



*Μεταπτυχιακό Μηχανικών Η/Υ και Δικτύων –ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

**Ανάλυση ευαισθησίας**

**Άσκηση 1**

Μια εταιρεία παράγει 2 είδη προϊόντων A και B με κόστος 100 ευρώ για το προϊόν A και 40 ευρώ για το προϊόν B. Η τιμή πώλησης στην οποία διαθέτει το προϊόν A είναι 160 ευρώ ενώ για το προϊόν B είναι 80 ευρώ. Ο μέγιστος συνολικός αριθμός προϊόντων που η επιχείρηση μπορεί να κατασκευάσει σε μια ημέρα είναι 120 ενώ το ανώτατο ημερήσιο κόστος παραγωγής είναι 6000 ευρώ.

1. Να γίνει μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.
2. Τι σημαίνει ότι η σκιά της τιμής για τον περιορισμό μέγιστου συνολικού αριθμού προϊόντων είναι 26.6 με όρια από 60 μέχρι 150; Ποιο θα είναι το επιπλέον αναμενόμενο κέρδος αν αυξήσουμε το μέγιστο ημερήσιο αριθμό προϊόντων που μπορούν να κατασκευαστούν κατά 10 (δηλαδή από 120 σε 130);

**Άσκηση 2**

Μια βιοτεχνία παράγει τέσσερα προϊόντα Π<sub>1</sub>, Π<sub>2</sub>, Π<sub>3</sub> και Π<sub>4</sub>. Η παραγωγή και για τα τέσσερα προϊόντα απαιτεί τη χρήση πρώτων υλών A και B. Για την εύρεση του βέλτιστου πλάνου παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη από την πώληση των τεσσάρων προϊόντων της, χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

Μεγιστοποίηση:  $z = 2X_1 + 8X_2 + 12X_3 + 15X_4$   
 Περιορισμοί:  $X_1 + 7X_2 + 4X_3 + 5X_4 \leq 500$  (διαθέσιμη πρώτη ύλη A)  
 $X_1 + X_2 + 3X_3 + 3X_4 \leq 600$  (διαθέσιμη πρώτη ύλη B)  
 $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$

Ο τελικός πίνακας Simplex για το πρόβλημα αυτό είναι ο εξής:

	Cj	2	8	12	15	0	0	Ποσότητα
Cj	Basis	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	RHS
15	X <sub>4</sub>	0,2	1,4	0,8	1	0,2	0	100
0	S <sub>2</sub>	0,4	-3,2	0,6	0	-0,6	1	300
	Wj	3	21	12	15	3	0	1500
	Cj – Wj	-1	-13	0	0	-3	0	

- a. Πόσες μονάδες προϊόντων Π<sub>1</sub>, Π<sub>2</sub>, Π<sub>3</sub> και Π<sub>4</sub> πρέπει να παραχθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της βιοτεχνίας;
- b. Υποθέτουμε ότι παρείχθησαν 10 μονάδες προϊόντος Π<sub>1</sub> κατά λάθος. Ποιά είναι η επακόλουθη μείωση στο κέρδος;
- c. Ποιά είναι τα όρια του συντελεστή του κέρδους για το προϊόν Π<sub>4</sub> μέσα στα οποία δε μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση;
- d. Ποια είναι τα όρια τιμών για τη διαθέσιμη πρώτη ύλη A για τις οποίες ισχύουν οι σκιάδες τιμές;

- e. Η επιχείρηση σκέφτεται να προσθέσει ένα νέο προϊόν Π<sub>5</sub>, η κατασκευή του οποίου απαιτεί 5 μονάδες πρώτης ύλης Α και 10 μονάδες πρώτης ύλης Β. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος Π<sub>5</sub> είναι 17€. Συμφέρεται την επιχείρηση να το παράγει;

### Άσκηση 3

Μια επιχείρηση κατασκευάζει 3 προϊόντα. Η κατασκευή των προϊόντων απαιτεί 3 στάδια: συναρμολόγηση, βάψιμο και συσκευασία. Το κέρδος (σε €) ανά μονάδα προϊόντος και οι χρόνοι που απαιτούνται σε λεπτά για την παραγωγή του δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Προϊόν	Συναρμολόγηση	Βάψιμο	Συσκευασία	Κέρδος
1	8	6	1	60
2	4	2	1,5	30
3	2	1,5	0,5	20

Η επιχείρηση διαθέτει 4800 λεπτά για συναρμολόγηση, 2000 λεπτά για βάψιμο και 800 λεπτά για συσκευασία.

### Μοντελοποίηση και επίλυση χρησιμοποιώντας τον επιλυτή του Excel

	A	B	C	D	E	F
1		Συναρμολόγηση	Βάψιμο	Συσκευασία	Κέρδος	Παραγωγή
2	Προϊόν 1	8	4	2	60	
3	Προϊόν 2	6	2	1,5	30	
4	Προϊόν 3	1	1,5	0,5	20	
5						
6	Απαιτούμενος χρόνος					
7	Διαθέσιμος χρόνος	4800	2000	800		
8						
9		Συνολικό κέρδος				
10						

Παράμετροι Επίλυσης

Ορισμός στόχου:

Σε:  Μέγιστη  Ελάχιστη  Ίση του:

Με αλλαγή μεταβλητών κελιών:

Συμφωνία με τους περιορισμούς:

\$B\$6 <= \$B\$7  
 \$C\$6 <= \$C\$7  
 \$D\$6 <= \$D\$7

Καταστήστε τις μεταβλητές που δεν έχουν περιορισμούς μη αρνητικές

Επιλέξτε μια μέθοδο επίλυσης:

Μέθοδος επίλυσης  
 Επιλέξτε το μη γραμμικό GRG μηχανισμό για προβλήματα της Επίλυσης που είναι ομαλά μη γραμμικά. Επιλέξτε το μηχανισμό LP Simplex για γραμμικά προβλήματα της Επίλυσης και επιλέξτε το μηχανισμό Evolutionary για προβλήματα της Επίλυσης που δεν είναι ομαλά.

Προσθήκη  
 Αλλαγή  
 Διαγραφή  
 Επικοινωνία όλων  
 Εξόρτωση/αποθήκ.

Επιλογές

βοήθεια

### Αναφορά απάντησης

5						
6	Κελί προορισμού (Μέγιστο)					
7	<b>Κελί</b>	<b>Όνομα</b>	<b>Αρχική τιμή</b>	<b>Τελική τιμή</b>		
8	\$C\$9	Συνολικό κέρδος Βάψιμο	0	28000		
9						
10						
11	Ρυθμιζόμενα κελιά					
12	<b>Κελί</b>	<b>Όνομα</b>	<b>Αρχική τιμή</b>	<b>Τελική τιμή</b>		
13	\$F\$2	Προϊόν 1 Παραγωγή	0	200		
14	\$F\$3	Προϊόν 2 Παραγωγή	0	0		
15	\$F\$4	Προϊόν 3 Παραγωγή	0	800		
16						
17						
18	Περιορισμοί					
19	<b>Κελί</b>	<b>Όνομα</b>	<b>Τιμή κελιού</b>	<b>Τύπος</b>	<b>Κατάσταση</b>	<b>Απόκλιση</b>
20	\$B\$6	Απαιτούμενος χρόνος Συναρμολόγηση	2400	\$B\$6<=\$B\$7	Μη υποχρεωτικός	2400
21	\$C\$6	Απαιτούμενος χρόνος Βάψιμο	2000	\$C\$6<=\$C\$7	Υποχρεωτικός	0
22	\$D\$6	Απαιτούμενος χρόνος Συσκευασία	800	\$D\$6<=\$D\$7	Υποχρεωτικός	0
23						
24						

## Αναφορά ευαισθησίας

4							
5							
6	Ρυθμιζόμενα κελιά						
7							
8	Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
9	\$F\$2	Προϊόν 1 Παραγωγή	200	0	60	20	4
10	\$F\$3	Προϊόν 2 Παραγωγή	0	-5	30	5	1E+30
11	\$F\$4	Προϊόν 3 Παραγωγή	800	0	20	2,5	5
12							
13	Περιορισμοί						
14							
15	Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιάδης τιμή	Περιορισμός R.H. Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
16	\$B\$6	Απαιτούμενος χρόνος Συναρμολόγηση	2400	0	4800	1E+30	2400
17	\$C\$6	Απαιτούμενος χρόνος Βάψιμο	2000	10	2000	400	400
18	\$D\$6	Απαιτούμενος χρόνος Συσκευασία	800	10	800	200	133,3333333
19							
20							

### Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις

- Περιγράψτε τη λύση του προβλήματος.
- Ποιοι από τους περιορισμούς είναι δεσμευτικοί και ποιοι είναι μη δεσμευτικοί;
- Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αλλαγής των συντελεστών της συνάρτησης κόστους;
- Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αναγκαστικής εισαγωγής στη λύση του προβλήματος μεταβλητών που έχουν στην τρέχουσα λύση την τιμή μηδέν;
- Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αλλαγής των ποσοτήτων των περιορισμών;
- Πως θα αλλάξει η λύση αν το κέρδος για το προϊόν 1 γίνει 70 ευρώ;
- Πόσο κοστίζει 1 λεπτό στο τμήμα βαψίματος και για πόσα λεπτά βαψίματος είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε αυτή την τιμή;
- Η εταιρεία μπορεί να αυξήσει τους διαθέσιμους πόρους που θα της στοιχίσει 8 € ανά μονάδα. Τι θα την συμβουλεύατε και γιατί;
- Αν είχατε 100 επιπλέον λεπτά σε ποια εργασία θα τις διαθέτατε και γιατί; Ποια θα ήταν η τιμή της συνάρτησης κόστους τότε;
- Αν έπρεπε να αφαιρέσετε 50 λεπτά από ποια εργασία θα τις αφαιρούσατε και γιατί; Ποια θα ήταν η τιμή της συνάρτησης κόστους τότε;

## Απαντήσεις

### 1. Μοντελοποίηση

$x_1 = \#$  μονάδων προϊόντος A

$x_2 = \#$  μονάδων προϊόντος B

$$\max: 60x_1 + 40x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 120 \quad (\text{περιορισμός 1})$$

$$100x_1 + 40x_2 \leq 6000 \quad (\text{περιορισμός 2})$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

Η σκιά της τιμής του περιορισμού 1 είναι 26,66: Για κάθε μονάδα αύξησης (μείωσης) του περιορισμού των συνολικών τεμαχίων, το κέρδος θα αυξάνεται (μειώνεται) κατά 26,6€ και αυτό θα συμβαίνει στα όρια από 60 έως 150 τεμάχια.

Αν το πλήθος των τεμαχίων αυξηθεί κατά 10, δηλαδή γίνει  $120+10=130 \in [60,150]$ , το κέρδος θα αυξηθεί κατά  $10 \cdot 26,6 = 266€$ .

### 2.

a.  $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=100$ .

b. Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα θα πρέπει πρώτα να βρούμε το μειωμένο κόστος για το  $\pi$

Από τη σειρά  $C_j - W_j$  βρίσκουμε ότι το μειωμένο κόστος για την μεταβλητή  $x_1$  είναι -1. Άρα αν παρείχονταν 10 μονάδες προϊόντος  $\pi_1$  κατά λάθος, η επακόλουθη μείωση στο κέρδος θα είναι  $10 \cdot 1 = 10$ .

c. Ανάλυση ευαισθησίας για τον συντελεστή κέρδους του  $\pi_4$ :

$\gamma$	$C_j$	2	8	12	$15+\Delta$	0	0	Ποσότητα
$C_j$	Basis	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$s_1$	$s_2$	RHS
$15+\Delta$	$x_4$	0,2	1,4	0,8	1	0,2	0	100
0	$s_2$	0,4	-3,2	0,6	0	-0,6	1	300
	$W_j$	$3+0,2\Delta$	$21+1,4\Delta$	$12+0,8\Delta$	$15+\Delta$	$3+0,2\Delta$	0	$1500+100\Delta$
	$C_j - W_j$	$-1-0,2\Delta$	$-13-1,4\Delta$	$0-0,8\Delta$	0	$-3-0,2\Delta$	0	

Πρέπει να ισχύουν συγχρόνως

$$-1-0,2\Delta \leq 0$$

$$-13-1,4\Delta \leq 0$$

$$-0,8\Delta \leq 0$$

$$-3-0,2\Delta \leq 0 \quad \text{Άρα } \Delta \geq 0$$

Και τα όρια του συντελεστή του κέρδους για το προϊόν  $\pi_4$  μέσα στα οποία δε μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση είναι

Κατώτατο όριο:  $100+0=100$

Ανώτατο Όριο:  $+\infty$ .

d. Ανάλυση ευαισθησίας για το δεξί μέλος του περιορισμού 1:

Στον τελικό πίνακα θα αλλάξει η στήλη RHS. Για να μη μεταβληθεί η βέλτιστη βάση (να παραμείνουν οι ίδιες βασικές μεταβλητές) πρέπει

$$100+0,2\theta \geq 0 \quad \text{και} \quad 300-0,6\theta \geq 0$$

Τελικά  $-500 \leq \theta \leq 500$ . Άρα τα όρια για τη διαθέσιμη πρώτη ύλη A για τις οποίες ισχύουν οι σκιάδεις τιμές είναι

Κατώτατο όριο:  $500-500=0$

Ανώτατο όριο:  $500+500=1000$

- e. Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα θα πρέπει πρώτα να βρούμε ένα ευκαιριακό κόστος για το νέο προϊόν. Το ευκαιριακό αυτό κόστος είναι το συνολικό άθροισμα της Σκιάδους τιμής του κάθε περιορισμού επί τις αντίστοιχες μονάδες που απαιτεί το νέο προϊόν. Δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε:

$$EK1 = (\text{Σκιάδης τιμή}) * (\text{Απαιτούμενη πρώτη ύλη A}) = 3 * 5 = 15$$

$$EK2 = (\text{Σκιάδης τιμή}) * (\text{Απαιτούμενη πρώτη ύλη B}) = 0 * 10 = 0$$

Άρα συνολικά:  $EK = EK1 + EK2 = 15$

Το EK το συγκρίνω με το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος  $\Pi_5$  και αν είναι μικρότερο τότε έχουμε κέρδος άρα συμφέρει την εταιρία ενώ εάν είναι μεγαλύτερο τότε δεν έχουμε κέρδος και δεν συμφέρει την εταιρία να το παράγει. Στην συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρώ ότι  $15 < 17$ . Άρα την εταιρεία την συμφέρει να παράγει αυτό το νέο προϊόν. Βέβαια το πρόβλημα πρέπει να διατυπωθεί από την αρχή με το νέο προϊόν και να λυθεί ξανά για να βρεθεί η ποσότητα του προϊόντος  $\Pi_5$  που πρέπει να παραχθεί.

3.

- a) Από την Αναφορά Απάντησης βρίσκουμε

**Προϊόν 1: 200, Προϊόν 2: 0, Προϊόν 3: 800 Κέρδος: 28000**

- b) Από την Αναφορά Απάντησης βρίσκουμε

Ο περιορισμός 1 είναι μη δεσμευτικός και οι περιορισμοί 2 και 3 είναι δεσμευτικοί.

- c) Αν ο συντελεστή κέρδους του  $X_1$  μεταβληθεί μέσα στα όρια  $[60-4, 60+20]=[56,80]$  η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει.

Αν ο συντελεστή κέρδους του  $X_2$  μεταβληθεί μέσα στα όρια  $[30-\infty, 30+5]=[-\infty,35]$  η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει.

Αν ο συντελεστή κέρδους του  $X_3$  μεταβληθεί μέσα στα όρια  $[20-5, 20+2.5]=[15, 17.5]$  η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει.

Προσοχή: η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αλλάξει εάν ένας συντελεστής αλλάξει και η αντίστοιχη μεταβλητή του παραμείνει αμετάβλητη.

- d) Από τη στήλη Μειωμένο κόστος, βρίσκουμε ότι το μειωμένο κόστος για το προϊόν 2 είναι -5. Άρα αν παραχθεί 1 μονάδα προϊόντος 2 θα μειωθεί η αντικειμενική συνάρτηση κατά 5.

- e) Η **σκιάδης τιμή** δείχνει πόσο θα αλλάξει η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε μονάδα μεταβολής της ποσότητας του αντίστοιχου περιορισμού εφόσον η αλλαγή κυμαίνεται μέσα στα όρια που καθορίζονται από τις στήλες «Επιτρεπόμενη αύξηση» και «Επιτρεπόμενη μείωση».

Επομένως, εφόσον τα διαθέσιμα λεπτά Συναρμολόγησης είναι από 2400 μέχρι  $+\infty$  η τιμή της συνάρτησης κέρδους δεν αλλάζει (σκιάδης τιμή 0).

Για κάθε λεπτό που μεταβάλλεται ο διαθέσιμος χρόνος Βαψίματος, στο διάστημα  $[2000-400, 2000+400]=[1600,2400]$ , η συνάρτηση κέρδους μεταβάλλεται κατά 10.

Για κάθε λεπτό που μεταβάλλεται ο διαθέσιμος χρόνος Συσκευασίας, στο διάστημα  $[800-133.333, 800+200]=[666.67,1000]$ , η συνάρτηση κέρδους μεταβάλλεται κατά 10.

- f)  $70 \in [56, 80]$  Άρα Δεν αλλάζει η β.λ. ( $X_1=200, X_2=0, X_3=800$ ) Αλλάζει το Κέρδος  $70*200+30*0+20*800=30000$  (αύξηση  $10*200=2000$ )

- g) Από το ερώτημα e), κάθε λεπτό βαψίματος αξίζει 10€ και είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε αυτή την τιμή στα όρια  $[1600,2400]$

- h) Ο περιορισμός 1 (Συναρμολόγηση) δεν είναι δεσμευτικός και υπάρχουν 2400 λεπτά διαθέσιμα (αχρησιμοποίητα). Επομένως το να επενδύσει η επιχείρηση στο τμήμα Συναρμολόγησης δεν είναι σωστό

αφού με την επένδυση της αυτή απλώς θα αυξήσει τα αδιάθετα λεπτά στο τμήμα αυτό, χωρίς να έχει κάποια αύξηση στα κέρδη της.

Ο περιορισμός 2 (Βάψιμο) και 3 (Συσκευασία) έχουν σκιάδη τιμή 10. Άρα η αύξηση κατά 1 λεπτό των διαθέσιμων λεπτών θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των κερδών κατά 10 €. Το κόστος ενός επιπλέον λεπτού είναι 8 άρα η αύξηση των πόρων αυτών είναι συμφέρουσα για την εταιρεία στα τμήματα αυτά.

- i) Τα 100 επιπλέον λεπτά πρέπει να διατεθούν στο Βάψιμο ή στη Συσκευασία καθώς έχουν την υψηλότερη σκιάδη τιμή. Η συνάρτηση κέρδους σε αυτή την περίπτωση θα λάβει την τιμή  $28000+100*10=29000$
- j) Τα 50 λεπτά θα πρέπει να αφαιρεθούν από τη Συναρμολόγηση καθώς εκεί υπάρχει διαθέσιμος χρόνος που δεν αξιοποιείται.