“(vgl. [4]: Klasse 8).
Viele Lehrer fühlen sich verunsichert, wenn sie das erste Mal ihren Unterricht an den zu erreichenden Kompetenzen ausrichten sollen. Ein Blick in das Buch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ von WERNER BLUM ET AL. mag hier eine Hilfe sein:
Überraschenderweise finden sich hier bei der Beschreibung der Kompetenz K5 *„Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“* vieles, was an die unter 2.1.1 beschriebene Übungsideologie erinnern mag:

Die Schüler sollen u.a. das formale Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen usw. beherrschen, sie sollen Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen können. Betont wird hierbei, dass „entlastende *Routinen* ausgebildet werden sollen, die das Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen erleichtern und das Betreiben von Mathematik, insbesondere das Übersetzen zwischen Realität und Mathematik, *„werkzeughaft“* unterstützen können.“ (vgl. [5], S. 47).

Zur unter 2.1.1 beschriebenen Übungsideologie möchte ich daher anmerken, dass das Üben an sich auf keinen Fall verteufelt werden soll. Gerade im Themenbereich Termumformungen ist es notwendig, dass die Schüler das Gelernte einüben. Verwiesen sei hier auf *sinnvolle* Übungsaufgaben und Aufgaben zur Vertiefung, die auch Teil der hier dokumentierten Unterrichtseinheit sind und im Kapitel 4 näher vorgestellt werden.

Wirft man allerdings einen zweiten Blick auf die beschriebene Kompetenz K5, so wird deutlich, dass das reine handwerkliche Erlernen und durch exzessives Üben gefestigte Schulen von Termumformungen zu kurz greift. So sollen die Schüler zwar routiniert Terme und Gleichungen umformen können, aber hauptsächlich, um dadurch „Strukturen und Zusammenhänge leichter zu erkennen“ (s.o.), kurz: um Mathematik betreiben zu können. Das Thema Terme und Termumformungen tritt also als „Mittel zum Zweck“ zu Tage und nicht, wie bei den unter 2.1.1 beschriebenen Ideologien als „Selbstzweck“.

Die Schlüsse, die ich daraus ziehe, sind folgende. Zeitgemäßer Algebraunterricht - auch im „übungsaffinen“ Themenkomplex Termumformungen - muss beides leisten:

1) Die Schüler müssen in den Entwicklungsprozess der Termumformungsregeln (ausgehend von den aus Klasse 6 bekannten „Regeln zum geschickten Rechnen“) mit eingebunden werden. Hierbei erhalten sie Gelegenheit, ihr mathematisches Denken, ihr Wissen von Zusammenhängen und Strukturen (z.B. beim Termaufstellen zur Flächenberechnung) anzuwenden, zu überprüfen und weiter auszubauen.
2) Anschließend müssen die Schüler die Gelegenheit bekommen teilweise mit Hilfe traditioneller, aber vor allem auch mit neuen, offeneren Übungsaufgaben das Gelernte zu festigen und ihre eigenen Ideen weiter einzubringen.

Zu Punkt 1) - um es mit den Worten von BLUM ET AL. auszudrücken: „*Symbolisch/technisch/formales Arbeiten* verständig auszuführen bedeutet auch, deren Gültigkeitsbereich und Voraussetzungen zu thematisieren.“ ([5], S. 35).

Obige Forderungen machen deutlich, dass ein an den Leitideen und Kompetenzen orientierter zeitgemäßer Mathematikunterricht zur befriedigenden Umsetzung der Standards zusätzlich folgendes leisten muss:
Er muss die Schüler zur Selbsttätigkeit anregen, muss jedem Schüler die Möglichkeit geben, sich in seinem Tempo und mit der ihm möglichen Intensität mit mathematischen Problemstellungen auseinandersetzen zu können und er muss ein Umfeld bieten, in dem über Mathematik kommuniziert, ja diskutiert wird.

Hierbei greifen Aspekte eines dialogischen Mathematikunterrichts (kurz: DMU) nach GALLIN / RUF gewinnbringend in die Umsetzung der Bildungsstandards ein:

2.2.3 Dialogischer Mathematikunterricht (DMU) nach GALLIN / RUF

Für Schüler – und Lehrer! – unbefriedigender Mathematikunterricht ist oftmals dadurch gekennzeichnet, dass der Stoff fernab von der Erlebniswelt der Lernenden ist und bleibt: Die Schüler konsumieren die im Unterricht erarbeiteten Sachverhalte, sie reproduzieren sie in der Klassenarbeit, um danach vieles davon wieder zu vergessen. Oder – um PETER GALLIN UND URS RUF, die beiden großen Schweizer Didaktiker, auf die diese Methode zurückgeht, zu zitieren [6]:

Der Stoff vermag kein konstantes und dauerhaftes Engagement der Schüler zu erzeugen. […] Mathematik erfahren sie [die Schüler] als abgeschlossenes Formelgebäude, das von ihren individuellen Regungen und Handlungen unberührt bleibt.

Als hätten sich die Autoren abgesprochen, zieht MALLE aus seinen Interviewergebnissen folgenden Schluss ([2], S. 10 unten):

Die Defizite vieler Menschen im Bereich der elementaren Algebra liegen darin begründet, dass die elementare Algebra für viele Menschen nicht so wichtig sein kann, wie in der Schule meist getan wird. Denn wenn es Menschen gibt, die ein akademisches Studium bewältigen […] ja mehr noch: ohne ihre Defizite in elementarer Algebra jemals zu bemerken, dann kann dieses Stoffgebiet für diese Personen nach der Schule keine nennenswerte Rolle mehr spielen.

Nichtsdestotrotz betont er, wie wichtig die elementare Algebra aufgrund der unter 2.1.2 genannten Aspekte für *jeden* Menschen ist. Interessanterweise beschreiben MALLES Vorschläge zur Verbesserung des Algebraunterrichts exakt die Methode des DMU: „Erklärung des Lehrers – Üben der Schüler“ soll durch das „konstruktivere Unterrichtsschema „Eigenes Probieren der Schüler – Berichten – Reagieren des Lehrers“ ersetzt werden“ ([2], S. 120).
Hierdurch sah ich mich endgültig bestärkt, den Themenbereich Terme dialogisch zu unterrichten. Doch was genau verbirgt sich hinter der mit MALLES Schlagworten kurz umrissenen Methode?

Charakteristisch für den DMU ist das Lernen mit Lerntagebüchern und Reisejournalen. In diese notiert und kommentiert der Schüler seine Gedanken zu einer vorher vom Lehrer gestellten bzw. gemeinsam entwickelten Kernidee. Von welcher Art die Notizen sind – ob z. B. auch in Form einer Geschichte – ist den Schülern frei gestellt.
Durch diese individuelle, schriftliche Auseinandersetzung mit der Mathematik bekommt das Thema für den einzelnen Schüler Relevanz:

Der DMU stellt zwar „traditionsreiche fachliche Objekte wie Gleichungen ins Zentrum des Unterrichts, erlaubt es den Lernenden aber, sich diesen Objekten auf ihren eigenen Wegen zu nähern. Nicht die Schnelligkeit und Fehlerlosigkeit […] ist hier das entscheidende Qualitätsmerkmal, sondern Intensität und Eigenständigkeit beim Einsatz persönlicher Kompetenz.“ ([3], S. 7).
Hiermit erklärt sich auch der Titel meiner Dokumentation: Die Schüler lernen auf „X-beliebigen“, also eigenen Wegen den Umgang mit Variablen und Termen. Das „X-beliebig“ wird allerdings mit einem Fragezeichen relativiert, da im Endeffekt dann doch die traditionellen Regeln erlernt werden.

Dass die Auseinandersetzung der Schüler mit dem Stoff schriftlich passiert hat einen guten Grund (siehe GALLIN / RUF [3]):

Beim Schreiben verlangsamen und klären sich Gefühle und Gedanken, nehmen Gestalt an und fordern Stellungnahme heraus. Wer schreibt übernimmt in besonderer Weise Verantwortung für seine Position und öffnet sich der Kritik.

Die Rückmeldung zu den gemachten Notizen erfolgt durch den Lehrer (teils auch in der „Sesseltanzmethode“ durch die Schüler). Fehler werden hier vom Lehrer nicht nur toleriert, sondern teils auch als „tolle Fehler“ besonders gewürdigt! (vgl. Bewertungskriterien nach HETTRICH: [7], S. 31).
Ein großes Problem, das sich in der Schule häufig aufgrund der „Doppelrolle der Lehrkraft als *Arzt* und *Richter*“ ergibt, ist damit (zumindest teilweise) entschärft: die Defizite, das „Noch-nicht-Wissen“ bzw. „Noch-nicht-Können“ eines Schülers wird nicht als „entmutigendes Ungenügen“ erlebt, sondern führt zu einem Zustand „produktiver Spannung“ (vgl. [3]). Die „Wegbewertung“ tritt in den Vordergrund, die „Produktbewertung“ in den Hintergrund. Diese „Der Weg ist das Ziel“ – Philosophie stärkt die jungen Menschen auch außerhalb der Schule und macht sie zu selbstbewussten, frustrationstoleranten, mündigen Bürgern.

Damit trifft der DMU den Kern der oben aufgeführten zusätzlichen Kriterien eines schüleraktivierenden Mathematikunterrichts. Zudem trägt die Methode zur Ausbildung der in den Bildungsstandrads für das Gymnasium genannten vier „überfachlichen Kompetenzbereiche“ bei (siehe [4] unter „Leitgedanken zum Kompetenzerwerb“):

1) **Lernen** (→ „den eigenen Lernprozess vorstrukturieren, organisieren und dokumentieren)
2) **Begründen** (→ „in mathematischen Kontexten Vermutungen entwickeln, formulieren und untersuchen“)
3) **Problemlösen** (→ „das eigene Denken beim Problemlösen kontrollieren, reflektieren und bewerten und so neues Wissen aufbauen“)
4) **Kommunizieren** (→ „mathematische Sachverhalte mit Hilfe von Sprache, Bildern und Symbolen beschreiben und veranschaulichen…“)

Der Leser mag selbst entdecken, dass hiermit eine Brücke zu dem unter 2.1.2 genanntem Nutzen von elementarer Algebra geschlagen ist!

MONICA HETTRICH ist, zusammen mit der Arbeitsgruppe DMU, Vorreiterin für die Umsetzung und Weiterentwicklung des DMUs an deutschen Gymnasien. Sie hat zu den vier Bausteinen → „Kernidee“ → „Arbeitsauftrag“ → „Lernjournalnotizen durch den Schüler“ → „Rückmeldung“ einen weiteren Baustein ergänzt: → die Präsentation der Ergebnisse durch einen Schüler (siehe [8]).
Dies ist ein weiterer Beitrag zum überfachlichen Kompetenzbereich „Kommunizieren“: „Lern- und Arbeitsergebnisse verständlich und übersichtlich in schriftlicher und mündlicher Form präsentieren“ sowie „mathematische Dialoge führen; auf Einwände eingehen und Gegenargumente entwickeln“ (siehe [4]).

Wie welche Aspekte dieser Methode, „die ein ganzer Blumenstrauß von Methoden ist" (Zitat: U. Wagner), in die hier dokumentierte Unterrichtseinheit eingeflossen sind, soll im Folgenden erläutert werden.

3 Wege zu einem DMU – Herausforderung für Schüler und Lehrer

Wenn Schüler zum ersten Mal mit dem DMU konfrontiert werden liegen die Schwierigkeiten häufig darin, sie zum Schreiben zu motivieren. Viele weigern sich strikt „in Mathematik Deutsch zu machen“ [8].

Auf der anderen Seite bedeutet diese Methode auch eine Herausforderung für die Lehrkraft: vom Finden einer geeigneten Kernidee über das adäquate (Nicht-) Reagieren während der schüleraktiven, sehr offenen Reisetagebucharbeitsphase birgt der DMU auch für den Lehrer viele Stolpersteine.

Maßnahmen, die ich im Rahmen der Unterrichtseinheit Terme unternommen habe, um meinen Schülern und mir den Weg zu einem dialogischen Unterricht zu ebnen, werde ich in den folgenden Abschnitten erläutern:

3.1 Meine Dialogpartner: Arbeiten mit der Klasse 7c

3.1.1 Die Klasse allgemein

Die Klasse 7c des Hegau-Gymnasiums in Singen besteht aus 15 Mädchen und 18 Jungen. Trotz ihrer Größe von 33 Schülern war sie schon als 6c im vergangenen Schuljahr als eine der arbeitswilligsten und diszipliniertesten Klassen der Schule bekannt. Aufgrund ihrer Beliebtheit bei Referendaren und Praktikanten hatte ich erst gegen Ende des letzten Schuljahrs - während der heißen Phase vor den Diagnose- und Vergleichsarbeiten - die Möglichkeit, mir während ein paar Hospitationsstunden ein Bild von der Klasse zu machen.
Glücklicherweise wurde mir die Klasse dann tatsächlich zu Beginn dieses Schuljahrs für den eigenständigen Unterricht anvertraut. Während einer – der Dokumentationseinheit vorausgehenden - Unterrichtseinheit über Geometrie konnte ich die Klasse schließlich aus Lehrerperspektive kennenlernen…
Meine Erwartungen aufgrund der wenigen Hospitationsstunden in der damaligen 6c wurden weit übertroffen! Das Leistungsniveau ist zwar „nur“ guter Durchschnitt, doch ist die Freude an mathematischen Fragestellungen und das Interesse an Mathematik in dieser Klasse enorm. Dies äußert sich in hervorragender Mitarbeit und einer überdurchschnittlichen Diskussionsbereitschaft. Beste Voraussetzungen also für die DMU-Methode.
Was sich paradiesisch anhört birgt aber auch Hindernisse: das Mitteilungsbedürfnis der Schüler ist so groß, dass *jeder* einen unmittelbaren *mündlichen* Beitrag leisten möchte. Hierbei fällt es den Schülern oft schwer, auf die jeweiligen Beiträge der Mitschüler zu hören – Mehrfachnennungen an Lösungsansätzen sind vorprogrammiert. Diese stark an die mündliche Mitarbeit gewöhnte Klasse galt es nun auf die hauptsächlich schriftliche DMU-Methode vorzubereiten…

3.1.2 Vorbereitung der Schüler auf die DMU-Methode

Das Methodencurriculum für den DMU ist sehr umfangreich. Das Fundament hierfür muss schrittweise gelegt werden – am besten angefangen in Klasse 5 (vgl. HETTRICH in [7], S. 41). Die methodischen Lernziele reichen von Lese- und Schreibkompetenz über Präsentations- bis hin zur Medienkompetenz.

Nun sind meine Schüler schon in Klasse 7, was für die dokumentierte Unterrichtseinheit eine Einschränkung der Lernziele bezüglich dieser Kompetenzen erforderte.

Eine der ersten Fragen, die sich ein Lehrer stellen muss, wenn er zum ersten Mal eine Klasse dialogisch unterrichten möchte ist: Wie motiviere ich die Schüler dazu, über ein mathematisches Thema zu schreiben und wie vermittle ich die hierzu notwendige Lese- und Schreibkompetenz?
Ich wollte mich schon mit der zukünftigen Deutschlehrerin der Klasse über eine fächerübergreifende Zusammenarbeit zu diesem Thema kurzschließen, da ergab sich gegen Ende der Sommerferien eine überraschende Antwort auf die Frage:
Ich erhielt die Zulassungsarbeit von SARAH BREGENZER, Referendarin im Kurs 64: sie hatte eine Einheit mit dem Titel „In Mathe Lernen lernen“ gehalten – und zwar in „meiner“ zukünftigen Klasse 6c.
Bei der Lektüre von Sarahs umfangreichem Werk über verschiedene Lernmethoden ergab sich, dass sie auch schon mit Elementen des DMUs gearbeitet hatte.
Genauer: sie hatte in der Klasse schon ein sog. „Lerntagebuch“ eingeführt, in die die Schüler Merksätze über schon bekannten Stoff selbstständig und mit eigenen Worten zusammenfassten. Form und Aufbau eines solchen „Nachschlagewerks“ wurden hierbei mit den Schülern schon entwickelt (siehe [9], S. 20ff.). Beim Führen des Lerntagebuchs stand die Forderung, dass die Merksätze in eigenen Worten formuliert werden sollten im Vordergrund. Zudem gab Sarah den Schülern den Auftrag, bei Unklarheiten Fragen selbstständig schriftlich zu fixieren.

Im Sinne eines echten „Spiralcurriculums“ konnte ich also an die hier schon erworbene Schreibkompetenz der Schüler anknüpfen.
Dies geschah, indem ich zu Beginn des Schuljahrs die Idee des „Lerntagebuchs“ gemeinsam mit der Klasse zu einem sog. „Knobeltagebuch“ erweiterte. Wie genau damit an der Schreib- aber auch Lese- und Präsentationskompetenz weitergearbeitet wurde, soll Teil der Präsentation zu dieser Dokumentation sein.
Um dem Leser nicht ganz vorzuenthalten, was man unter dem „Knobeltagebuch“ versteht sei hier auf den Brief im Anhang verwiesen.

Die Präsentationsphase ist ein weiterer Baustein des DMU, auf den die Schüler in einem nächsten Schritt vorbereitet werden müssen. Da die hier dokumentierte Einheit relativ zu Beginn des ersten Schulhalbjahrs stattfand, wurde hieran nicht explizit gearbeitet. Wenn sich aber die Gelegenheit ergab, einen Schüler seine Ergebnisse präsentieren zu lassen, wurde sie genutzt. Anregungen zur Schulung der Präsentationskompetenz finden sich bei HETTRICH [7] auf S. 48f.

3.2 Der Lehrer in der Regisseur- und Statistenrolle

Sind die Schüler erst einmal daran gewöhnt, ihre Gedanken zu einer mathematischen Fragestellung nieder zu schreiben, so verlagert sich die Herausforderung im dialogisch unterrichteten Mathematikunterricht vom Schüler auf den Lehrer.

3.2.1 Planung der dialogischen Unterrichtseinheit Terme

Dialogisches Lernen ist aufs Offene ausgelegt. Wohin die Reise führt ist nicht ausgemacht. Wenn sich Lehrende und Lernende im Unterricht begegnen, wenn ihre Beiträge im steten Wechsel das Geschehen im Unterricht strukturieren, ist nicht voraussehbar, welches der übernächste Schritt sein wird. […] Es ist unmöglich, zu Beginn des Semesters ein Programm zu erstellen, welche Inhalte zu welchem Zeitpunkt behandelt sein werden. Eine derartige Segmentierung der Stoffe ist unvereinbar mit dem dialogischen Prinzip. (GALLIN und RUF, [3], S. 10).

Dieses Zitat verdeutlicht sehr gut, worin die Schwierigkeiten bei der Planung einer runden, abgeschlossenen „auf 8 bis rund zwölf Stunden beschränkten“ dialogischen Dokumentationseinheit liegen.

Nach besten Wissen und Gewissen habe ich mich in den Sommerferien daran gemacht, die Unterrichtseinheit Terme zu planen. Bei der tatsächlichen Durchführung wurden allerdings einige Stunden ergänzt. Die Gründe hierfür sind vielseitig: teils weil von den Schülern (nonverbal) zusätzlich Übungsstunden gefordert wurden oder weil sich aufgrund von Schülerbeiträgen (doch) eine Kurzpräsentation o. ä. anbot. Vor allem letztere hinzugefügte Stunden sind Stunden von zentraler Bedeutung – würdigen sie doch die Bemühungen der Schüler, die ja im Mittelpunkt des Geschehens stehen!

<u>Die Grobplanung der Unterrichtseinheit umfasst 2 Phasen:</u>

Phase I: dient der Wiederholung und Erweiterung des Klasse 6-Wissens zum Thema Terme und Termaufstellung.

Phase II: Ausgehend von ihrem Wissen über die „Regeln zum geschickten Rechnen“ sollen die Schüler hier Termumformungsregeln erarbeiten.

Der Einheit vorgeschaltet war ein Lernzirkel zur Wiederholung der „Regeln zum geschickten Rechnen“ (siehe Materialien-CD).
Diese wurden – so dachte ich zumindest in der Planungsphase - als Lernvoraussetzungen in Phase II benötigt. Zudem hatten die Schüler hier nochmals die Gelegenheit mit der von S. BREGENZER eingeführten Lerntagebuchmethode (s. 3.1.2) zu arbeiten: sie sollten selbstständig Merksätze formulieren und geeignete Beispiele notieren.

Phase I und II sollten die Schüler in einem dialogischen Unterricht erarbeiten. Die Planung der einzelnen Stunden stellte mich vor eine weitere große Herausforderung:

3.2.2 Der Lehrer als Regisseur oder „Auf der Suche nach Kernideen“

Die Kunst und auch der Knackpunkt beim Vorbereiten dialogischer Unterrichtsstunden ist es, eine geeignete Kernidee zu entwickeln, die den Schülern als Initialzündung zum Lernen auf eigenen Wegen dient.

Liest man GALLIN und RUFS Definition einer Kernidee, so wird deutlich, was eine Kernidee alles leisten muss ([6], S.88):

Kernideen sind keimfähige Konzentrate von komplexen und hochdifferenzierten Zusammenhängen. Sie können ohne großen Aufwand mitgeteilt werden: ein paar Sätze, eine Geste, eine Skizze genügen. […] Wer einer echten Kernidee begegnet, hat nicht nur das Gefühl, eine Schwelle zu überschreiten, einen Zugang zu etwas scheinbar Schwierigem zu finden […]; er spürt auch das Bedürfnis sich eingehender mit dem anvisierten Fachgebiet zu befassen.

Die Idee der Einfachheit gepaart mit dem Anspruch das Tor zu einem hochkomplexen Fachgebiet für Laien zu öffnen empfinde ich als sehr schwer.
Selbst GALLIN und RUF sehen in der Didaktik der Kernideen die Gefahr der „Überforderung durch den Lehrer“. Sie fordern daher eine Reform der Lehrerausbildung: „an Stelle der Trockenübungen im Planen von Klassenunterricht“ und der „methodischen Zergliederung des Stoffs“ fordern sie eine „individuelle Vertiefung und Strukturierung des Fachwissens“ ([6], S. 84).

Vor der Entscheidung, welches Thema ich im Rahmen meiner Dokumentation dialogisch bearbeiten möchte, stand daher die Frage: in welchem Fachgebiet traue ich mir zu, Kernideen zu finden?
Lange spielte ich mit dem Gedanken ein Geometrie-Thema dialogisch anzupacken. Hierüber gibt es aber schon zu nahezu allen Themen Materialien von M. HETTRICH und der Arbeitsgruppe DMU. Deshalb machte ich mich auf die Suche nach einem Thema, zu dem - zumindest meiner Kenntnis nach - noch keine ausgefeilten Arbeitsaufträge existieren.

Zu dem Thema Terme, insbesondere Termumformungen, habe ich mich dann entschlossen, weil die Geometrie hier als „Hilfswissenschaft“ dient.
Hinter der Vorgehensweise algebraische mittels geometrischer Sachverhalte (und umgekehrt!) erarbeiten zu lassen steckt die Intention, die Schüler Zusammenhänge zwischen den Fachgebieten entdecken zu lassen. Dies ist zum einen Lernziel der „Gleichungslehre“ (vgl. Handout zur Fachdidaktik-Sitzung von U. Wagner), zum anderen gibt sie dem Lehrer durch die „Skizze-Term-Dualität“ Aufschlüsse darüber, wie Schüler denken und welche Vorstellungen sie haben. Ein wichtiger Punkt, wenn man bedenkt, dass durch das G8 heute schon Sechstklässler mit Termen umgehen sollen, obwohl sie durch ihre hirnphysiologische Entwicklung eventuell noch gar nicht so weit sind, das Thema verstehen zu können (besprochen in der Fachdidaktik-Sitzung am 22.5.2006).
Zudem gibt eine geometrische Herangehensweise den Schülern die Möglichkeit, sich auf anschauliche Weise den Themenbereichen Termaufstellung und Termumformung zu nähern.

Beim Erstellen der Arbeitsblätter bin ich daher dem Rat von M. HETTRICH gefolgt, den sie in [8] auf S. 17 so formuliert:

Anfangs sollte es immer eine Aufgabe von geringem abstraktem Gehalt, dafür aber mit Möglichkeiten zum Ausprobieren, Zeichnen, Ausschneiden, Legen etc. geben. Daran können sich Aufgaben mit steigerndem Abstraktionsgrad und Anreize für Beweise, allgemeine Formulierungen usw. anschließen.

Entsprechend regt der erste Arbeitsauftrag „Streichholzknobeln“ in Phase I die Schüler dazu an, sich dem schon in Klasse 6 eingeführten abstrakten Thema des Termaufstellens durch Streichholzlegen nochmals zu nähern. Hierzu wurden jedem

Schüler etwa 10 Streichhölzer ausgeteilt. Erwähnen möchte ich hier noch, dass in Aufgabe 2) des Arbeitsblatts der Kalkülaspekt (siehe 2.1.1) in Form von heuristischem Gleichungslösen à la Klasse 6 ebenfalls mitschwingt.

In Phase II durchzieht das Aufstellen von Termen zur Flächeninhalts- bzw. Volumenberechnung als „roter Kernideefaden“ das Thema Termumformungen. „Das Knobeln geht weiter…“ ist hierzu die Einführungsaufgabe.

Schließlich hebt sich der Arbeitsauftrag „Déjà-vu“ von den restlichen Arbeitsblättern insofern ab, als dass er ein direkter Rückgriff auf die Lernzirkel-Station „Flächeninhalte auf zwei Arten berechnet“ ist. Wie der Name der Station schon sagt, wird auch hier die Idee der Flächeninhaltsterme wieder aufgegriffen. Bei diesem Auftrag haben mich die Schüler aber spüren lassen, dass es sich hier um keine fruchtbare Kernidee handelt.
Dies und andere Erfahrungen mit den Arbeitsblättern sind Thema im Kapitel 4.

Nach den hier beschriebenen stark gelenkten Arbeitsaufträgen zeichnen sich die weiteren durch immer offenere Aufgabenstellungen aus. Dies gipfelt in der „Numerika-Umkehraufgabe“ und dem Wettbewerb zum Flächeninhaltsaufstellen. Bei letzterem ist mir sehr deutlich bewusst geworden, worin die Herausforderung für Lehrkräfte *während* des dialogischen Unterrichts liegt…

3.2.3 Der Lehrer als Statist oder „Wie begleitet man Schüler beim Lernen auf eigenen Wegen?“

Wie bei allen offenen Unterrichtsformen mit *Open Ended Approach* (OEA), bei dem der Lehrer die Verantwortung zur Erarbeitung eines Stoffgebiets an seine Schüler abgibt, liegt die Schwierigkeit auch beim DMU im „Loslassen“ bei gleichzeitigem vorsichtigem Lenken durch Impulse.
HETTRICH spricht von „aktiver Präsenz“: der Lehrer muss für Fragen zur Verfügung stehen, darf auch Tipps geben, sollte sich aber hüten, hierdurch zu viel vorweg zu nehmen ([8], S. 18). Diese Impulse in der jeweiligen Unterrichtssituation spontan parat zu haben erfordert eine enorme Übersicht über das Fachgebiet und ein großes Maß an Flexibilität.
Besonders wichtig ist es auch, als Lehrer zu schweigen, wenn ein von den Schülern eingeschlagener Weg offensichtlich nicht zum Ziel führt. Hier die richtigen Worte der Ermunterung zu finden, die es dem Schüler ermöglichen, seine „Ideen *bewusst* zu verwerfen“ [8] (was immens wichtig ist!) stellt eine große Herausforderung dar.

Während meiner Arbeit mit der Klasse 7c kam erschwerend hinzu, dass die Schüler – wie unter 3.1.1 beschrieben – besonders stark an mündliche Mitarbeit und damit auch an direkte Rückmeldung des Lehrers auf gerade erst keimende Ideen gewöhnt sind.
Inwiefern mir das „impulsgebende Loslassen“ gelungen ist soll u.a. in Kapitel 4 reflektiert werden.

3.3 Weitere Rahmenbedingungen

Folgende Rahmenbedingungen mussten bei der Durchführung der Unterrichtseinheit Terme in der Klasse 7c zusätzlich berücksichtigt werden:

3.3.1 Wechsel des Lehrbuchs

Zu Beginn des neuen Schuljahrs wurde am Hegau-Gymnasium das Lehrbuch „Lambacher Schweizer“ (kurz: LS; [12]) durch das Lehrbuch „Elemente der Mathematik“ [13] ersetzt.
Dieser Wechsel gestaltete sich insofern als problematisch, als dass ich mich bei der Sichtung der Lernvoraussetzungen am Kapitel V im „LS 2“ orientieren musste. Diese aber mit den Lernvoraussetzungen, an die Kapitel 2 in „Elemente der Mathematik 3“ anknüpft, nicht vereinbar sind.
Kurz zusammengefasst ergab ein Vergleich der Schulbücher für Klasse 7 im Themenbereich Termumformungen folgendes:
Der „LS 3“ geht – anknüpfend an das Buch aus Klasse 6 – „grobschrittig“ voran und lässt die Schüler an die Erkenntnisse der „Regeln zum geschickten Rechnen“ (Kapitel V im „LS2“) anknüpfen.
Die Schulbuchautoren des Schroedel-Verlags unterteilen das Thema in „Elemente der Mathematik 3“ in viele kleine Teilaspekte, ja sogar unterschiedliche Kapitel im Buch. Das Vorgehen ist hier streng formal-mathematisch und damit strikter vorgegeben.
Den „LS3“ hätte ich mir daher als Begleitbuch zu meiner dialogischen Einheit lieber gewünscht.
Das neue Schulbuch bis auf Übungsaufgaben völlig außer Acht zu lassen war allerdings auch nicht sinnvoll: die Schüler der 7c sind – nach Auskunft des Fachlehrers aus der 6. Klasse – sehr daran gewöhnt, mit dem Mathematikbuch zu arbeiten und es auch zum Lernen zu benutzen. Es musste also ein Kompromiss gefunden werden:
Meine Arbeitsaufträge waren größtenteils auf eine offen-heuristische Erarbeitung des Themas à la Klett ausgelegt. Die 2. Termumformungsregel ([13], S. 72: „Multiplizieren / Dividieren eines Produkts mit / durch eine Zahl“) ließ ich die Schüler mit Hilfe der Übungsaufgaben im Buch erarbeiten – ohne dialogischen Arbeitsauftrag.

3.3.2 Wechsel des Lehrers nach der Einheit

Durch meine Drei-Fächer-Kombination übernahm ich im Dezember eine Klasse 6, in der ich meine Lehrprobe im Beifach Englisch absolvierte. Die Stunden lagen parallel zu den Stunden in meiner 7c, weshalb ich die Klasse den ganzen Dezember über an eine Kollegin abgeben musste.
Die zweite Klassenarbeit sollte daher auf Wunsch der Schulleitung möglichst vor Dezember geschrieben werden. Dies hatte zur Folge, dass auf Seiten der Schüler – v.a. im Themenbereich Termumformungen – die Nachfrage nach konventionellen Übungsaufgaben wuchs und hierfür einige Stunden zusätzlich eingeplant werden mussten.

4 Durchführung der Unterrichtseinheit

Die in 3.1 und 3.2 geschilderten Schritte zu einem DMU machen deutlich, weshalb ein Lehrer nicht „von heute auf morgen“ mit dem *rein* dialogischen Unterrichten beginnen kann. Ich erhebe daher auf meine Dokumentationseinheit nicht den Anspruch, sie sei eine nach der Methodik des DMU „mustergültig“ unterrichtete Einheit. Denn was im DMU für den Schüler gilt, gilt eben spannenderweise auch für den Lehrer: der Weg zum dialogischen Unterrichten ist ein Entwicklungsprozess und führt über Irrwege, Fehleinschätzungen und daraus erwachsenden Erkenntnissen zu einem besseren Mathematikunterricht.
Daher wurde mir – häufig erst während des Unterrichtens – klar, dass das ein oder andere ergänzt werden muss oder sogar ein Wechsel zum „konventionellen Unterrichtsgespräch“ angezeigt ist. Bei alledem versuchte ich aber das Tun der Schüler sowie ihre Erlebniswelt ins Zentrum des Unterrichtsgeschehens zu stellen.

4.1 Lernvoraussetzungen und Lernziele

4.1.1 Lernvoraussetzungen

Aus Klasse 6 ist den Schülern folgendes bekannt (vgl. „Lambacher Schweizer 2“, Kapitel V):

- Variable x; einfache Terme mit einer Variablen aufstellen
- Rechenbäume; Grundregeln für Rechenarten
- „Weglassen von Malpunkten“: $3 \cdot x = 3x$
- Lösungsstrategien für einfache Gleichungen:
  1) geschicktes Ausprobieren
  2) „rückwärts rechnen“ mit Hilfe eines Rechenstrichs / einer Umkehrrechnung

4.1.2 Lernziele

Aus der Planung ergeben sich folgende Lernziele:

<u>Lernziele der Phase I ((vgl. 3.2.1); Vertiefung und Erweiterung des Klasse 6-Wissens):</u>

Die Schüler sollen…

- Strategien zum Aufstellen von Termen mit einer und mehr Variablen entwickeln und diese selbstständig notieren.
- Wertetabellen für Terme mit zwei und mehr Variablen erstellen.
- die „Wortform“ in die „Termform“ übersetzen und umgekehrt.

<u>Lernziele der Phase II (Termumformungen):</u>

Die Schüler sollen…

- erkennen, wann zwei Terme wertgleich zueinander sind.
- ausgehend von den „Regeln zum geschickten Rechnen“ folgende Termumformungsregeln herleiten:
  1) Zusammenfassen gleichartiger Glieder / Vereinfachen von Summentermen
  2) Ausklammern und Ausmultiplizieren
- die Multiplikation und Division einfacher Terme beherrschen
- Terme routiniert vereinfachen können.

Überfachliche Lernziele:

Eine ausführliche Beleuchtung der überfachlichen Lernziele dieser Einheit findet man in den Kapiteln 2.2.2, 2.2.3 sowie 3.1.2. Sie seien hier nochmals stichwortartig zusammengefasst:

Die Schüler sollen…
- sich individuell mit mathematischen Fragestellungen auseinandersetzen.
- Spaß am Problemlösen und an der Beschäftigung mit Mathematik entwickeln.
- Vertrauen in die eigenen Ideen und Vorstellungen gewinnen.
- sich in der Kommunikation über mathematische Sachverhalte üben.
- ihre Lese- und Schreibkompetenz weiter ausbauen.
- den Lernprozess eigenständig strukturieren und reflektieren.

4.2 Übersicht über den Ablauf der Unterrichtseinheit

Die auf der nächsten Seite zu sehende Tabelle gibt eine Übersicht über die Unterrichtseinheit, wie sie nach den Herbstferien abgelaufen ist. Vor den Herbstferien bearbeiteten die Schüler eine Doppelstunde lang, zuzüglich häuslicher Arbeitszeit, den Lernzirkel „Regeln zum geschickten Rechnen“ (siehe Materialien-CD).
Gemäß 3.2.1 ursprünglich geplante Elemente sind schwarz eingetragen und nachträglich ergänzte Elemente mit blau gekennzeichnet.
Unter „Name des Arbeitsauftrags“ sind die Namen der Arbeitsblätter u.ä. aufgelistet, die im Anhang zu finden sind.

Tabelle 2: Übersicht über die gehaltene Einheit:

Std.	Phase gemäß 3.2.1	Thema / Inhalt	Name des Arbeitsauftrags	Soz.-form
1	Einstieg I	„Numerika 1“ Wdh. / Nachspüren: Klasse 6-Wissen	OHP 1 „Term-Magie 1)-3)“ HA: „Terme als besondere Rechenausdrücke“	UG SA
2+3	I	Spiel: Terme raten Strategien zur Termaufstellung;	OHP 2 Streichholzknobeln	PA SA
4	I	Besprechung HA: Strategie zur Termaufstellung notieren; Winkelsumme im n-Eck	Zwei Lösungen für das Streichholzknobeln Nr.1?	SA UG
5	II	Wertgleiche Terme; 1. Termumformungsregel: Zusammenfassen gleichartiger Glieder	„Das Knobeln geht weiter…“ HA: Übung zur 1. Termumformungsregel	SA UG
6+7	II	Julius’ Lösung zu „Das Knobeln geht weiter…“ Übungen: Multiplizieren / Dividieren eines Produkts mit /durch eine(r) Zahl ([13], S. 72);	OHP Julius 1	SV, UG SA
1-2 Übungsstunden				

8	II	Lernzielkontrolle: „Numerika 2“ und Umkehraufgabe		SA, UG
9	II	3. und 4. Termumformungsregel: Ausklammern und Ausmultiplizieren	„Déjà-vu“	SA
		1-2 Übungsstunden		
10+ 11	II	Wertgleiche Terme zur Berechnung von Flächeninhalten: Wettbewerb;	Arbeitsblatt: Flächeninhalt-Wettbewerb. OHP Julius 2; TA Markus	SA SV
12	II	„Numerika 3“; „Brieftest“ durch Schüler der Parallelklasse; Zusammenfassung	TA: Die vielen Gesichter eines Terms	SA UG UG

Abkürzungen:
DS = Doppelstunde; UG = Großgruppe/Unterrichtsgespräch; SA = Stillarbeit; PA = Partnerarbeit; OHP = Tageslichtprojektor; HA = Hausaufgabe; SV = Schülervortrag; TA = Tafelanschrieb.

4.3 Gleicher Ablauf der DMU-Stunden

Eine detailgetreue Beschreibung jeder einzelnen Unterrichtsstunde würde den Leser auf die Dauer langweilen. Die DMU-Stunden, in deren Zentrum der an die Schüler erteilte Arbeitsauftrag steht, liefen im Grunde immer nach dem gleichen Schema ab:

Nach einer **Begrüßung** erfolgte die **HA-Besprechung**.
Oftmals handelte es sich hierbei um einen fertig zu stellenden „Knobeltagebucheintrag“ (GALLIN und RUF würden „Eintrag ins Lernjournal / Reisetagebuch“ sagen). Mit diesem wurde folgendermaßen verfahren:

1) Beiträge von einzelnen Schülern wurden vorgelesen und kurz im Plenum diskutiert. Leitfragen hierbei waren: Was ist verständlich ausgedrückt? Was fehlt? Hierbei wurde insbesondere auf eine Balance von positivem Feedback und konstruktiver Kritik geachtet.
2) In regelmäßigen Abständen sammelte ich auch Hefte ein. Hieraus erstellte ich für den Beginn der nächsten Stunde eine Folie / ein Arbeitsblatt anhand dessen im Plenum eine genaue Analyse der Aufschriebe stattfand (siehe „Zwei Lösungen für das Streichholzknobeln Nr.1?“).
3) Alternativ bat ich die Schüler ihre Überlegungen auf Folie zu notieren und den anderen zu vorzustellen (siehe „OHP Julius 1 und 2“).

An diese reflektierende Rückschau schloss sich das **Austeilen des nächsten Arbeitsauftrags** an. Neben meiner „aktiven Präsenz“ hielt ich hierbei Ausschau nach neuen Schülerbeiträgen, die es im obigen Sinne zu diskutieren lohnen würde.

Die folgende detaillierte Beleuchtung der gehaltenen Unterrichtseinheit ist daher zweigeteilt:
Zum einen werde ich ausgewählte Stunden in ihrem detailgetreuen Ablauf beschreiben und darüber reflektieren, zum anderen werde ich interessante, von den Schülern erstellte „Knobeltagebucheinträge“ (siehe Anhang) vorstellen.

4.4 „Numerika“ oder „Der rote Faden der Unterrichtseinheit“

Ein Aufgabentyp durchzieht die Unterrichtseinheit wie ein roter Faden. Da es sich um keinen (rein) dialogischen Arbeitsauftrag handelt, soll er an dieser Stelle (und nicht unter 3.2.2) näher beschrieben werden. Er lässt sich auch gut in den „konventionellen Unterricht“ einflechten – mit durchaus interessanten, leicht einzubauenden DMU-Elementen. Deshalb sollen die Numerika-Bausteine der Unterrichtseinheit hier gemeinsam besprochen werden – eine etwas ungewöhnliche Vorgehensweise, da sie der normalen, chronologischen Beschreibung von Unterrichtseinheiten, wie sie sonst in Zulassungsarbeiten üblich ist, entgegenläuft.

4.4.1 Numerika 1 – motivierender Einstieg mit Zahlenzauberei

Durchführung

Es ist Montagmorgen – der erste Schultag nach den Herbstferien. Auf dem Stundenplan der Klasse 7c ist „Mathematik“ vorgesehen… Doch nicht Fachlehrerin Distel betritt das Klassenzimmer, sondern eine verschleierte Frau mit einer in verschiedenen Farben leuchtenden „Wunderkugel“ in der Hand. Die Schüler schwanken zwischen freudiger Erwartung und Unsicherheit, einige Mädchen kichern. Die Frau stellt sich mit verheißungsvoller Stimme als Wahrsagerin „Numerika“ vor: Frau Distel verspäte sich leider ein wenig und Numerika solle derweil mit der Klasse ein wenig Zahlenzauberei betreiben…

„Numerika“ aus Sicht einer Schülerin

Numerika legt OHP 1 auf und fordert die Schüler auf, sich eine „schöne Zahl“ zu denken – aber: „Pssst!! Verrate Deine gedachte Zahl niemandem!“. Die Schüler führen die geforderten Rechenoperationen durch. Die Ergebnisse werden anschließend von 4 Schülern abgerufen, woraufhin Numerika geheimnisvoll in ihre farbenfrohe Wunderkugel schaut und blitzschnell den Schülern ihre ursprünglich gedachte Zahl nennt. Bei zwei von ihnen stimmt die „wahrgesagte“ Zahl – sie öffnen gebannt und voller Erstaunen den Mund. Die beiden anderen haben sich verrechnet…was Numerika natürlich auch in ihrer Wunderkugel sieht. Nach nochmaligem Nachrechnen wird auch diese Wahrsagung als richtig bestätigt. Anschließend entschwindet Numerika mit wehendem Schleier– begleitet von tosendem Applaus der Schüler. Wenige Sekunden später betritt Frau Distel das Klassenzimmer…

Die Schüler werden gefragt, was während Frau Distels Abwesenheit los war. Die Schüler erzählen – teils freudig aufgeregt, teils „cool“-abgeklärt – von Numerikas Auftritt. Selbstbewusst stellt Kathrin klar: „Numerika kann gar nicht Gedanken lesen! Sie hat gegengerechnet!“ Genauere Vorstellungen, wie dieses „Gegenrechnen“ funktioniert, haben Kathrin und auch die anderen aber noch nicht.

Die Brücke zum Themenkomplex Terme kann damit durch folgende gezielte Fragen geschlagen werden: „Was stellt sich Numerika denn zunächst unter eurer gedachten Zahl vor?“→ „Eine unbekannte Zahl X!“; „Woher kennt ihr denn schon solche Unbekannten und was kann man mit denen anfangen?“ → „Man kann Rechenausdrücke aufstellen!“.

Nachdem die Großüberschrift „Terme und Gleichungen“ notiert ist, stellt Frau Distel den Schülern in Aussicht, dass sie nach Ablauf der nächsten Wochen alle den Zahlenzaubertrick von Numerika verstehen und beherrschen werden.

Reflexion

Mein Ziel, bei diesem Einstieg alle Schüler anzusprechen und zu motivieren hatte ich erreicht: die leuchtenden Augen während des Zahlenzaubers, der Applaus bei Numerikas Abgang und Kathrins Analyse, was tatsächlich hinter Numerikas vermeintlicher Wahrsagerei steckt, waren Bestätigung genug.
Ich habe diese „Zahlenzauberei" in dem Buch „Zahlen, Spiralen und magische Quadrate" [10] schon während des Studiums entdeckt. Der ursprüngliche Term mit X als gedachter Zahl $[(5 \cdot x + 6) \cdot 4 - 4] \cdot 5$ kann zu $100x + 100$ bzw. $100(x + 1)$ vereinfacht werden. x lässt sich also leicht durch „$\mathit{Ergebnis} \div 100 - 1$" ausrechnen.
Doch erst während der Vorbereitung dieser Unterrichtseinheit ist mir klar geworden, wie viel algebraisches Potenzial in dieser einfachen Spielerei steckt. Entsprechend findet sich in allen modernen Mathematik-Schulbüchern ein Kapitel zur „Zahlenzauberei", was mich einerseits bestätigt, andererseits den Schülern die Möglichkeit gibt, den Trick „nachzulesen", was natürlich nicht so günstig ist.
Die Variable als „unbekannte gedachte Zahl" tritt hier in allen drei Aspekten gemäß 2.1.1 auf. Der Schwerpunkt liegt auf dem Gegenstandsaspekt, doch tritt der Einsetzungsaspekt durch das Errechnen der Ergebniszahl, aus der wiederum die ursprünglich gedachte Zahl durch „Gegenrechnen" ermittelt wird (Kalkülaspekt!) ebenso auf. Zudem erlernen die Schüler im Zuge der Numerika-Aufgaben spielerisch und daher fast unbemerkt aus einer Rechenvorschrift in Wortform Terme aufzustellen und umgekehrt.
Aus diesem Grund habe ich mich entschlossen, „Numerika" als roten Faden die Unterrichtseinheit begleiten zu lassen. Peu à peu erschließen sich den Schülern damit auf spielerische Weise die drei Aspekte des Variablenbegriffs und sie entdecken den Sinn von Termvereinfachungen. Angefangen bei „Numerika Teil 1" – bei dem die Kathrin nur mutmaßen kann, dass Numerika irgendwie „gegengerechnet" hat. Gefolgt von „Numerika Teil 2", die in der Mitte der Einheit zur Lernzielkontrolle der beiden ersten Termumformungsregeln dient. Schließlich endet die Unterrichtseinheit mit der Lösung der ursprünglichen „Numerika 1"-Zahlenzauberei durch die Schüler und einer ungewöhnlichen Analyse eines „Knobeltagebucheintrags"…

Die Einstiegsstunde wird mit den Aufgaben 1) bis 3) auf dem Arbeitsblatt „Term-Magie" fortgesetzt. Hierbei geht es um das sinnvolle Finden von Abkürzungen für mehr als eine Variable, um die Vertiefung des Einsetzungsaspekts bzgl. „gedachter Zahlen" sowie des „heuristischen" Gleichunglösens. Als HA sollen die Schüler in „Lerntagebuchmanier" notieren, worin der Unterschied zwischen „Rechenausdrücken" und „Termen" liegt (siehe Anhang). Bei Lena ist erkennbar, das sie den Sinn von Termen darin sieht „einen Zusammenhang zwischen den Größen zu erkennen". Damit ist sie in ihrer Erkenntnis weiter als der Großteil ihrer Mitschüler, die ähnliches wie Schüler 2 notieren. Zugegeben: meine Frage war auch nicht so gestellt, dass sie die Schüler auf den „allgemeinen Zusammenhang-Aspekt" geleitet hat. Eine zusätzliche Frage wie „Worin siehst Du den Vorteil von Termen im Vergleich zu Rechenausdrücken?" wäre vielleicht hilfreich gewesen.

4.4.2 Numerika 2 – spielerische Lernzielkontrolle

Nachdem die Schüler sich die Termumformungsregeln 1 und 2 erarbeitet und diese an Übungsaufgaben im Buch (hauptsächlich klassischen „Plantagenaufgaben") geübt hatten, war es Zeit für eine Lernzielüberprüfung, die den Sinn und Zweck der ganzen „Buchstabenrechnerei“ ins Gedächtnis zurückruft.

Durchführung
Numerika tritt wie in 4.4.2 auf und führt mit den Schülern folgende Zahlenzauberei durch: „Denke Dir eine Zahl. Verdreifache sie und multipliziere das Ergebnis anschließend mit 4. Ziehe dann das Doppelte Deiner ursprünglich gedachten Zahl ab.“
Einige Ergebnisse werden abgefragt und von den Schülern die Vermutung aufgestellt, dass das Ergebnis schlichtweg durch 10 geteilt werden muss, um die ursprünglich gedachte Zahl zu erhalten.
Provozierend auf die Definition von „wertgleich“ abzielend stelle ich folgende Frage in den Raum: „Das kann ja Zufall sein!“ und fordere die Schüler auf, ihre Vermutung mit Hilfe ihres Wissens über Terme zu überprüfen. Weniger Schüler als erwartet lösen den Zahlenzauber, indem sie einen Term aufstellen und vereinfachen. Die Lösung wird daher im Unterrichtsgespräch für alle nochmals entwickelt.
Die Schüler werden anschließend aufgefordert, selbst einen Zahlenzauber zu erfinden. Dabei ist vielen nicht klar, dass ein Zahlenzauber mit der Wortform eines Terms zu stellen ist, weshalb ich hierzu noch einen speziellen Hinweis geben muss. „Florians Zahlenzauberei“ wird schlussendlich von ihm diktiert, an der Tafel und im Heft notiert und von der Klasse in Stillarbeit gelöst: „Denke Dir eine Zahl, multipliziere sie mit 5 und das Ergebnis anschließend mit 3. Subtrahiere dann vom Ergebnis das 5-fache der ursprünglich gedachten Zahl.“
Diese Aufgabe war für viele zu offen gestellt.
Daher entschließe ich mich spontan zu folgender „geöffneten Umkehraufgabe“, die an der Tafel notiert wird: „Erfinde einen Zahlenzauber, dessen Ergebnis E=20x ist.“

Reflexion:
Vielen Schülern blieb bei der ersten Aufgabe der tiefere Einblick in die Idee, die hinter der Zahlenzauberei steckt, noch verborgen.
Aufgrund der behutsamen Vorbereitung mit dem „Term-Magie“-Arbeitsblatt und der sich aufdrängenden induktiv entwickelten Vermutung, dass das Ergebnis durch 10 geteilt werden muss, hatte ich erwartet, dass mehr Schüler auf den Ansatz „Term aufstellen und vereinfachen“ kommen. Die Schwierigkeiten der Schüler reichten von völliger Ahnungslosigkeit, über weiteres Ausprobieren vereinzelter Zahlen, ohne je auf die Idee zu kommen einen Term aufzustellen, bis hin zu leicht vermeidbaren Leichtsinnsfehlern beim Vereinfachen und nahezu mustergültigen Lösungen.
Wie oben schon erwähnt war die Aufforderung, selbst einen Zahlenzauber zu erfinden, zu offen gestellt. Viele „stocherten“ hier im Dunkeln angesichts der vielen möglichen und unmöglichen Terme, die man hier aufstellen kann. Florians Zahlenzauber lässt sich demnach auch mit „Ergebnis durch 10“ lösen, was mich zu der oben erwähnten geschlosseneren und doch offenen Umkehraufgabe inspirierte: Jetzt hatte der Großteil der Schüler einen „E=20x-Anker“, an dem sie sich orientieren konnten, um ihren komplizierteren Term und damit ihre Zahlenzauberei aufzustellen. Der Wert solcher geöffneten Aufgaben kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden. Somit geben die Notizen der Schüler interessante Einblicke in die „Termgedankenwelt“ von Siebtklässlern. Eine Auswahl von Schülerergebnissen sind im Anhang unter „E=20x-Zahlenzauberei“ zu finden. Hier lässt sich eine Progression in der Komplexität der Ansätze erkennen:

Schüler 1 addiert und subtrahiert so lange Vielfache von x bis er die gewünschten 20x erhält.
Schüler 2 geht ähnlich vor, klammert aber zunächst x aus, um in der Klammer dann auf Summe 20 zu kommen. Dies ist ein Zeichen, dass er verstanden hat, was hinter der Vereinfachung von Summentermen steckt. Leider verschweigt er, welchen von den Termen er in Wortform angeben und damit als Zahlenzauberei einbringen wollte.
Schüler 3 geht von der Idee $4x \cdot 5$ aus und fügt –geschickt durch eine Klammer - gemäß dem alten „Algebraiker -Trick" mittels „106-106" eine 0 ein, um seinem Zahlenzauber die Komplexität zu verleihen. Man beachte die Formulierung „addiere (-22)"!
Fabian geht an seine Zahlenzauberei gekonnt heran: er arbeitet vorausschauend mit Klammern und erhält so einen Zahlenzauber, in dem sogar Potenzen von x versteckt vorkommen.

Am Ende der Stunde ließ mich das Gefühl nicht los, einige Schüler hätten die Idee, die ihnen Numerika vermitteln möchte, nach wie vor noch nicht ganz erfasst. Daher entschloss ich mich, den Schülern gegen Ende der Einheit den Arbeitsauftrag „Brief an die Parallelklasse" als Hausaufgabe zu stellen. Statt einer typischen Besprechung der Ergebnisse dieser „Knobeltagebucheinträge" bemühte ich in der letzten Stunde der Unterrichtseinheit die Adressaten der Briefe.

4.4.3 Numerika 3 – eine Rückmeldung der anderen Art

Die Durchsicht der Briefe ergab erfreuliche Ergebnisse. Zwar waren auch ein oder zwei dabei, die entlarvten, dass der Schüler nicht über das Niveau der Zahlenbeispiele hinauskam (Brief 1). Doch fanden sich auch sehr erfreuliche, mathematisch korrekt formulierte Briefe darin (Brief 2; Susanne und Claudia).
Ich hatte mich daher zu einer besonderen Besprechung dieser Knobeltagebucheinträge in Briefform entschlossen: die Adressaten einiger Briefe sollten in den Unterricht eingeladen werden…

Durchführung
Gespannt wurde ich schon einige Male angesprochen, wann die Schüler denn endlich die Rückmeldung zu den Briefen bekommen würden. In der letzten Stunde der Unterrichtseinheit ist es dann so weit:
Wir starten an diesem Tag mit der ursprünglichen, zu Beginn der Einheit durchgeführten „Numerika 1-Zahlenzauberei"; schließlich wurde damals den Schülern in Aussicht gestellt, sie verstünden den Zahlenzauber nach Ablauf der Unterrichtseinheit. Etwa die Hälfte der Klasse (nur!) entlarvt den Trick „$Ergebnis \div 100 - 1$".
Anschließend teile ich die Briefe (versehen mit kurzen Kommentaren) aus und bitte drei Schüler ihre im Brief formulierten Zahlenzaubereien bereit zu halten.
Sehr zur Überraschung der Schüler bitte ich nun Susanne und Claudia ihre Adressaten aus der Parallelklasse zu uns in den Unterricht zu holen. Ich hatte mich vorher mit den jeweiligen Mathe-Fachlehrern abgesprochen: „Zahlenzauberei" sei den Schülern noch nicht bekannt. Zudem wurde natürlich bei den Fachlehrern das Einverständnis eingeholt, ein paar Schüler für die letzte Stunde meiner Dokumentations-Einheit auszuleihen.
Während die zwei Briefautorinnen unterwegs sind bespreche ich mit dem Rest der Klasse das Vorgehen eingeleitet durch die Worte „Wer könnte besser beurteilen, ob

das was ihr in den Briefen geschrieben habt verständlich ist, als die Adressaten selbst?!".
Die zwei Autorinnen kommen mit ihren Adressaten zurück: zwei Schülerinnen aus der 7b. Der erste Zahlenzauber („Zztest1") wird durchgeführt. Der Verblüffungseffekt stellt sich ein. Beim zweiten Zahlenzauber (Brief 2) ist mir beim Korrigieren des Briefs ein Fehler entgangen: die Rückrechnung stimmt nicht; die „Punkt vor Strich"-Regel wurde nicht beachtet. Daher läuft dieser Zahlenzauber „ins Leere" und mindert den Effekt etwas.
Die Adressatinnen erhalten daraufhin fünf Minuten Zeit, sich den Brief durchzulesen. Ein neues Zahlenrätsel wird gestellt; unsere „Versuchspersonen" sollen daraufhin versuchen, eine Erklärung zu finden…

Reflexion
Zur „Numerika 1"-Lernzielkontrolle:
dass nur die Hälfte der Klasse den Trick entschlüsseln konnte (obwohl das Lösungsprinzip mittlerweile klar war), zeigt, wie viele Schwierigkeiten das Termaufstellen und –vereinfachen macht. Die Schwierigkeiten lagen beim Klammersetzen, hauptsächlich aber im Umformen des Terms.
Zur Rückmeldung durch die Adressaten:
Der Effekt „Verständnis durch durchgelesenen Brief" war mäßig. Die Schülerinnen der 7b fanden beim letzten „Kontrollzahlenzauber" („Zztest 3") zwar heraus, dass das „Ergebnis durch 2" die gedachte Zahl ergibt, doch den Ansatz einen Term aufzustellen und zu vereinfachen benutzten sie nicht.
Hierfür habe ich folgende Erklärungen: Einmaliges Durchlesen des Briefes – v.a. unter Beobachtung - würde jeden unter Stress versetzen. Zudem ist das Klassenzimmer der 7c bis auf den letzten Platz belegt. Die Adressatinnen konnten sich also zum Durchlesen der (auch unterschiedlich langen) Briefe nicht auf einen Platz zurückziehen und wirklich „in Ruhe" lesen. Außerdem kannten mich die Schülerinnen nicht – ein weiterer Verunsicherungsfaktor auf Seiten der Adressatinnen. Der missglückte Zahlenzauber hat wohl zudem zur stärkeren Verunsicherung der Schülerinnen beigetragen…
Die Lösungsidee musste daher von den Schülern der 7c kurz erklärt werden. Zumindest wurde von den Schülerinnen daraufhin eine Rückmeldung gegeben, inwieweit sie diese Lösungsidee „rückblickend" aus den Briefen entnehmen konnten. Hierbei wurden vor allem die Beispiele und der strukturierte Aufbau der Briefe als verständnisfördernd gelobt.
Ich habe daher folgende Verbesserungsvorschläge: anstatt sich – wie hier leider geschehen - recht kurzfristig zum Einladen der Adressatinnen zu entschließen, könnte man das Ganze auf zwei Unterrichtsstunden verteilen. In der ersten Stunde werden die Schüler zum Zahlenzauberspielen eingeladen. Statt einer Erklärung erhalten sie die Briefe mit nach Hause und können sich dort in Ruhe mit Ihnen beschäftigen – natürlich mit dem Versprechen sonst keine Literatur zu Rate zu ziehen und auch keine weiteren Erklärungen beim Verfasser des Briefs einzuholen. Insgesamt stellt diese (authentische) Art von Rückmeldung zu einem „Knobeltagebucheintrag" aber eine schöne Abwechslung dar.

4.5 „Terme raten“ und „Streichholzknobeln“

Durchführung

Die erste Doppelstunde der Einheit beginnt mit dem Spiel „Terme raten“. Hier sollen die Schüler selbstständig umsetzen, was durch das Arbeitsblatt „Term-Magie“ noch stark vom Lehrer vorgegeben wurde: „Einfühlen und Nachspüren“ rund um die drei Variablenaspekte. Den Schülern wird hierfür eine vorgefertigte Tabelle ausgeteilt und los geht's. Nach wenigen Minuten muss ich aber nachbessern, da die Terme, die die Schüler aufstellen zu kompliziert sind, um sie durch Ergebnisabfrage heraus zu bekommen. Im Unterrichtsgespräch und an der Tafel wird kurz thematisiert, was „einfache Terme“ sind – daraus ergibt sich eine nicht geplante, aber willkommene Wiederholung der Begriffe „Summe“, Differenz“, „Produkt“ und „Quotient“.
Im Anschluss teile ich den Schülern die Streichhölzer aus und los geht das Knobeln…

Reflexion

Zum Spiel „Terme raten“: die Schüler hatten Spaß und gaben z.T. die Rückmeldung, nach nur einer „Ergebnisabfrage“ den Term erraten zu haben. Dies wurde sofort von einigen aufmerksamen Schülern kritisch hinterfragt und von Julian entschieden als Zufallstreffer entlarvt:

Michael:	„Nicolai hat mir die 1 genannt. Eingesetzt in meinen Term ist das Ergebnis dann 4.“
Nicolai:	„Ich habe dann sofort gewusst, dass der Term $M_Z = N_Z \cdot 4$ sein muss.“
Julian:	„Aber Michaels Term könnte doch auch $M_Z = N_Z + 3$ heißen!“

Eine schöne Überlegung, an der bei der Diskussion um „wertgleiche“ Terme wieder angeknüpft werden konnte.

Ergebnisse des Streichholzknobelns

Michaels Notizen zu 1) zeigen, wie der Gedankegang eigentlich ablaufen sollte.
Die Aufschriebe vieler anderer Schüler geben interessante Einblicke in ihre bevorzugte Strategie beim Termaufstellen. Viele gehen mit der Tatsache, dass für das erste Dreieck 3, für alle weiteren 2 Streichhölzer benötigt werden folgendermaßen um: sie definieren die Variable x so, dass sie „die Dreiecke, die dazu kommen“ zählt. Den zugegeben einfachen Rechenschritt, von der Gesamtzahl der Dreiecke immer das erste abziehen zu müssen, um den Term anwenden zu können, nehmen sie hierbei gern in Kauf. Dies lässt den ersten Schluss zu: das Muster des Streichholzknobelns war zu wenig komplex. Für die Schüler bestand keine Notwendigkeit die Variable als „Gesamtzahl der Dreiecke“ zu definieren.

Zwei Schülerinnen beim Streichholz-knobeln

Statt mich auf die Suche nach einem anderen Muster zu machen, entschloss ich mich dazu mit den Notizen der Schüler weiterzuarbeiten, auch um deren Verständlichkeit im Unterricht mit allen thematisieren zu können. Das Arbeitsblatt „Zwei Lösungen für das Streichholzknobeln Nr.1)?“ war das Ergebnis.
Die Schüler, die sich über eine x-Variable im obigen Sinne an das Termaufstellen herangewagt haben, hatten mit der hier geforderten d-Variablen-Lösung Probleme.

Sie wurde nach einer Stillarbeitsphase von 10 Minuten im Unterrichtsgespräch gemeinsam entwickelt.
Der Verfasser der Lösung Nr.2) auf dem Arbeitsblatt fehlte am Analysetag zufällig – was förderlich war, da er so zu keiner vorwegnehmenden Erklärung hingerissen werden konnte. Die Schüler zeigten ein gutes Gespür, was hier schief gegangen war: „Punkt vor Strich nicht beachtet!“; „Die Klammer hat Vorfahrt!“.

Laut MALLE muss ein Schüler im Algebraunterricht drei (nicht unbedingt hintereinander ablaufende) Schritte zum Termaufstellen erlernen ([2], S.99):

1) Text / Aufgabe erfassen und mit eigenen Worten wiedergeben oder mit einer Skizze veranschaulichen.
2) Betrachtung des Texts unter einem mathematischen Blickwinkel: geeignete Rechenoperationen finden und Abfolgen erkennen; Beziehungen zwischen den Größen sehen.
3) Das unter diesem Blickwinkel betrachtete wird mit Hilfe von Symbolen in Formeln übersetzt.

„Lösung“ Nr.2) bestätigt MALLES Vermutung, dass „die Hauptschwierigkeiten im zweiten Schritt zu liegen scheinen“ [2]:
Durch die unvollständigen Notizen führen die eigentlich richtigen Überlegungen im Ansatz (Schritt 1 mittels beschrifteter Skizze vollzogen) ärgerlicherweise zu einer falschen Lösung. Das Problem im „Schritt 2“ ist hier also live zu beobachten: zwar ist „$3+$ “ die geeignete „Startrechenoperation“, doch zeigt der dann folgende Teilterm $(x \cdot 2 - 1)$, dass hier „zu früh“ in die algebraische Symbolsprache gewechselt worden ist und die Reihenfolge der Rechenoperationen zu wenig reflektiert wurde. Zudem fehlt eine konkrete Definition von x gänzlich.

Die Analysestunde endet mit Nicolais Vorstellung eines gelegten Streichholz-Musters aus Quadraten (via OHP an die Wand projiziert). Der Term zur Berechnung der Streichholzanzahl in Abhängigkeit von den Quadraten ist schnell besprochen: $4+3\cdot x$ (wenn x die dazukommenden Quadrate zählt) und alternativ $1+3\cdot d$ (wenn d die Quadrate insgesamt zählt).
Aus Zeitgründen wird die Suche nach komplexeren Mustern abgebrochen und stattdessen folgende Hausaufgabe zum schriftlichen nachreflektieren gestellt:

„Vergleiche nochmals Valeries x-Variablen-Lösung mit der d-Variablen-Lösung! Notiere dann (in Lerntagebuch-Manier) wie man beim Aufstellen von Termen am besten vorgeht!“ (ausgewählte Ergebnisse siehe Anhang):

Interessant sind hier die Notizen von Anna-Lisa, die eine interessante Wertung zu den zwei möglichen Lösungen notiert. Meine Rückmeldung an die Schülerin lautete: „Es ist sehr schön, dass Du beschreibst, welchen Term Du bei der Streichholzknobelaufgabe bevorzugst und das auch begründest!“
Claudia reflektiert ebenso die beiden Lösungen. Zudem notiert sie eine Strategie, die darauf schließen lässt, dass sie mit MALLES Schritt 2) wohl gut klar kommt: sie sucht nach Abfolgen und Unregelmäßigkeiten.

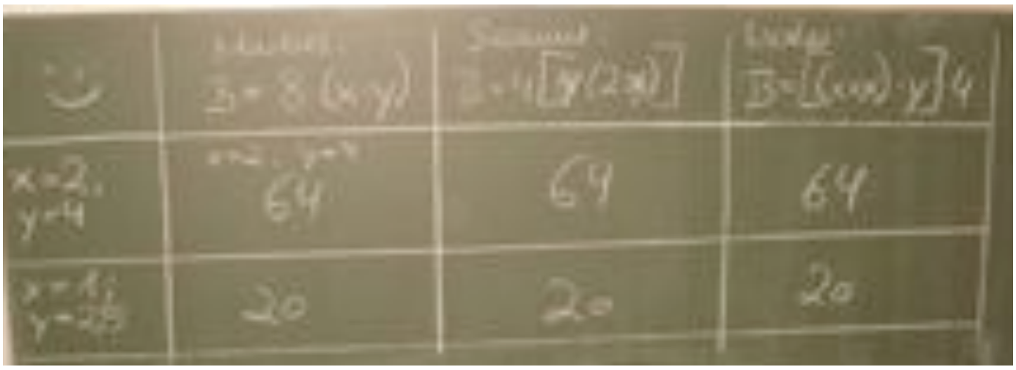
4.5.1 Winkelsumme im n-Eck

Als Lernzielkontrolle zu den Strategien des Termaufstellens wird den Schülern in der kommenden Stunde die HA „ermittle die Winkelsumme im n-Eck“ gestellt. Ergänzt wird - als Anreiz den Term anwenden zu müssen – die Frage: „Wie groß ist die Winkelsumme im 258-Eck?“. Viele gehen hier den Weg, den sie aus der vorangegangenen Geometrieeinheit kennen und zerlegen die Vielecke in Dreiecke. Dies wurde bei der Winkelsumme des Vierecks besprochen. Dass es sich hierbei um sog. „konvexe Vielecke“ handeln muss, wurde damals übergangen. Viele Schüler stellen den Term wieder mit einer Variablen x auf, die die hinzukommenden Ecken zu einem Dreieck zählt. Ich frage mich daher heute, ob es sinnvoll war, Valeries Lösung so ausführlich zu besprechen.
Ein Schüler (siehe Anhang) ist mutig und nähert sich auf eigenen Wegen dem durch die Geometrieeinheit vorgegebenen Lösungsansatz: er geht von einer Strecke $\overline{AB}$ aus und ergänzt seine Notizen mit wichtigen mathematischen Zusatzbedingungen wie z.B. „die hinzukommenden Ecken dürfen nicht auf $\overline{AB}$ liegen!“. Leider geht er nach der Überlegung zum 5-Eck nicht weiter und versucht, seine Entdeckung in einem allgemeinen Term niederzuschreiben. Dass er das Prinzip verstanden hat, zeigt aber seine Rechnung zum 258-Eck!

4.6 Wertgleiche Terme oder „Viele Terme führen zum Ziel!“

Worauf wir während der Diskussion der x- und d- Variablenlösung der Streichholzterme ohnehin immer schon gestoßen waren, sollte jetzt eingehender untersucht werden: Die Aufgabe „Das Knobeln geht weiter…“ läutete Phase II der Dokumentationseinheit ein.

Durchführung
Den Schülern wird der Arbeitsauftrag ausgeteilt. Sie erhalten 10 Minuten Zeit ihren Term nach den selbstnotierten Regeln samt Skizze aufzustellen.
Die Ergebnisse wurden in die erste Zeile folgender Tabelle eingetragen:



Anmerkung zu Susannes Term:
Nachdem ich sie aufrufe nennt sie den Term $B = 4[x \cdot (2y)]$. Ein Raunen geht durch die Klasse…
„Ich höre, dass Ihr bei Susannes Lösung „Bauchschmerzen“ habt!? Warum?“. Fabian meldet sich: „Wenn man das Buch öffnet, dann verdoppelt sich doch x und nicht y!“. Ich frage provozierend weiter: „Dann ist Susannes Lösung also falsch!?“, halte aber beim x- und y-Wegwischen inne, drehe mich um und freue mich, dass mich Markus nicht durch Argumentation mit dem Kommutativgesetz, sondern folgendermaßen überzeugt: „Es verdoppelt sich ja der Flächeninhalt, wenn das Buch geöffnet ist und

dann ist es eigentlich egal, ob man $2 \cdot x \cdot y$ oder $2 \cdot y \cdot x$ schreibt…“ Ich fühle mich dadurch mit meinem Geometrieansatz im Themenbereich Termumformungen bestätigt und stelle die nächste Impulsfrage: „Wer von den Dreien hat recht?“. Da jeder ganz genau begründen kann, wie er auf den jeweiligen Term kommt ist schnell klar: alle müssen wohl Recht haben.
Kathrin nennt daraufhin eine erste Überprüfungsmöglichkeit: sie schlägt x=2 und y=4 als Werte vor. Ich ergänze noch zwei weitere Werte. Die Beobachtung wird notiert und die Definition von „wertgleichen Termen“ diktiert.
„Wie viele x-und y-Zahlenpaare müssen wir denn einsetzen um sicher zu sein, dass zwei Terme wertgleich sind?“ Die Schüler nennen weitere Zahlenpaare…und noch mehr Zahlenpaare…und noch mehr Zahlenpaare…
Susanne kommt schließlich die rettende Idee: „Man kann die unterschiedlich aussehenden Terme vielleicht so umformen, dass sie gleich aussehen!“ Die Definition von „Termumformungen“ wird notiert:
„Um einen Term in einen anderen, wertgleichen Term umzuformen gibt es ganz bestimmte Rechenregeln: man nennt sie *Termumformungen*.“
Den Schülern wird der Auftrag gegeben Nicolais Term so umzuformen, dass Markus’ Term dasteht. Schnell wird klar, dass die einzelnen Schritte im Unterrichtsgespräch gemeinsam besprochen werden müssen. Der Begriff „gleichartige Glieder“ in Summentermen wird eingeführt und notiert.
Anschließend notiere ich „Frau Distels Term“ an der Tafel:
$B = (x + x) \cdot y + (x + x) \cdot y + (x + x) \cdot y + (x + x) \cdot y$. Die Zahlen der Tabelle werden eingesetzt und festgestellt, dass der Term auch „ein Kandidat“ für die Lösung ist. In den letzten 5 Minuten vor dem Klingeln versuchen sich die Schüler daran, Frau Distels Term in Markus’ Term umzuformen.
Das Arbeitsblatt „1. Termumformungsregel“ wird als Hausaufgabe ausgeteilt.

Reflexion
Interessanterweise hat der Großteil der Schüler während der Stillarbeit zu dieser Aufgabe aus der wenig sinnvollen Fragestellung eine sinnvollere gemacht: sie berechneten die verbleibende Tischfläche. Das war auch meine erste Idee als ich die Aufgabe entworfen habe, entschied mich aber dann wegen der besseren Vergleichbarkeit der Terme für die „artifizielle“ Frage nach der von den Büchern bedeckten Tischfläche. Bücher sollten zum Einsatz kommen, da sich jeder Schüler so durch Aufschlagen eines Buchs „haptisch“ dem Term nähern konnte.
Insgesamt betrachtet würde ich die Stunde bis zur ausgefüllten Tabelle an der Tafel wieder so halten. Über die geometrische Anschaulichkeit der Terme ist jedem Schüler klar gewesen, dass die Terme wertgleich sein müssen. Bis zu Susannes Idee war die Stunde also gelungen.
Die Schüler ausgehend von den Termen dann selbstständig eine erste Termumformungsregel herleiten zu lassen war definitiv zu utopisch gedacht. Beim Weg „von Nicolais zu Markus’ Term“ müssen zu viele verschiedene Arten von Rechengesetzen hintereinander ausgeführt werden.
Zur Einführung von „gleichartigen Gliedern“ in Summentermen eignet sich daher „Frau Distels Term“ schon eher, weshalb an dieser Stelle im Unterricht von den Termen der Schüler abgelassen wurde. Hier kann zunächst x+x zu 2x zusammengefasst werden (was von den Schülern in den letzten Stunden immer schon angewandt wurde). Anschließend taucht xy vier Mal als gleichartiges Glied auf.

Nach der Stunde kommt Julius zu mir. Er möchte wissen, ob sein aufgestellter Term zum Buchflächenproblem auch richtig ist. Ich muss schon zweimal hinschauen bis ich herausbekomme, wie er den Term aufgestellt hat. Kurzerhand drücke ich ihm eine OHP-Folie und Stifte in die Hand – gerne ist er bereit bis zur nächsten Stunde eine Folie vorzubereiten, um seinen Term den anderen zu präsentieren.

4.6.1 Julius' Lösung zu „Das Knobeln geht weiter…"

Durchführung

Vor Julius' Kurzpräsentation lasse ich mir seine vorbereitete Folie zeigen (Anhang: OHP Julius I) und gebe ihm den Hinweis, er solle der Klasse zunächst nur seinen Term zeigen und die Erklärung hierzu (mit Hilfe der roten Klammern) noch verdeckt lassen, damit die Mitschüler selbst hinter das Prinzip der Termaufstellung kommen.

Julius und Mitschüler: auf der Suche nach einer anschaulichen Erklärung

Das erweist sich als sinnvoll: die Klasse knobelt über Julius' Term. Im anschließenden, von Julius moderierten Unterrichtsgespräch entwickelt sich eine angeregte Diskussion. Es werden Bücher auf den Tischen gedreht und gewendet. Nicolai hält es schließlich kaum noch auf seinem Platz. Als Julius ihn aufruft, formuliert er seine Idee…die anderen verstehen nicht, was er meint. Ich melde mich nun – von Julius' Platz aus – , werde aufgerufen und schlage Nicolai vor, er solle seine Idee anhand einer Skizze an der Tafel erklären. Michael kommt ihm zu Hilfe und Julius' Gedankengang ist damit – zumindest anschaulich – nachvollzogen. Zur rechnerischen Kontrolle wird die restliche OHP-Folie präsentiert.

Reflexion

Ob es nun sinnvoll ist, den Flächeninhalt der vier Bücher als Summe zweier Teilterme zu berechnen, die in so verschlüsselter Art und Weise je den Flächeninhalt zweier geöffneter Bücher angeben, sei dahin gestellt. Tatsache ist, dass Julius nicht nur Gelegenheit hatte, seinen ungewöhnlichen Term vorzustellen, sondern dass seine Kurzpräsentation zu einer sehr interessanten, fruchtbaren Diskussion in der Klasse geführt hat.

4.6.2 Notizen zur 1. Termumformungsregel oder „Ein interessanter Bruch"

Markus liefert die Begründung, warum man gleichartige Glieder zusammenfassen kann (siehe Anhang). Schüler 2 argumentiert über „mehrmals vorkommende Variablen". Die Produktüberlegung scheitert aber, sobald die Koeffizienten größer 1 sind…

Beim Korrigieren der Notiz von Schülerin 3 setzte ich sofort den Rotstift an und unterkringelte das Wort „Bruch". Kurz darauf besann ich mich: „Du sollst hier nicht ‚korrigieren', Du sollst ‚rückmelden'!". Also sah ich mir die Notiz genauer an und entdeckte, dass die Schülerin ganz offensichtlich eine Parallele zwischen dem Addieren zweier Brüche mit gleichem Nenner und dem Vereinfachen von Summentermen durch Zusammenfassen gleichartiger Glieder gezogen hatte.

4.7 „Déjà-vu“ oder „Überforderung durch Unterforderung“

Nachdem die Schüler in den vergangenen Stunden das Termumformen von Summen- und Produkttermen geübt hatten, wollte ich sie nun die dritte und vierte Termumformungsregel erarbeiten lassen.
Beim Vorbereiten des entsprechenden Arbeitsauftrags „Déjà-vu“ hatte ich die Idee, ihnen analog zur Flächeninhaltsberechnung aus dem Lernzirkel „Regeln zum geschickten Rechnen“ (Station 3) den Weg zur Erkenntnis: „Mit Variablen kann man wie mit Zahlen rechnen!“ zu ebnen.

Reflexion
Im Nachhinein weiß ich, dass dies ein klassischer Fehler war, der beim Erstellen von Arbeitsaufträgen und von Planarbeiten auftreten kann: ich habe versucht, die letzten beiden Termumformungsregeln den Schülern in verdaulichen, ja offensichtlichen „Häppchen“ näher zu bringen.

GALLIN und RUF sprechen von „Segmentierung“ und urteilen darüber folgendermaßen ([6], S. 80):

Mit der Segmentierung unterschätzen wir die Kinder; und dadurch überfordern wir sie.

Entsprechend hatte ich während des Unterrichts das Gefühl, die Schüler wüssten nicht, was zu tun ist, da doch schon alles klar ist: es handelt sich doch „nur“ um Ausmultiplizieren und Ausklammern! Auch der versteckte Verweis auf die Station 3 im Lernzirkel war in dieser fortgeschrittenen Stunde der Unterrichtseinheit unangebracht und führte eher zu Verwirrung als dass es eine Erleichterung war: schließlich hatten die Schüler schon gleich zu Beginn der Einheit die Klasse 6-Rechenausdrücke mit Termen verglichen. Zudem sind die Schüler auf die „Entdeckung“, dass Ausklammern und Ausmultiplizieren Termumformungen sind im Verlauf der Unterrichtseinheit schon des öfteren gekommen (vgl. Markus’ Notiz zur 1. Termumformungsregel).

Meine Verbesserungs- bzw. Änderungsvorschläge?
Auf jeden Fall könnte man die auf dem Arbeitsblatt vorgegebenen Terme selbst aufstellen lassen und hierfür auch eine andere Fläche als die im Lernzirkel verwenden. Auf diese Weise ist der Arbeitsauftrag auch unabhängig von einem Lernzirkel – den man durchführen kann oder auch nicht.

Auf die Schülernotizen im Anhang sei hier noch eingegangen:
Schülerlösung 1 gibt interessanten Aufschluss darüber, wie die Schüler (viele gingen so vor!) nicht nur durch Anfärben der Flächen sondern auch des Terms das „Ausklammern und Ausmultiplizieren“ farblich veranschaulichen. Man beachte das „rot-grüne x“ in B_1. Leider habe ich schon auf dem Arbeitsblatt den Hinweis zum „Ausmalen der Fläche“ gegeben und konnte so nicht herausfinden, ob die Schüler ganz von selbst auf eine solche Idee kommen – ein weiterer Verbesserungsvorschlag für den Lernzirkel und das „Déjà-vu“-Arbeitsblatt.
Schülerlösung 2 zeigt, dass sich nicht alle dazu genötigt sahen, an den Lernzirkel zurück zu denken: Hier wird eine intelligente Parallele zur Aufgabe „Das Knobeln geht weiter…“ gezogen. Zudem zeigt die Notiz darunter, wie präzise der Schüler das Ausmultiplizieren und Ausklammern formulieren kann.

Ganz nebenbei gab mir der Verfasser neben seinen Ausführungen indirekt noch einen Verbesserungshinweis: die Lücken in Arbeitsblättern, die durch ausführliche Beschreibungen gefüllt werden sollen, sind im Zweifelsfall immer zu klein…

4.8 Wettbewerb oder „Durch anfänglichen Unmut zum Sieg“

In der letzten Doppelstunde der Einheit wurden sowohl die Schüler als auch ich als Lehrerin im dialogischen Lernen und Lehren nochmals voll gefordert. Ich spreche von der Aufgabe d) des Übungsblatts „Flächenberechnung / Wettbewerb“:

Schlüsselmomente bei der Durchführung
Nach nur wenigen Arbeitsminuten meine ich zu sehen, was ich mit diesem Wettbewerb „angestellt“ habe. In nahezu 80% der Hefte sehe ich, was ich seit diesem Tag als „Alphabetterme“ bezeichne: es werden abenteuerliche eckige Flächen gezeichnet und jede Seitenlänge erhält eine andere Buchstabenbezeichnung. Fieberhaft suche ich – angesichts der vielen Hände, die mich zu Hilfe rufen – nach einem ermutigenden Impuls. Da entdecke ich, dass viele Schüler die Kästchen im Heft doch irgendwie als „Grundeinheit“ benutzt haben. Die Variable, die zwei Kästchen lang ist, wird dann am liebsten zum Termaufstellen genutzt. Also schlage ich den Ratlosen vor, sie sollen sich nochmals überlegen, wie sie den Term aufgestellt haben und ob sie dann nicht einige Seitenlängen durch andere Seitenlängen ausdrücken können.

Auch Julius mault nach 5 Minuten: „Ich habe keine Lust mehr. Ich habe erst einen Term aufgestellt.“ Auch er zeigt mir seinen „Alphabetterm“ mit ca. 7 verschiedenen Variablen. Nach meinem obigen Impuls macht er sich wieder an die Arbeit…
Nach erneuten 5 Minuten wieder Unmut aus Julius’ Ecke und ich wundere mich, dass mein Impuls bei den anderen gefruchtet zu haben scheint, aber ausgerechnet bei Julius nicht. Als ich an seinem Tisch angekommen bin, klagt er: „Aber da kann ich ja unendlich viele Terme aufstellen…ich habe keine Lust mehr!“.
Ich werde hellhörig: „Unendlich viele?!“. Julius erklärt: er könne seine Fläche in $37a^2$ Teilflächen unterteilen. Dann könne er aber diese Teilflächen wieder unterteilen usw.
An die Möglichkeit hatte ich selbst gar nicht gedacht! Ich ermutige Julius, seine „tolle Entdeckung“ nieder zu schreiben und zu erklären, warum all diese Terme wertgleich sind! Als dieser mich immer noch ungläubig ansieht zwinkere ich ihm zu: „Unendlich viele, Julius! Wer gewinnt noch mal den Wettbewerb?“. Julius legt los…und notiert seine Entdeckung auf einer Folie (siehe Anhang).

Am anderen Ende des Klassenzimmers kommt Markus (ganz von allein) auf die gleiche Idee. Er ruft mich zu sich, da er beim Wertetabellenüberprüfen seiner drei aufgestellten Terme (die auch auf die feinere Unterteilung der quadratischen Teilflächen zurück zu führen ist) ungleiche Werte herausbekommt.
Ich ermutige ihn, doch seine Terme und die zugehörige Flächenskizze nochmals zu überprüfen… Ihn stumm beobachtend sehe ich, dass er plötzlich zum Tintenkiller greift und murmelt: „Ah! Wenn ich die Seite halbiere, dann muss ich die Fläche vierteln!“ Schwups – der eigentlich doch „schöne Fehler“ – da selbst entdeckt! – ist beseitigt und nun stehen die wertgleichen Terme da.
Ebenso wie Julius gebe ich Markus den Auftrag, seinen Wettbewerbsbeitrag schriftlich zu formulieren…

In den letzten zehn Minuten präsentiert Julius seine Lösung via OHP. Markus stellt anschließend seine Lösung durch einen sehr gut improvisierten Tafelanschrieb vor und hält auch den kritischsten Nachfragen aus dem Publikum stand. Seine Heftnotizen samt meiner Rückmeldungen findet man im Anhang. Dort ist auch ein Beispiel eines Alphabetterms zu sehen. Auf die Frage, was der Schüler beim nächsten Wettbewerb dieser Art anders machen würde notiert er in sein Schulheft: „Weniger Variablen aufstellen sondern mehr Seiten berechnen.“

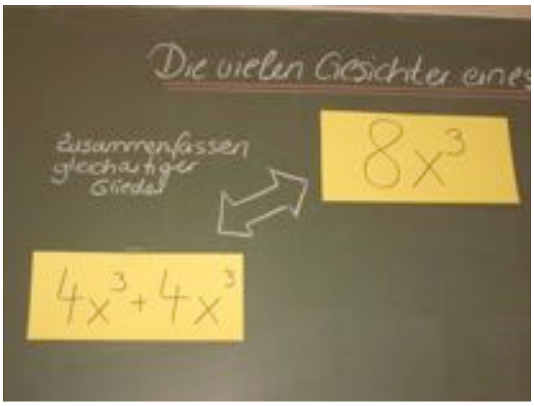
Markus nach seinem Tafelvortrag

Vanessa findet eine schöne Lösung, wie sie von mir ursprünglich intendiert war. Auf der im Anhang nicht abgebildeten nächsten Heftseite stellt sie Wertetabellen auf und formt jeden Term so um, dass fünf Mal die gleiche vereinfachte Form dasteht.

Reflexion
Die ganze Klasse knobelte ausdauernd und hartnäckig! Die Stunde verflog nur so. Eine Schülerin, die zunächst Hilfe von mir erwartete, fand ihren Fehler beim Überprüfen der Fläche / des Terms selbst und strahlte über das ganze Gesicht. Ein anderer Schüler – 10 Minuten vorher noch den Tränen nahe! – rief mich freudestrahlend zu sich und hielt mir seine zwei wertgleichen Terme unter die Nase: „Ich habe so lange geknobelt und umgeformt, bis tatsächlich das gleiche herauskam!“.
An diesem Tag gab es viele Wettbewerbsgewinner!

4.9 Der Kreis schließt sich

In den letzten 15 Minuten der Einheit (im Anschluss an „Numerika 3“) wurde an der Tafel ein zusammenfassender Heftaufschrieb entwickelt (siehe Anhang).
Hierbei wurde den Schülern auf der rechten Tafelseite mittels gelber Zettelchen Terme angeboten, von denen einige wertgleich zum „Startterm“ $8x^3$ waren.
Nachdem ich den ersten wertgleichen Term links unter $8x^3$ geklebt und die dahinter steckende Termumformungsregel erfragt hatte, vervollständigten die Schüler den Kreis.
Diejenigen Terme auf der rechten Tafel, die nicht wertgleich waren, spiegelten die „klassischen Fehler“ der Schüler wider und sollten ein letztes Mal als „nicht-wertgleich“ verbannt werden…



5 Gesamtreflexion

5.1 Was sagen die Dialogpartner?

5.1.1 Eine bunte Rückmeldung durch die Schüler

In der ersten Stunde, in der die Klasse von einer Kollegin unterrichtet wurde (3.3.2) schrieb ich den Schülern einen Brief mit der Bitte um Rückmeldung über die gehaltene Einheit (siehe Anhang).
Eine repräsentative Auswahl dieser Kunstwerke begrüßt den Leser auf der Titelseite und begleitet ihn als „Numerika aus Sicht einer Schülerin“ durch 4.4.1.
Sehr lustig fand ich, dass auch zwei ganz spezielle Situationen aus den Übungsstunden detailgenau im Gedächtnis zweier Schüler haften blieben:
ein zunächst unsichtbarer „Mal-Punkt“ zwischen zwei Variablen, der an der Tafel immer größer wird und mein „theatralischer Termtod“, als zum wiederholten Male ein Schüler im Unterricht behauptete „$x + x = x^2$“ (siehe Anhang).

5.1.2 Ergebnis der Klassenarbeit

Anders als die Schülerbewertung fiel die Klassenarbeit – die „Ziel- oder Produktbewertung“ der Einheit – mit einem Durchschnitt von 3,1 nicht sehr gut aus.

Hieraus ziehe ich folgende Schlüsse:
Während Aufgabe 1 (siehe Anhang) größtenteils von den Schülern ohne größere Probleme bearbeitet wurde, hatten viele Schüler Probleme mit Aufgabe 2. Dies mag daran liegen, dass für diese Art von Aufgabe – wider Erwarten – zu wenige Übungen gemacht und besprochen wurde.
Mit Aufgabe 3 hatten die Schüler die größten Probleme. Teils gab es „Interpretationsschwierigkeiten“, welche Variable welche Seitenlänge angibt. Da die Klassenarbeit fremdbeaufsichtigt geschrieben wurde, konnte ich bei Fragen diesbezüglich keinen Hinweis geben. Aufgabe 3b) machte wegen der im Unterricht zu wenig eingeflossenen „Einheitenrechnungen“ Probleme. Zudem hatten viele Schüler „überlesen“, dass das Ergebnis bei 3c) in kg und nicht in g angegeben werden sollte.
Was mir rückblickend bei der Endfassung der Klassenarbeit fehlt, sind mehrere offene Aufgaben. Schließlich waren diese Teil des Unterrichts und sollten demnach auch abgeprüft werden! Hierfür hätte die ein oder andere „Plantagenaufgabe“ aus den ersten beiden Aufgaben gestrichen werden können.
Ursprünglich hatte ich eine geöffnete Aufgabe 4b) vergleichbar der „E=20x-Zahlenzauberei“ vorgesehen. Durch diese Aufgabenstellung wäre aber der Antwortsatz der a)-Aufgabe verraten worden, weshalb ich schließlich von einer Teilaufgabe b) abgesehen habe. Zudem machte ich mir Sorgen, die Schüler hätten zu wenig Zeit für die Bearbeitung. Heute würde ich eher eine offenere Aufgabe 4b) statt der rein reproduktiven Aufgabe 4 stellen.
Als bessere Alternative würde ich heute die Schüler die Lücken in einer Wertetabelle à la „Term-Magie“ bzw. „Terme raten“ ausfüllen lassen und hierüber die offenere Aufgabe formulieren: „Formuliere eine passende Zahlenzauberei (Wortform), die, wenn sie gespielt wird, zu folgender Tabelle passt: …“.
Eine weitere lohnende Ergänzung wäre eine Aufgabe zur Flächenberechnung ähnlich der „Flächenberechnung / Wettbewerb“ - Aufgabe.

5.2 Zusammenfassung

Die vorliegende Dokumentation zeigt, dass es Lernenden wie Lehrenden viel Spaß macht, dialogisch zu arbeiten.

Doch wie beantworte ich die Frage, ob mein Versuch einer DMU-Einheit über Terme etwas zur Verbesserung des algebraischen Verständnisses meiner Dialogpartner beigetragen hat?
Bei der Durchführung des Unterrichts ist mir klar geworden, dass nicht nur die Einheit in zwei Phasen unterteilt ist, sondern dass auch diese Frage zweigeteilt beantwortet werden muss:

Phase I (Terme aufstellen):
Der für MALLE so wichtige „Dreischritt vom Text zur Formel“ ([2], S.97) bietet sich geradezu an, dialogisch unterrichtet zu werden: Hier können die Schüler auf eigenen Wegen „nachspüren“ wie sie beim Aufstellen von Termen vorgehen und können – idealerweise – Fehlkonzepte frühzeitig selbst entdecken und damit nachhaltiger „verbannen“ als es in jedem Frontalunterricht der Fall wäre. Die beliebte Strategie die x-Variablen-Lösung aufzustellen (siehe 4.5) ist in dem Sinne kein Fehlkonzept. Sie kann aber durch Aufgabenstellungen, bei dem sich der Sinn und Nutzen der „d-Variablen-Lösung“ den Schülern aufdrängt, vermieden werden. Schöne Aufgaben in diese Richtung findet man in dem Lehrbuch „Fokus Mathematik, Band 3“ [11].

Phase II (wertgleiche Terme, Termumformungen):
Obige Aussagen über Phase I können durch die Beobachtungen während des Unterrichts der Phase II bestätigt werden: Das Aufstellen wertgleicher Terme regte zu immer neuem „Nachspüren“ über Termaufstellungen und deren Interpretation an. Die rechnerische Überprüfung der Wertgleichheit durch Termumformungen trat in den Hintergrund und wurde „Mittel zum Zweck“. Das genau war ja die Intention eines zeitgemäßen Algebraunterrichts (vgl. 2.2.2).
Intention in Phase II war es aber auch, den Schülern das „routinierte Termumformen“ beizubringen. Ein rein dialogisches Unterrichtskonzept geht davon aus, dass die Übungsphase „in der Regel völlig entfallen“ kann ([7], S.13). Dass dies für den Themenbereich Termumformungen nicht gilt hat sich während der Einheit bestätigt (2.2.2).
Wie sieht es mit der *Erarbeitung* von Termumformungsregeln in einem dialogischen Unterricht aus? Die dokumentierten Arbeitsaufträge hierzu empfanden die Schüler als wenig hilfreich (vgl. „Déjà-vu“). Fernziel dieser Einheit meinerseits war und bleibt es aber, die Schüler anhand einer Fläche die erste Binomische Formel herleiten zu lassen…bleibt abzuwarten, ob diese Idee von Erfolg gekrönt sein wird.

Dies leitet mich zu meiner abschließenden Bemerkung über:
Der Weg zu motivierenden Kernideen im Sinne von GALLIN / RUF und HETTRICH ist weit für eine Lehrerin, die in ihrer Schulzeit nicht dialogisch unterrichtet wurde. Dennoch steht für mich – vor allem nach der *schriftlichen* Dokumentation dieser Einheit – fest:
Mein Defizit des „Noch-nicht-Findens“ einer ausgereiften Kernidee erlebe ich – ganz im Sinne einer dialogischen Philosophie – nicht als „entmutigendes Ungenügen“, sondern als „produktive Spannung“, die mich auf meinem weiteren Berufsweg begleiten wird (vgl. 2.2.3).

6 Literaturverzeichnis

[1] Stephen W. Hawking:
Eine kurze Geschichte der Zeit. Rowohlt-Taschenbuch-Verlag, Reinbek bei Hamburg: 1991.

[2] Malle, Günther:
Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden: 1993.

[3] Urs Ruf / Peter Gallin:
Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 2: Spuren legen, Spuren lesen – Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern. Kallmeyer-Verlag, Seelze-Velber: 1998.

[4] Ministerium für Kultus, Jugend und Sport; Baden-Württemberg:
Bildungsstandards für Mathematik – Gymnasium Klasse 6, 8, 10, 12.

[5] W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, O. Köller (Hrsg.):
Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen, Berlin: 2006.

[6] Urs Ruf / Peter Gallin:
Sprache und Mathematik in der Schule – Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Kallmeyer-Verlag, Seelze-Velber: 1998.

[7] Monica Hettrich & Arbeitskreis DMU:
Entdecken, Erleben, Beschreiben – Dialogischer Mathematikunterricht in der Unterstufe. Heft M 69. Landesinstitut für Schulentwicklung, Stuttgart: 2005.

[8] Monica Hettrich:
Entdecken, Erleben, Beschreiben – Schritte zu einem dialogischen Mathematikunterricht. Heft M 44. Landesinstitut für Schulentwicklung, Stuttgart: 2000.

[9] Sarah Bregenzer:
Zweite Staatsprüfung für die Laufbahn des höheren Schuldienstes an Gymnasien, Kurs 64, 2006.
Mit Mathe Lernen lernen – Ein Unterrichtsprojekt in Klasse 6.
Zulassungsarbeit im Fach Mathematik, Kurs 64. Fachleiter: R. Sandmann.

[10] Kristin Dahl, Sven Nordquist:
Zahlen, Spiralen und magische Quadrate – Mathe für jeden. Verlag Friedrich Oetinger, Hamburg: 2003.

[11] Norbert Esper, Renatus Lütticken, Johannes Schornstein, Claudia Uhl (Hrsg.):
Fokus Mathematik. Band 3, Baden Württemberg. Cornelsen-Verlag, Berlin: 2006.

[12] Dr. Dieter Brandt u.a. / Manfred Baum u.a. (Autoren):
Lambacher Schweizer 2 und 3, Baden-Württemberg. Klett-Verlag, Stuttgart: 2005.

[13] Prof. Dr. Heinz Griesel, Prof. Dr. Helmut Postel, Friedrich Suhr (Hrsg.):
Elemente der Mathematik 3. Schroedel Diesterweg, Braunschweig: 2006.

7 Anhang

7.1 Bemerkungen

- Der Anhang ist so sortiert, dass ihn der Leser parallel zur Lektüre des Kapitels 4 von vorne nach hinten durchblättern kann.

- Unbeschriftete Arbeitsblätter (ohne Schülerlösung) befinden sich auf der Materialien-CD.

- Bildnachweis (sofern nichts anderes vermerkt): Red Pepper Cliparts.

1 Brief an die Schüler

Singen, im schönen Hegau-Gymnasium, den 20.9.2006

Lieber Tim!

Heute wirst Du Deine erste Aufgabe im Knobeltagebuch bearbeiten!
Wir haben ja gestern schon gemeinsam überlegt, was es wohl mit dieser neuen Form von Tagebuch auf sich haben könnte...

Ich möchte Dir nochmal erklären, worauf es beim Schreiben Deines Knobeltagebuchs ankommt:

Anders als sonst geht es beim Lösen der Aufgaben im Knobeltagebuch nicht darum, nur eine Lösung und den Lösungsweg zu notieren.
Zusätzlich sollst Du in Deinem Knobeltagebuch aufschreiben, was Du Dir bei den einzelnen Lösungsschritten **gedacht** hast und von welchen Fr**agen** Du Dich hast leiten lassen.
Führen diese Gedanken und Deine Notizen in eine „Sackgasse" und Dein Lösungsweg ist ein Ir**rweg**, dann streiche ihn nicht durch!! Versuche stattdessen kurz zu begründen, warum Du glaubst, dass Dein Lösungsweg doch nicht zum Ziel führt und suche eine andere Lösung.

Gestalte Dein Knobeltagebuch - genau wie Dein Lerntagebuch - übersichtlich: notiere das Datum und arbeite mit farbig unterstrichenen Überschriften, beschrifteten Skizzen...

Falls Dir diese Art des Knobelns, bei der man all seine Gedanken auf dem Lösungsweg notieren soll, noch etwas seltsam erscheint, dann kannst Du Dir auch Folgendes vorstellen:

- Schreibe einem Freund / einer Freundin einen Brief und erkläre ihm / ihr Deine Lösung.
- Oder: vielleicht fällt Dir eine kleine Geschichte ein, in die Du Deine Lösungsgedanken „verpacken" möchtest.
- Oder: Male eine Skizze zu Deinen Lösungsgedanken, beschrifte und erkläre sie.
- Oder: ...

Dies hier ist Dein Knobeltagebuch - Deiner Fantasie auf dem Weg zu Deiner Lösung sind keine Grenzen gesetzt!!!

Viel Spaß und Freude beim Knobeln,

2 OHP 1

Ein bisschen Zahlenzauberei

Denke Dir eine ganze Zahl…

…lass Dir Zeit…

…es sollte eine schöne Zahl sein, die Dir gefällt! ☺

Eine gefunden? Dann merke sie Dir gut!

Führe nun folgende Rechenoperationen durch:

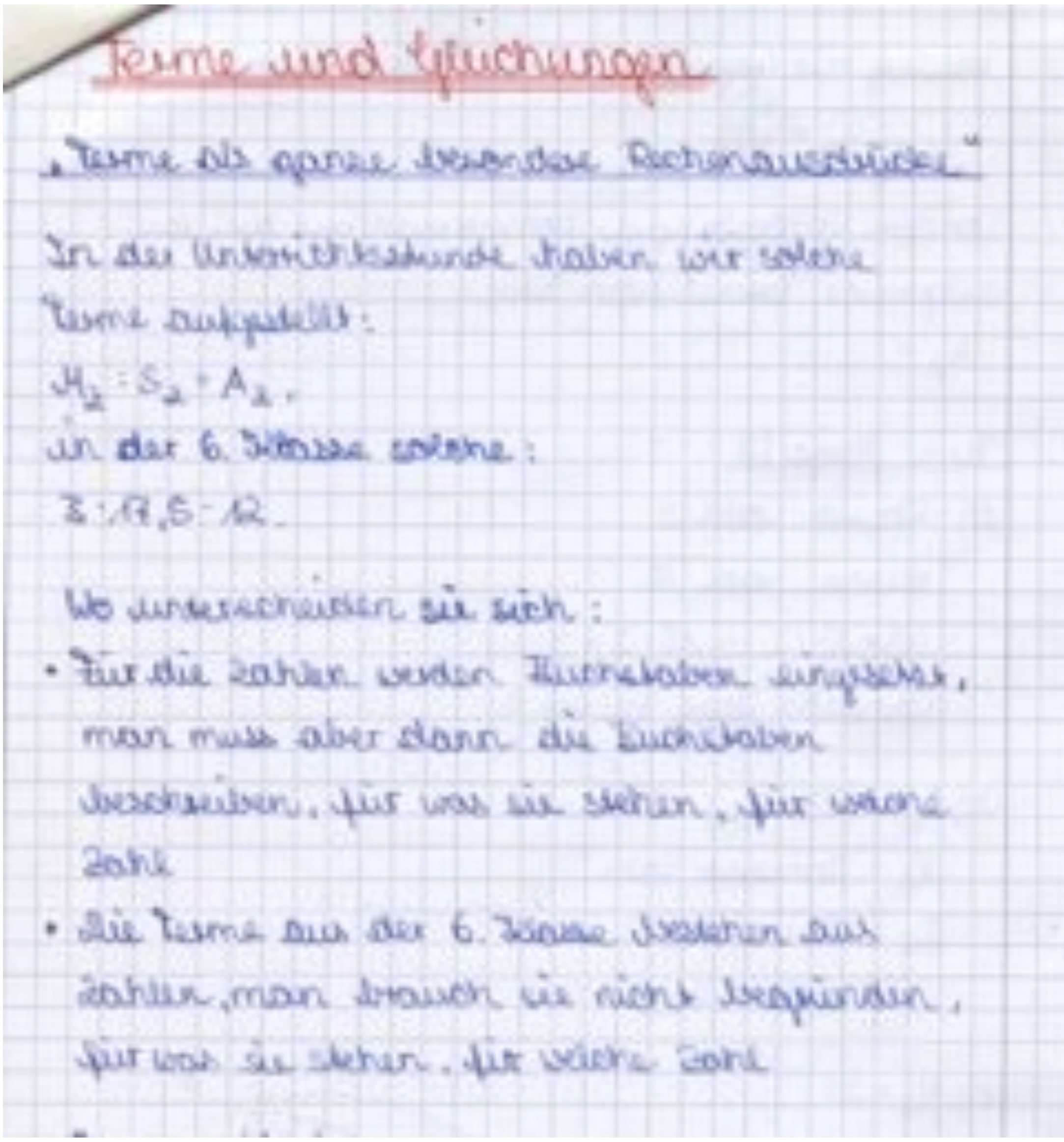
1) multipliziere Deine Zahl mit 5
2) addiere dann 6
3) multipliziere das Ergebnis mit 4
4) subtrahiere 4
5) multipliziere das Ergebnis nochmals mit 5

Quelle und Bildnachweis:
Kristin Dahl, Sven Nordquist:
Zahlen, Spiralen und magische Quadrate – Mathe für jeden. Verlag Friedrich Oetinger, Hamburg: 2003, S. 30.

3 „Term-Magie 1) bis 3)“ (Schülerlösung)

3.1 „Terme als besondere Rechenausdrücke“ (Lena)

Schüler 2:



Terme und Gleichungen

„Terme als ganz besondere Rechenausdrücke"

In der Unterrichtsstunde haben wir solche
Terme aufgestellt:
$H_2 = S_2 \cdot A_2$.
in der 6. Klasse solche:
$3 : 17{,}5 \cdot 12$.

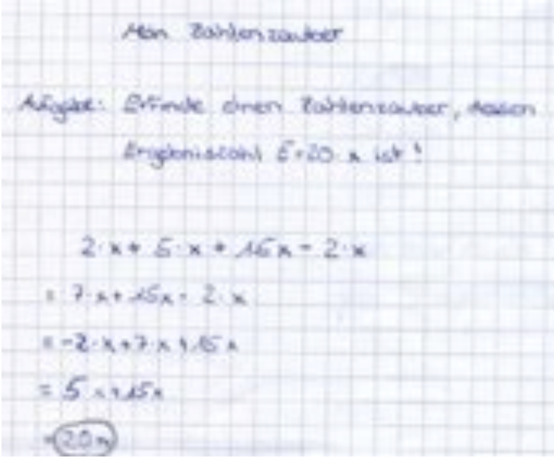
Wo unterscheiden sie sich:

- Für die Zahlen werden Buchstaben eingesetzt, man muss aber dann die Buchstaben beschreiben, für was sie stehen, für welche Zahl
- die Terme aus der 6. Klasse bestehen aus Zahlen, man braucht sie nicht begründen, für was sie stehen, für welche Zahl

4 Numerika-Lernzielkontrolle

4.1 E=20x – Zahlenzauberei

Schüler 1:



Mein Zahlenzauber

Aufgabe: Erfinde einen Zahlenzauber, dessen Ergebniszahl $E=20\cdot x$ ist!

$2\cdot x+5\cdot x+16x-2\cdot x$

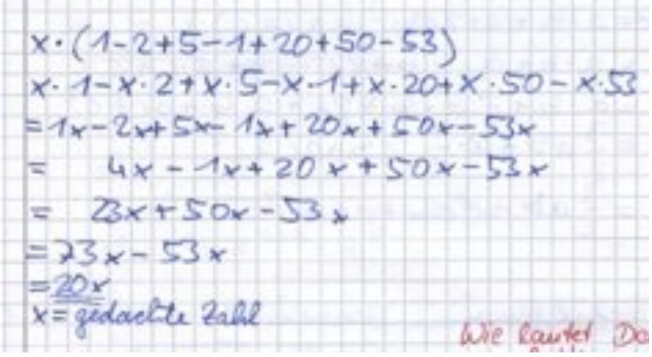
$=7\cdot x+15x-2\cdot x$

$=-2\cdot x+7\cdot x+15x$

$=5x+15x$

$=20x$

Schüler 2:



$x\cdot(1-2+5-1+20+50-53)$

$x\cdot 1-x\cdot 2+x\cdot 5-x\cdot 1+x\cdot 20+x\cdot 50-x\cdot 53$

$=1x-2x+5x-1x+20x+50x-53x$

$=4x-1x+20x+50x-53x$

$=23x+50x-53x$

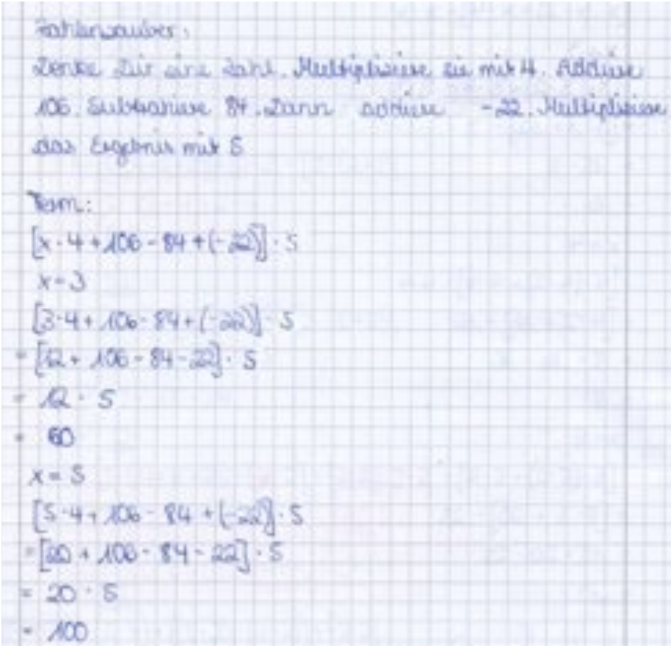
$=73x-53x$

$=\underline{20x}$

$x=$ gedachte Zahl

Wie lautet Da

Schüler 3:



Zahlenzauber:

Denke dir eine Zahl. Multipliziere sie mit 4. Addiere 106. Subtrahiere 84. Dann addiere −22. Multipliziere das Ergebnis mit 5

Term:

$[x\cdot 4+106-84+(-22)]\cdot 5$

$x=3$

$[3\cdot 4+106-84+(-22)]\cdot 5$

$=[12+106-84-22]\cdot 5$

$=12\cdot 5$

$=60$

$x=5$

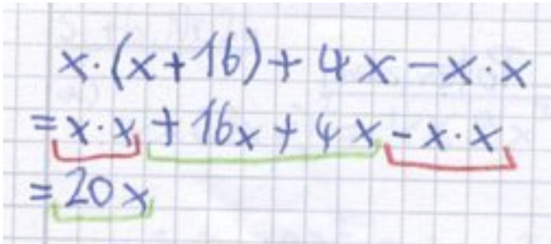
$[5\cdot 4+106-84+(-22)]\cdot 5$

$=[20+106-84-22]\cdot 5$

$=20\cdot 5$

$=100$

Fabian:



$x\cdot(x+16)+4x-x\cdot x$

$=\underbrace{x\cdot x}+\underbrace{16x+4x}\underbrace{-x\cdot x}$

$=\underbrace{20x}$

5 HA: Brief an die Parallelklasse (Zahlenzauberei)

Liebe Schülerin / lieber Schüler der 7c!

In den letzten Stunden haben wir uns mit so genannten „Zahlenzaubereien" beschäftigt!
Stell Dir vor, ein Schüler aus der Parallelklasse fragt Dich, was Ihr gerade in Mathe macht. Du antwortest: „Zahlenzaubereien" und Dein Gegenüber sieht Dich mit fragendem Gesicht an.

Schreibe ihm / ihr einen Brief und erkläre ihm / ihr was das genau ist: eine „Zahlenzauberei"! Was hat das mit unserem aktuellen Mathematikthema „Terme" zu tun!?
Fällt Dir ein schönes Beispiel für eine Zahlenzauberei ein?

5.1 Ergebnisse

Brief 1:

Brief

Eine Zahlenzauberei ist etwas wobei man jemandem [illegible] Ergebnis nennt und er dir sagt welche Zahl du dir gewählt hast.

Bsp: 60. Deine Zahl war 6 ✓

Mit Mathe hat das zu tun weil man sich Terme zur Berechnung der Zahlen aus denken muss

Brief 2:

18. Nov 2006

Liebe/r XY der Parallelklasse

Wenn du wissen willst, was wir gerade in Mathe machen, kann ich nur sagen „Zahlenzauberei". Und wenn du dich fragst was das ist, und was das mit unserem eigentlichen Thema zu tun hat, dann kann ich dir das erklären:
Ein Zahlenzaubereibeispiel könnte z.B. so aussehen:
Denke dir eine Zahl.
dividiere sie durch 3, multipliziere das Ergebnis mit 5, multipliziere das Ergebnis mit 6, und addiere zum Ergebnis 10.
Wenn du mir nun dein Ergebnis nennst, und eine Anfangszahl gewählt hast, die durch 3 teilbar ist, so kann ich dir ohne Probleme deine ursprünglich gedachte Zahl nennen.
(Wenn deine Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so kann ich dir deine Zahl auch nennen, aber für dich wird es vielleicht etwas schwieriger zum rechnen.)

Wie ich dir deine Zahl sagen kann, will ich dir nun erklären:
Stellen wir einmal einen Term für die von mir in Worten formulierte Rechnung auf:
$x : 3 \cdot 5 \cdot 6 + 10$
x steht für die von dir gedachte Zahl.
Wenn du nun also für x z.B. 6 einsetzt, dann musst du rechnen:
$6 : 3 \cdot 5 \cdot 6 + 10$
$= 2 \cdot 5 \cdot 6 + 10$
$= 10 \cdot 6 + 10$
$= 60 + 10$
$= 70$
Wenn du mir nun also die 70 nennst, so kann ich dir sofort sagen, dass deine ursprünglich gedachte Zahl 6 ist.
Wie ich das mache?
Ich rechne einfach $70 : 10 - 10$.
Das glaubst du jetzt nicht, weil du was du alles rechnen solltest; aber da wären wir schon bei unserem Mathe-Thema:
es heißt Termumformungen!

Das heißt, die Frage ist nun, ob $x : 3 \cdot 5 \cdot 6 + 10$ (der Term mit dem du dein Ergebnis ausgerechnet hast) gleichwertig ist mit dem Term $x \cdot 10 + 10$ (beim Rückwärtsrechnen $x : 10 - 10$)?
Ich werde dir nun dies beweisen, und zwar mit Termumformungsregeln des Mathematikunterrichts:
$x : 3 \cdot 5 \cdot 6 + 10 \stackrel{?}{=} x \cdot 10 + 10$
$\frac{x}{3} \cdot 5 \cdot 6 + 10 \stackrel{?}{=} x \cdot 10 + 10$
$= x \cdot 10 + 10 \stackrel{?}{=} x \cdot 10 + 10$ Sehr gut!
Hiermit siehst du, dass $x : 3 \cdot 5 \cdot 6 + 10$ das selbe wie $x \cdot 10 + 10$ ist.
Wenn ich deine Zahl herausfinde rechne ich natürlich rückwärts:
$x : 10 - 10$.
Jetzt weißt du, was wir gerade in Mathe machen, nämlich Termumformungen!

Susanne:

Liebe Eva

Vor ein Tagen hast du mich gefragt was wir gerade in Mathe machen. Ich habe darauf geantwortet „Zahlenzauberei". Daraufhin hast du ein fragendes Gesicht gemacht und gesagt ihr hättet gerade das Thema „Terme". Da habe ich gesagt das hätten wir auch. Da hast du nur noch Bahnhof verstanden.
In diesem Brief möchte ich versuchen dir unser Thema zu erklären und was „Zahlenzauberei" mit „Termen" zu tun hat.

Beispiel für Zahlenzauberei:

- denke dir eine Zahl
- multipliziere sie mit 4
- multipliziere das Produkt mit 3
- ziehe von diesem Ergebnis das doppelte von deiner gedachten Zahl ab
- nun sage mir das Endergebnis und ich kann dir so deine gedachte Zahl sagen

? ? ?  ? ? ?

Nein es ist keine Zauberei falls du dich das fragst. Denn du kannst es was auch !!! [illegible]

Term: ($x \hat{=}$ gedachte Zahl)

$x \cdot 4 \cdot 3 - 2x$
$= x \cdot 12 - 2x$
$= x \cdot 10$ → Term [illegible] Zahl

z.B.: $x \hat{=} 4$

$4 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 4$
$= 48 - 8$
$= 40$ $(: 10 = 4)$

„Zahlenzauberei" ist nichts anderes als Terme vereinfachen, Terme zu überprüfen, Terme umzuschreiben und aufzustellen.

Ich hoffe ich konnte dir unser Thema verständlicher machen.

Viele Grüße

Susanne

PS: Probier doch die Zahlenzauberei an deinen Klassenkameraden aus und viel Spaß in Mathe!

Claudia:

Liebe Franzi,

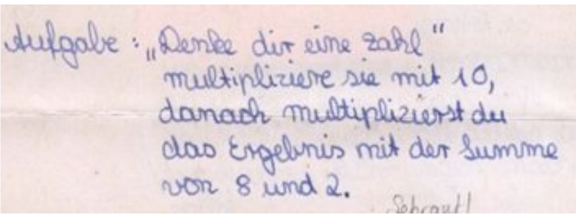
Unser Thema in Mathe ist „Zahlenzaubern“.
Hier ein Beispiel für „Zahlenzaubern“

denke dir eine Zahl,
multipliziere sie mit 5,
dividiere das Ergebnis durch 2
und dann multipliziere es nochmals mit 4

$x \cdot 5 : 2 \cdot 4$

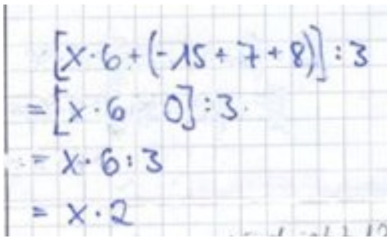
Viele Grüße

Zztest 1:



Aufgabe: „Denke dir eine Zahl“
multipliziere sie mit 10,
danach multiplizierst du
das Ergebnis mit der Summe
von 8 und 2.

Zztest 3:



$[x \cdot 6 + (-15 + 7 + 8)] : 3$
$= [x \cdot 6 \quad 0] : 3$
$= x \cdot 6 : 3$
$= x \cdot 2$

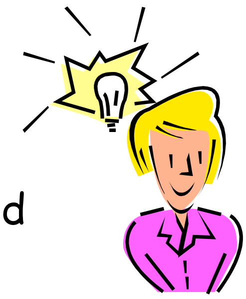
6 Terme raten

6.1 OHP 2

Spiel: Terme raten

Jeder von Euch überlegt sich einen Term, der angibt, wie sich Eure Zahl aus der Zahl Eures Nebensitzers / Eurer Nebensitzerin berechnet.
Notiert diesen Term auf der Rückseite der Tabelle.
ACHTUNG! Der andere darf den Term nicht sehen, denn er/sie muss ihn folgendermaßen erraten:

Partner A fängt an zu raten.



1) Partner A nennt Partner B eine Zahl.
2) Partner B setzt diese Zahl in seinen / ihren Term ein, berechnet den Wert des Terms und nennt das Ergebnis Partner A.
3) Ihr spielt so viele Runden, bis Partner A den Term nennen kann. Dann wird gewechselt.

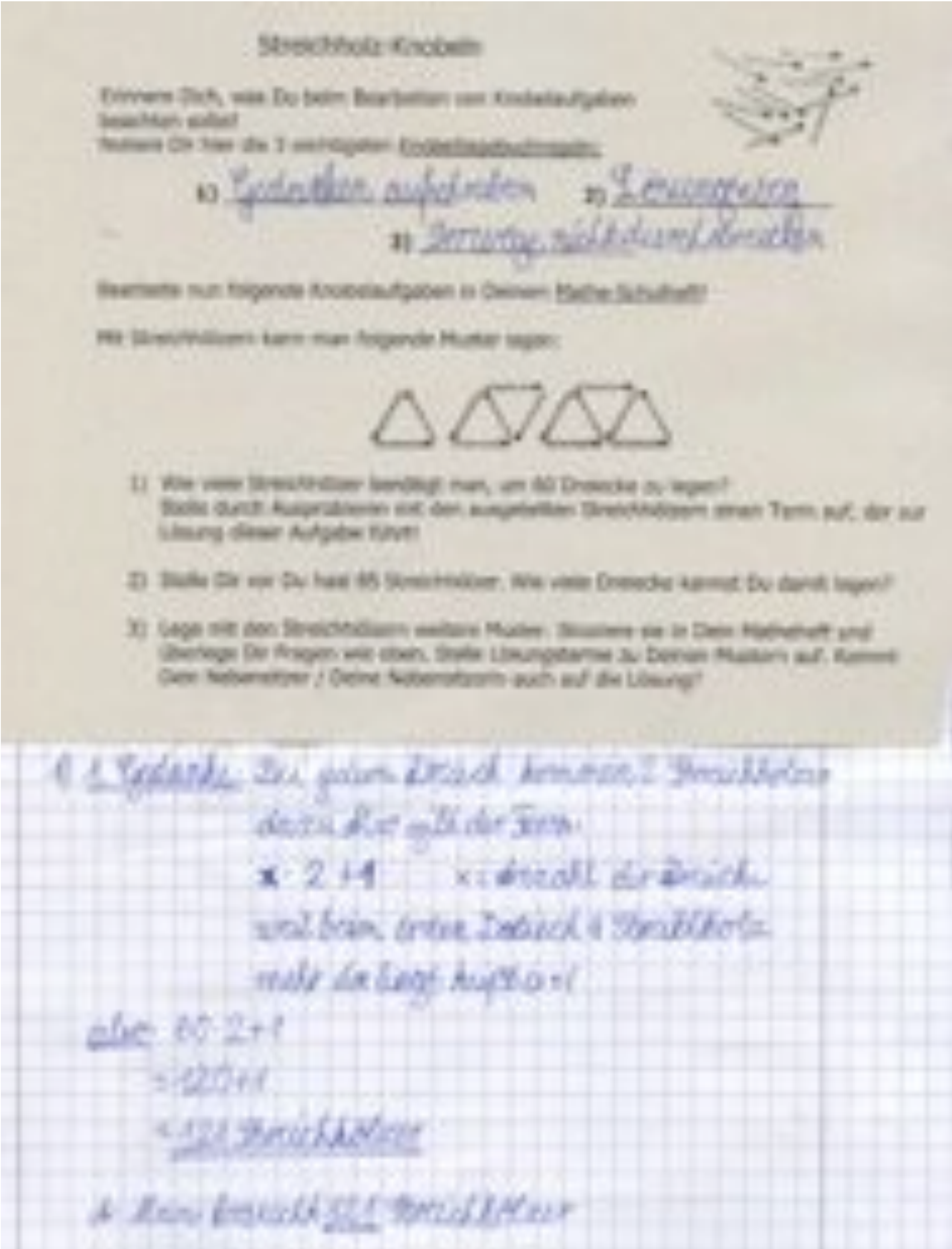
Gewonnen hat, wer am wenigstens Runden benötigt, um den Term zu erraten!

6.2 Tabelle

MEINE ZAHL	.... ZAHL

7 Streichholzknobeln

7.1 Arbeitsauftrag (Lösung von Michael)



Streichholz-Bildnachweis:
Lambacher Schweizer 3. Klett Verlag, Stuttgart: 2005. S. 86.

7.2 „Zwei Lösungen für das Streichholzknobeln Nr. 1)?“ (Schülerlsg.)


Für die Dreiecke die dazu kommen.

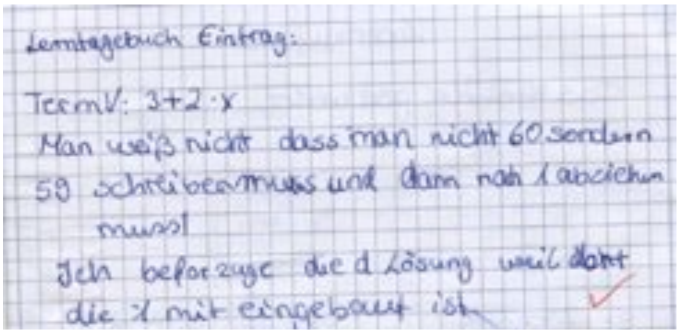
Es ist falsch.

Punkt vor Strich

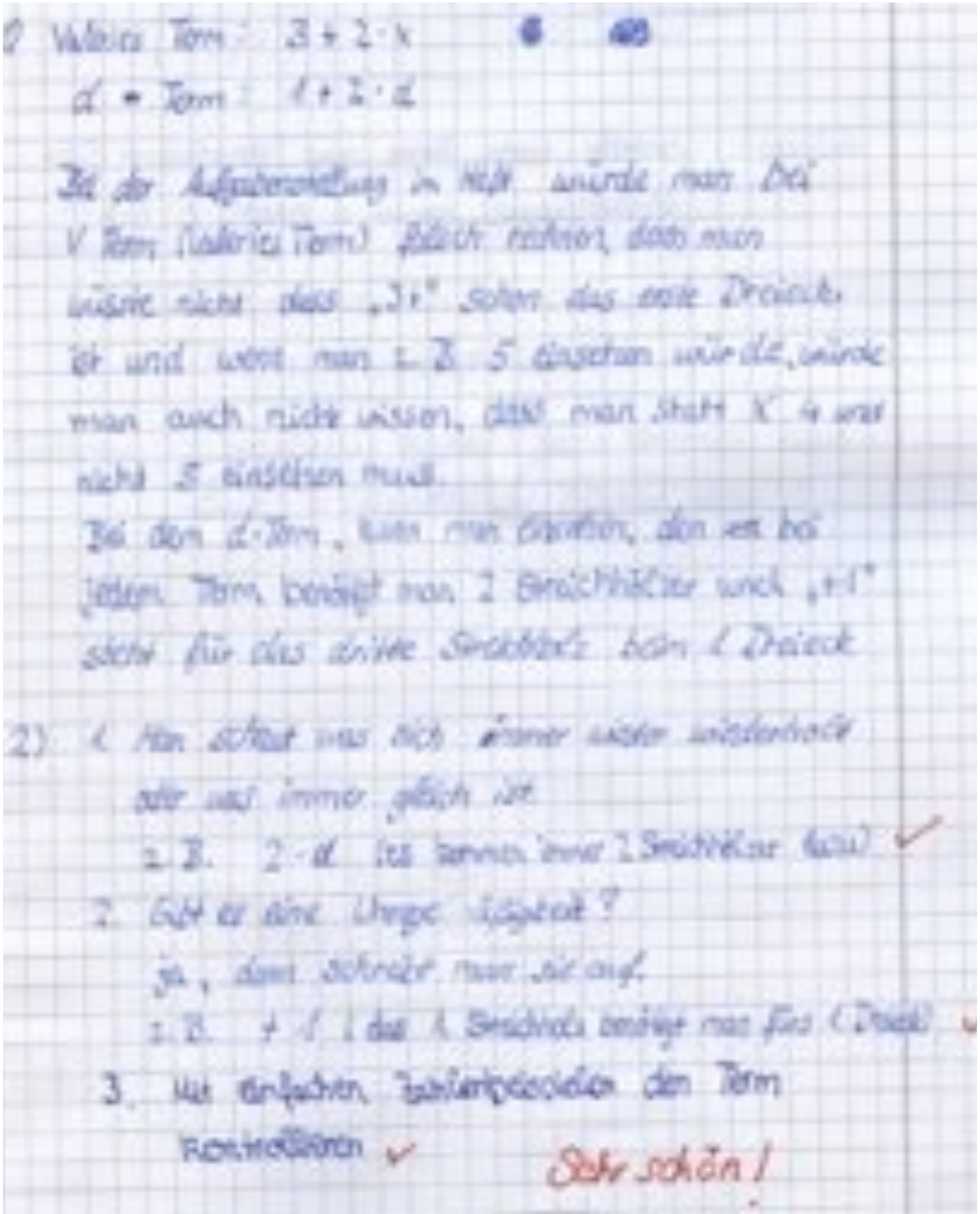
Klammern zuerst

7.2.1 Vergleich der beiden Lösungen / Strategien der Schüler

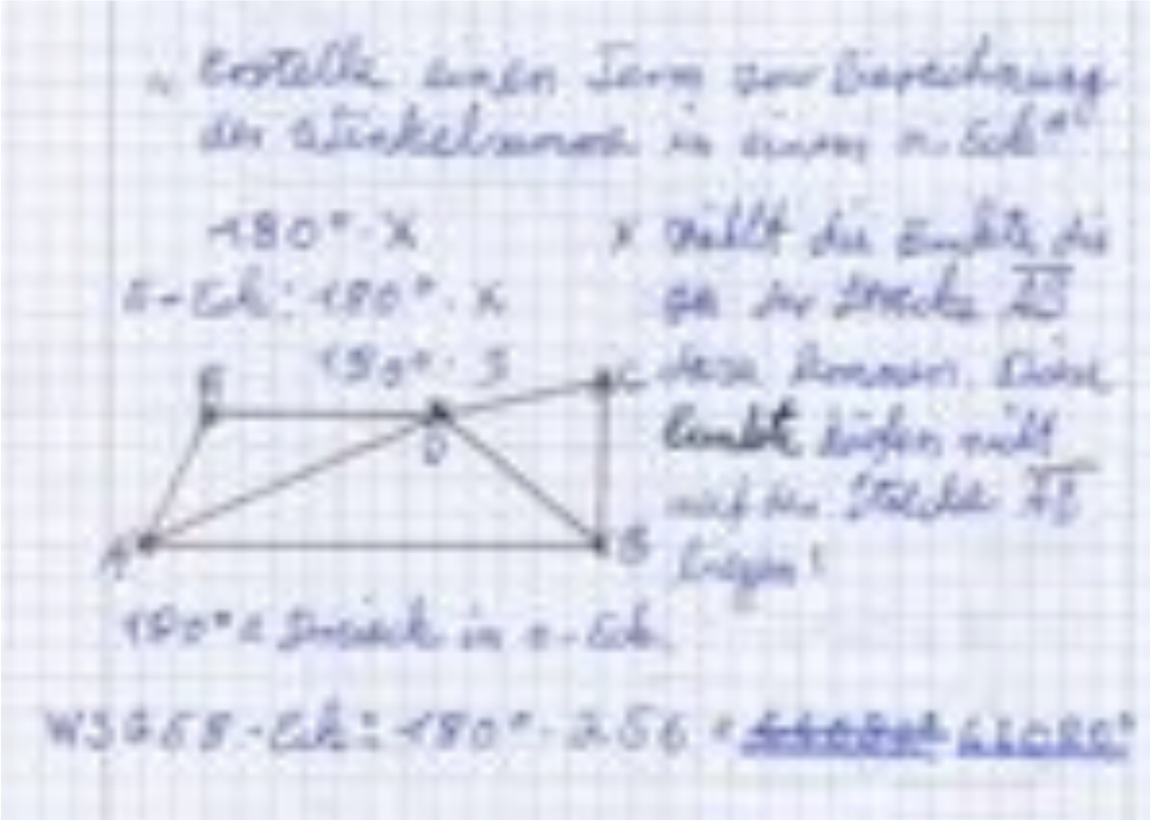
Anna-Lisa:



Claudia:



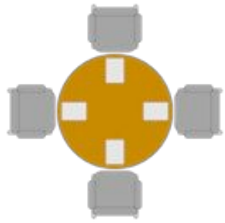
7.2.2 Schülerlösung zu „Winkelsumme im n-Eck“



8 Wertgleiche Terme

8.1 „Das Knobeln geht weiter…“

Das Knobeln geht weiter…

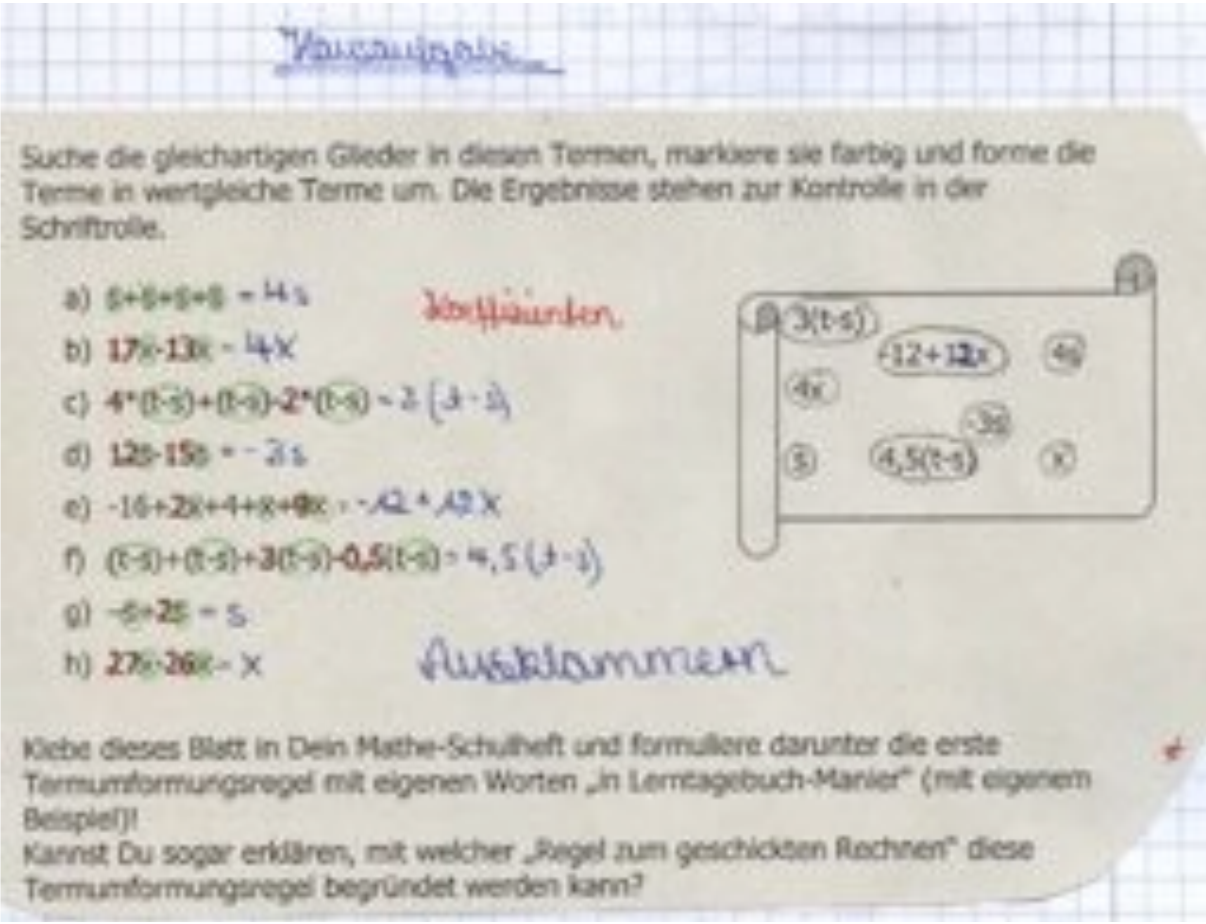


Frau Distel macht mit der Klasse 7c Gruppenarbeit.
Je 4 Schüler sitzen an einem Tisch zusammen. Jeder Schüler bringt sein Mathebuch (Maße des geschlossenen Buches: Länge: y und Breite: x) und legt es geöffnet auf den ansonsten leeren Tisch.

→ Ins Mathe-Schulheft:

Welcher Flächeninhalt B geht durch die geöffneten Bücher von der Tischarbeitsfläche verloren? Stelle einen Term zur Berechnung von B auf!
Vergiss die Knobeltagebuchprinzipien nicht: Skizzen, Erklärungen … sind unerlässlich!

8.2 Arbeitsblatt: 1. Termumformungsregel



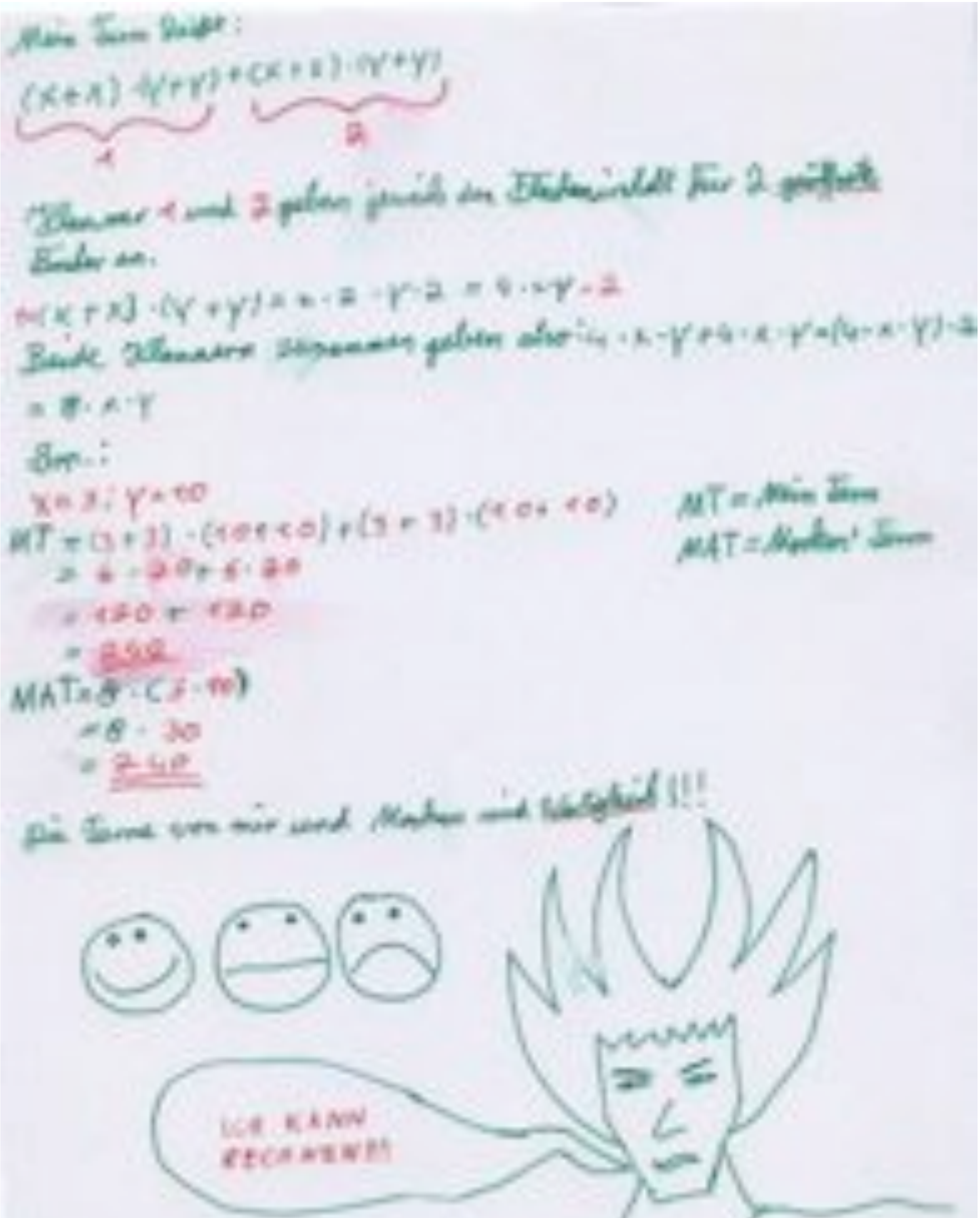
Suche die gleichartigen Glieder in diesen Termen, markiere sie farbig und forme die Terme in wertgleiche Terme um. Die Ergebnisse stehen zur Kontrolle in der Schriftrolle.

a) s+s+s+s = 4s
b) 17x-13x = 4x
c) 4*(t-s)+(t-s)-2*(t-s) = 3(t-s)
d) 12s-15s = -3s
e) -16+2x+4+x+9x = -12+12x
f) (t-s)+(t-s)+3(t-s)-0,5(t-s) = 4,5(t-s)
g) -s+2s = s
h) 27x-26x = x

Ausklammern

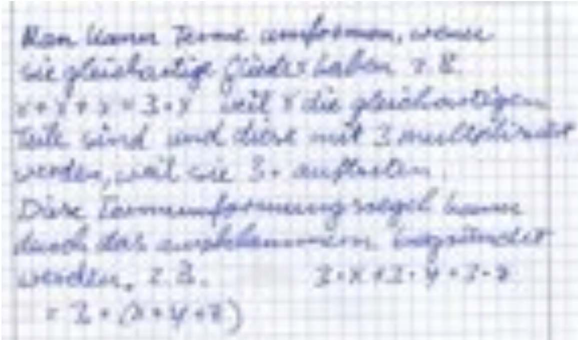
Klebe dieses Blatt in Dein Mathe-Schulheft und formuliere darunter die erste Termumformungsregel mit eigenen Worten „in Lerntagebuch-Manier“ (mit eigenem Beispiel)!
Kannst Du sogar erklären, mit welcher „Regel zum geschickten Rechnen“ diese Termumformungsregel begründet werden kann?

8.2.1 OHP Julius I



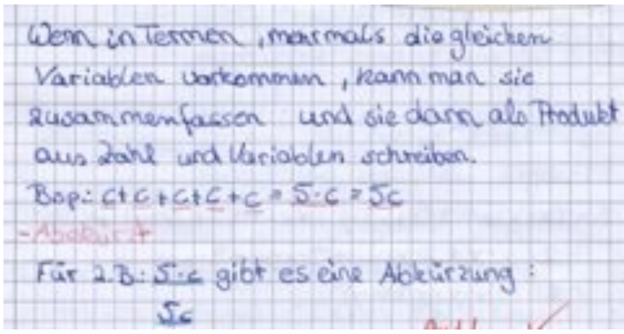
8.2.2 Schülernotizen zur 1. Termumformungsregel

Markus:



Man kann Terme umformen, wenn sie gleichartige Glieder haben z.B. $x+x+x=3\cdot x$ weil x die gleichartigen Teile sind und diese mit 3 multipliziert werden, weil sie 3· auftreten.
Diese Termumformungsregel kann durch das ausklammern [unclear] werden, z.B. $3\cdot x+3\cdot y+3\cdot z$
$=3\cdot(x+y+z)$

Schüler 2:



Wenn in Termen, mehrmals die gleichen Variablen vorkommen, kann man sie zusammenfassen und sie dann als Produkt aus Zahl und Variablen schreiben.
Bsp: $c+c+c+c+c=5\cdot c=5c$
-Abkürz.
Für z.B.: $5\cdot c$ gibt es eine Abkürzung:
$5c$

Schülerin 3:

Arbeitsblatt 6

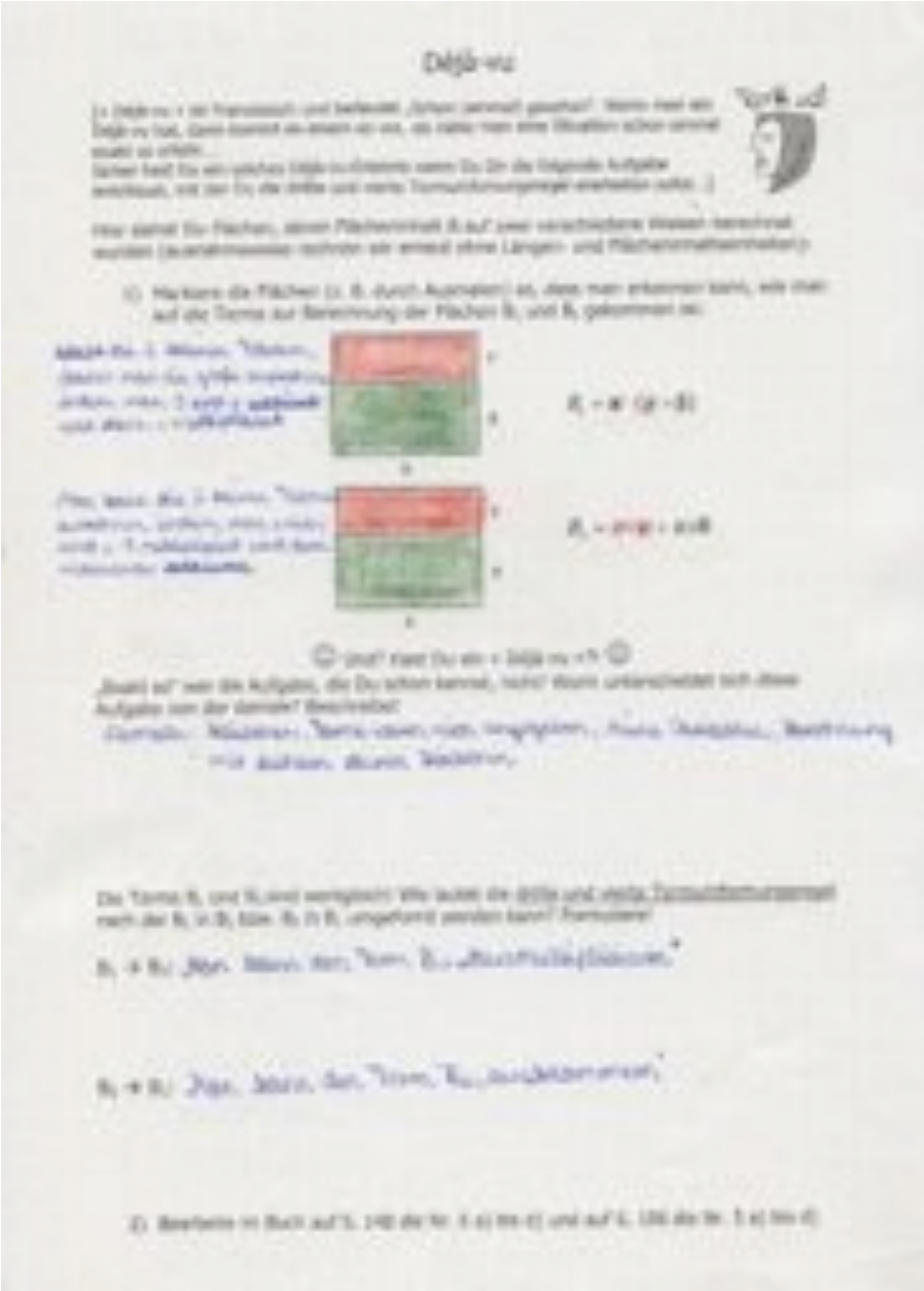
Merke: Ein Bruch* wie $3x+7x$ wird berechnet indem man die Zahlen addiert und die Variable beibehält: $3x+7x$
$=10x$

* Erzähl mal: Warum sprichst Du hier von einem Bruch?! Das ist interessant!

Eigener Merksatz → gut!

9 Déjà-vu

9.1 Schülerlösung 1


Déjà-vu

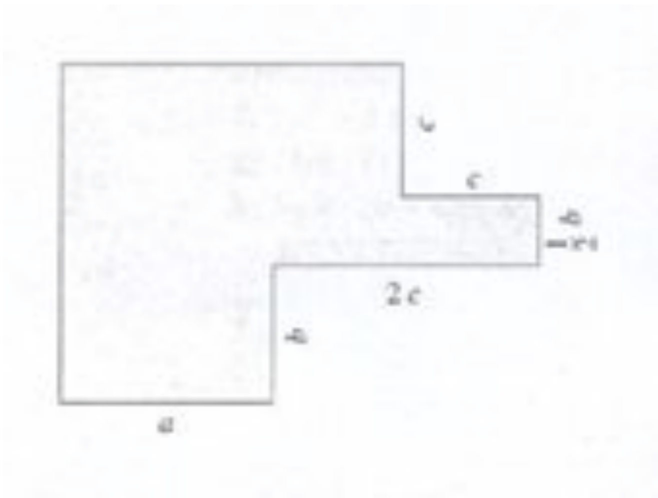
9.2 Schülerlösung 2


Déjà-vu

10 Flächenberechnung / Wettbewerb

Bearbeite folgende Aufgabe sorgfältig (Knobeltagebuchregeln!) im Schulheft (die Wertetabelle unten darfst Du natürlich auf dem Blatt ausfüllen!):

Den Flächeninhalt A der Figur kann man auf verschiedene Arten berechnen:



a) Wie viele Terme zur Berechnung des Flächeninhalts findest Du? [Tipp: Unterteile die Fläche geschickt in Teilflächen!]

b) Überprüfe, ob Deine Terme auch wirklich wertgleich sind:

Einen ersten Hinweis („Wieso nur das?") gibt die Wertetabelle. Trage Deine aufgestellten Terme ein und fülle die Tabelle aus:

a	**b**	**c**	**A_1=**	**A_2=**	**A_3=**
3	2	1			
5	4	2			

c) Gehe nun „auf Nummer sicher" und zeige durch Termumformungen, dass die Terme tatsächlich wertgleich sind!

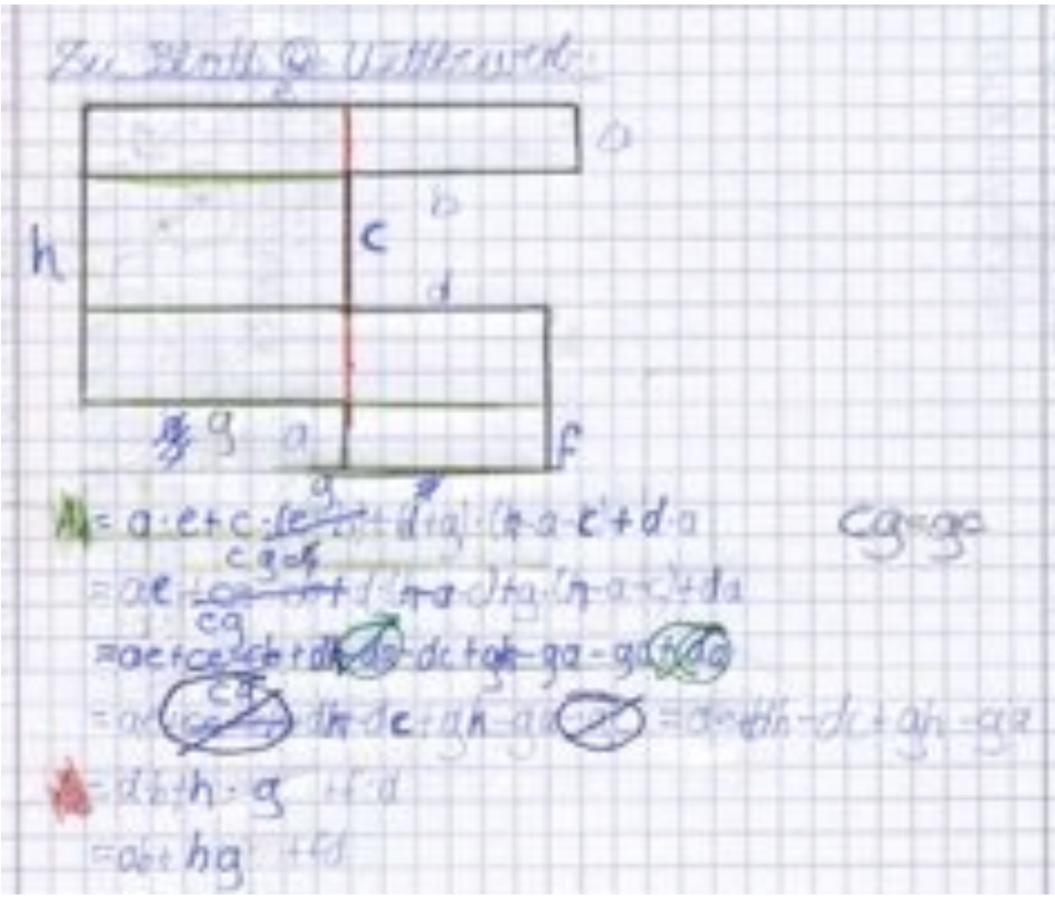
Wettbewerb:

d) Zeichne selbst eine Fläche, deren Flächeninhalt man auf verschiedene Arten berechnen kann! Das ist gar nicht so einfach! Für jeden aufgestellten Term zur Berechnung des Flächeninhalts erhälst Du einen Punkt! Wer erzielt die meisten Punkte?

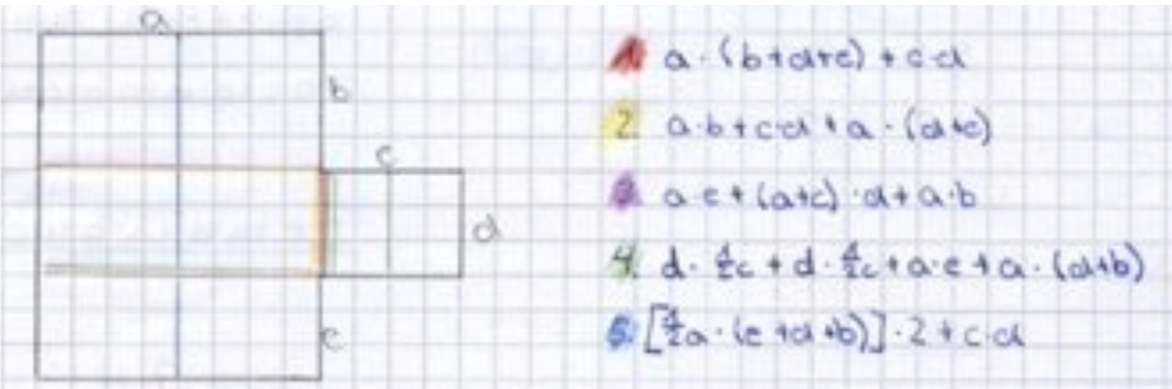
Bildnachweis:
Fokus Mathematik Band 3. Cornelsen-Verlag, Berlin: 2006. S. 48.

10.1 Wettbewerbsbeiträge

Ein Alphabetterm und seine Fläche:

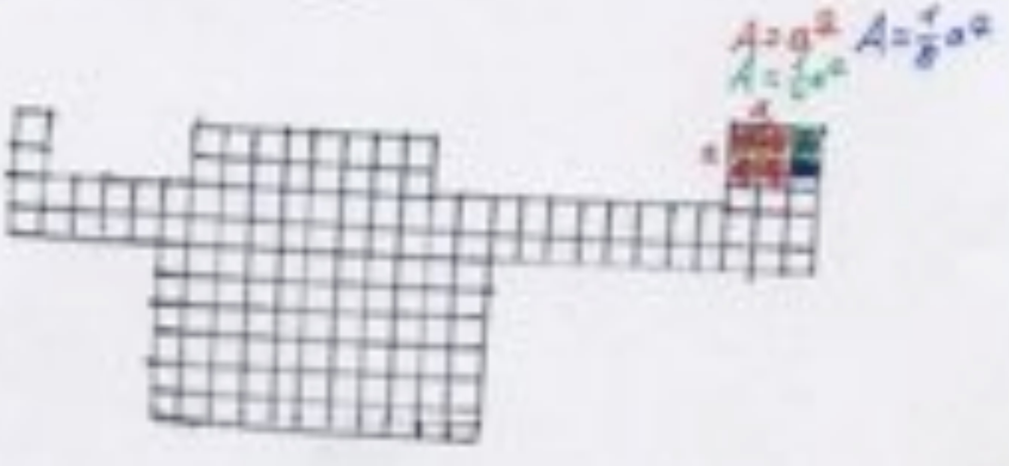


Vanessa:



OHP Julius II:

Meine Fläche besteht aus $37a^2$. Ich kann meine Fläche auch in $\frac{1}{4}a^2$ einteilen. Hierzu multipliziere ich die 37 mit dem Nenner des Bruchs.
Also $37 \cdot 4 = 148$
Meine Fläche besteht aus $148 \frac{1}{4}a^2$
Ich kann meine Fläche auch in $\frac{1}{8}a^2$ einteilen. Dazu multipliziere ich 37 mit 8.
Zur Berechnung meiner Fläche in a^2 habe ich einen Term aufgestellt.
$37 \cdot n \frac{1}{n}a^2$ n = Nenner des Bruchs
Da ich für n jede Zahl einsetzen kann, gibt es unendlich viele Möglichkeiten die Fläche zu zeichnen, aber nur einen sinnvollen Term.



Markus:

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, weil:
Wenn man eine Fläche hat z.B. a^2.

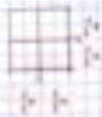
Dann kann man diesen Flächeninhalt berechnen, indem man einfach $a\cdot a$ rechnet.
Man kann diese Fläche auch vierteln, dann die Fläche für ein Viertel, in diesem Fall $\frac{1}{4}a^2$, ausrechnen, und dann mal vier rechnen, um auf den ursprünglichen Term zu kommen: $4\cdot\frac{1}{4}a^2$.
Oder man sechzehntelt die Fläche also $\frac{1}{16}a^2$ und nimmt diese dann mal 16: $\frac{1}{16}a^2\cdot 16$.
So kann man es immer weiter machen, indem man mit $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{1024}$; ... rechnet, und dann immer mit der Zahl multipliziert die im Nenner steht.

Genau so habe ich bei meiner Fläche auch gerechnet, mit dem einzigen Unterschied, dass ich nicht nur mit der Zahl des Zählers multipliziert habe, sondern mit der Zahl des Nenners, und diese noch mal 21. (Weil meine Fläche $21\cdot a^2$ hat.)
Für a^2 wäre also die Formel $n\cdot\frac{1}{n}a^2$
n ≙ Die Anzahl der Quadrate, die aus a^2 unterteilt wurden.

Für meine Fläche gilt
$21\cdot n\cdot\frac{1}{n}$

n ≙ Die Quadrate in die unterteilt wurde.

Eine sehr schöne Überlegung – gut ausgeführt! Wie lautet Deine Formel, wenn man statt der Fläche a^2 [illegible] Quadrate aufteilt?
[illegible] Term [illegible] Überlegung (mit den Flächen) heraus?



1. Versuch

4 mit halbierten Seitenlängen
$\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot 4=\frac{1}{4}a^2\cdot 4=a^2$

das heißt beim ersten Versuch ist der Term des ersten Versuchs gleich mit dem zweiten Term.

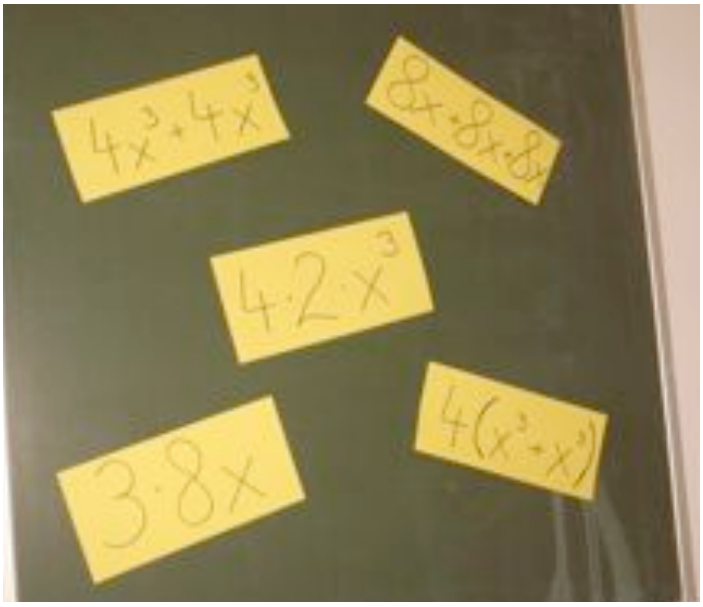
2. Versuch
Seitenlängen vierteln:
$16\cdot\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{4}a=\frac{1}{16}a^2\cdot 16$ also sind beide Terme wertgleich und führen beide zum Ergebnis.

Bei meiner ersten Fläche geht diese Methode also auch, denn man muss dann z.B.
$\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot 4\cdot 21$ rechnen bzw.
$\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{4}a\cdot 16\cdot 21$.

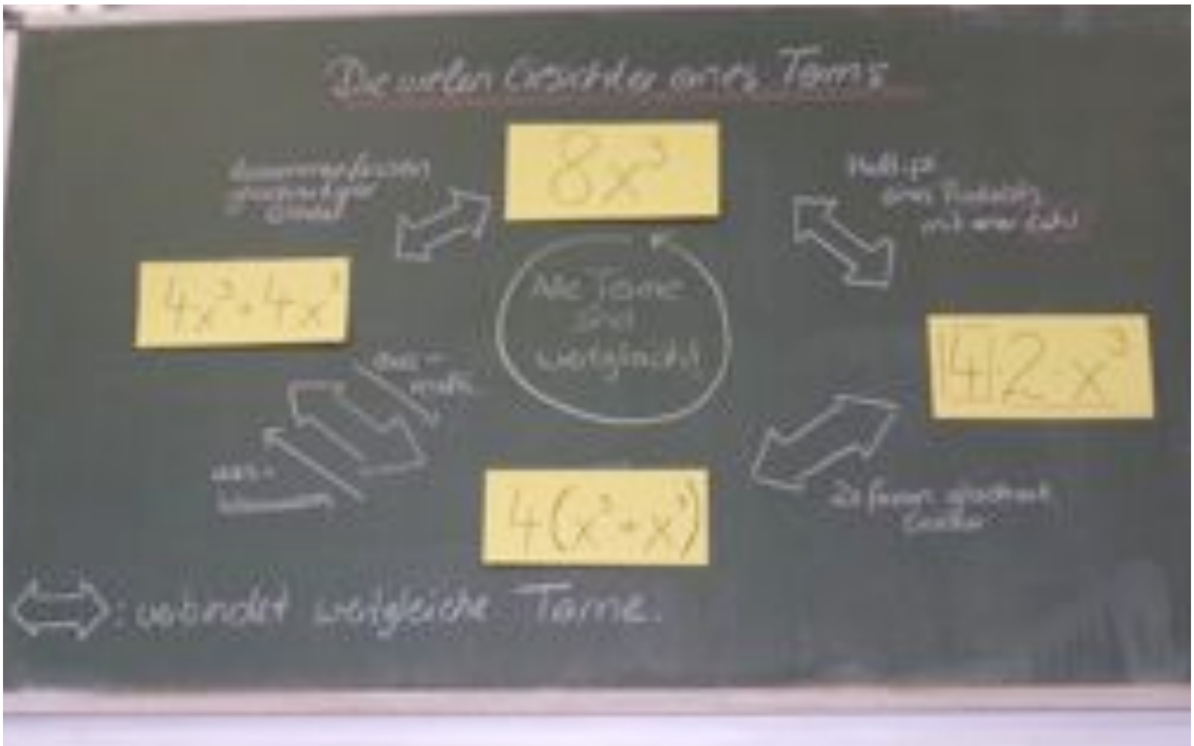
Wie lautet dann die allgemeine Formel? [illegible]

11 Der Kreis schließt sich

11.1 Rechte Tafelseite



11.2 Tafelbild: Zusammenfassung



12 Was sagen die Dialogpartner?

12.1 OHP-Folie: Bitte um Rückmeldung

Am schönen Hegau-Gymnasium, 5.12.2006

Einen schönen guten Morgen, liebe 7c!

Heute unterrichtet Euch meine liebe Kollegin Frau Schuldt! ☺

Doch bevor Ihr loslegt, habe ich eine Bitte an Euch:

Ihr wisst ja, dass ich über unsere Unterrichtseinheit „Terme und Termumformungen" eine wissenschaftliche Arbeit schreibe.

Der Titel dieses kleinen „Buches" wird sein:

X-beliebig?
Dialogisches Lernen im Themenbereich Terme
(Klasse 7 (G8))

Nun meine Bitte an Euch:
Frau Schuldt teilt Euch jetzt kleine Zettelchen aus.
Auf denen dürft Ihr farbenfroh festhalten…

→ was Euch in den letzten Wochen in Mathe ganz besonders gefallen hat (zu den letzten Wochen gehört übrigens auch das Knobeltagebuch!)

oder

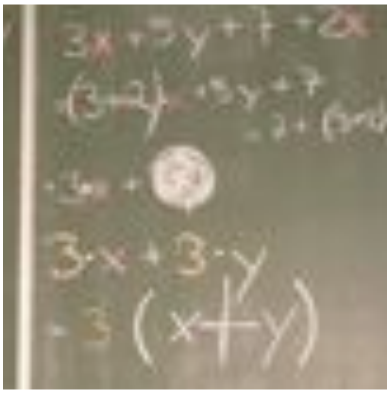
→ Ihr dürft den Titel der Arbeit (siehe oben) in farbigen Buchstaben aufschreiben/aufmalen und eine Zeichnung, die zum Thema passt, dazu malen!

Die schönsten Zettel werde ich dann verwenden, um damit den Umschlag der Arbeit zu gestalten!

Viel Spaß beim Matheunterricht mit Frau Schuldt!

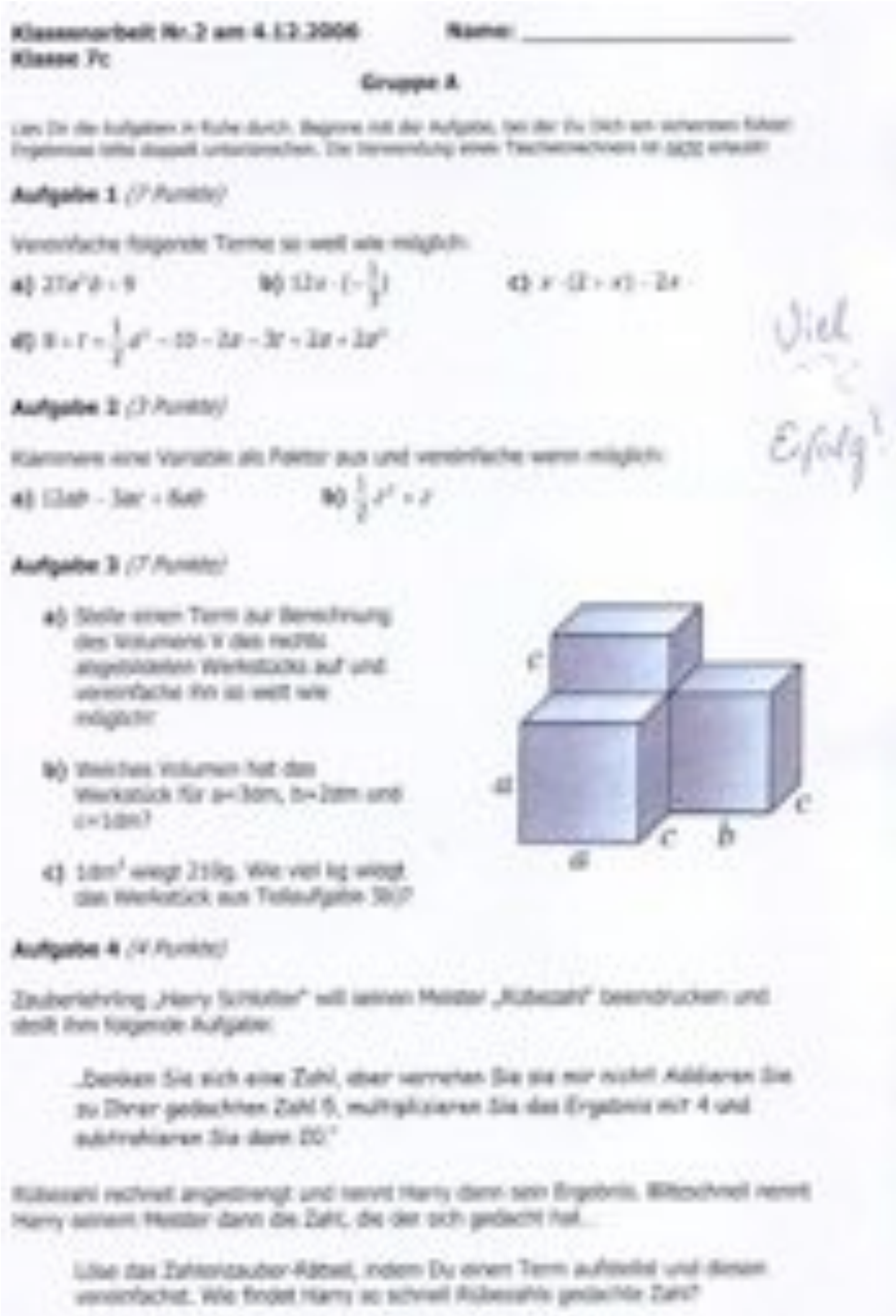
12.1.1 Zwei spezielle Situationen aus den Übungsstunden

Situation 1:



Situation 2:

12.2 Klassenarbeit



Klassenarbeit Nr.2 am 4.12.2006 **Name:** ____________________
Klasse 7c

Gruppe A

[illegible]

Aufgabe 1 *(7 Punkte)*

Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich:

a) $27a^2b : 9$ **b)** $12x \cdot (-\frac{1}{3})$ **c)** $x \cdot (2 + x) - 2x$

d) [illegible]

Viel Erfolg!

Aufgabe 2 *(3 Punkte)*

Klammere eine Variable als Faktor aus und vereinfache wenn möglich:

a) $12ab - 3ac + 6ab$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 + x$

Aufgabe 3 *(7 Punkte)*

a) Stelle einen Term zur Berechnung des Volumens V des rechts abgebildeten Werkstücks auf und vereinfache ihn so weit wie möglich.

b) Welches Volumen hat das Werkstück für a=3dm, b=2dm und c=1dm?

c) $1dm^3$ wiegt 210g. Wie viel kg wiegt das Werkstück aus Teilaufgabe 3b)?

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Zauberlehrling „Harry Schlotter" will seinen Meister „Rübezahl" beeindrucken und stellt ihm folgende Aufgabe:

„Denken Sie sich eine Zahl, aber verraten Sie sie mir nicht! Addieren Sie zu Ihrer gedachten Zahl 5, multiplizieren Sie das Ergebnis mit 4 und subtrahieren Sie dann 20."

Rübezahl rechnet angestrengt und nennt Harry dann sein Ergebnis. Blitzschnell nennt Harry seinem Meister dann die Zahl, die der sich gedacht hat.

Löse das Zahlenzauber-Rätsel, indem Du einen Term aufstellst und diesen vereinfachst. Wie findet Harry so schnell Rübezahls gedachte Zahl?

Bildnachweis:
Fokus Mathematik Band 3. Cornelsen-Verlag, Berlin: 2006. S. 48.