Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.*)

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Wenn in der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(1) \qquad F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l \cdot m}{n} \frac{x}{1} + \frac{l(l+1)\, m(m+1)}{n(n+1)} \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

die Elemente l, m, n positive reelle Werthe besitzen, so ist klar, dass die Reihe für jedes positive x einen positiven Werth annimmt, und dass es daher keinen zwischen 0 und 1 liegenden Werth von x geben kann, welcher die Gleichung

$$(2) \qquad F(l, m, n, x) = 0$$

befriedigt. Sind dagegen die Elemente l, m, n nicht sämmtlich positiv, so kann die Gleichung (2) möglicher Weise für einen oder mehrere zwischen 0 und 1 liegende Werthe von x erfüllt sein, und es entsteht die Aufgabe, genau die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Wurzeln der Gleichung (2) zu ermitteln.

Diese Aufgabe hat Herr Klein neuerdings ganz allgemein erledigt und zwar durch eine sehr schöne Methode, welche die Bestimmung jener Anzahl auf die Bestimmung der möglichen Gestalten von Kreisbogendreiecken zurückführt**).

Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, dass man die in Rede stehende Aufgabe auch auf Grund derjenigen Principien lösen kann, welche bei dem Sturm'schen Satze von der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zur Verwendung gelangen. Dieser Sturm'sche Satz beruht bekanntlich auf einem Lemma***), welches ich hier zunächst in der allgemeinen Fassung, wie ich es verwenden werde, angeben will.

---

*) Abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten vom December 1890.

**) Vergl. die Mittheilung: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe" in No. 10 der Göttinger Nachrichten vom Jahre 1890 (Sitzung vom 2. August), welche weiter ausgeführt in Heft 4 des 37. Bandes der Mathematischen Annalen erschienen ist.

***) Vgl. etwa Serret, Cours d'algèbre supérieure, Paris 1877, Bd. I. p. 285.

Die reelle Veränderliche x werde auf das Intervall

$$(J) \ldots a \leqq x \leqq b$$

eingeschränkt. Ferner seien

(3) $$V_0,\ V_1,\ V_2, \ldots, V_k$$

reelle Functionen der Veränderlichen x, welche in dem Intervalle J eindeutig und stetig sind und überdies folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Function V_k soll für keinen Werth von x, welcher dem Intervalle J angehört, verschwinden.

2. Wenn die Function V_i, wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, k-1$ bedeutet, an einer Stelle des Intervalles J verschwindet, so sollen an dieser Stelle die Functionen V_{i-1} und V_{i+1}, nicht verschwindende Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

3. Wenn x das Intervall J von a bis b durchläuft, so soll beim Ueberschreiten einer Stelle, wo V_0 verschwindet, der Quotient $\frac{V_0}{V_1}$ von negativen zu positiven Werthen übergehen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nun die Anzahl der Stellen, an welchen V_0 in dem Intervalle J verschwindet, gleich

$$N_a - N_b,$$

wo N_a resp. N_b die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (3) für $x = a$ resp. $x = b$ bezeichnet.

Diese Zahlen N_a und N_b kann man, was für das Folgende wichtig ist, auch als die Anzahlen der negativen Werthe erklären, welche in der Reihe

(4) $$V_0 V_1,\ V_1 V_2,\ V_2 V_3, \ldots, V_{k-1} V_k$$

für $x = a$ resp. $x = b$ auftreten.

Indem ich mich nunmehr der Betrachtung der hypergeometrischen Reihe (1) zuwende, bemerke ich zunächst, dass die Reihe offenbar sinnlos wird, wenn n gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Das Element n unterliegt also der Beschränkung, dass es keinen Werth aus der Reihe

$$0, -1, -2, -3, \ldots$$

besitzen darf. Ich will nun, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, genau dieselbe Beschränkung auch den Elementen l und m auferlegen.

In den hierdurch ausgeschlossenen Fällen reducirt sich die hypergeometrische Reihe auf eine ganze rationale Function von x*) und die

*) Für diese Functionen hat Herr Stieltjes (Comptes Rendus, Bd. 100, p. 620) die zugehörigen Sturm'schen Reihen aufgestellt und bemerkt, dass man aus diesen Reihen die Anzahl der reellen Nullstellen der Functionen leicht ableiten kann. Auf anderem Wege gelangte Herr Hilbert (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 103, p. 337) zur Bestimmung dieser Anzahlen.

nachfolgenden Betrachtungen unterliegen dann einer leichten Modification.

Dies vorausgeschickt, stelle ich eine Reihe von Functionen (3) her, in welcher die ersten Glieder V_0 und V_1 bez. die hypergeometrische Reihe $F(l, m, n, x)$ und deren erste Ableitung

$$\frac{dF}{dx} = \frac{lm}{n} F(l+1, m+1, n+1, x) \tag{5}$$

sind. Dies gelingt leicht auf Grund der Gauss'schen Relationen, welche zwischen je drei aufeinanderfolgenden der Functionen:

$$\begin{gathered} F_0 = F(l, m, n, x), \; F_1 = F(l+1, m+1, n+1, x), \ldots, \\ F_i = F(l+i, m+i, n+i, x), \ldots \end{gathered} \tag{6}$$

bestehen. In der That, man setze

$$\begin{gathered} r_0 = -\frac{(l+1)(m+1)}{n(n+1)}, \quad r_1 = -\frac{(l+2)(m+2)}{(n+1)(n+2)}, \ldots, \\ r_i = -\frac{(l+i+1)(m+i+1)}{(n+i)(n+i+1)}, \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

und bilde nun die Functionen:

$$\left\{\begin{array}{llll} V_0 = F_0, & V_2 = r_0 F_2, \ldots, & V_{2i} & = r_0 r_2 \cdots r_{2i-2} F_{2i}, \ldots, \\ V_1 = \frac{lm}{n} F_1, & V_3 = \frac{lm}{n} r_1 F_3, \ldots, & V_{2i+1} & = \frac{lm}{n} r_1 r_3 \cdots r_{2i-1} F_{2i+1}, \ldots \end{array}\right. \tag{8}$$

Dann wird die Reihe

$$V_0, \; V_1, \; V_2, \ldots, V_k, \tag{9}$$

bei geeigneter Wahl der Zahl k, den oben genannten Bedingungen genügen, und zwar für jedes Intervall $a \ldots b$, welches ganz in dem Intervalle $0 \ldots 1$ enthalten ist.

Die erwähnten Gauss'schen Relationen ergeben nämlich das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} V_0 = Q_0 V_1 - x(1-x) V_2, \\ V_1 = Q_1 V_2 - x(1-x) V_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{k-2} = Q_{k-2} V_{k-1} - x(1-x) V_k, \end{array}\right. \tag{10}$$

wobei zur Abkürzung

$$\left\{\begin{array}{l} Q_0 = \frac{n}{lm}\left(1 - \frac{l+m+1}{n} x\right), \ldots, \\ Q_{2i} = \frac{n}{lm} \frac{r_0 r_2 \ldots r_{2i-2}}{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}} \left(1 - \frac{l+m+4i+1}{n+2i} x\right), \ldots \\ Q_1 = \frac{lm}{n} \cdot \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{l+m+3}{n+1} x\right), \ldots, \\ Q_{2i+1} = \frac{lm}{n} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \frac{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2i}} \left(1 - \frac{l+m+4i+3}{n+2i+1} x\right), \ldots \end{array}\right. \tag{11}$$

gesetzt ist.

Die Function V_k unterscheidet sich nur um einen constanten, nicht verschwindenden Factor von

$$F_k = F(l+k, m+k, n+k, x).$$

Wählen wir daher die k Zahl so, dass $l+k$, $m+k$, $n+k$ positiv werden, so ist V_k in dem Intervall $0 \ldots 1$ beständig von Null verschieden, und die Bedingung 1) ist also erfüllt. Indem wir beachten, dass die Factoren $Q_0, Q_1, \ldots$ sämmtlich endlich sind, schliessen wir sodann aus dem Gleichungssystem (10), dass auch die Bedingung 2) erfüllt ist. Endlich genügt die Reihe (9) auch der Bedingung 3), weil V_1 die Ableitung der Function V_0 ist.

Beachten wir jetzt, dass

$$V_i V_{i+1} = \frac{lm}{n} r_0 r_1 r_2 \cdots r_{i-1} F_i F_{i+1}$$

dasselbe Vorzeichen besitzt, wie

$$(-1)^i \cdot \frac{l_{i+1}\, m_{i+1}}{n+i} F_i F_{i+1},$$

wo zur Abkürzung

(12) $l_i = l(l+1) \ldots (l+i-1)$, $m_i = m(m+1) \ldots (m+i-1)$

gesetzt ist, so erhalten wir den Satz:

Bedeuten a und $b > a$ zwei zwischen 0 und 1 liegende Grössen, und bildet man die Reihe

(13) $$\frac{l_1 m_1}{n} F_0 F_1,\ -\frac{l_2 m_2}{n+1} F_1 F_2, \cdots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1} F_{k-1} F_k,$$

so giebt $N_a - N_b$ die Anzahl der Nullstellen von

$$F_0 = F(l, m, n, x)$$

an, welche zwischen a und b liegen, wenn N_a bez. N_b die Anzahl der negativen Glieder bezeichnet, welche in der Reihe (13) *für $x = a$ bez. $x = b$ auftreten.*

Die Zahl k ist dabei nur der einen Bedingung unterworfen, dass die Grössen

$$l+k,\ m+k,\ n+k$$

positiv sein müssen*). Die in dem Ausspruch des Satzes benutzten Abkürzungen werden durch die Gleichungen (6) und (12) erklärt.

Um die Gesammtzahl der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ in dem Intervall $0 < x < 1$ zu bestimmen, brauchen wir unseren Satz nur auf den Fall anzuwenden, wo a in der Nähe des Werthes $x = 0$ und b in der Nähe des Werthes $x = 1$ liegt.

---

*) Der Satz gilt auch noch, wenn eines oder jedes der Elemente l, m gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Nur hat man dann für k die erste Zahl der Reihe 0, 1, 2, 3, ... zu wählen, für welche eine der beiden Grössen $l+k$, $m+k$ verschwindet.

Wir werden also

$$a = \varepsilon, \quad b = 1 - \eta$$

setzen, wo ε und η genügend klein zu wählende positive Grössen bezeichnen. Lassen wir x in 0 übergehen, so nehmen die Functionen (13) die Werthe an:

$$(14) \qquad \frac{l_1 m_1}{n}, \; -\frac{l_2 m_2}{n+1}, \cdots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1}.$$

Um die Werthe jener Functionen in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu beurtheilen, werde ich die bekannte Gleichung

$$(15) \qquad F(l, m, n, x) = (1-x)^{n-l-m} F(n-l, \; n-m, n, x)$$

benutzen. Dabei setze ich voraus, dass

$$(16) \qquad n \leqq l + m$$

sei. Diese Voraussetzung beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit. Denn würde

$$n > l + m$$

sein, so wäre

$$n < (n-l) + (n-m)$$

und wir würden an Stelle von $F(l, m, n, x)$ die Function $F(n-l, n-m, n, x)$ betrachten, welche der Gleichung (15) zufolge zwischen 0 und 1 dieselben Nullstellen besitzt wie $F(l, m, n, x)$.

Lassen wir nun, unter der Voraussetzung, dass $n < l + m$ ist, x wachsend in 1 übergehen, so geht $F(n-l, n-m, n, x)$ stetig in

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(l+m-n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}$$

über. Daher hat $F(l, m, n, x)$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}.$$

Dieses gilt, wie man leicht erkennt, nicht nur für $n < l + m$, sondern auch für $n = l + m$. Da nun aus der Ungleichung (16) folgt, dass auch

$$n + i < (l+i) + (m+i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so besitzt $F_i F_{i+1}$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen, wie

$$\frac{\Gamma(n+i)\,\Gamma(n+i+1)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)\,\Gamma(l+i+1)\,\Gamma(m+i+1)} = \frac{n+i}{(l+i)(m+i)} \left[\frac{\Gamma(n+i)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)}\right]^2,$$

also dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{n+i}{(l+i)\,(m+i)}.$$

Daher haben die Glieder der Reihe (13) in der Nähe von $x = 1$ dieselben Vorzeichen, wie die entsprechenden Glieder der Reihe

$$(17) \qquad 1, \; -l_1 m_1, \; l_2 m_2, \cdots, (-1)^{k-1} l_{k-1} m_{k-1}.$$

Kommen also in der Reihe (14) N_0 negative Glieder, in der Reihe (17) N_1 negative Glieder vor, so ist

$$N = N_0 - N_1$$

die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Nullstellen von $F(l, m, n, x)$.

Die Zahlen N_0 und N_1 können wir sofort näher bestimmen, wenn wir die verschiedenen Fälle unterscheiden, welche den möglichen Vorzeichencombinationen der Elemente l, m, n entsprechen. Dabei wollen wir

$$(18) \qquad l \geqq m$$

voraussetzen, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, da $F(l, m, n, x)$ bei Vertauschung von l und m in sich übergeht. Ferner möge, wenn l negativ ist, λ die erste Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ sein, für welche $l + \lambda$ positiv wird, so dass in der Reihe

$$l,\ l + 1,\ l + 2, \cdots, l + \lambda - 1,\ l + \lambda, \cdots$$

$l + \lambda - 1$ das letzte negative Glied ist. Die entsprechende Bedeutung mögen μ und ν in Rücksicht auf m und n erhalten.

Die Discussion der verschiedenen Fälle, bei welcher man die Ungleichungen (16) und (18) zu beachten hat, ergiebt nun die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Resultate:

	l	m	n	N
I.	+	+	−	$\frac{1-(-1)^{\nu}}{2}$
II.	+	−	+	μ
III.	+	−	−	$\mu - \nu$, für $\mu \geqq \nu$ $\frac{1-(-1)^{\mu+\nu}}{2}$, für $\mu \leqq \nu$
IV.	−	−	−	$\frac{1-(-1)^{\lambda+\mu+\nu}}{2}$

Wie diese Tabelle aufzufassen ist, erhellt aus folgendem Satze:

Sind die Elemente l, m, n sämmtlich negativ (Fall IV der Tabelle), so verschwindet $F(l, m, n, x)$ zwischen 0 und 1 kein Mal oder ein Mal, je nachdem $\lambda + \mu + \nu$ gerade oder ungerade ist.

Man wird sich leicht überzeugen, dass die Tabelle mit den von Herrn Klein gefundenen Resultaten vollständig im Einklang steht.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass man die Frage nach der Gesammtheit der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$, gleichgültig ob l, m, n reelle oder complexe Werthe besitzen, auch auf Grund der allgemeinen Sätze, welche ich an anderer Stelle entwickelt habe*), in Angriff nehmen kann. Man hat dann die Wurzeln der ganzen rationalen Functionen, welche als Nenner in den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $\frac{F(l, m+1, n+1, x)}{F(l, m, n, x)}$ auftreten, zu untersuchen. Ob diese Untersuchung auch für die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zu einfachen Resultaten führt, vermag ich indessen nicht zu übersehen.

Königsberg in Pr., 30. November 1890.

*) „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function". Math. Ann. Bd. 33.