AUSSAGENLOGISCH FUNDIERTE THEORIEN* **

Von Horst Luckhardt, Marburg/Lahn

Einleitung

Gegenstand der Betrachtung sind alternär-aussagenlogisch fundierte Theorien. Die einschlägigen Satzgebilde der umfassendsten Theorien sind die Aussagenvariablen, die primitiven Eigenprädikate der betreffenden Theorie, deren sämtliche Leerstellen mit einschlägigen Satzgebilden aufgefüllt sind, sowie die aussagenlogischen Verknüpfungen einschlägiger Satzgebilde. Ein solcher Ausdruck heißt homogen, wenn Aussagenvariablen in ihm nur innerhalb von Eigenprädikaten auftreten; er heißt variablenfrei, wenn er keine Aussagenvariablen enthält; er heißt 0-stufig, wenn es sich um eine Aussagenform handelt, dagegen $(k+1)$-stufig, wenn er Eigenprädikate enthält, die sich k-fach, aber nicht mehr als k-fach überlagern.

Unter die folgenden Untersuchungen fallen ferner Theorien, deren Begriffsnetze nur den homogenen, variablenfreien, höchstens k-stufigen, den homogenen und höchstens k-stufigen oder den variablenfreien und höchstens k-stufigen Teil der obigen Begriffsnetze ausmachen oder aus den bisher angegebenen Begriffsnetzen durch Einschränkungen bezüglich der Überlagerungen von Eigenprädikaten entstehen.

Für die zu betrachtenden Theorien wird gefordert, daß sie alle Wahrformbeiformen zu beweisen gestatten und Kodifikaten deduktiv-äquivalent sind, deren elementare Schlußregeln die folgenden sind: die Grundschlußregel (modus ponens); die Einsetzungsregel, die für Aussagevariablen, überall wo sie auftreten, die gleichen Aussagenformen einzusetzen gestattet; die Umsetzungsregel für Ausdrücke, die auf Grund der alternären Aussagenlogik einander äquivalent sind und den gemachten Begriffsnetzeinschränkungen genügen.

Theorien dieser Art lassen sich als metavariablenfreie, alternär-aussagenlogisch fundierte Theorien über die alternäre Aussagenlogik auffassen. Sie spielen in der Modalitätenlogik eine Rolle.

Neben den obigen Begriffsnetzeinschränkungen kann man andere Begriffsnetzbeschränkungen fordern. Auch können weitere logische Begriffe (z. B. die intuitionistischen oder derivativen aussagenlogischen Verknüpfungen) ins Spiel

* Eingegangen am 5. 1. 1966.

** Dies ist der erste Teil einer Arbeit, die von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Phillips-Universität Marburg/Lahn als Dissertation angenommen wurde.

Der Verfasser dankt seinem verehrten Lehrer, Herrn Professor H. Arnold Schmidt, der ihm in seinen Vorlesungen, seinen Seminaren und zahlreichen Gesprächen einen tiefen Kontakt zur Mathematik, insbesondere zur mathematischen Grundlagenforschung, vermittelt hat.

gebracht werden. Obwohl sich einige der folgenden Überlegungen hierfür übernehmen oder leicht modifizieren lassen, soll dies nicht weiter verfolgt werden. Es wird gezeigt, daß solchen aussagenlogisch fundierten Theorien (A-Theorien) im kodifikativen Bereich grundsätzliche Bedeutung zukommt. Jedes Kodifikat kann in entscheidbarer Weise in A-Theorien eingelagert werden. Die kodifikative Folgerungsbeziehung wird dabei durch die alternäre Implikation wiedergegeben. – Aus der allgemein-rekursiven Unentscheidbarkeit gewisser Kodifikate (z. B. der Prädikatelogik erster Stufe) folgt daher die allgemein-rekursive Unentscheidbarkeit gewisser A-Theorien. Es stellt sich die Aufgabe, entscheidbare A-Theorien aufzusuchen. Mit Hilfe von Normalformen, Normalherleitungen und dem Deduktionstheorem wird für solche Theorien der obigen Art, die in endlicher Weise effektiv eine Übersicht über ihre Eigenaxiome gestatten, ein allgemeines Verfahren zur Entscheidung begründet.

1. Konstituierung einer A-Theorie

Die zu betrachtenden aussagenlogisch fundierten Theorien (A-Theorien) bauen sich wie folgt auf. Zunächst das Begriffsnetz der umfassendsten A-Theorien:

1. Bausteine:
   a) Aussagenvariablen a, b, c, . . . (evtl. mit Indizes)
   b) Aussagenlogische Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   c) Eigenprädikate $p_1, \ldots, p_i, \ldots$ mit vorgegebener Stellenzahl $n_i \geqq 0$
2. Aussagenformen:
   a) Aussagenvariablen sind Aussagenformen.
   b) Sind A, B Aussagenformen, so auch $\neg(A)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \leftrightarrow (B)$.
3. Einschlägige Satzgebilde:
   a) Aussagenvariablen und Eigenprädikate, deren sämtliche Leerstellen mit einschlägigen Satzgebilden ausgefüllt sind, sind einschlägige Satzgebilde.
   b) Sind A, B einschlägige Satzgebilde, so auch $\neg(A)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \leftrightarrow (B)$.

Folgerung: Aussagenformen sind spezielle einschlägige Satzgebilde.

Zur Mitteilung: Große lateinische Buchstaben teilen einschlägige Satzgebilde oder Figuren aus solchen mit. Aussagenvariablen und Junktoren teilen sich selbst mit.

C sei ein plaziertes Teilsatzgebilde des Satzgebildes A. Unter $A\frac{S\,C}{D}$ ist das Satzgebilde zu verstehen, das bei Ersetzung des Teilsatzgebildesiegels C in A durch das Satzgebilde D entsteht. $A \equiv B$ teilt die gestaltliche Übereinstimmung von A, B mit; $\curlyvee$ teilt eine aussagenlogische Tautologie, $\curlywedge$ ihr Negat mit.
Klammernersparnisregeln werden von Schmidt [3] übernommen.
Es sei K ein Kodifikat (Schmidt [2], [3]; siehe auch Abschnitt 5) und A eine in K einschlägige Form, Formenanweisung, Schlußregel oder Definition. $[K, \text{adj. } A]$ bezeichnet das Kodifikat, das aus K bei Zufügung von A als Axiom, Axiomeanweisung, elementare Schlußregel oder Definition entsteht.

Es seien K_1, K_2 Kodifikate. $K_1 \subset K_2$ teilt das Enthaltensein von K_1 in K_2 mit; $K_1 \subset K_2$ trifft genau dann zu, wenn alle in K_1 beweisbaren Satzgebilde auch in K_2 beweisbar sind.

Definitionen und definitorische Umsetzungen können bei Betrachtungen der Struktur eines Kodifikates außer acht gelassen werden. Grundlegend ist die Struktur des definitionsfreien Teiles des Kodifikates. Definitionen und definitorische Umsetzungen spielen nur bei der Interpretation eines Kodifikates und beim Vergleich zweier Kodifikate hinsichtlich der Mengen der in ihnen beweisbaren Satzgebilde eine Rolle.

Erklärung 1: Ein einschlägiges Satzgebilde heißt *homogen*, wenn in ihm Aussagenvariablen nur unter Eigenprädikaten auftreten; es heißt *variablenfrei*, wenn in ihm keine Aussagenvariablen vorkommen; es heißt 0-stufig, wenn es sich um eine Aussagenform handelt, dagegen $(k + 1)$-*stufig*, wenn es Eigenprädikate enthält, die sich k-fach, aber nicht mehr als k-fach überlagern. $s(A)$ bezeichnet die Stufigkeit eines einschlägigen Satzgebildes A.

Das *Begriffsnetz einer A-Theorie* ist das oben aufgeführte Begriffsnetz oder ein auf endlich viele Eigenprädikate eingeschränkter Teil davon oder der homogene oder variablenfreie oder höchstens k-stufige oder homogene und höchstens k-stufige oder variablenfreie und höchstens k-stufige Teil hiervon, oder aber es entsteht aus den bisher angegebenen Begriffsnetzen durch Einschränkungen bezüglich der Überlagerungen von Eigenprädikaten.

An das *Deduktionsgerüst einer A-Theorie* werden folgende Forderungen gestellt:

1. Jede (einschlägige) Wahrformbeiform ist beweisbar. Diese Mindestforderung wird im folgenden mit $A\,0$ bezeichnet.
2. Die elementaren Schlußregeln sind genau die folgenden:

   R1 (Einsetzungsregel): Für Aussagenvariablen dürfen, überall wo sie auftreten, die gleichen *Aussagenformen* eingesetzt werden.

   R2 (Grundschlußregel): $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

   R3 (Umsetzungsregel): $\dfrac{A}{A\dfrac{S\,C}{D}}$ für *Wahrformbeiform* $C \leftrightarrow D$,

   sofern alle beteiligten Ausdrücke einschlägige Satzgebilde sind.

Anmerkung: Aussagenlogisch fundierte Theorien ähnlicher Art mit üblicher Regel R1 (Einsetzung beliebiger einschlägiger Satzgebilde) oder üblicher Regel R3 (Umsetzbarkeit beweisbarer Äquivalenzen) lassen sich durch geeignete Eigenaxiomgebung stets als A-Theorien formulieren (Nachweis zu Satz 6).

2. Normalformen

In der alternären Aussagenlogik gilt folgender Satz (SCHMIDT [3], S. 40–53):

Satz 1: Gegeben seien eine Aussagenform A und irgendwelche nicht in A auftretende Aussagenvariablen $V_1, \ldots, V_m$ $(m \geqq 0)$. Die Aussagenform A ist entweder der Aussagenform $a \vee \neg a$ oder genau einer ausgezeichneten konjunktiven Normalform äquivalent, die alle Aussagenvariablen von A sowie

$V_1, \ldots, V_m$ und keine weiteren Aussagenvariablen enthält. Diese ausgezeichnete konjunktive Normalform läßt sich in endlich vielen Schritten konstruieren.

Eine Folgerung dieses Satzes ist

Satz 2: Gegeben sei eine Aussagenform A. A ist entweder der Aussagenform $a \vee \neg\, a$ oder genau einer minimalen ausgezeichneten konjunktiven Normalform (d. i. eine ausgezeichnete konjunktive Normalform, die keiner ausgezeichneten konjunktiven Normalform mit weniger Variablen äquivalent ist; sie enthält höchstens Aussagenvariablen von A) äquivalent. Diese minimale ausgezeichnete konjunktive Normalform kann in endlich vielen Schritten konstruiert werden.

Der Begriff der minimalen ausgezeichneten konjunktiven Normalform wird nun auf A-Theorien erweitert.

Erklärung 2: Induktive Erklärung der zugehörigen minimalen ausgezeichneten konjunktiven Normalform (*m.a.k.Nf.*) und Quasinormalform (*m.a.k. QNf.*).

Gegeben sei ein einschlägiges Satzgebilde A.

I. Ist A 0-stufig, so sei die zu A gehörige m.a.k.Nf. A^n die dem A gemäß Satz 2 in der alternären Aussagenlogik äquivalente aussagenlogische minimale ausgezeichnete konjunktive Normalform. A selbst sei die zu A gehörige m.a.k.QNf. A^q.

II. Ist A $(k+1)$-stufig, so werde die zu A gehörige m.a.k.Nf. und m.a.k.QNf. wie folgt gebildet:

In A suche man die Eigenprädikate auf, die ihrerseits nicht wieder im Argumentbereich eines weiteren Eigenprädikates stehen. Die Satzgebilde, die die Leerstellen dieser Prädikate ausfüllen und höchstens k-stufig sind, ersetze man durch die nach Induktionsvoraussetzung bildbaren, zu ihnen gehörigen m.a.k.Nf. Das so entstehende Satzgebilde sei die zu A gehörige m.a.k.QNf. A^q. Die umgeformten Eigenprädikate ersetze man nun durch Aussagenvariablen, die nicht in A^q vorkommen, unter Beibehaltung von gestaltlichen Gleichheiten, Ungleichheiten und einer festgelegten Reihenfolge. Zu dieser Aussagenform bilde man die gemäß Satz 2 in der alternären Aussagenlogik äquivalente aussagenlogische minimale ausgezeichnete konjunktive Normalform. Hierin ersetze man die neu hinzugekommenen Aussagenvariablen wieder durch die von einem Eigenprädikat beherrschten Satzgebilde, für die sie zuvor eingeführt wurden. Das so entstehende Satzgebilde sei die zu A gehörige m.a.k.Nf. A^n.

Folgerung 1:

a) Die q- und n-Bildung ist eindeutig.

b) Die q- und n-Bildungen bringen keine neuen Aussagenvariablen, Eigenprädikate und Überlagerungen von Eigenprädikaten ins Spiel. A^q, A^n gehören zu derselben A-Theorie wie A.

c) Die m.a.k.Nf. und m.a.k.QNf. einer Wahrformbeiform ist wieder eine Wahrformbeiform.

d) $(A^n)^n \equiv A^n$, $(A^q)^q \equiv A^q$, $(A^q)^n \equiv A^n \equiv (A^n)^q$, $(\neg\, A)^q \equiv \neg\, A^q$, $(A \times B)^q \equiv$ $\equiv (A^q \times B^q)$ für einen 2-stelligen aussagenlogischen Junktor $\times$.

Satz 3: Betrachtet seien eine A-Theorie T sowie ein in T einschlägiges Satzgebilde A.
$A^q \leftrightarrow A^n$ ist Wahrformbeiform und in T beweisbar.

Nachweis: Nach Erklärung 2, Satz 2 ist $A^q \leftrightarrow A^n$ eine Wahrformbeiform. Aus Folgerung 1b, A 0 folgt: $A^q \leftrightarrow A^n$ ist in T beweisbar.

Satz 4: (∗) Betrachtet seien ein einschlägiges Satzgebilde A und eine Wahrformbeiform $C \leftrightarrow D$.

Behauptung: $A^n \equiv \left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^n$.

Nachweis: Ist C kein Teilsatzgebilde von A, so $A \equiv \left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)$. Die Behauptung ist erfüllt.

Der Nachweis für den Fall, daß C ein Teilsatzgebilde von A ist, wird durch vollständige Induktion nach $s(A)$ geführt.

I. $s(A) = 0$, d. h. A, C sind Aussagenformen. Aus (∗) folgt: $C \leftrightarrow D^q$ ist Wahrformbeiform. Also: $A \leftrightarrow A\,\frac{S\,C}{D^q}$ ist Wahrformbeiform. Da $\left(A\,\frac{S\,C}{D^q}\right) \equiv \left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q$, so: $\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q \leftrightarrow A$ ist Wahrformbeiform.

In $\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q$ ersetze man die von Eigenprädikaten beherrschten Teilsatzgebilde, die nicht unter einem weiteren Eigenprädikat stehen, unter Beibehaltung von gestaltlichen Gleichheiten, Ungleichheiten und der festgelegten Reihenfolge durch bislang nicht vorgekommene Aussagenvariablen. Es entstehe so $\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)'$.
$\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)' \leftrightarrow A$ ist Wahrform. Mit Satz 2 folgt hieraus: $A^n \equiv \left(\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)'\right)^n$.
In diese Normalformkonstruktionen setze man für die zuletzt hinzugekommenen Aussagenvariablen wieder die ursprünglichen Satzgebilde ein. Dieselbe Operation, die von $\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)'$ auf $\left(\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)'\right)^n$ führt, führt nun von $\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q$ auf $\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)^n$, d. i. $\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^n$. Die Normalformkonstruktion für A wird von der Rückübersetzung nicht betroffen. Da $A^n \equiv \left(\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)'\right)^n$, so $\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)^n \equiv \left(\left(\left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^q\right)'\right)^n$. Also $A^n \equiv \left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^n$.

II. $s(A) = k + 1$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt für Satzgebilde B mit $s(B) \leqq k$.

1. Fall: C ist in A Teilsatzgebilde eines Satzgebildes E, das im Argumentbereich eines Eigenprädikates steht.

$s(E) \leqq k$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher: $E^n \equiv \left(E\,\frac{S\,C}{D}\right)^n$. Aus Erklärung 2 folgt nun: $A^n \equiv \left(A\,\frac{S\,C}{D}\right)^n$.

2. Fall: C ist in A nicht Teilsatzgebilde eines Satzgebildes, das im Argumentbereich eines Eigenprädikates steht.

Also: $\left(A\frac{S\,C}{D}\right)^q \equiv \left(A^q\frac{S\,C^q}{D^q}\right)$. Nach Folgerung 1d ist daher zu zeigen: $\left(A^q\frac{S\,C^q}{D^q}\right)^n \equiv$ $\equiv (A^q)^n$.

In A^q, C^q, D^q ersetze man unter Beibehaltung von gestaltlichen Gleichheiten, Ungleichheiten und der festgelegten Reihenfolge die durch Eigenprädikate beherrschten Teilsatzgebilde, die nicht unter einem weiteren Eigenprädikat stehen, durch bisher nicht aufgetretene Aussagenvariablen. $(A^q)'$, $(C^q)'$, $(D^q)'$ seien die so entstehenden Satzgebilde.

Aus $(*)$ folgt: $C^q \leftrightarrow D^q$ ist Wahrformbeiform. Daher sind $(C^q)' \leftrightarrow (D^q)'$, $(A^q)'\frac{S(C^q)'}{(D^q)'} \leftrightarrow (A^q)'$ Wahrformen. Nach Satz 2 gilt somit:

$$\left((A^q)'\frac{S(C^q)'}{(D^q)'}\right)^n \equiv ((A^q)')^n.$$

In diese Normalformkonstruktionen setze man für die zuletzt hinzugekommenen Aussagenvariablen wieder die ursprünglichen Satzgebilde ein. Da die q-Bildung bereits erfolgt ist, führen nun dieselben Operationen, die von $(A^q)'$, $(A^q)'\frac{S(C^q)'}{(D^q)'}$ auf $((A^q)')^n$, $\left((A^q)'\frac{S(C^q)'}{(D^q)'}\right)^n$ führen, von A^q, $A^q\frac{S\,C^q}{D^q}$ auf $(A^q)^n$, $\left(A^q\frac{S\,C^q}{D^q}\right)^n$. Diese Satzgebilde stimmen überein.

Satz 5: (Normalformsatz).

Betrachtet seien eine A-Theorie T und ein darin einschlägiges Satzgebilde A. $A \leftrightarrow A^n$ ist in T beweisbar.

Nachweis: Ist $s(A) = 0$, so gilt die Behauptung nach $A\,0$.

Bei $s(A) > 0$ verfolge man den Aufbau von A von innen heraus. Ausgehend von (1) $A \leftrightarrow A$, was in T nach $A\,0$ beweisbar ist, suche man in A die von Eigenprädikaten beherrschten Teilformen auf, in deren Argumentbereich keine Eigenprädikate mehr auftreten, und ersetze in der rechten Seite von (1) diese in den Leerstellen stehenden Aussagenformen durch ihre zugehörigen m.a.k.Nf. Die entstehende Äquivalenz (2) ist nach R3 in T beweisbar. Alsdann suche man in der rechten Seite von (2) die von einem Eigenprädikat beherrschten 2-stufigen Teilsatzgebilde auf. In den in den Leerstellen der herrschenden Eigenprädikate dieser Satzgebilde stehenden m.a.k.QNf. ersetze man unter Beibehaltung von gestaltlichen Gleichheiten, Ungleichheiten und der festgelegten Reihenfolge die von einem Eigenprädikat beherrschten Teilformen durch bisher nicht aufgetretene Aussagenvariablen. Zu den entstehenden Aussagenformen bilde man die zugehörigen m.a.k.Nf. und mache hierin den letzten Ersetzungsprozeß wieder rückgängig. Diese Formen setze man für die Ausgangsformen in (2) ein. Die gesamte Operation ist eine Umsetzung gemäß R3. Die gewonnene Äquivalenz (3) ist in T beweisbar.

Dieses Verfahren setze man von Stufe zu Stufe in A fort. Wegen des endlichen Aufbaues von A kommt es in endlich vielen Schritten zum Abschluß mit dem Ergebnis: $A \leftrightarrow A^q$ ist in T beweisbar. Hieraus folgt die Behauptung mit Satz 3, R3.

3. Normalherleitungen

Erklärung 3: Betrachtet sei eine A-Theorie T.

a) Eine Herleitung H von T heißt eine *Normalherleitung von* T, wenn in allen Beweisfäden von H höchstens zu Beginn *eine* Einsetzung (R 1) erfolgt und alle Umsetzungen (R 3) allen Grundschlüssen (R 2) vorangehen.

b) Eine Normalherleitung H von T heißt *gekürzt*, wenn in H, abgesehen von den Beweisfadenköpfen, in die eine Einsetzung gemacht wird, nur die erste im Begriffsnetz genannte Aussagenvariable a und solche Aussagenvariablen, die auch in der Endformel von H auftreten, vorkommen.

c) Unter einer *genormten Herleitung* H *bezüglich* T soll folgende Formelnfigur verstanden werden:
   1. Alle Formeln von H sind in T einschlägige Satzgebilde.
   2. In H treten nur die oben erwähnte Aussagenvariable a und solche Aussagenvariablen auf, die auch in der Endformel von H vorkommen.
   3. An den Beweisfadenköpfen stehen Wahrformbeiformen oder m.a.k.Nf. von Axiombeiformen (gemäß R 1) der A-Theorie T.
   4. Es werden nur Grundschlüsse gemacht, und zwar so, daß die Unterformel stets eine m.a.k.QNf. ist.
   5. Die Endformel ist eine m.a.k.QNf.

Satz 6: Jedes in einer A-Theorie T beweisbare Satzgebilde A ist in T vermittels einer Normalherleitung beweisbar.

Nachweis: B sei eine Beweisfigur für A in T. B wird so umgewandelt, daß eine Normalherleitung für A in T entsteht.
Mehrere Einsetzungen gemäß R 1 hintereinander lassen sich durch *eine* Einsetzung gemäß R 1 ersetzen. Von dieser Tatsache hat wohl erstmals von Neumann [1] Gebrauch gemacht. Kodifikate, die die Separationseigenschaft besitzen, daß man in ihnen die Einsetzungen vorverlegen kann, sind mit solchen Kodifikaten gleichwertig, in denen die Einsetzungsregel durch entsprechende Axiomschemata ersetzt wird.
Es genügt nun zu zeigen:

a) Eine Einsetzung (R 1) kann über einen Grundschluß (R 2) hinübergeschoben werden.

b) Eine Einsetzung (R 1) kann über eine Umsetzung (R 3) hinübergeschoben werden.

c) Eine Umsetzung (R 3) kann über einen Grundschluß (R 2) hinübergeschoben werden.

Auf Grund dieser Vertauschbarkeiten können die Schlüsse in jedem Beweisfaden in die Reihenfolge R 1, R 3, R 2 gebracht werden, ohne daß sich die Anfangsformeln und die Endformel ändern. Komprimiert man nun die eventuall an der Spitze eines Beweisfadens stehenden Einsetzungen, so entsteht eine Normalherleitung für A in T.

* deutet im folgenden Einsetzungen gemäß R1 an.

Zu a): Die Beweisfigur $\cfrac{\cfrac{A \quad A \to B}{B}\ (\text{R}2)}{B^*}\ (\text{R}1)$

kann durch die Beweisfigur

$$\frac{\dfrac{A}{A^*} \quad \dfrac{A \to B}{A^* \to B^*}\ (\text{R}1)}{B^*}\ (\text{R}2) \quad (A \to B)^* \equiv A^* \to B^*$$

ersetzt werden.

Zu b): Das Beweisstück $\cfrac{\cfrac{A}{A \dfrac{S\,C}{D}}\ (\text{R}3)}{\left(A \dfrac{S\,C}{D}\right)^*}\ (\text{R}1)$ Wahrformbeiform $C \leftrightarrow D$

kann durch folgende Herleitung ersetzt werden:

$$\frac{\dfrac{A}{A^*}\ (\text{R}1) \quad \text{Wahrformbeiform } C \leftrightarrow D}{A^* \dfrac{S\,C^*}{D^*}}\ (\text{R}3) \quad \text{Wahrformbeiform } C^* \leftrightarrow D^* \quad (C \leftrightarrow D)^* \equiv C^* \leftrightarrow D^*\,,$$

$A^* \dfrac{S\,C^*}{D^*}$ stimmt mit $\left(A \dfrac{S\,C}{D}\right)^*$ überein.

Zu c): Die Beweisfigur $\cfrac{\cfrac{A \quad A \to B}{B}\ (\text{R}2)}{B \dfrac{S\,C}{D}}\ (\text{R}3)$ Wahrformbeiform $C \leftrightarrow D$

kann durch das Beweisstück

$$\frac{A \quad \dfrac{A \to B}{A \to \left(B \dfrac{S\,C}{D}\right)}\ (\text{R}3)\ \text{Wahrformbeiform } C \leftrightarrow D}{B \dfrac{S\,C}{D}}\ (\text{R}2)$$

ersetzt werden.

Satz 7: Jedes in einer A-Theorie T beweisbare Satzgebilde A ist in T vermittels einer gekürzten Normalherleitung beweisbar.

Nachweis: Nach Satz 6 gibt es für A in T eine Normalherleitung H. $V_1, \ldots, V_n$ sei der Variablenvorrat von A. In allen Formeln von H, ausgenommen die Beweisfadenköpfe, in die eine Einsetzung gemacht wurde, ersetze man jede nicht zu $V_1, \ldots, V_n$ gehörende Aussagenvaribale durch V_1; falls $n = 0$, so durch a. Die so entstehende Figur H^*, die mit A endet, läßt sich leicht zu einer gekürzten Normalherleitung in T ergänzen.

Für ein Axiom oder eine Axiombeiform von H können bei der Ersetzung die zwei Fälle auftreten:

1. Die Form wird von der Ersetzung nicht betroffen; dann bleibt sie auch in H^* bezüglich T ein Axiom beziehungsweise eine Axiombeiform.
2. Die Form wird von der Ersetzung betroffen. Da *alle* „fremden" Variablen gleichmäßig ersetzt wurden, ist die ersetzte Formel eine Beiform des betreffenden Axioms und daher in T aus diesem Axiom vermittels R1 beweisbar. Dieses Beweisstück ist jenen Teilen von H^* voranzustellen.

Da H eine Normalherleitung ist, sind nur noch die Regeln R3, R2 zu betrachten. ^{0} deute im folgenden die durch die Ersetzung eventuell veränderte Form an.
Zu R3:

$$\frac{A}{A\,\dfrac{S\,C}{D}} \quad \text{Wahrformbeiform } C \leftrightarrow D$$

geht bei der Ersetzung über in

$$\frac{A^0}{\left(A\,\dfrac{S\,C}{D}\right)^0} \quad \begin{array}{l}\text{Wahrformbeiform } C^0 \leftrightarrow D^0 \\ (C \leftrightarrow D)^0 \equiv C^0 \leftrightarrow D^0\,.\end{array}$$

$\left(A\,\dfrac{S\,C}{D}\right)^0$ stimmt mit $A^0\,\dfrac{S\,C^0}{D^0}$ überein. Dies ist wieder ein Schluß gemäß R3.

Zu R2: $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ geht bei Ersetzung über in

$$\frac{A^0 \quad A^0 \rightarrow B^0}{B^0} \qquad (A \rightarrow B)^0 \equiv A^0 \rightarrow B^0\,.$$

Dies ist wieder ein Schluß gemäß R2.

Satz 8: Betrachtet seien eine A-Theorie T und eine in T einschlägige m.a.k.QNf. A. A ist genau dann in T beweisbar, wenn A Endformel einer genormten Herleitung bezüglich T ist.

Nachweis:

I. A sei Endformel einer genormten Herleitung H bezüglich T. An den Beweisfadenköpfen von H stehen Wahrformbeiformen oder m.a.k.Nf. von Axiombeiformen von T. Erstere sind nach $A0$ in T beweisbar. Letztere folgen aus den ihnen zugehörigen Axiomen mit R1, Satz 5, $A0$, R2. Diese Beweisstücke sind jeweils vorzuschalten. Was die Schlüsse betrifft, so werden nur Grundschlüsse in H gemacht. Diese sind auch in T erlaubt. Damit ist H bereits zu einem Beweis für A in T abgeändert worden.

II. A sei in T beweisbar. Nach Satz 7 ist A in T vermittels einer gekürzten Normalherleitung H beweisbar. Die Formeln von H, die an einem Schluß gemäß R1, R3 beteiligt sind, ersetze man durch die zu ihnen gehörigen m.a.k.Nf., alle anderen Formeln durch die zu ihnen gehörigen m.a.k.QNf. Die so entstandene Formelnfigur H^* kann nun leicht zu einer genormten Herleitung bezüglich T verändert werden.

Man verfolge die „Beweisfäden" von H^* bis zu dem Punkt jeweils, wo (eventuell) Schlüsse mit zwei Oberformeln auftauchen. Jeder Beweisfaden beginnt mit einer

Formel F, die aus einer Wahrformbeiform oder einem Axiom W von T durch die obige Ersetzung entstanden ist. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: In H folgt auf W kein Schluß gemäß R1, R3.
Gemäß der Ersetzungsvorschrift ist F dann die m.a.k.QNf. von W: $F \equiv W^q$.
Folgendes Beweisstück schalte man F in H^* vor:

$$\frac{W^n \quad W^n \to W^q}{W^q} \text{(R2)} .$$

$W^n \to W^q$ ist eine Wahrformbeiform nach Satz 3. W^n ist nach Folgerung 1c Wahrformbeiform oder m.a.k.Nf. eines Axioms von T. Alle hinzugekommenen Satzgebilde sind in T einschlägig und bringen keine neuen Aussagenvariablen mit (Folgerung 1b).

2. Fall: In H folgt auf W ein Schluß gemäß R1, aber keiner gemäß R3.

Dieses Beweisstück hat in H die Gestalt: $\dfrac{W}{W^*}$ (R1)

[kein R3] .

In H^* nimmt dies die Gestalt an: $\dfrac{W^n}{(W^*)^n}$

[kein R3] .

Hier streiche man W^n. Stehen bleibt $(W^*)^n$. Dies ist eine Wahrformbeiform (Folgerung 1c) oder eine m.a.k.Nf. einer Axiombeiform von T.

3. Fall: In H folgen auf W genau m Schlüsse gemäß R3.
Das betrachtete Beweisstück hat in H die Gestalt:

$$\frac{W}{W\dfrac{S\,C_1}{D_1}}$$

$$\vdots$$

$$\left(\ldots\left(W\frac{S\,C_1}{D_1}\right)\ldots\right)\frac{S\,C_m}{D_m} \quad \text{Wahrformbeiformen } C_i \leftrightarrow D_i \quad (i = 1, \ldots, m) .$$

In H^* nimmt dies die Gestalt an:

$$\frac{W^n}{\left(W\dfrac{S\,C_1}{D_1}\right)^n}$$

$$\vdots$$

$$\left(\left(\ldots\left(W\frac{S\,C_1}{D_1}\right)\ldots\right)\frac{S\,C_m}{D_m}\right)^n \quad \text{Wahrformbeiformen } C_i \leftrightarrow D_i \quad (i = 1, \ldots, m) .$$

Nach Satz 4 stimmen aber die $\left(\left(\ldots\left(W\dfrac{S\,C_1}{D_1}\right)\ldots\right)\dfrac{S\,C_i}{D_i}\right)^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ mit W^n überein. Bis auf eine sind diese Formeln alle zu streichen. Stehen bleibt eine Wahrformbeiform (Folgerung 1c) oder die m.a.k.Nf. eines Axioms.

4. Fall: In H folgen auf W ein Schluß gemäß R1 und genau m Schlüsse gemäß R3. Das betrachtete Beweisstück hat nun die Gestalt:

$$\cfrac{\cfrac{W}{W^*}}{W^* \cfrac{S\,C_1}{D_1}}$$

$$\vdots$$

$$\left(\ldots\left(W^* \frac{S\,C_1}{D_1}\right)\ldots\right)\frac{S\,C_m}{D_m} \quad \text{Wahrformbeiformen } C_i \leftrightarrow D_i \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

In H^* nimmt dies die Gestalt an:

$$\cfrac{\cfrac{W^n}{(W^*)^n}}{\left(W^* \cfrac{S\,C_1}{D_1}\right)^n}$$

$$\vdots$$

$$\left(\left(\ldots\left(W^* \frac{S\,C_1}{D_1}\right)\ldots\right)\frac{S\,C_m}{D_m}\right)^n \quad \text{Wahrformbeiformen } C_i \leftrightarrow D_i \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Hierin streiche man W^n. Nach Satz 4 stimmen aber die $\left(\ldots\left(W^* \frac{S\,C_1}{D_1}\right)\ldots\right)\frac{S\,C_i}{D_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ mit $(W^*)^n$ überein. Bis auf eine sind alle diese Formen zu streichen. Stehen bleibt eine Wahrformbeiform (Folgerung 1c) oder eine m.a.k.Nf. einer Axiombeiform von T.

Bisher wurden die unverzweigten Beweisstücke von H^* betrachtet. Den Verzweigungen in H^* entsprechen Grundschlüsse (R2) in H.

Treten solche Verzweigungen in H^* nicht auf, so hat man im Falle $A \equiv A^n$ bereits die gesuchte bezüglich T genormte Herleitung für A. Gilt $A \not\equiv A^n$, so braucht man nur folgendes Beweisstück anzufügen:

$$\frac{A^n \quad A^n \to A^q}{A} \quad (\text{R}2) \quad (A^q \equiv A)\,.$$

$A^n \to A^q$ ist nach Satz 3 Wahrformbeiform und nach Folgerung 1b in T einschlägig. Neue Aussagenvariablen treten nicht auf.

Treten Verzweigungen auf, so fahre man wie folgt fort. Falls eine Oberformel dieser „Schlüsse" in H^* die m.a.k.QNf. der entsprechenden Formel in H ist, so soll sie unverändert stehen bleiben. Ist eine solche Formel aber die m.a.k.Nf. der entsprechenden Formel Z von H, so soll sie durch folgende Figur ersetzt werden:

$$\frac{Z^n \quad Z^n \to Z^q}{Z^q} \quad (\text{R}2)\,.$$

$Z^n \to Z^q$ ist nach Satz 3 eine Wahrformbeiform und nach Folgerung 1b in T einschlägig. Neue Aussagenvariablen treten nicht auf.

Durch diese Korrektur wird erreicht, daß alle Grundschlüsse von H auch in H^* wieder Grundschlüsse werden, denn die q-Bildung verändert die äußere aussagenlogische Struktur nicht (Folgerung 1d). Die so aus H^* gewonnene Formelnfigur ist eine bezüglich T genormte Herleitung für A.

4. Deduktionstheorem

Erklärung 4: Betrachtet seien eine A-Theorie T, Axiome $A_1, \ldots, A_n$ von T und ein in T einschlägiges Satzgebilde B.

B heißt *ohne Einsetzung für* $A_1, \ldots, A_n$ *in* T *beweisbar* genau dann, wenn es eine Normalherleitung für B in T gibt, in der in $A_1, \ldots, A_n$ keine Einsetzungen (R1) gemacht werden.

Anmerkung: Für das Deduktionstheorem ist es wichtig, daß man eine Kontrolle über die Einsetzungen hat. Es genügt, sich auf Beweise zu beschränken, in denen die Einsetzungen allen anderen Schlüssen vorangehen. In welcher Reihenfolge diese Schlüsse nun erfolgen, ist gleich. Wie der Nachweis zu Satz 6 lehrt, kann für A-Theorien aus jeder solchen Herleitung eine Normalherleitung gebildet werden. Für A-Theorien reicht es daher aus, wenn man sich auf Normalherleitungen beschränkt.

Satz 9: Betrachtet seien eine A-Theorie T und in T einschlägige Satzgebilde $A_1, \ldots, A_n, B$.

Ist B in $[T, \text{adj}. A_1, \ldots, A_n]$ ohne Einsetzungen für $A_1, \ldots, A_n$ beweisbar, so ist $A_n \to B$ bereits in $[T, \text{adj}. A_1, \ldots, A_{n-1}]$ ohne Einsetzungen für $A_1, \ldots, A_{n-1}$ beweisbar.

Nachweis: Der Nachweis verläuft analog dem Nachweis des entsprechenden Satzes der alternären Aussagenlogik (Schmidt [3], S. 179–185). Es sei H eine Normalherleitung für B in $[T, \text{adj}. A_1, \ldots, A_n]$, in der für $A_1, \ldots, A_n$ keine Einsetzungen gemacht werden. Jede Formel C aus H ersetze man durch $A_n \to C$. Die entstehende Formelnfigur H^*, die mit $A_n \to B$ endet, kann zu einer Normalherleitung in $[T, \text{adj}. A_1, \ldots, A_{n-1}]$, in der keine Einsetzungen für $A_1, \ldots, A_{n-1}$ gemacht werden, abgeändert werden.

Für die „Fadenköpfe" von H^* sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Der Fadenkopf ist aus einem Beweisfadenkopf von H, in den eine Einsetzung * gemacht wurde, hervorgegangen. Er hat die Gestalt:

$$\begin{array}{c} A_n \to D \\ A_n \to D^* . \end{array}$$

   D kann nach Voraussetzung keines der Axiome $A_1, \ldots, A_n$ sein. Diese Figur von H^* ersetze man durch:

$$\dfrac{\dfrac{D \text{ (Axiom)}}{D^* \text{ (R1)}} \qquad D^* \to A_n \to D^* \ (A0)}{A_n \to D^*} \ (\text{R2}) .$$

2. Der Fadenkopf ist aus einem Beweisfadenkopf von H hervorgegangen, in den keine Einsetzung gemacht wurde. Er hat die Gestalt: $A_n \to D$.

1. Fall: D ist nicht das Axiom A_n.
Dann ersetze man diese Formel durch:

$$\frac{D\ (\text{Axiom})\quad D \to A_n \to D\quad (A\,0)}{A_n \to D}\ (\text{R}2)\,.$$

2. Fall: D ist das Axiom A_n.
Also hat dieser Fadenkopf von H^* die Gestalt: $A_n \to A_n$. Dies gilt nach $A\,0$.

Da H eine Normalherleitung ist, sind in der bisherigen Diskussion nicht nur die Axiome, sondern auch die Einsetzungsregel besprochen worden. Die neuen Beweisstücke sind aus $[T, \text{adj. } A_1, \ldots, A_{n-1}]$. Es wird nun gezeigt, daß Anwendungen der Schlußregeln R2, R3 von H in H^* durch Beweisfiguren ersetzt werden können, in denen keine Einsetzung vorkommt.

Zu R2: Eine Grundschlußfigur aus H hat in H^* die Gestalt:

$$\frac{A_n \to A \quad A_n \to A \to B}{A_n \to B}\,.$$

Man ersetze dies durch

$$\cfrac{A_n \to A \quad \cfrac{A_n \to A \to B \quad (A_n \to A \to B) \to (A_n \to A) \to A_n \to B\ (A\,0)}{(A_n \to A) \to A_n \to B}\ (\text{R}2)}{A_n \to B}\ (\text{R}2)\,.$$

Zu R3: Die Schlußfigur einer Umsetzung (R3) in H wird in H^* zu:

$$\frac{A_n \to A}{A_n \to \left(A\,\dfrac{S\,C}{D}\right)}\ \text{Wahrformbeiform } C \leftrightarrow D\,.$$

Dies ist wieder eine Umsetzung gemäß R3.
Die so abgeänderte Figur H^* ist eine Beweisfigur für $A_n \to B$ in $[T, \text{adj. } A_1, \ldots, A_{n-1}]$, in der höchstens in ein Axiom *eine* Einsetzung gemacht wird, in der aber in $A_1, \ldots, A_{n-1}$ keine Einsetzung erfolgt. Es handelt sich jedoch noch nicht unbedingt um eine Normalherleitung, da Schlüsse gemäß R2 noch Schlüssen gemäß R3 vorangehen können. Wie der Nachweis zu Satz 6 lehrt, können jedoch Grundschlüsse mit Umsetzungen vertauscht werden, ohne daß Einsetzungen gebraucht werden. Es ergibt sich so die gesuchte Normalherleitung.
Eine mehrfache, induktiv kontrollierte Anwendung des Satzes 9 ergibt das Deduktionstheorem.

Satz 10 (Deduktionstheorem):
Betrachtet seien eine A-Theorie T und in T einschlägige Satzgebilde $A_1, \ldots, A_n, B$.
Ist B in $[T, \text{adj. } A_1, \ldots, A_n]$ ohne Einsetzung für $A_1, \ldots, A_n$ beweisbar, so ist $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to B$ bereits in T beweisbar.

Erklärung 5: Betrachtet sei eine A-Theorie T.
Unter der *zu T gehörigen Basistheorie* $T_0^{(T)}$ wird die A-Theorie verstanden, die das Begriffsnetz von T und nur Axiome gemäß $A\,0$ hat.

Folgerung 2: $T_0^{(T)} \subset T$.

5. Zusammenhänge zwischen Kodifikaten und A-Theorien

Im folgenden Satz wird vom Begriffsnetz her ein Teilgebiet der alternären Aussagenlogik abgegrenzt, in dem die alternäre Implikation genau die Eigenschaften einer inhaltlichen Folgebeziehung hat.

Satz 11: Eine Aussagenform

(1) $$\bigwedge_{i=1}^{p} E_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{q} (F_{1j} \wedge \cdots \wedge F_{n_j j} \rightarrow G_j) \rightarrow a$$

($p \geqq 1$, $q \geqq 0$, $n_j \geqq 1$; E_i, F_{kj}, G_j teilen Aussagenvariablen mit) ist genau dann eine Wahrform, wenn aus ihr durch (eventuelle) Umordnung der Hauptvorderglieder eine Form der Gestalt

(2) $$A \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} (C_{1j} \wedge \cdots \wedge C_{0_j j} \rightarrow D_j) \rightarrow a$$

mit: $0 < m \leqq p, 0 \leqq n \leqq q$.

Gibt es ein $i_0 \leqq p$ mit $E_{i_0} \equiv a$, so $m = 1$, $B_1 \equiv a$, $n = 0$.

Ist dies nicht der Fall, so: $n \neq 0$, $D_n \equiv a$.

In $\bigwedge_{j=1}^{n} (C_{1j} \wedge \cdots \wedge C_{0_j j} \rightarrow D_j)$ sind die Vorderglieder C_{kl} eines jeden Konjunktionsgliedes mindestens einmal Hinterglied einer vorangehenden Implikation, oder aber sie stimmen mit einem B_i ($i = 1, \ldots, m$) überein.

erhalten werden kann.

Nachweis:

1. Aus (1) entstehe durch Umordnung der Hauptvorderglieder eine Form der Gestalt (2). Da bei diesen Umordnungen die Wahrformeigenschaft nicht verloren geht, genügt es zu zeigen, daß (2) eine Wahrform ist.

1. Fall: Es gibt $i_0 \leqq p$ mit: $E_{i_0} \equiv a$. Dann ist (2) offenbar Wahrform.

2. Fall: Kein E_i ($i = 1, \ldots, p$) stimmt mit a überein. $n \neq 0$. Vollständige Induktion nach n:

I. $n = 1$: Die Bedingungen für (2) besagen: Die $C_{11}, \ldots, C_{0,1}$ stimmen mit einigen der B_i überein, $D_1 \equiv a$. Hieraus folgt unmittelbar die Wahrformeigenschaft von (2).

II. $n > 1$:

Induktionsvoraussetzung: Alle Formen der Gestalt (2), in denen die zweite Konjunktion höchstens $n - 1$ Glieder umfaßt, sind Wahrformen.

Betrachtet sei eine Aussagenform der Gestalt (2), in der sich die zweite Konjunktion über n Glieder erstreckt. Das erste Konjunktionsglied der zweiten Konjunktion enthält nur Vorderglieder, die in der ersten Konjunktion stehen. Mit Hilfe der Wahrform

(3) $$a \wedge \bigwedge_i a_i \wedge (\bigwedge_i a_i \rightarrow b) \leftrightarrow a \wedge \bigwedge_i a_i \wedge b$$

kann daher die betrachtete Form in eine ihr wertgleiche Form übergeführt werden, in der die zweite Konjunktion nur noch $n - 1$ Glieder umfaßt. Diese Form ist nach Induktionsvoraussetzung Wahrform.

2. (1) sei Wahrform. In (1) streiche man eine möglichst große Zahl von Hauptvordergliedern, so daß der Rest noch eine Wahrform bleibt. Es sei

$$(4)\qquad \bigwedge_{i=1}^{m} B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} (C_{1j} \wedge \cdots \wedge C_{0_j j} \rightarrow D_j) \rightarrow a$$

eine auf diese Weise aus (1) entstandene nicht mehr kürzbare Wahrform. – Es ist $m > 0$, da (4) anderenfalls keine Wahrform ist. Also: $0 < m \leqq p$, $0 \leqq n \leqq q$. A sei die Konjunktion der gestrichenen Glieder (in irgendeiner Reihenfolge).

1. Fall: Es gibt $i_0 \leqq m$ mit: $B_{i_0} \equiv a$. Dann ist $m = 1$, $B_1 \equiv a$, $n = 0$, da (4) sonst noch kürzbar wäre. $A \wedge a \rightarrow a$ ist eine Umordnung von (1) der Gestalt (2).

2. Fall: Für alle $i \leqq m$ gilt: $B_i \not\equiv a$.

Annahme: Zu jedem $j \leqq n$ gibt es ein $l \leqq 0_j$ mit: $C_{lj} \notin \{B_i\}_{i=1,\ldots,m}$.

(4) kann nun wie folgt belegt werden:

B_i: $\curlyvee$ $(i = 1, \ldots, m)$

a: $\curlywedge$ (Fallvoraussetzung)

C_{lj}: $\curlywedge$ für die nach Annahme existierenden l $(j = 1, \ldots, n)$

(4) geht dadurch in eine Form der Gestalt

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \curlyvee \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} (H_j \wedge \curlywedge \wedge K_j \rightarrow L_j) \rightarrow \curlywedge$$

über. Dies ist eine Falschform, was im Widerspruch zu (4) steht (denn durch eine Einsetzung kann eine Wahrform nicht zu einer Falschform werden).

Also gibt es ein $j \leqq n$, so daß für alle $l \leqq 0_j$ gilt: $C_{lj} \in \{B_i\}_{i=1,\ldots,m}$.

Dieses j-te Glied der zweiten Vordergliedkonjunktion von (4) kann nun mit Hilfe der Wahrform (3) aufgelöst werden, indem es durch das Hinterglied D_j ersetzt wird. Die entstehende Form ist wieder eine Wahrform.

Fall 2.1: $D_j \equiv a$. Dann ist $n = 1$; denn weitere Konjunktionsglieder könnten nun gestrichen werden im Widerspruch zu (4). Also ist $A \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} B_i \wedge (C_{11} \wedge \cdots \wedge C_{0_1 1} \rightarrow D_1) \rightarrow a$ eine Umordnung von (1) der Gestalt (2).

Fall 2.2: $D_j \not\equiv a$. Nun kann man wie zuvor zeigen, daß der Rest der zweiten Vordergliedkonjunktion von (4) ein Glied k enthält, dessen Vordergliedkonjunktionsglieder aus $\{B_i, D_j\}_{i=1,\ldots,m}$ stammen. Mit (3) kann dieses k-te Glied aufgelöst werden.

Falls $D_k \equiv a$, so ist $n = 2$ und $A \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{2} (C_{1j} \wedge \cdots \wedge C_{0_j j} \rightarrow D_j)^* \rightarrow a$, wobei * besagt, daß die Glieder der zweiten Konjunktion in der Reihenfolge ihrer Auflösung im obigen Verfahren zu nehmen sind, eine Umordnung von (1) der Gestalt (2). – Anderenfalls iteriere man das Verfahren.

Dieses Verfahren kommt nach endlich vielen Schritten mit dem Ergebnis, daß genau ein D_j mit dem a übereinstimmt, zum Abschluß. Es ist damit gezeigt, daß bei konjunktiver Zufügung von A zu den Vordergliedern von (4) und bei

Anordnung der Glieder der zweiten Vordergliedkonjunktion von (4) in der Reihenfolge ihrer Auflösung beim obigen Verfahren eine Umordnung von (1) der Gestalt (2) entsteht.

Eine allgemeine Strukturierung unserer Denkmöglichkeiten sehen wir in der Deduktion. Eine präzise, von metamathematischen Überlegungen freie Fassung dieses Gedankens ist die Kodifikation (SCHMIDT [2], [3]). Ein Kodifikat besteht aus Begriffsnetz und Deduktionsgerüst. Im Begriffsnetz werden die einschlägigen Satzgebilde aufgebaut. Im Deduktionsgerüst wird festgelegt, was beweisbar heißen soll. Dazu werden Ausgangssätze (Axiome) — denn ein unendlicher Regress ist sinnlos — und Schlußregeln mit endlich vielen Oberformeln in nachprüfbarer Weise festgelegt.

Erklärung 6: Betrachtet sei ein Kodifikat K. K kann wie folgt umrissen werden:

A. *Begriffsnetz von K:* Einschlägige Satzgebilde von K.

B. *Deduktionsgerüst von K:*

Axiome: A für einschlägige Satzgebilde A mit bestimmten nachprüfbaren Eigenschaften.

Elementare Schlußregeln: $\frac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ für einschlägige Satzgebilde $A_1, \ldots, A_n, A$, die in gewissen nachprüfbaren Zusammenhängen stehen.

K werde folgende variablenfreie 1-stufige A-Theorie $T(K)$ zugeordnet:

A. *Begriffsnetz von $T(K)$:*

1. Die einschlägigen Satzgebilde von K sind einschlägige Satzgebilde von $T(K)$. Sie sind als 0-stellige Eigenprädikate zu betrachten.
2. Sind A, B einschlägige Satzgebilde, so auch $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \to B$ $A \leftrightarrow B$.

Das Deduktionsgerüst rechtfertigt eine assoziate Schreibweise bezüglich $\wedge$, $\vee$.

B. *Deduktionsgerüst von $T(K)$:*

Axiome:

(A0) Jede Wahrformbeiform heißt beweisbar.

(A1) Die Axiome A aus K heißen beweisbar.

(A2) $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A$ heißt beweisbar für $A_1, \ldots, A_n, A$, die in denselben nachprüfbaren Zusammenhängen stehen, wie es für die elementaren Schlußregeln von K verlangt wurde.

Elementare Schlußregel: R2: $\frac{A \quad A \to B}{B}$.

Wegen der Variablenfreiheit erübrigt sich die Regel R1. Da alle Eigenprädikate von $T(K)$ 0-stellig sind, so wird die Regel R3 bereits durch A0, R2 gegeben. Eine Aufführung als elementare Schlußregel erübrigt sich daher ebenfalls.

Satz 12: Betrachtet seien ein Kodifikat K und ein darin einschlägiges Satzgebilde A.

A ist genau dann in K beweisbar, wenn A in $T(K)$ beweisbar ist.

Nachweis:

1. A sei in K beweisbar. Eine Beweisfigur für A in K kann wie folgt in eine Beweisfigur für A in $T(K)$ übersetzt werden.

Die Axiome dieser Figur sind nach (A1) in $T(K)$ beweisbar. Eine Schlußfigur

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$$

ersetze man durch

$$\frac{\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A_1 \wedge \cdots \wedge A_n}(\mathrm{A0,R2}) \qquad \overline{A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B}\,(\mathrm{A2})}{B}\,(\mathrm{R2})\,.$$

Die so erhaltene Figur ist ein Beweis für A in $T(K)$.

2. A sei in $T(K)$ vermittels der Beweisfigur B beweisbar. $A_1, \ldots, A_n$ seien die in B auftretenden Axiome gemäß (A1), (A2). Diese A_i haben die Gestalt $C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \to D$ oder E für bestimmte 0-stellige Eigenprädikate $C_1, \ldots, C_n, D, E$. B kann man auch als eine Beweisfigur in der variablenfreien A-Theorie $[T_0^{(T(K))}$, adj. $A_1, \ldots, A_n]$ auffassen, wobei $T_0^{(T(K))}$ die zu $T(K)$ gehörige Basistheorie ist. Nach Satz 10, A0, R2 gilt daher: $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to A$ ist in $T_0^{(T(K))}$ beweisbar, d. h. ist Wahrformbeiform.
   Wegen der bestimmten Gestalt der A_i kann diese Form durch Vertauschungen der konjunktiven Vorderglieder auf die Gestalt (1) von Satz 11 gebracht werden. Satz 11 besagt dann, daß weitere Umordnungen auf eine Form der Gestalt (2) führen. Da die A_i Axiomen und Schlußregelanwendungen von K entsprechen, kann aus der letztgenannten Form ein Beweis für A in K abgelesen werden.

Erklärung 7: Betrachtet werde eine variablenfreie A-Theorie T. T werde eine Variablen enthaltende A-Theorie T' wie folgt zugeordnet.
Dem Begriffsnetz von T werden Aussagenvariablen zugefügt. Die einschlägigen Satzgebilde von T' sind so zu bilden, wie es die Bildungsvorschrift für A-Theorien (Abschnitt 1) einer dem T entsprechenden A-Theorie vorsieht.
Das Deduktionsgerüst von T' enthält die Axiomeanweisung A0: Jede Wahrformbeiform heißt beweisbar. „Beiform" bezieht sich nun auf das neue Begriffsnetz. Daneben sind genau die Eigenaxiome von T zu nehmen. Zu den Schlußregeln R2, R3 kommt die Einsetzungsregel R1 hinzu.

Satz 13: Ein variablenfreies Satzgebilde A ist genau dann in einer variablenfreien A-Theorie T beweisbar, wenn A in der T zugeordneten Variablen enthaltenden A-Theorie T' beweisbar ist.

Nachweis:

1. Ist A in T beweisbar, so auch in T'; denn T' umfaßt das T.
2. A sei in T' beweisbar. B sei eine Beweisfigur hierfür: $A_1, \ldots, A_n$ seien die in B auftretenden Eigenaxiome von T', T. – Die $A_1, \ldots, A_n$ enthalten keine Aussagenvariablen.

Nach Satz 10, A0, R2 gilt: $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to A$ ist in T' aus Axiomen gemäß A0 mit R1, R2, R3 beweisbar, d. h. $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to A$ ist in $T_0^{(T')}$ beweisbar.

$A^0, A_1^0, \ldots, A_n^0$ seien die m.a.k.QNf. von $A_1, \ldots, A_n$. Auch diese Formen enthalten keine Aussagevariablen.

Nach Satz 5, Satz 3, A0, R2, Folgerung 1 gilt: $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i^0 \rightarrow A^0$ ist in $T_0^{(T')}$ beweisbar. Nach Satz 8 ist daher diese m.a.k.QNf. Endformel einer genormten Herleitung bezüglich $T_0^{(T')}$; d. h. sie folgt aus Wahrformbeiformen und m.a.k.Nf. von Wahrformbeiformen, die nach Folgerung 1c wieder Wahrformbeiformen sind, mittels bloßer Grundschlüsse.

$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i^0 \rightarrow A^0$ ist also eine variablenfreie, in T einschlägige Wahrformbeiform. Sie ist gemäß A0 in T beweisbar. $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i^0$ ist vermittels Satz 5, Satz 3, A0, R2 aus den Eigenaxiomen $A_1, \ldots, A_n$ von T beweisbar. Mit R2 ist nun auch A^0 beweisbar. Satz 5, Satz 3, A0, R2 ergeben: A ist in T beweisbar.

Die Sätze 12, 13 lassen sich zusammenfassen zu

Satz 14: Jedes Kodifikat kann durch Kodifizierung seiner erzeugenden Syntax in eine variablenfreie oder Variablen enthaltende 1-stufige A-Theorie so eingelagert werden, daß sich die den einschlägigen Satzgebilden des Kodifikates zugeordneten Satzgebilde der A-Theorie von den übrigen Satzgebilden der A-Theorie in entscheidbarer Weise (sie enthalten keine logischen Zeichen) abheben. Dabei werden insbesondere die elementaren Schlußregeln des Kodifikates den Axiomen der A-Theorie untergeordnet und die kodifikative Folgerungsbeziehung durch die alternäre Implikation wiedergegeben.

Es ist damit eine Normalform für Kodifikate erreicht. Im kodifikativen Bereich kommt dem Begriff A-Theorie grundsätzliche Bedeutung zu.

Da es allgemein-rekursiv unentscheidbare Kodifikate (z. B. die Prädikatelogik erster Stufe) gibt, so folgt nun mit Satz 14:

Satz 15: Es lassen sich allgemein-rekursiv unentscheidbare A-Theorien angeben.

Es stellt sich daher die Aufgabe, nach entscheidbaren A-Theorien zu suchen. Im folgenden wird ein Entscheidungsverfahren für effektiv abgrenzbare A-Theorien begründet.

6. Effektiv abgrenzbare A-Theorien

Erklärung 8: Betrachtet seien ein einschlägiges Satzgebilde A einer A-Theorie T und eine endliche Aussagenvariablenmenge V.

Die m.a.k.Nf. einer Beiform gemäß R1 von A, die nur Aussagenvariablen aus V enthält, heißt eine *zu A bezüglich V Normierte* ($A_N^{(V)}$).

Satz 16: Betrachtet seien ein einschlägiges Satzgebilde A und eine endliche Aussagenvariablenmenge V.

Die Anzahl der zu A bezüglich V Normierten ist endlich. Alle zu A bezüglich V Normierten können angegeben werden.

Nachweis: Die zu A bezüglich V Normierten werden wie folgt gebildet:

	(1) A ,
Einsetzung:	(2) A^* (in A^* nur Variablen aus V) ,
n-Bildung:	(3) $A_N^{(V)} \equiv (A^*)^n$.

Der Prozeß der n-Bildung von (2) nach (3) beschränkt die in (2) eintretende Willkür auf ein endliches Maß. Denn diesen n-Bildungsprozeß kann man sich auch so vorgenommen denken :

1. Ersetzung der in A für Aussagenvariablen eingesetzten Aussagenformen durch die ihnen äquivalenten ausgezeichneten konjunktiven Normalformen über V (Satz 1).
2. Bildung der m.a.k.Nf. dieses Ausdruckes.

Dieses etwas umständlichere Verfahren führt, wie Satz 4 lehrt, zu demselben Resultat $A_N^{(V)}$. Es zeigt aber, daß es genügt, sich in (2) auf die Einsetzung von ausgezeichneten konjunktiven Normalformen über V zu beschränken. Diese Formen sind aufweisbar. Für die endlich vielen Aussagenvariablen von A brauchen also nur endlich viele, aufweisbare Ausdrücke eingesetzt zu werden. Dies ist eine endliche, durchführbare kombinatorische Aufgabe. Da auch die n-Bildung in endlich vielen Schritten abgeschlossen ist, können auf diese Weise alle zu A bezüglich V Normierten in endlich vielen Schritten angegeben werden.

Erklärung 9: Eine A-Theorie T heißt *effektiv abgrenzbar* genau dann, wenn die Axiomeanweisungen von T nur solche Ausdrücke als Axiome zulassen, deren Normierte insgesamt bezüglich jeder endlichen Aussagenvariablenmenge, von Wahrformbeiformen abgesehen, eine endliche Menge bilden und stets effektiv angegeben werden können.

Satz 17: Betrachtet seien eine effektiv abgrenzbare A-Theorie T und eine endliche Aussagenvariablenmenge V.
Die Anzahl der bezüglich V Normierten der Axiome von T, die keine Wahrformbeiformen sind, ist endlich. Alle bezüglich V Normierten von T, die keine Wahrformbeiformen sind, können in endlich vielen Schritten angegeben werden.

Nachweis: Die Menge der Axiome wird in T durch die Axiomeanweisungen und die Einzelaxiome festgelegt. Die obige Behauptung gilt für die Axiomeanweisungen nach Erklärung 9, für die Einzelaxiome nach Satz 16; denn über die gemäß Satz 16 zu bildenden Satzgebilde kann man, indem man die Eigenprädikate in ihnen aufsucht, die ihrerseits nicht wieder im Argumentbereich eines weiteren Eigenprädikates stehen, und sie durch fremde Aussagenvariablen unter Beibehaltung von gestaltlichen Gleichheiten und Ungleichheiten ersetzt und die entstandene Aussagenform vermittels der üblichen (abkürzenden) Wahrheitswertung auf ihre Wahrformeigenschaft untersucht, entscheiden, ob sie Wahrformbeiformen sind oder nicht.

Erklärung 10: Betrachtet seien eine effektiv abgrenzbare A-Theorie T_1, eine A-Theorie T_2, deren Begriffsnetz mit dem Begriffsnetz von T_1 übereinstimmt, und eine endliche Aussagenvariablenmenge V mit folgenden Eigenschaften:

1. $T_2 \subset T_1$.
2. Für jede der endlich vielen und angebbaren bezüglich V Normierten der Axiome von T_1, die keine Wahrformbeiformen sind (Satz 17), läßt sich entscheiden, ob sie in T_2 beweisbar ist oder nicht.

${}_V\wedge^{T_1}_{T_2}$ sei die Konjunktion (wegen der Kommutativität des $\wedge$ interessiert die Reihenfolge nicht) der bezüglich V Normierten der Axiome von T_1 die *nicht* in T_2 beweisbar, also auch keine Wahrformbeiformen sind. Mehrfach auftretende Glieder sind darin bis auf eines zu streichen.

Folgerung 3:

a) ${}_V\wedge^{T_1}_{T_2}$ ist bis auf die Reihenfolge der Konjunktionsglieder eindeutig bestimmt.

b) ${}_V\wedge^{T_1}_{T_2}$ ist effektiv angebbar (Satz 17, Erklärung 10).

c) ${}_V\wedge^{T_1}_{T_2}$ ist in T_1 beweisbar (Erklärung 9, 10; R1, Satz 5, R2, A0).

7. Entscheidungsverfahren für effektiv abgrenzbare A-Theorien

Satz 18: Jede Basistheorie einer A-Theorie T ist entscheidbar.

Nachweis: $T_0^{(T)}$ ist eine A-Theorie. Nach Satz 5, Satz 3, A0, R2, Folgerung 1b genügt es daher, die Entscheidung für m.a.k.QNf. zu treffen. Nach Satz 8 ist ein solcher Ausdruck genau dann in $T_0^{(T)}$ beweisbar, wenn er Endformel einer genormten Herleitung bezüglich $T_0^{(T)}$ ist. Eine genormte Herleitung bezüglich einer Basistheorie hat folgendes Aussehen. An den Beweisfadenköpfen stehen Wahrformbeiformen oder m.a.k.Nf. von Wahrformbeiformen. Letztere sind aber nach Folgerung 1c wieder Wahrformbeiformen. Hierauf folgen nur Grundschlüsse. Aus Wahrformbeiformen folgen mittels Grundschlüssen nur Wahrformbeiformen. Daher ist eine m.a.k.QNf. genau dann in $T_0^{(T)}$ beweisbar, wenn sie eine Wahrformbeiform ist. Über die Wahrformbeiformeigenschaft entscheide man nun wie folgt. Man suche die Eigenprädikate auf, die ihrerseits nicht wieder im Argumentbereich eines weiteren Eigenprädikates stehen, und ersetze sie unter Beibehaltung von gestaltlichen Gleichheiten und Ungleichheiten durch bisher nicht aufgetretene Aussagenvariablen. Über die so entstandene Aussagenform entscheide man mit Hilfe der üblichen (abkürzenden) Wahrheitswertung, ob sie eine Wahrform ist oder nicht.

Satz 19: Betrachtet seien:

1. eine effektiv abgrenzbare A-Theorie T_1,
2. eine in T_1 einschlägige m.a.k.QNf. A. V sei der Variablenvorrat von A zuzüglich der Variablen a,
3. eine A-Theorie T_2, deren Begriffsnetz mit dem Begriffsnetz von T_1 übereinstimmt,

mit folgenden Eigenschaften:

a) $T_2 \subset T_1$.

b) Für jede der endlich vielen und angebbaren bezüglich V Normierten der Axiome von T_1, die keine Wahrformbeiformen sind (Satz 17), läßt sich entscheiden, ob sie in T_2 beweisbar ist oder nicht.

Behauptung: A ist in T_1 genau dann beweisbar, wenn ${}_V\wedge^{T_1}_{T_2} \to A$ in T_2 beweisbar ist.

Nachweis:

I. Es sei ${}_V\wedge^{T_1}_{T_2} \to A$ in T_2 beweisbar. Voraussetzung a), Folgerung 3c und R2 besagen: A ist in T_1 beweisbar.

II. Es sei A in T_1 beweisbar. Nach Satz 8 ist A dann Endformel einer genormten Herleitung H bezüglich T_1. An den Beweisfadenköpfen von H stehen Wahrformbeiformen oder m.a.k.Nf. von Beiformen über V der Axiome von T_1, die keine Wahrformbeiformen sind. Nach Voraussetzung b) läßt sich für die letzteren Ausdrücke entscheiden, ob sie in T_2 beweisbar sind oder nicht. H werde wie folgt ergänzt:

1. Ist ein solcher Ausdruck in T_2 beweisbar, so stelle man ihm in H eine seiner gemäß Satz 6 existierenden Normalherleitungen in T_2 voran.
2. Ist ein solcher Ausdruck in T_2 nicht beweisbar, so lasse man H an dieser Stelle unverändert. $A_1, \ldots, A_n$ seien alle in H auftretenden Ausdrücke dieser Art.

H^+ sei die so aus H entstehende Formelnfigur. H^+ kann man als eine Normalherleitung für A in $[T_2$, adj. $A_1, \ldots, A_n]$ ohne Einsetzung für $A_1, \ldots, A_n$ auffassen. Nach Satz 10 ist daher bereits $A_1 \to \cdots \to A_n \to A$ in T_2 beweisbar. Wegen A0 ist dies in T_2 gleichwertig mit: (*) $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A$.

Die Ausdrücke $A_1, \ldots, A_n$ sind bezüglich V Normierte der Axiome von T_1, die keine Wahrformbeiformen und nicht in T_2 beweisbar sind. Sie sind daher Konstituenten der Konjunktion ${}_V\bigwedge_{T_2}^{T_1}$. Wegen A0 ist in T_2 beweisbar: ${}_V\bigwedge_{T_2}^{T_1} \to A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Hieraus folgt nun mit (*), A0, R2: ${}_V\bigwedge_{T_2}^{T_1} \to A$ ist in T_2 beweisbar.

Satz 20: Betrachtet seien:

1. eine effektiv abgrenzbare A-Theorie T_1,
2. eine A-Theorie T_2, deren Begriffsnetz mit den Begriffsnetz von T_1 übereinstimmt,

mit folgenden Eigenschaften:

a) $T_2 \subset T_1$,

b) T_2 ist entscheidbar.

Behauptung: T_1 ist entscheidbar.

Nachweis: Nach Satz 5, Satz 3, R2 ist ein in T_1 einschlägiges Satzgebilde A genau dann in T_1 beweisbar, wenn A^q in T_1 beweisbar ist. Es sei V der Variablenvorrat von A^q zuzüglich der Variablen a.

Nach Satz 19 ist A^q genau dann in T_1 beweisbar, wenn ${}_V\bigwedge_{T_2}^{T_1} \to A^q$ in T_2 beweisbar ist. Da A^q, ${}_V\bigwedge_{T_2}^{T_1}$ in endlich vielen Schritten angegeben werden können und T_2 nach Voraussetzung b) entscheidbar ist, ist nun auch T_1 entscheidbar.

Satz 21: Eine effektiv abgrenzbare A-Theorie T ist entscheidbar.

Nachweis: Nach Satz 18, Folgerung 2 ist $T_0^{(T)}$ eine entscheidbare Untertheorie von T. Die Behauptung ergibt nun der Satz 20.

Effektiv abgrenzbare A-Theorien T können also wie folgt entschieden werden: A sei das in T einschlägige Satzgebilde, für das entschieden werden soll, ob es in T beweisbar ist oder nicht. Von A gehe man über zu A^q gemäß Erklärung 2. V sei der Variablenvorrat von A^q zuzüglich der Variablen a. Nun bilde man ${}_V\bigwedge_{T_0^{(T)}}^{T}$ (Erklärung 8, 9, 10; Satz 16, Satz 17) und entscheide, ob ${}_V\bigwedge_{T_0^{(T)}}^{T} \to A^q$ eine Wahrformbeiform ist oder nicht (Satz 18). Das Ergebnis dieser Entscheidung ist die gesuchte Antwort.

Die Kompliziertheit des beschriebenen Entscheidungsverfahrens wächst mit der Länge der zu entscheidenden Ausdrücke und der Kompliziertheit der zugrunde liegenden A-Theorie. Wesentlich handlichere Verfahren kann man nur erhalten, wenn man sich die Eigentümlichkeiten der zu entscheidenden A-Theorie zunutze macht. Eine Abkürzung durch Zurückführung gibt der Satz 20. Hat man bereits eine engere, aber begriffsnetzmäßig ebenso weite A-Theorie, die man elegant entscheiden kann, zur Verfügung, so kann man die Entscheidung, wie es Satz 20 lehrt, auf dieses handlichere Verfahren zurückführen.

Für A-Theorien der Art $T(K)$ aus Abschnitt 5 und den ihnen zugrunde liegenden Kodifikaten K bringt die obige Entscheidungsmethode nicht viel Neues. Treten dagegen Aussagenvariablen in den Eigenaxiomen auf, so sind auch diese A-Theorien noch entscheidbar, sofern sie nur effektiv abgrenzbar sind. Solchen Fällen begegnet man in der Modalitätenlogik.

Mitunter gelingt es, in einer Theorie T die Deduktionsmöglichkeiten für einschlägige Satzgebilde effektiv abzugrenzen; einschlägigen Satzgebilden A dieser Theorie kann in konstruktiver Weise eine effektiv abgrenzbare A-Theorie T' und ein darin einschlägiges Satzgebilde B zugeordnet werden, so daß das Satzgebilde A genau dann in T beweisbar ist, wenn B in T' beweisbar ist. Mit Hilfe des obigen Verfahrens und dieser konstruktiven Zuordnung kann dann über die Beweisbarkeit von A in T entschieden werden.

LITERATUR

[1] J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Math. Zeitschr.* **26** (1927).
[2] H. Arnold Schmidt, Mathematische Grundlagenforschung. *Enzyklop. d. math. Wissensch.*, neue Aufl., I/1, Heft 1, Teil II (1948).
[3] H. Arnhold Schmidt, Mathematische Gesetze der Logik. *Springer* 1960.