Sobre el teorema de Poincaré-Bendixson.

Jules Henri Poincaré
1854-1912

Ivar Otto Bendixson
1861-1935

El Teorema de Poincaré-Bendixson supone el punto de partida de cualquier estudio sobre ω-límites de sistemas dinámicos continuos. Enunciado a finales del siglo XIX, describe cómo es un conjunto ω-límite sin puntos críticos en la esfera $\mathbb{S}^2$. Vamos a enunciarlo aquí en su forma clásica y discutir su validez en otros espacios de fases: superficies compactas y conexas y espacios tridimensionales.

Nociones básicas.

Dada una variedad n-dimensional M, un *flujo* definido sobre ella es una aplicación continua $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ que satisface las condiciones:

(1) $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in M$,
(2) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t+s, x)$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$ y $x \in M$.

En lo que sigue $\mathrm{Sing}(\Phi)$ denotará los puntos singulares o de equilibrio del sistema. Si tomamos ahora un punto $x \in M$ y calculamos los puntos de acumulación de su *órbita* ($O_x = \Phi(\mathbb{R}, x)$) obtenemos el conjunto *ω-límite*, cuya definición formal es la que sigue:

$$\omega_\Phi(x) = \{y \in M : \exists (t_n)_n \to \infty; (\Phi_x(t_n))_n \to y\}$$

Las nociones de flujo y ecuación diferencial están íntimamente ligadas. En particular, si la variedad en la que trabajamos es suave, se puede demostrar que a cualquier flujo se le puede asociar un sistema de ecuaciones diferenciales y viceversa [6, 5]. De donde se deriva la importancia del teorema de Poincaré-Bendixson para la búsqueda de ciclos límites de ecuaciones diferenciales.

Enunciado clásico y extensión de Schwartz

Teorema 1 (Poincaré-Bendixson)**.** *Sea $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ un flujo de clase C^1 sobre $\mathbb{S}^2$ y sea $x \in \mathbb{S}^2$. Si $\omega_\Phi(x) \cap \mathrm{Sing}(\Phi) = \emptyset$ entonces $\omega_\Phi(x)$ es una curva de Jordan.*

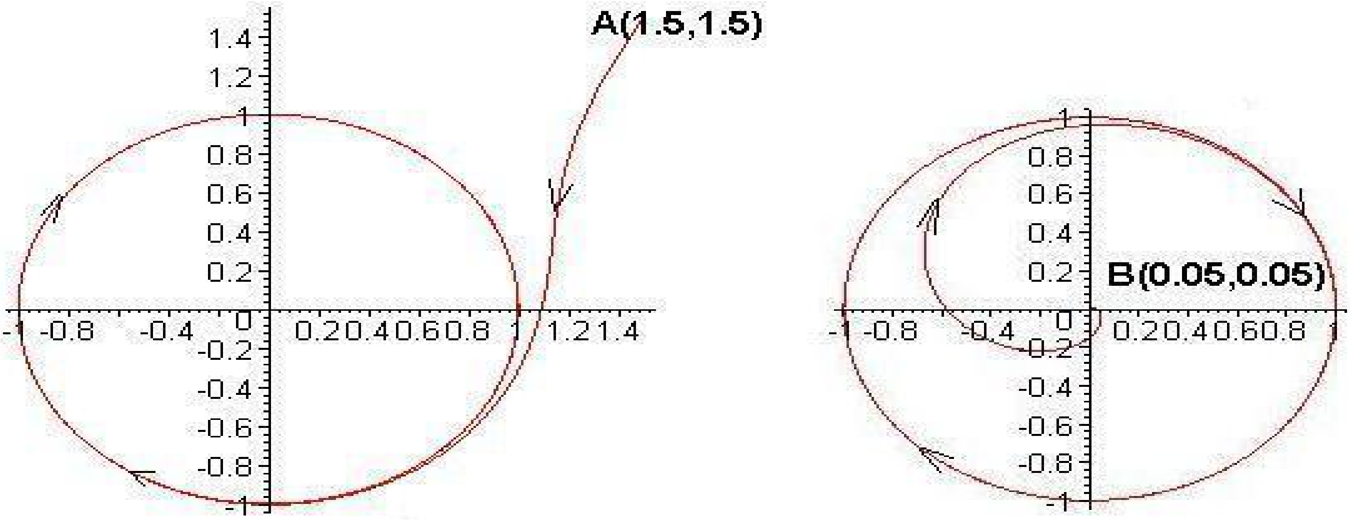

Figura 1. ω-límite de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y-y(x^2+y^2)}{y+x-x(x^2+y^2)}$. Al no tener puntos críticos es una órbita periódica.

Nota 2. Esta versión clásica [4, pp. 151-153] se puede mejorar pidiendo al flujo que sea sólo continuo ya que en la esfera hay equivalencia topológica de flujos continuos y suaves (C^∞) [3].

En general, el teorema no es válido para cualquier superficie compacta y conexa. Por ejemplo, en el Toro $\mathbb{T}^2$ Denjoy construyó en 1932 un flujo de clase C^1 sin puntos críticos ni órbitas periódicas, [2]. Sin embargo, para flujos de clase C^2 el Teorema de Poincaré-Bendixson sí ha sido generalizado con la única excepción del Toro:

Teorema 3 (Poincaré-Bendixson en superficies compactas y conexas)**.** *Sea M una superficie compacta y conexa, $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo de clase C^2 y $x \in M$. Si $\omega_\Phi(x) \cap \operatorname{Sing}(\Phi) = \emptyset$ entonces $\omega_\Phi(x)$ es o una curva periódica o toda la superficie M. En este último caso $M = \mathbb{T}^2$.*

Como se ve el Teorema de Poincaré-Bendixson se generaliza, pero hay que pedir que los flujos sean de clase C^2 y además hay que hacer una excepción con el caso del Toro. No obstante hay superficies en las que sí funciona dicho teorema para flujos continuos, es el caso del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y la botella de Klein $\mathbb{B}^2$:

Teorema 4 (Poincaré-Bendixson para $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{B}^2$)**.** *Sea $M = \mathbb{P}^2$ o $M = \mathbb{B}^2$, $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo continuo y $x \in M$. Si $\omega_\Phi(x) \cap \operatorname{Sing}(\Phi) = \emptyset$ entonces $\omega_\Phi(x)$ es una curva periódica.*

Demostración. Hay que considerar que en $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{B}^2$ todo flujo continuo es topológicamente equivalente a un flujo de clase C^∞, $\Psi : \mathbb{R} \times M \to M$, como se desprende de [3] y [8]. Ahora se aplica el Teorema de Poincaré-Bendixson para superficies y se concluye. $\square$

Si pasamos a dimensión 3 entonces el teorema deja ya de tener validez. En particular, en 1950 Seifert propuso el siguiente problema: denotemos por $\mathbb{T}^3$ al sólido cerrado tridimensional acotado por el toro $\mathbb{T}^2$ y sea $\Phi : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ un flujo de clase C^r, $r \geq 1$ sin puntos críticos. Entonces ¿Posee Φ una órbita cerrada?

En 1974 Schweitzer respondió negativamente a la cuestión anterior construyendo un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ de clase C^1 sin puntos críticos ni órbitas periódicas (ver [7] y [10, pp. 415-418]).

Descripciones globales del ω-límite. El teorema de Vinograd

Nuestro interés es el de dar una caracterización topológica sobre los ω-límites en la más amplia variedad de espacios de fases. El teorema de Poincaré-Bendixson sólo describe el ω-límite en un caso muy concreto pero deja abierto el problema de describir estos conjuntos cuando admiten puntos críticos. La primera respuesta a este problema la da Vinograd en el año 1952:

Teorema 5 (Vinograd, [9])**.** *Dado un flujo continuo sobre $\mathbb{S}^2$, $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, y dado $x \in \mathbb{S}^2$. Entonces $\omega_\Phi(x) = \mathrm{Bd}(O)$, siendo O un conjunto abierto simplemente conexo $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$.*

Recíprocamente, dado un abierto simplemente conexo $\emptyset \subsetneq O \subsetneq \mathbb{S}^2$ existe un flujo de clase C^∞ $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ y un punto $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $\omega_\Phi(x) = \mathrm{Bd}(O)$.

Hasta este año ninguna caracterización topológica nueva de ω-límites se ha dado en otros espacios de fases diferentes a $\mathbb{S}^2$. Es más, para el caso de $\mathbb{P}^2$ este problema fue propuesto por Anosov, [1].

Teorema 6 (Jiménez López y Soler López)**.** *Dado un flujo continuo sobre $M = \mathbb{P}^2$ o $\mathbb{S}^n$, $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ y dado $x \in M$ (además se necesita $x \notin \omega_\Phi(x)$ cuando $M = \mathbb{S}^n$). Entonces*

$\omega_\Phi(x) = \mathrm{Bd}(O)$, *siendo* O *un conjunto abierto conexo con complementario conexo* $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$.

Recíprocamente, dado un abierto conexo con complementario conexo $\emptyset \subsetneq O \subsetneq M$ $(M = \mathbb{P}^2$ *o* $\mathbb{S}^n)$ *existe un flujo suave* $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ *y un punto* $x \in M$ *tal que* $\omega_\Phi(x) = \mathrm{Bd}(O)$.

Nota 7. En la esfera los abiertos simplemente conexos son aquellos que son conexos con complementario conexo. Luego este último Teorema y el de Vinograd se pueden formular con los mismos términos, es decir, usando abiertos conexos con complementario conexo y no abiertos simplemente conexos.

Además, en la caracterización dada en $\mathbb{P}^2$ no se puede modificar "abierto conexo con complementario conexo" por "simplemente conexo" como pone de manifiesto la Figura 1. En efecto, el abierto O es conexo con complementario conexo y además no es simplemente conexo. Sin embargo $\mathrm{Bd}(O)$ es un ω-límite.

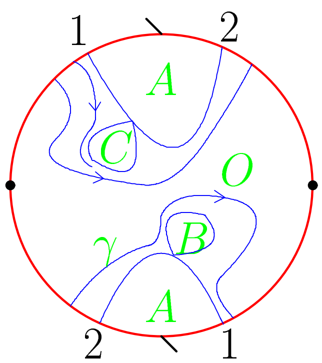

FIGURA 2. contraejemplo para la extensión directa del Teorema de Vinograd a $\mathbb{P}^2$.

REFERENCIAS

1. D. V. Anosov, *Flows on closed surfaces and behavior of trajectories lifted to the universal covering plane*, J. Dynam. Control Systems **1** (1995), 125–138.
2. Arnaud Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl. **11** (1932), 333–375.

3. Carlos Gutiérrez, *Smoothing continuous flows on two manifolds and recurrences*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), 17–44.
4. Philip Hartman, *Ordinary differential equations*, Birkhäuser, Boston, 1982.
5. G. Soler López, *Flows equivalences*, Applied general topology **1** (2001).
6. V. Jiménez López & G. Soler López, *Accumulation points of nonrecurrent orbits of surface flows*, Preprint Universidad de Murcia (2001).
7. P. A. Schweitzer, *Counterexamples to the seifert conjecture and opening closed leaves of foliations*, Ann. of Math. **100** (1974), 386–400.
8. Russel A. Smith and S. Thomas, *Transitive flows on two-dimensional manifolds*, J. London Math. Soc. **37** (1988), 569–576.
9. R. E. Vinograd, *On the limiting behavior of an unbounded integral curve*, Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. 155, Mat. **5** (1952), 94–136, En Ruso.
10. Z. Zhi-fen, D. Tong-ren, H. Wen-zao, and D. Zhen-xi, *Qualitative theory of differential equations*, Selected monographies, vol. **23**, Collaege press. University of Beijing, Beijing, 1998.

Gabriel Soler López.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.
Universidad Politécnica de Cartagena.
Paseo Alfonso XIII, 52. 30203-Cartagena.
E-mail: gabriel.soler@upct.es