

ISBN 82-553-1402-4
ISSN 0801-9940

No. 3
September 2003

Knekning av plater og skall i skipskonstruksjoner

Buckling of plates and shells in
ship structures

av/by

Lars Brubak

Veileder/Supervisor:
Jostein Helleland, Eivind Steen

RESEARCH REPORT IN MECHANICS



UNIVERSITY OF OSLO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
MECHANICS DIVISION

UNIVERSITETET I OSLO
MATEMATISK INSTITUTT
AVDELING FOR MEKANIKK

**Knekning av plater og skall i
skipskonstruksjoner**

**Buckling of plates and shells in
ship structures**

av/by

Lars Brubak

**Veileder/Supervisor:
Jostein Hellesland, Eivind Steen**

Forord

Denne oppgaven er utført ved Universitetet i Oslo, avdeling for mekanikk ved Matematisk institutt. Jeg vil takke min veileder professor Jostein Hellesland ved Universitetet i Oslo, og Dr. Eivind Steen og Dr. Eirik Byklum ved Det Norske Veritas for god veiledning og oppfølging. I tillegg vil jeg takke Kjetil Vilming for gjennomlesning, råd og faglige diskusjoner.

Universitetet i Oslo, *1. april 2004*

Lars Brubak

Sammendrag

Knekning av plater og skall er et viktig tema i skipsindustrien og det er mye satsing på dette området. I denne oppgaven behandles knekningsoppførselen til to forskjellige deler av geometrien til et skipsskrog, og matematiske modeller for å beskrive responsen under knekning blir utviklet. Den ene modellen er en plate med stivere som ikke er parallelle med platens lengderetning. Slike tilfeller finnes typisk i forskip og akterskip der geometrien er komplisert. Den andre modellen er et sylindrisk skall, slik vi finner i overgangen fra skipssiden til bunnen i skipet.

Hovedoppgaven er å utvikle modeller som kan beskrive de nevnte tilfellene. Dette gjøres ved hjelp av lineær knekningsteori og energibetraktninger. En knekningsoppførsel er svært kompleks, hvilket betyr at numeriske metoder må benyttes for å sette opp modeller. Implementering og programmering av de matematiske modellene er viktig for å komme fram til resultater i en knekningsanalyse. I denne oppgaven blir modellene programmert i Fortran. Resultatene fra beregningene er egenverdier og egenvektorer. Det vil si at knekkklaster med tilhørende knekkformer beregnes. Modellen med den avstivede platen blir også videreutviklet, slik at kapasiteten til platen kan estimeres. Kapasiteten defineres som den lasten som gir første flyt i platens nøytralflate. I Fortran-programmet er det også mulig å fremstille platens spenningstilstand når kapasiteten er nådd.

En sentral del av oppgaven er å verifisere om modellene vi utviklet gir fornuftige resultater. Verktøyet som benyttes til dette formålet er elementprogrammet Abaqus. Det viste seg at resultatene samsvarte godt med elementmetoden i de fleste tilfellene. I enkelte eksempler var avvikene noe større. I hovedsak skyldtes dette at modellene vi sammenliknet, ikke beskrev nøyaktig det samme problemet. Både geometrien og randkravene til elementmodellen kunne i disse tilfellene være litt forskjellige fra de som benyttes i de matematiske modellene vi utviklet. Elementmodellen var noe stivere, og knekklasten beregnet i Fortran-programmet var derfor konservativ i forhold til elementanalysene.

Innhold

Forord	i
Sammendrag	ii
Notasjon	vii
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn og motivasjon	1
1.2 Presisering av problemet	3
1.3 Oversikt over oppgave	4
2 Generell teori	6
2.1 Innledning	6
2.2 Materiallov	6
2.3 Plastisitet	8
2.3.1 Innledning	8
2.3.2 En-dimensjonal strekk av stav	8
2.3.3 von Mises flytekriteriet	11
2.4 Geometriske ikke-lineariteter	12
2.5 Prinsippet om stasjonær potensiell energi	14
2.6 Klassisk teori for tynne plater	15
2.7 Differensiallikningen for tynne sylindre	21
2.8 Knekningsteori	22
2.8.1 Innledning	22
2.8.2 Lineær elastisk knekning	22
2.8.3 Grenselastknekning av plater og skall	24
2.8.4 Knekkformer	25

3	Analysemetoder	29
3.1	Innledning	29
3.2	Linearisert egenverdiberegning	29
3.3	Rayleigh-Ritz metoden	31
3.4	Elementmetoden	32
3.4.1	Innledning	32
3.4.2	Elementmetodens bakgrunnsprinsipper	32
3.4.3	Egenverdianalyse i elementmetoden	33
3.4.4	Elementprogrammet Abaqus	35
4	Modeller for egenverdiberegninger v.h.a. Rayleigh-Ritz metoden	36
4.1	Innledning	36
4.2	Egenverdiberegning av avstivet plate	36
4.2.1	Modell og antagelser	36
4.2.2	Tøyningsenergien til platen	39
4.2.3	Tøyningsenergi p.g.a. fjærer	41
4.2.4	Potensiell energi p.g.a ytre laster	41
4.2.5	Rotasjonsfjærer om linje S og langs rendene	42
4.3	Egenverdiberegning av sylindrisk skall	44
4.3.1	Modell og antagelser	44
4.3.2	Tøyningsenergi	46
4.3.3	Potensiell energi p.g.a ytre spenninger langs randen	46
4.3.4	Potensiell energi p.g.a ytre hydrostatisk trykk	47
4.3.5	Rotasjonsfjærer langs rendene	47
5	Verifikasjon av platemodellen	48
5.1	Innledning	48
5.2	Sammenlikning med analytisk løsning	48
5.3	Sammenlikning med elementanalyser	50
5.3.1	Innledning	50
5.3.2	Elementmodell	50
5.3.3	Fritt opplagt plate uten avstivning	51
5.3.4	Fritt opplagt plate med avstivning	54
5.3.5	Fast innspent plate	56
6	Verifikasjon av skallmodellen	58

6.1	Innledning	58
6.2	Sammenlikning med analytisk løsning	58
6.3	Sammenlikning med elementanalyser	60
6.3.1	Innledning	60
6.3.2	Elementmodell	60
6.3.3	Sylinder belastet med aksialspenning og ytre trykk	62
6.3.4	Sylinder belastet med skjærspenning	68
7	Anvendelse av platemodell	71
7.1	Innledning	71
7.2	Modifisert modell	71
7.2.1	Motivasjon for å modifisere modellen	71
7.2.2	Modifisering av modell	72
7.3	Sammenlikning med elementmetoden	73
7.3.1	Innledning	73
7.3.2	Sammenlikning med elementmodell 1	74
7.3.3	Sammenlikning med elementmodell 2	74
8	Anvendelse av skallmodell	80
8.1	Innledning	80
8.2	Elementmodellen	80
8.3	Sammenlikning med elementmodellen	82
9	Estimering av kapasitet	87
9.1	Innledning	87
9.2	Modell som estimerer platens kapasitet	87
9.3	Utprøving av modellen	89
10	Sammendrag og konklusjon	95
10.1	Innledning	95
10.2	Platemodell	96
10.3	Skallmodell	96
10.4	Estimering av kapasitet til en plate	97
10.5	Forslag til videre arbeid	97
	Litteraturhenvisninger	99

Tillegg	101
A Knekning av avstivet plate	101
A.1 Airys spenningsfunksjon for flat plate	101
A.2 Bøyningsenergi	102
A.3 Membrantøyningsenergi	102
A.4 Ytre arbeid	103
A.4.1 Arbeid fra normalspenningene	103
A.4.2 Arbeid fra skjærspenningene	104
A.5 Rotasjonsfjærer som stivere på skrå	105
A.6 Rotasjonsfjærer ved rendene	105
A.6.1 Randen $x = 0$	105
A.6.2 Randen $x = L$	105
A.6.3 Randen $y = 0$	106
A.6.4 Randen $y = b$	106
B Knekning av skall	107
B.1 Airys spenningsfunksjon for skall	107
B.2 Bøyningsenergi	108
B.3 Membrantøyningsenergi	108
B.4 Potensiell energi p.g.a ytre laster langs randen	109
B.4.1 Potensiell energi p.g.a. aksialspenningen	109
B.4.2 Potensiell energi p.g.a. spenningen i ringretning	109
B.4.3 Potensiell energi p.g.a. skjærspenningen	110
B.4.4 Potensiell energi p.g.a. ytre trykk	110
B.5 Rotasjonsfjærer ved rendene	111
B.5.1 Randen $x = 0$	111
B.5.2 Randen $x = L$	111
B.5.3 Randen $\theta = 0$	111
B.5.4 Randen $\theta = \frac{\pi}{2}$	112
C Deler av fortran kode for platemodellen	113
C.1 Hovedfil	113
C.2 Bidrag fra platen	117
C.3 Bidrag fra stiverne	119
C.4 Spenningsberegning	120

Notasjon

Generelle regler

- Tykke bokstaver benyttes til å uttrykke matriser og vektorer, som for eksempel \mathbf{K} .
- I uttrykket \mathbf{K}_{ij}^M er ij den nedre indeksen og M er den øvre indeksen.
- Kroneckers delta definert som følgende

$$\delta_{ij,kl} = \begin{cases} 1 & , \text{ hvis } i = k \text{ og } j = l \\ 0 & , \text{ ellers} \end{cases}$$

Nedre indeks

Indeks	Forklaring
x, y, z	Akseretninger i et kartesisk koordinatsystem
x, θ, r	Akseretninger i et sylindrisk koordinatsystem
$, xy$	Derivasjon m.h.p. x og y
f	flens
w	steg
S	linje S

Øvre indeks

Indeks	Forklaring
m	membran
b	bøyning
$krit$	kritisk verdi
rot	rotasjon
M	material

G	geometrisk
ref	referanse

Forklaring på symboler

Symbol	Forklaring
E	Elastisitetsmodul
G	Skjærmodul
ν	Poissons tverrkontraksjonsforhold
I	Arealtreghetsmoment
E_T	Tangentmodul
C_{ijkl}	Materialstivhetstensor
D	Bøyestivhet
k	Fjærstivhet
σ_F	Flytespenning
L	Lengde på plate
b	Bredde på plate
a	Radius til skall eller sylinder
t	Tykkelse på plate eller skall
Z	Batdorf parameteren
u, v, w	Forskyvningskomponenter i et kartesisk koordinatsystem
u, v_θ, w_r	Forskyvningskomponenter i et sylindrisk koordinatsystem
a_{ij}	Amplituder til deformasjonene
σ	Spenninger
ϵ	Tøyninger
κ	Krumninger
β	Rotasjon
R	Krumningsradius
$\bar{\sigma}$	Nominell spenning
$\bar{\epsilon}$	Nominell tøyning
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hovedspenninger
N_x, N_y, N_{xy}	Generaliserte spenninger
Q_x, Q_y	Generaliserte skjærspenninger
M_x, M_y, M_{xy}	Moment
S_x, S_y, S_{xy}	Ytre spenninger i et kartesisk koordinatsystem
$S_x^1, S_x^2, S_y^1, S_y^2$	Definerer en lineært varierende spenning som i figur 4.2
$S_x, S_\theta, S_{x\theta}$	Ytre spenninger i et sylindrisk koordinatsystem
p	Ytre hydrostatisk trykk
Λ	Lastparameter
Λ^i	Egenverdi nummer i

$F(\boldsymbol{\sigma})$	Flytefunksjon
\mathbf{K}	Stivhetsmatrise
Π	Potensiell energi
U	Tøyningsenergi
T	Ytre krefters potensielle energi
W	Indre arbeid
H	Ytre arbeid
\mathbf{N}	Formfunksjoner
\mathbf{d}_i	Lokale frihetsgrader for elementnummer i
\mathbf{D}	Globale frihetsgrader
\mathbf{a}_i	Tilordningsmatrise for elementnummer i
\mathbf{f}	Volumkrefter
\mathbf{t}	Overflatespenninger
\mathbf{k}	Lokal stivhetsmatrise

Kapittel 1

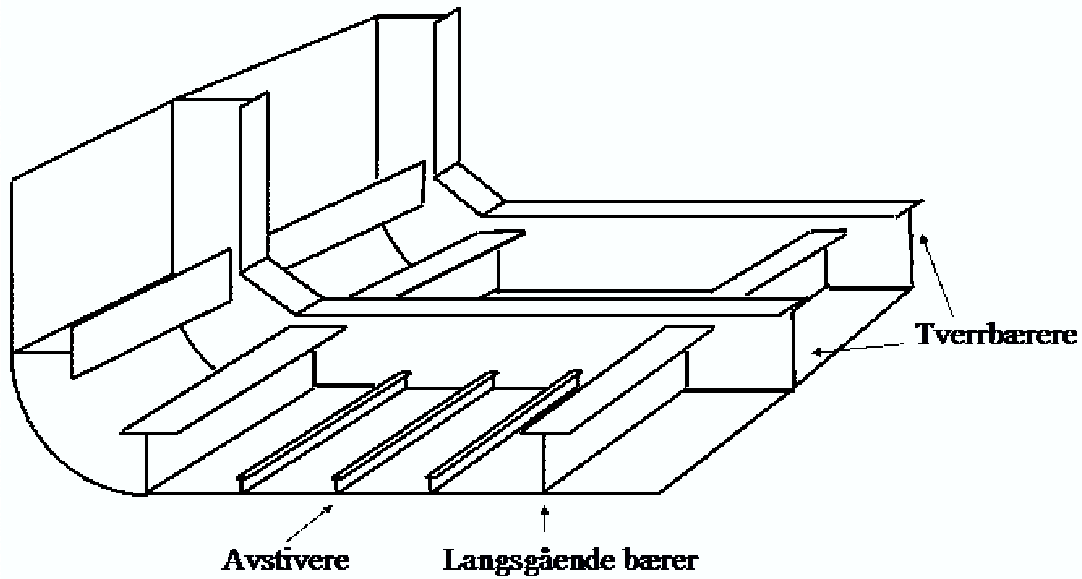
Innledning

1.1 Bakgrunn og motivasjon

I vår moderne verden benyttes plater og skall av blant annet stål og aluminium i mange sammenhenger, som for eksempel i skip, fly og broer. Knekning av plater er svært ofte det utslagsgivende kriteriet for hvilke dimensjoner en konstruksjon må ha for å bære de ytre belastningene. Et skipsskrog som illustrert i figur 1.1 er bygd opp av tynne plater og krumme skall. For å øke styrken og stabiliteten i skroget er det avstivet med langsgående bærere og tverrbærere, samt at platene er avstivet med stivere. I forskip og akterskip har plater og bærere, skott og dekk irregulær geometri og belastning. I dette området er ikke alltid stiverne parallelle med de langsgående bærerne. I overgangen mellom skipsside og bunn består de avstivende elementene av krumme skall.

Sammenbrudd av slike konstruksjoner er et stort felt, som byr på mange utfordringer. Det er derfor viktig å utvikle effektive metoder som gjør det mulig å utføre analyser for estimering av styrken og stabiliteten. I dagens metoder benyttes blant annet empiriske formler gitt i regelverk for å estimere styrken til plater og skall. Ved utprøving og anvendelse av formlene, vil mange fagfolk mene at disse har mange svakheter. Blant annet gir ikke dette regelverket alltid tilfredstillende resultater ved enkelte lastkombinasjoner. Dette gjelder spesielt tilfeller der vi har en skjærbelastning eller en ytre belastning som varierer langs randen. Regelverket er også lite dekkende med hensyn på valgfri orientering av stivere. Alternativet blir derfor å benytte analyser ved hjelp av kommersielle elementprogrammer som for eksempel Abaqus og Ansys. Slike avanserte analyser tar lang tid og krever mye erfaring og kunnskap fra brukerne. Derfor er det av stor interesse å utvikle beregningsmetoder som er meget raske å bruke, med et enkelt og brukervennlig grensesnitt.

De fleste av dagens beregningsmetoder for knekningsproblemer bygger på teori som ble lagt til grunn for mange år siden. Det finnes en mengde av litteratur,



Figur 1.1: Deler av et skipsskrog

tidsskrifter og avhandlinger som omhandler knekning av bjelker og plater. Noe av det første arbeidet innen elastiske stabilitetsproblemer ble utført av Leonard Euler [13] for ca 250 år siden, der knekning av søyler ble behandlet. Dengang ble de fleste konstruksjoner bygd av treverk og stein. Styrken til disse materialene var relativt liten, slik at stabilitetsproblemer ikke spilte en viktig rolle på dette stadiet. Men Eulers teoretiske løsning var begynnelsen på dagens praksis for knekning av plater og skall. Et annet bidrag som er sentralt i knekningsteori er Kirchhoffs teori for tynne plater, som blir behandlet av de fleste litteraturbøker innen knekning. Ved hjelp av differensiallikningen fra denne teorien kan analytiske egenverdiproblemer stilles opp for enkle problemstillinger som en uavstivet plate.

I den senere tid er beregningsverktøyet elementmetoden [10] utviklet. Hovedgrunnlaget for denne metoden ble lagt for ca. 50 år siden. Nå er dette den mest anvendte metoden, siden datamaskinene i vår moderne verden kan gjennomføre store analyser i kompliserte knekningsproblemer. Det finnes utallige eksempler der slike analyser er benyttet. Et eksempel er hovedfagsoppgaven til Andreas Sandvik [25], som omhandler virkningen av restspenninger og geometriske imperfeksjoner på platers pre- og postknekningsoppførsel. I avhandlingen anvendes dataprogrammet Ansys. Dette programmet ble også benyttet i hovedfagsoppgavene til Abdou Bobb [7] og Terje Pedersen [22], der forskjellige effekter ved knekning av avstivede plater studeres.

Bakdelen med elementanalyser på en datamaskin er at det kreves erfarne brukere. I tillegg er modellering tidkrevende, og regnetiden kan være betydelig. Det er derfor vanlig å benytte eksplisitte formler for å utføre dimensjoneringsanalyser

i mange maritime miljøer. Disse formlene er enkle å bruke, men nøyaktigheten er ikke alltid tilfredstillende, avhengig av geometrien til konstruksjonen og lastkombinasjonen. For å utbedre dagens metoder for dimensjoneringsanalyser, utviklet Det Norske Veritas en ny effektiv beregningsmetode. Denne metoden ble implementert i et knekningprogram som heter PULS. På engelsk er dette en forkortelse for "Panel Ultimate Limit State". Grensesnittet er brukervennlig og beregningstiden er liten. I dag benyttes dette programmet av mange klassifiseringsselskaper, blant annet av Det Norske Veritas, Loyds og ABS. I PULS er det mulig å utføre analyser for to forskjellige geometrier, den ene en uavstivet plate og den andre en plate med eksentriske stivere i lengderetningen. Programmet estimerer blant annet kapasiteten til plater. Beregningsmetodene benytter seg av energiprinsipper og teori for store deformasjoner til å utvikle ikke-lineære knekningmodeller. Mer detaljert informasjon kan finnes i doktorgradavhandlingen til Byklum [9] og i brukermanualen til programmet [23].

En del av teorien som ligger til grunn for beregningene i PULS, blir også benyttet i denne oppgaven. Hovedforskjellen er at vi begrenser oss til små deformasjoner og benytter en linearisert 2.ordens teori. Målet med oppgaven er å utvikle nye beregningsmetoder som estimerer den elastiske knekklasten til to forskjellige bærende elementer i et skipsskrog. Det ene elementet er en plate med vilkårlig orientering av stivere, og det andre et sylindrisk skall uten avstivning. Disse geometriene finnes ikke i PULS i dag. En sentral del av oppgaven blir å implementere modellene i Fortran og undersøke om de gir fornuftige resultater. Verifikasjon gjøres blant annet ved hjelp av elementberegninger med det anerkjente elementprogrammet Abaqus.

1.2 Presisering av problemet

Som nevnt i forrige avsnitt skal vi utvikle to nye modeller for egenverdiberegninger i denne oppgaven. Den ene modellen analyserer en plate med vilkårlig orientering av stiverne og den andre et sylindrisk skall.

For at resultatene skal være fornuftige må vi sette enkelte krav til konstruksjonen som skal analyseres. I beregningene benyttes lineær elastisk knekningsteori som bygger på Love-Kirchhoff skallteori. Dette medfører at vi begrenser oss til tynne plater og skall. I mange lærebøker [4] er det vanlig å anbefale at tykkelsen maksimalt er en tiendedel av de andre dimensjonene. Dette kriteriet vil som oftest være oppfylt i skipskonstruksjoner. En annen forutsetning er at materialet er lineært elastisk. Konstruksjonen kan for eksempel bestå av stål eller aluminium.

I beregningsmetodene kan ulike belastninger på konstruksjonen kombineres på forskjellige måter. Platen kan belastes med normalspenning aksielt og normalt på aksialretningen, samt skjærspenning. Normalspenningene kan variere lineært langs rendene. For det sylindriske skallet er det mulig å ha interaksjon mellom

aksialspenning, skjærspenning og et ytre hydrostatisk trykk. Det ytre trykket kan enten være konstant eller variere proporsjonalt med de andre lastene. Begge modellene kan også ta opp strekkspenninger.

I virkeligheten støter vi ofte på forskjellige problemstillinger der ulike randkrav må benyttes. Det er derfor hensiktsmessig at randkravene kan varieres i metodene, slik at en rand enten er fritt opplagt eller fast innspent. Et skall eller en avstivet plate er som oftest en del av en større konstruksjon som for eksempel i et skipsskrog. Rendene til modellene bæres av kraftige langsgående bærere og tverrbærere som vist i figur 1.1. Det er derfor ofte ønskelig at modellen er fritt opplagt og at rendene forblir rette også etter knekning. Dette randkravet er svært vanlig i analyser av plater i skipsskrog, og det er det samme kravet som ble benyttet i doktorgradsavhandling til Byklum [9].

For den avstivede platen modelleres avstivningen på to forskjellige måter. Avstivningene består enten av bjelker eller jevnt fordelte fjærer som stiver opp platen. I avstivningen med fjærer velges fjærstivheten svært stor slik at forskyvningen langs avstivningen blir neglisjerbar. I den andre modellen kan arealtregningsmomentet til bjelkene velges fritt. Det medfører at bjelkene ikke nødvendigvis er sterke nok til å motvirke forskyvninger ut av planet langs stiveren.

I oppgaven blir det også utviklet en metode som estimerer kapasiteten til den avstivede platen. I denne beregningen benyttes den første knekkformen fra egenverdianalysen som imperfeksjon. Ved pålastning skalerer vi opp knekkformen, slik at forskyvningene øker. De indre spenningene i platens nøytralflate beregnes for hvert inkrement i pålastningen. Når første flyt i platen er oppnådd avbrytes inkrementeringen, og den maksimale lasten defineres som platens kapasitet.

1.3 Oversikt over oppgave

I kapittel 2 beskrives teorien som danner grunnlaget for denne oppgaven. Relevante emner som materialeegenskaper og geometriske ikke-lineariteter er blant temaene som blir behandlet. Kapitlet inneholder også prinsippet om stasjonær potensiell energi som er et sentralt tema i beregningsmetodene. Differensiallikningen som beskriver forskyvningene i en plate blir utledet og tilsvarende uttrykk settes opp for en sylinder. Teoridelen avsluttes så med generell knekningsteori for plater og skall. I kapittel 3 blir analysemetoder for knekningsanalyser gjennomgått. Først ser vi på en linearisert egenverdiberegning, og deretter beregningsmetodene elementmetoden og Rayleigh-Ritz metoden. I kapittel 4 utvikles knekningsmodeller ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden både for en plate med vilkårlig plasserte stivere og for et skall. Deretter følger kapitlene 5-8 der metodene for egenverdianalyser blir sammenliknet med elementanalyser i Abaqus. Til slutt i kapittel 9 estimerer vi kapasiteten til en plate med vilkårlig orienterte stivere. Spenningsfordelingen i det øyeblikket platens kapasitet er nådd blir også fremstilt

her.

For å utføre beregningene som kort ble beskrevet må store kompliserte uttrykk etableres. For at vi ikke skal miste kontrollen samles disse uttrykkene i tillegg A og B. Tillegg C inneholder kildekoden til noe av det implementerte Fortran-programmet.

Kapittel 2

Generell teori

2.1 Innledning

Dette kapittelet gir en oversikt over teori som blir brukt til å utvikle knekningsmodeller av plater og skall. Mesteparten av teorien er hentet fra tekstbøker innen knekningsteori [8, 9, 6, 24, 26]. Først gjennomgås materialegenskapene og von Mises flytekriterium for å få en forståelse for spenningsforholdene som oppstår i konstruksjoner. Deretter forklares geometriske ikke-lineariteter, som spiller en stor rolle i knekningsproblemer fordi denne effekten tar hensyn til membrankref-tenes bidrag til utbøyning. Videre blir prinsippet om stasjonær potensiell energi gjennomgått, samt differensiallikningene for plater og sylindre. Til slutt blir det en generell beskrivelse av knekning og stabilitet.

2.2 Materiallov

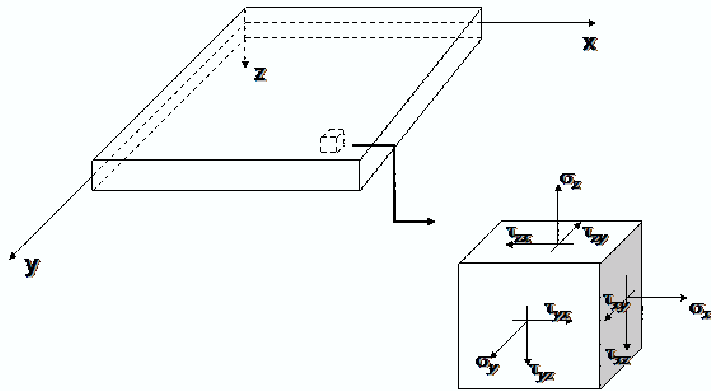
I et lineært elastisk legeme i det tre-dimensjonale tilfellet er spenningskomponentene i et kartesisk koordinatsystem definert som i figur 2.1. Spenningskomponentene antas å være lineære funksjoner av tøyningene, slik at

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = x, y, z \quad (2.1)$$

der C_{ijkl} er den generelle elastiske stivhetstensoren med konstante koeffisienter. Ved enkle likevektsbetraktninger kan vi vise at σ_{ij} er symmetrisk. En slik tensor-notasjon for spenningene kan være vanskelig å forstå rent fysisk. I faststoffmekanikk er det vanlig å utnytte symmetriegenskapene til σ_{ij} og ϵ_{ij} , slik at spenningene og tøyningene kan uttrykkes på vektorformen

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}]^T \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T \quad (2.3)$$



Figur 2.1: Platens koordinatsystem og spenningskomponenter

der de tre første komponentene i vektorene uttrykker normalspenninger og normaltøyninger, mens de tre siste er skjærkomponenter. En slik vektornotasjon er enklere å forstå enn tensornotasjonen, rent fysisk.

For tynne plater er tykkelsen mye mindre enn de øvrige dimensjonene som medfører at vi kan neglisjere normalspenningene i z -retning (dvs. $\sigma_z = 0$). Som vist i mange lærebøker [8] blir Hookes lov for et isotropisk materiale i dette tilfelle

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (2.4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.6)$$

der E er Youngs elastisitetsmodul, G er skjærmodulen og ν er Poissons tverrkontraksjonsforhold. Den inverse relasjonen av Hookes lov for disse komponentene er

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (2.7)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (2.9)$$

For en tynne sylindre er spenningskomponentene uttrykt i sylinderkoordinater, som vist i figur 2.10. Analogt med en plate kan normalspenningen i radiell retning

neglisjeres for en tynn sylinder, og Hookes lov blir dermed

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta) \quad (2.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) \quad (2.11)$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{x\theta} = G\gamma_{x\theta} \quad (2.12)$$

2.3 Plastisitet

2.3.1 Innledning

Som nevnt innledningsvis, kan en konstruksjon kollapse som følge av ustabilitet. En annen viktig faktor som kan medføre kollaps er flytning av materiale. Da er ikke materialoppførselen elastisk, som er temaet i dette avsnittet. Bakgrunns materialet er hentet fra [11, 17].

2.3.2 En-dimensjonal strekk av stav

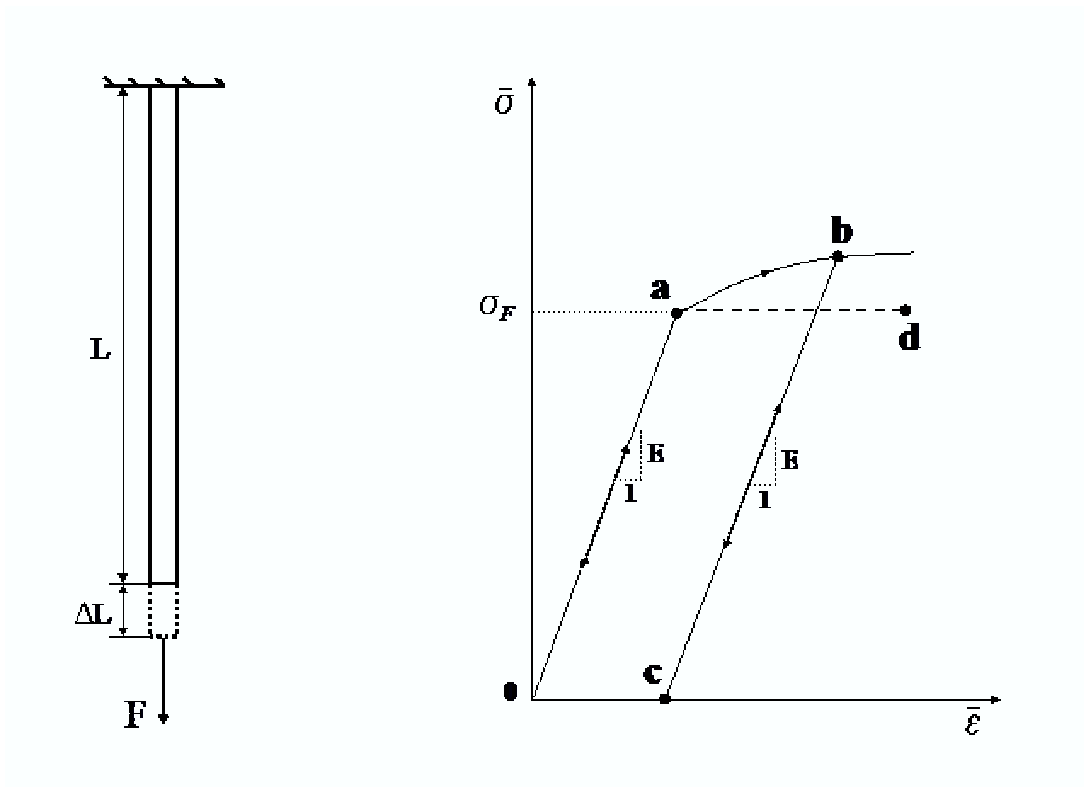
Modeller som beskriver ikke-lineær materialoppførsel er basert på og vurdert opp mot eksperimenter. I slike eksperimenter benyttes blant annet en prøvestav belastet med en kraft F i prøvens lengderetning som illustrert i figur 2.2. Materialet i staven har flytespenning σ_F . Under forsøket endres stavens lengde L med en størrelse ΔL og den relative forlengelsen eller den nominelle tøyningen er definert som

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.13)$$

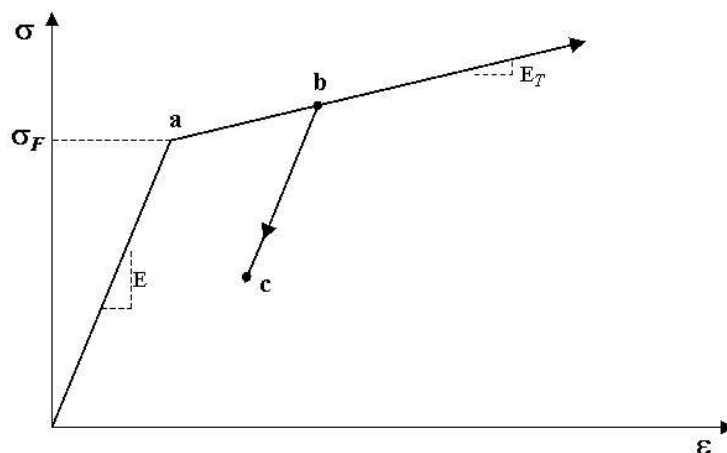
Den nominelle spenningen i staven er

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A} \quad (2.14)$$

der A er stavens tverrsnitt. Dette arealet antas å være konstant. I slike forsøk er vanligvis hastigheten til forlengelsen liten, slik at akselerasjoner neglisjeres, og vi oppnår en kvasistatisk tilstand. Resultatet av en typisk måling kan derfor fremstilles i en likevektskurve eller responskurve, som vist i figur 2.2. Ved å studere kurven kan vi se at vi har en lineær respons opp til punkt **a**, hvilket tyder på at tilstanden er lineær elastisk. En avlastning av staven vil følge samme kurve som pålastningen. Stigningstallet til kurven før vi har nådd punktet **a** er E som er Youngs elastisitetsmodul. I en videre pålastning vil materialet begynne å flyte, siden den ytre belastningen har nådd flytespenningen. Den påfølgende responsen vil være av ikke-lineær karakter. Hvis responsen nå følger den stiplede linjen



Figur 2.2: Strekkstav med tilhørende likevektskurve



Figur 2.3: Bilineær spenning-tøyningsrelasjon

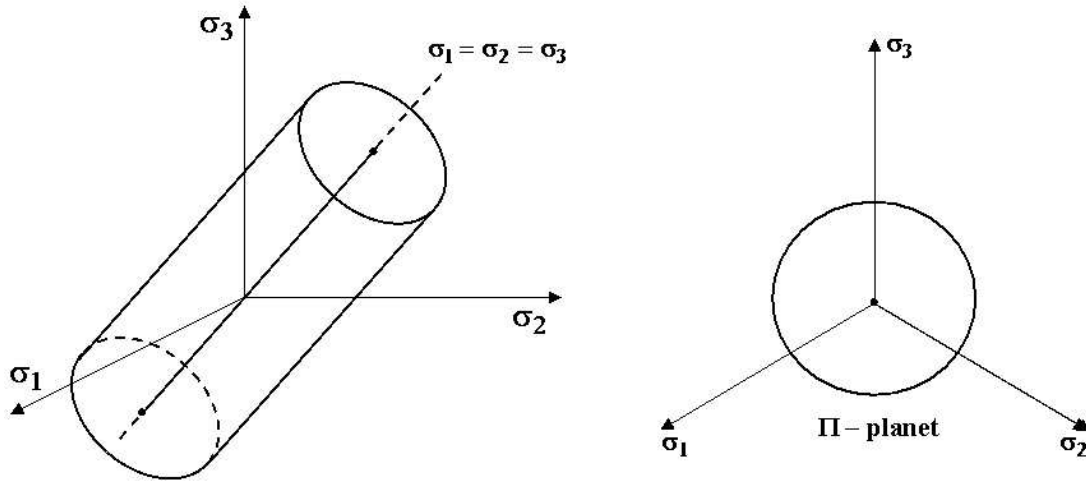
mellom punkt **a** og **d** er materialet elastisk-idealplastisk. Den andre muligheten er at den ytre belastningen overstiger flytespenningen og responsen følger kurven mellom punkt **a** og **b**. Avlastningen vil nå følge kurve **bc** og prøvestaven får permanent forlengelse på grunn av en plastisk deformasjon. Når flytning inntreer så er det liknende relasjoner mellom spenninger og deformasjonshastigheter som i en viskøs væske. Med en permanent forlengelse vil pålastning og avlastning følge kurve **bc** med stigningstall E . Det er vanlig å definere flytspenningen σ_F som den spenningen som gir varig forlengelse lik 2%.

Denne materialoppførselen er meget kompleks og for å kunne utføre beregninger trenger vi en forenklet beskrivelse av responsen. Materialet i prøven oppfører seg perfekt elastisk for spenninger mindre enn flytespenningen siden av og pålastning følger samme kurve. Det eksisterer derfor en entydig relasjon mellom spenningene og tøyningene på formen

$$\sigma = E\epsilon \quad , \text{ der } \sigma < \sigma_F \quad (2.15)$$

Dette er Hookes lov i en dimensjon. Når spenningen overskrider flytegrensen kan vi også benytte en lineær tilnærming der kurven har stigningstallet E_T . Størrelsen E_T blir ofte referert til som en tangentmodul. Denne forenklingen danner en bilineær material lov og denne loven er illustrert grafisk i figur 2.3. I det tilfellet der E_T antas å være lik null er materialoppførselen perfekt plastisk når flytegrensen overskrides.

Senere i oppgaven skal vi estimere kapasiteten til en plate. Pålastningen avbrytes når materialet begynner å flyte i et punkt i platens midtflate, og kapasiteten defineres som den maksimale belastningen. På den måten unngår vi ikke-lineær materialoppførsel.



Figur 2.4: Illustrasjon av von Mises flytekriterium

2.3.3 von Mises flytekriteriet

For å kunne angi når plastiske deformasjoner oppstår, trenger vi et flytekriterie. Det mest brukte flytekriteriet er von Mises kriterium, som beskriver når flyt oppstår ved hjelp av en flytefunksjon $F(\sigma_{ij})$. For det generelle tre-dimensjonale tilfellet er von Mises flytekriterium definert som

$$\begin{aligned}
 F(\sigma_{ij}) &= \sigma_e - \sigma_F \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} - \sigma_F \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

der σ_e er ekvivalent spenning og σ_F er flytespenningen. Vanligvis er dette flytekriteriet uttrykt ved hovedspenningene σ_1 , σ_2 og σ_3 slik at

$$\begin{aligned}
 F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \sigma_e - \sigma_F \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} - \sigma_F \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Likning 2.17 viser at $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ danner en sylinder i hovedspenningsrommet, med radius lik $\sqrt{2}\sigma_F$ og sylinderakse langs $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Overflaten til denne sylinderen kalles for flyteflaten, som illustreres i 2.4. Denne flaten skiller mellom elastisk og plastisk spenningstilstand. Materialet oppfører seg perfekt elastisk hvis spenningsforholdene er slik at de befinner seg inne i sylinderen:

$$\text{Elastisk tilstand : } F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0 \tag{2.18}$$

Ved en slik elastisk tilstand er det vanlig å anta at Hookes lov er gyldig. For eksempelet med strekkstaven tilsvarer dette at den påsatte spenningen er mindre enn flytespenningen σ_F , og spenning-tøyningskurven er lineær.

På flyteflaten er spenningsforholdene i en overgangsfase der materialet går fra en elastisk til en plastisk tilstand. Spenningstilstanden befinner seg da på overflaten til cylinderen:

$$\text{Materiale begynner å flyte : } F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.19)$$

I det en-dimensjonale eksempelet fra avsnitt 2.3.2 er dette ekvivalent med at den påsatte spenningen er lik flyspenningen.

For et elastisk-idealplastisk materiale befinner spenningstilstanden seg på flyteflaten under de plastiske deformasjonene siden den ekvivalente spenningen σ_e ikke overstiger flytespenningen. Dette tilsvarer at $E_T = 0$ for det en-dimensjonale eksempelet med en strekkstav.

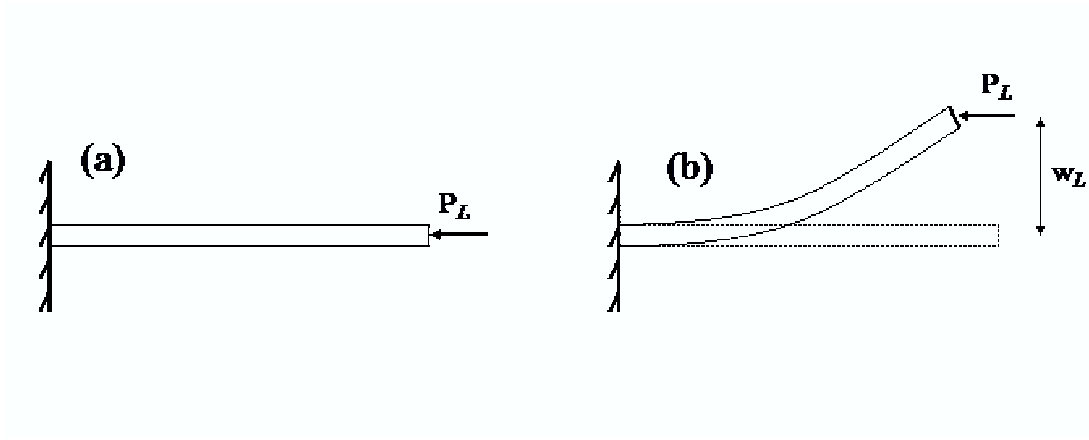
Det planet som snitter cylinderen normalt på cylinderaksen, kalles for Π -planet, som vist i figur 2.4. Dette er en vanlig fremstilling av von Mises kriterium. Senteret til Π -planet, der alle hovedspenningene er like, representerer hydrostatisk spenningstilstand. Den vil si at en økning i hydrostatisk trykk ikke medfører at spenningstilstanden havner utenfor Π -planet, og forårsaker derfor ikke materialflyt. En økning i hydrostatisk trykk forflytter bare spenningstilstanden i hovedspenningsrommet, parallelt med cylinderaksen.

I denne oppgaven benyttes von Mises flytekriterium til å fastsette om spenningsforholdene i nøytralflaten til en plate forårsaker materialflyt. Det er kun tynne plater som betraktes, hvilket medfører at normalspenningen i z-retning kan neglisjeres slik at $\sigma_z = 0$. Fra tidligere arbeid [9] vet vi at skjærspenningene τ_{xz} og τ_{yz} er små, i forhold til de andre spenningene. Vi neglisjerer derfor også disse skjærspenningene i von Mises flytekriterium. Det er membranspenningene σ_x^m , σ_y^m og τ_{xy}^m som i hovedsak forårsaker materialflyt i platens midtflate, og på denne flaten reduseres von Mises flytekriterium til

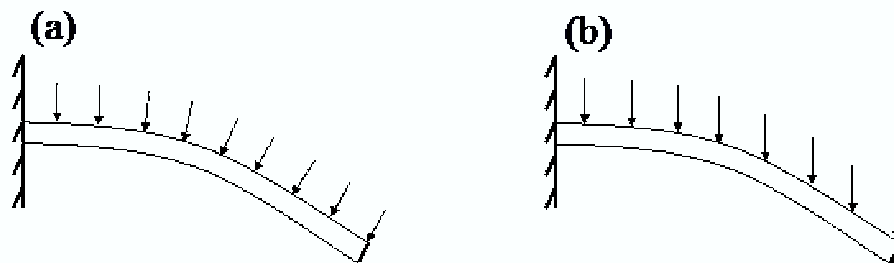
$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{(\sigma_x^m)^2 + (\sigma_y^m)^2 - \sigma_x^m \sigma_y^m + 3(\tau_{xy}^m)^2} - \sigma_F = 0 \quad (2.20)$$

2.4 Geometriske ikke-lineariteter

Når geometriske ikke-lineære effekter tas med i en likevektsbetraktning blir problemet betydelig mer komplisert. I 1.ordens teori stilles likevektsbetingelsene opp for den udeformerte konstruksjonen. Når geometriske ikke-lineariteter tas hensyn til må likevektslikningene stilles opp for den deformerte konstruksjonen. Denne effekten har betydning i knekningsteori for å få med membranspenningenes bidrag til utbøyning og i teori for store deformasjoner. Både angrepspunktet og retningen til en påsatt last kan endres når vi tar hensyn geometriske ikke-lineære



Figur 2.5: Fast innspent bjelke: (a) Udeformert tilstand og (b) deformert tilstand.



Figur 2.6: Fast innspent bjelke: (a) Hydrostatisk trykk som er en ikke-konservativ belastning og (b) trykk i tverretning som ikke endrer retning som er en konservativ belastning)

effekter. For å illustrere dette betrakter vi en fast innspent bjelke belastet med en aksiallast, som vist i figur 2.5. Ved å benytte 1.ordens teori stilles likevektslikningene opp for den udeformerte bjelken. Da blir innspenningsmomentet $M_0 = 0$. I knekningsteori blir geometriske ikke-lineariteter tatt hensyn til, og likevektslikningene stilles opp for den deformerte bjelken. Innspenningsmomentet i dette tilfellet blir $M_0 = P_L w_L$. Lasten endret ikke retning i dette eksempelet. Geometriske ikke-lineære effekter kan også ta hensyn til at retningen til lasten endres. For å illustrere dette betrakter vi en fast innspent bjelke belastet med et hydrostatisk trykk som vist i figur 2.6 (a). For store deformasjoner er både trykkets retning og angrepspunkt avhengig av deformasjonene. Det hydrostatiske trykket virker alltid normalt på overflaten, hvilket medfører at retningen endres når geometrien forandrer seg. Også angrepspunktet følger deformasjonene til geometrien. Denne lasten er derfor ikke konservativ. I neste avsnitt gjennomgås prinsippet om stasjonær potensiell energi. Dette prinsippet er bare gyldig for konservative laster, slik vi har et konservativt system. I denne oppgaven antas små forskyvninger og vi tar derfor ikke hensyn til at retningen til et hydrostatisk trykket endres. Det virker derfor i samme retning etter deformasjon som vist i figur 2.6 (b).

2.5 Prinsippet om stasjonær potensiell energi

Prinsippet om virtuelt arbeid [10] sier at et system er i statisk likevekt, hvis summen av det indre og ytre virtuelle arbeidet er lik null, for alle virtuelle deformasjoner som tilfredstiller kinematisk kompatibilitet.

$$\delta W + \delta H = 0 \quad (2.21)$$

der δW er indre virtuelt arbeid og δH er ytre virtuelt arbeid. Dette prinsippet er veldig generelt, og er også gyldig for systemer som ikke er konservative. I et konservativt system er tøyingsenergien og arbeidet utført av de ytre laster, begge uavhengige av historien til deformasjonene i systemet. Prinsippet er også uavhengig av konstitutive lover, hvilket betyr at det også kan anvendes for materialer som ikke er elastiske. Fra dette generelle prinsippet kan prinsippet om stasjonær potensiell energi utledes. Det forutsettes da at vi har et konservativt system med et elastisk materialet. Da er arbeidet utført av de indre krefter lik tøyingsenergien til konstruksjonen. Prinsippet om stasjonær potensiell energi utnytter denne sammenhengen til å stille opp likevektslikningene. Dette prinsippet sier at av alle mulige deformasjoner som tilfredstiller kinematisk kompatibilitet, så er den deformasjonen som tilfredstiller statisk likevekt, også den som gjør den potensielle energien stasjonær, slik at

$$\delta \Pi = \delta U + \delta T = 0 \quad (2.22)$$

der Π er potensiell energi, U er tøyingsenergi og T er et potensial av de ytre laster. Deformasjonene må også tilfredstille de essensielle grensebetingelsene, samt at

indre kinematisk kompatibilitet er oppfylt. For et skall er kravene til forskyvning og rotasjon langs randen, de essensielle betingelsene. I prinsippet om stasjonær potensiell energi trenger ikke de naturlige grensebetingelsene være tilfredstilt. De naturlige grensebetingelsene er krefter og momenter langs randen til et skall. Indre kinematisk kompatibilitet tilfredstilles ved å kreve at både forskyvningene og rotasjonene i skallet er kontinuerlig.

Som vi skal se senere i oppgaven, er det vanlig å diskretisere deformasjonene til et endelig antall frihetsgrader D_i . Prinsippet om stasjonær potensiell energi blir da

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_i} = 0 \quad (2.23)$$

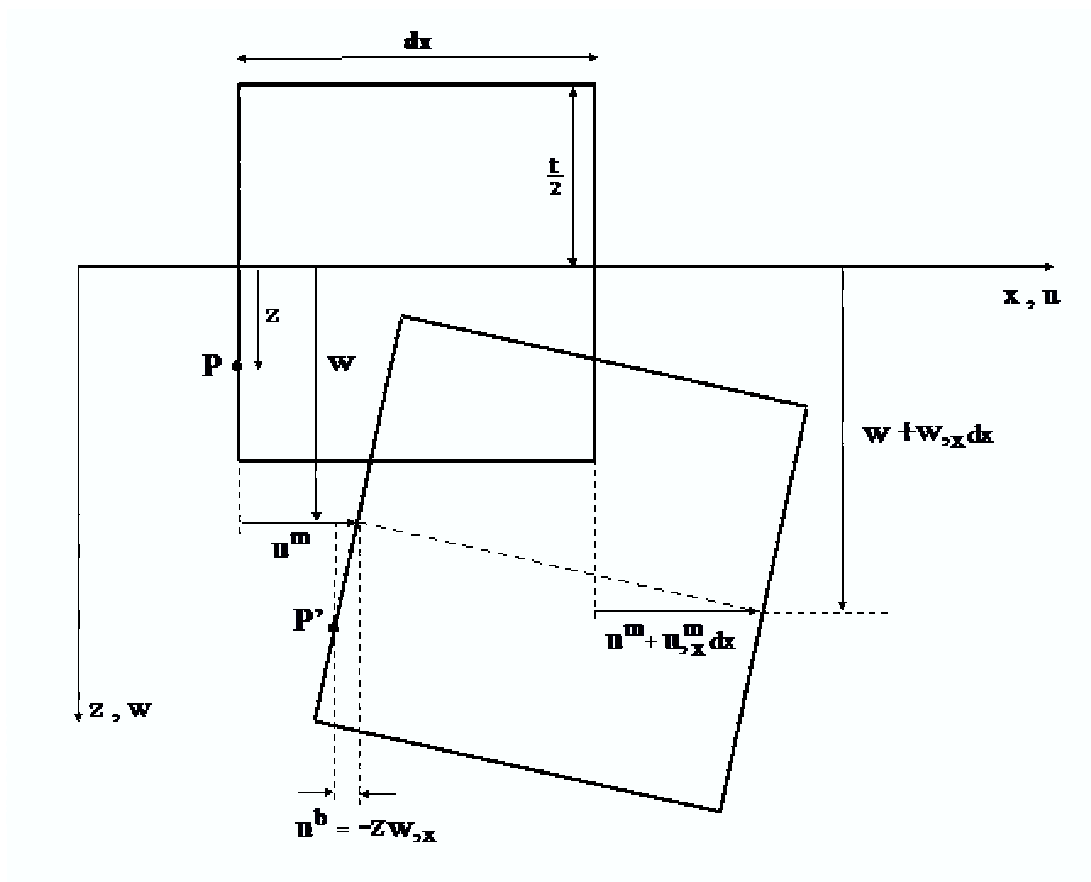
2.6 Klassisk teori for tynne plater

I plateteori er det vanlig å skille mellom tykke og tynne plater. Plater betraktes som tynne hvis tykkelsen er liten sammenliknet med de andre dimensjonene og med denne antakelsen reduseres problemet til to dimensjoner. Det er vanlig å kreve at både lengden og bredden til en tynn plate er ti ganger så store som tykkelsen. Grunnlagsmaterialet for dette er avsnittet er hentet fra [8, 27, 4, 24, 21]

Vi betrakter en tynn plate, der nøytralplanet er plassert i xy -planet, som vist i figur 2.1. Platen er kun belastet med spenninger i planet. For tynne plater gjelder en meget tilfredstillende teori, som ofte blir kalt for Navier-Kirchhoff plateteori. Denne teorien forenkler problemet ved å gjøre følgende antagelser:

- Små deformasjoner.
- Materialet til platen er homogent, isotropisk og følger Hookes lov.
- Platetykkelsen er liten sammenliknet med platens bredde og lengde.
- Linjer som er normale på den udeformerte nøytralflaten antas å forbli rett og normal på nøytralflaten etter deformasjon. I tillegg endres ikke lengden til linjene. Dette medfører at normal- og skjærdeformasjonene forbundet med tverretning kan neglisjeres.
- Normalspenningene i tverretning antas å være små i forhold til de andre normalspenningene, slik at de kan neglisjeres i Hookes lov.

De to siste punktene blir kalt for Kirchhoffs antagelser. Som en konsekvens av disse antagelsene kan spennings-tøyningsrelasjonen i likning 2.4-2.6 benyttes. Denne antagelsen er en selvmotsigelse siden vi neglisjerer skjærdeformasjonene men ikke skjærspenningen i tverretning. Men det viser seg at dette er en meget tilfredstillende tilnærmelse. Kirchhoffs antagelser medfører at forskyvningene i x - og y -retning i en avstand z fra nøytralflaten endrer seg lineært med helningen til



Figur 2.7: Infinitesimalt platelement både før og etter deformasjon

platen. Ved å studere forskyvningen u til punkt P i figur 2.7 og forskyvningen v på tilsvarende måte, finner vi at

$$u = u^m + u^b = u^m - zw_{,x} \quad (2.24)$$

$$v = v^m + v^b = v^m - zw_{,y} \quad (2.25)$$

der u^m og v^m er forskyvningskomponenter til nøytralflaten, u^b og v^b skyldes bøyning og w er forskyvning i tverretning. På tilsvarende måte kan tøyningene deles opp i to bidrag. Det ene bidraget er bøyetøyninger, som er forårsaket av forskyvningene u^b , v^b og w . Kinematisk kompatibilitet må være oppfylt som betyr at vi må ha samsvar mellom forskyvninger og tøyninger. Dette kan uttrykkes som

$$\epsilon_x^b = u_{,x}^b = z\kappa_x = -zw_{,xx} \quad (2.26)$$

$$\epsilon_y^b = v_{,y}^b = z\kappa_y = -zw_{,yy} \quad (2.27)$$

$$\gamma_{xy}^b = u_{,y}^b + v_{,x}^b = 2z\kappa_{xy} = -2zw_{,xy} \quad (2.28)$$

der κ_x, κ_y og κ_{xy} er krumninger. Det andre bidraget, som skyldes forskyvningskomponentene u^m , v^m og w er membrantøyninger. Ved å studere tøyningen av nøytralflaten til platen i figur 2.7, kan vi finne at disse tøyningene er

$$\epsilon_x^m = u_{,x}^m + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \quad (2.29)$$

$$\epsilon_y^m = v_{,y}^m + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \quad (2.30)$$

$$\gamma_{xy}^m = u_{,y}^m + v_{,x}^m + w_{,x}w_{,y} \quad (2.31)$$

Likning 2.29-2.31 er von Karmans kinematiske relasjoner for en plate. De totale tøyningene til et vilkårlig punkt i platens tverrsnitt er da

$$\epsilon_x = \epsilon_x^m + \epsilon_x^b \quad (2.32)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y^m + \epsilon_y^b \quad (2.33)$$

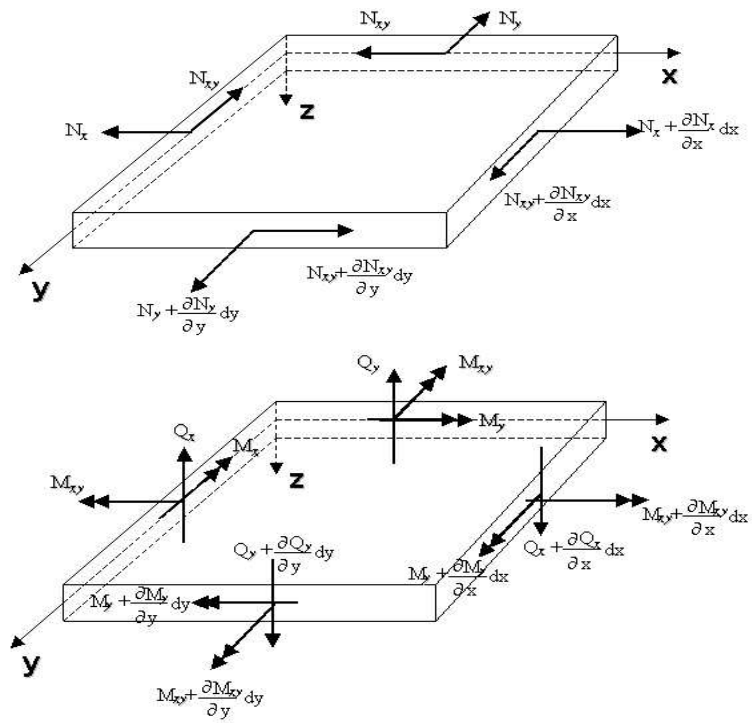
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^m + \gamma_{xy}^b \quad (2.34)$$

I plateteori er det vanlig å benytte spenningsresultanter eller generaliserte spenninger, som vist i figur 2.8. Resultantspenningene finner vi ved å integrere de indre spenningsene over tykkelsen:

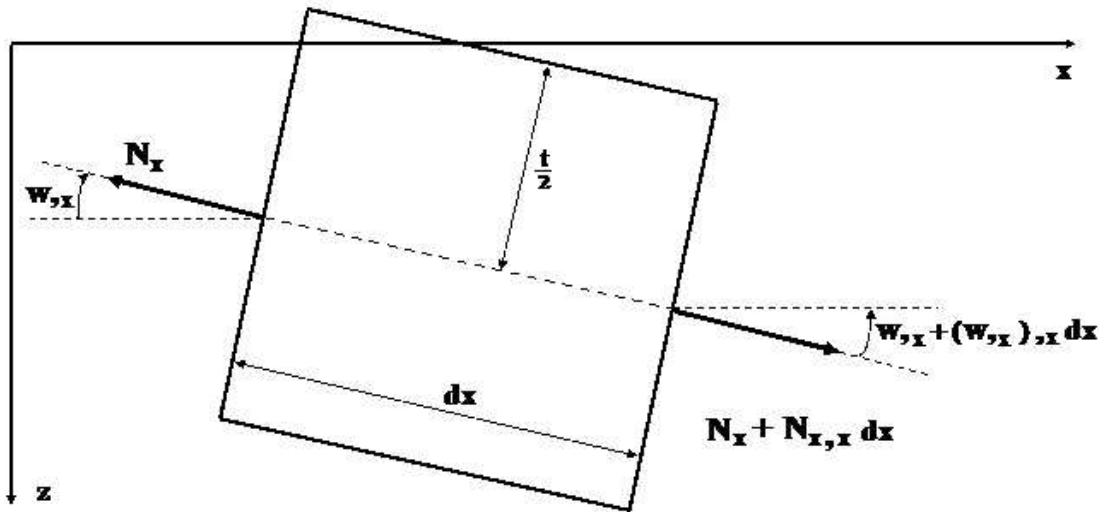
$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz \quad (2.35)$$

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.36)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.37)$$



Figur 2.8: Generaliserte spenninger



Figur 2.9: Deformasjon av et infinitesimalt plateelement

Ved bruk av likningene 2.4-2.6 og 2.24-2.34 blir resultantspenningene

$$N_x = C(\epsilon_x^m + \nu \epsilon_y^m) \quad M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad (2.38)$$

$$N_y = C(\epsilon_y^m + \nu \epsilon_x^m) \quad M_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad (2.39)$$

$$N_{xy} = C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^m \quad M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy} \quad (2.40)$$

der $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)}$ og $C = \frac{Et}{12(1-\nu)}$. For å finne differensiallikningen utfører vi likevektsbetraktninger av et infinitesimalt plateelement. Momentlikevekt om x- og y-aksen gir følgende likninger

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (2.41)$$

$$M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y = 0 \quad (2.42)$$

Kreftene i planet gir et 2.ordens bidrag til nedbøyningen, som kan finnes ved å betrakte kreftene i z-retning i figur 2.9. N_x projiseres inn på z-aksen og vi får følgende

$$N_x w_{,x} dy - (N_x + N_{x,x} dx)(w_{,x} + w_{,xx} dx) dy \quad (2.43)$$

eller

$$(N_x w_{,x})_{,x} \quad (2.44)$$

Uttrykk for de andre komponentene kan etableres på tilsvarende måte. Likevektsbetraktning av plateelementet i z-retning der høyere ordens ledd neglisjeres gir

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} = 0 \quad (2.45)$$

Ved substitusjon av Q_x og Q_y fra likningene 2.41 og 2.42 kan vi oppnå likevektslikningen

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} \quad (2.46)$$

Differensiallikningen som beskriver platens forskyvning får vi ved å sette inn likning 2.38-2.40, slik at

$$D\nabla^4 w = N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} \quad (2.47)$$

Dette er en 4.ordens differensiallikning. I linearisert 2.ordens teori er forskyvningen w er frakoblet forskyvningskomponentene u og v . Dette skyldes at de indre spenningene er konstant lik de ytre spenningen, slik at differensiallikningen blir fullstendig frakoblet.

I høyere ordens teori finnes ikke en tilsvarende frakoblet differensiallikning. Vi får da et sett av likninger som er avhengig av hverandre. Ved derivasjon og kombinasjon av likning 2.29 - 2.31 kan følgende kompatibilitetslikning utledes

$$\epsilon_{x,yy}^m + \epsilon_{y,xx}^m - \gamma_{xy,xy}^m = w_{,xw}^2 - w_{,xx}w_{,yy} \quad (2.48)$$

Vi innfører Airys spenningsfunksjon $F(x, y)$, som tilfredstiller følgende

$$\sigma_x^m = \frac{N_x}{t} = F_{,yy} \quad \sigma_y^m = \frac{N_y}{t} = F_{,xx} \quad \tau_{xy}^m = \frac{N_{xy}}{t} = -F_{,xy} \quad (2.49)$$

der σ_x^m , σ_y^m og τ_{xy}^m er membranspenninger. Ved hjelp av denne funksjonen og Hookes lov kan likning 2.47 og 2.48 henholdsvis skrives som

$$D\nabla^4 w = t(F_{,yy} w_{,xx} - 2F_{,xy} w_{,xy} + F_{,xx} w_{,yy}) \quad (2.50)$$

og

$$\nabla^4 F = E(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy}) \quad (2.51)$$

Disse to likningene blir ofte referert til som von Karmans platelikninger. De er et koblet sett av fjerde ordens, ikke-lineære differensiallikninger og lar seg derfor ikke løse eksakt. Videre i oppgaven antas derfor et forskyvningsfelt, slik at vi kan finne en spenningsfunksjon $F(x, y)$. Som vi skal se senere er Airys spenningsfunksjon i linearisert 2.ordens teori kun er en funksjon av de påsatte spenningene og dermed uavhengig av forskyvningene. Dette medfører at de indre membranspenningene er konstante og lik de ytre spenningene.

Plateteorien til von Karman ble senere videreutviklet av Marguerre [21] til å gjelde for en plate med en initiell imperfeksjon. Membrantøyningene som ble benyttet var

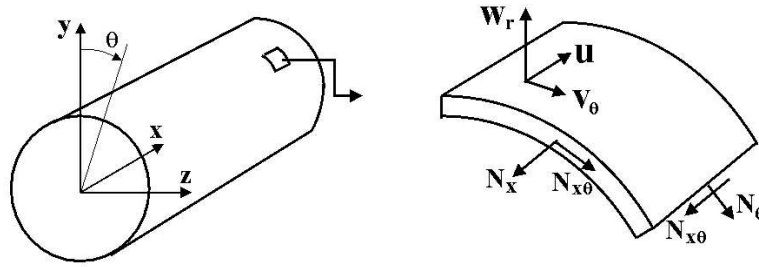
$$\epsilon_x^m = u_{,x}^m + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{0,x}w_{,x} \quad (2.52)$$

$$\epsilon_y^m = v_{,y}^m + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{0,y}w_{,y} \quad (2.53)$$

$$\gamma_{xy}^m = u_{,y}^m + v_{,x}^m + w_{,x}w_{,y} + w_{0,x}w_{,y} + w_{0,y}w_{,x} \quad (2.54)$$

der w_0 er den initielle imperfeksjonen. Ved derivasjon og kombinasjon av disse relasjonene fås følgende kompatibilitetslikningen

$$\nabla^4 F = E(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{0,xy}w_{,xy} - w_{0,xx}w_{,yy} - w_{0,yy}w_{,xx}) \quad (2.55)$$



Figur 2.10: Spennings- og forskyvningskomponenter for en sylinder

2.7 Differensiallikningen for tynne sylindre

Analogt med den klassiske plateteorien kan differensiallikningene som beskriver forskyvningene i en tynn sylinder utledes. Dette kan gjøres ved likevektsbetraktninger av et infinitesimalt element i sylindren. Det finnes mange litteraturbøker som dekker teorien om tynne skall [8, 14, 15, 27]. I dette avsnittet setter vi kun opp hovedresultatene, som differensiallikningene og Airys spenningsfunksjon for sylindre. En mer grundig gjennomgang om dette temaet kan vi for eksempel finne i boken til D.O. Brush og B.O. Almroth [8]. Denne boken setter opp differensiallikningene både ved likevektsbetraktninger og ved prinsippet om stasjonær potensiell energi. De kinematiske relasjonene som benyttes for en sylinder med radius a er på formen

$$\epsilon_x^m = u_{,x}^m + \frac{1}{2}w_{r,x}^2 \quad \epsilon_x^b = z\kappa_x = -zw_{r,xx} \quad (2.56)$$

$$\epsilon_\theta^m = \frac{v_{\theta,\theta}^m + w_r}{a} + \frac{1}{2}\frac{w_{r,\theta}^2}{a^2} \quad \epsilon_\theta^b = z\kappa_\theta = -z\frac{w_{r,\theta\theta}}{a^2} \quad (2.57)$$

$$\gamma_{x\theta}^m = v_{\theta,x}^m + \frac{u_{,\theta}^m}{a} + w_{r,x}\frac{w_{r,\theta}}{a} \quad \gamma_{x\theta}^b = 2z\kappa_{x\theta} = \frac{z}{a}(v_{\theta,x} - 2w_{r,x\theta}) \quad (2.58)$$

der ϵ_x^m , ϵ_θ^m og $\gamma_{x\theta}^m$ er midtflatens tøyninger, og ϵ_x^b , ϵ_θ^b og $\gamma_{x\theta}^b$ er bøyetøyninger definert i sylindrisk koordinatsystem. Disse relasjonene er Donnells kinematiske relasjoner. Forskyvningskomponentene til flaten i et sylindrisk koordinatsystem er vist i figur 2.10. Med disse relasjonene kan det utledes at forskyvningene som gjør den potensielle energien stasjonær, styres av de tre differensiallikningene

$$a^2 u_{,xx}^m + \frac{1-\nu}{2} u_{,\theta\theta}^m + \frac{1+\nu}{2} a v_{\theta,x\theta}^m + \nu a w_{r,x} = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{1+\nu}{2} a u_{,x\theta}^m + \frac{1-\nu}{2} a^2 v_{\theta,xx}^m + v_{\theta,\theta\theta}^m + w_{r,\theta} = 0 \quad (2.60)$$

$$D\nabla^4 w_r + \frac{C}{a^2}(v_{\theta,\theta}^m + w_r + \nu a u_{,x}^m) - (N_x w_{r,xx} + \frac{2}{a} N_{x\theta} w_{r,x\theta} + \frac{1}{a^2} N_\theta w_{r,\theta\theta}) = 0 \quad (2.61)$$

Dette er et sett av tre koblede differensiallikninger. Som vist av Donnell [12], kan dette settet skrives på formen

$$\nabla^4 u^m = -\frac{\nu}{a} w_{r,xxx} + \frac{1}{a^3} w_{r,x\theta\theta} \quad (2.62)$$

$$\nabla^4 v_\theta^m = -\frac{2+\nu}{a^2} w_{r,xx\theta} - \frac{1}{a^4} w_{r,\theta\theta\theta} \quad (2.63)$$

$$D\nabla^8 w_r + \frac{1-\nu^2}{a^2} C w_{r,xxxx} - \nabla^4 \left(N_x w_{r,xx} + \frac{2}{a} N_{x\theta} w_{r,x\theta} + \frac{1}{a^2} N_\theta w_{r,\theta\theta} \right) = 0 \quad (2.64)$$

der $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)}$ og $C = \frac{Et}{12(1-\nu)}$. Likning 2.62 - 2.64 blir kalt Donnells stabilitetslikninger.

I likhet med plateteorien kan vi finne at Airys spenningsfunksjon for en sylinder tilfredstiller kompatibilitetslikningen

$$\nabla^4 F = \frac{E}{a^4} (w_{,x\theta}^2 - w_{,xx} w_{,\theta\theta} + a w_{,xx}) \quad (2.65)$$

der

$$\sigma_x^m = F_{,\theta\theta} \quad \sigma_\theta^m = a^2 F_{,xx} \quad \tau_{x\theta}^m = -a F_{,x\theta} \quad (2.66)$$

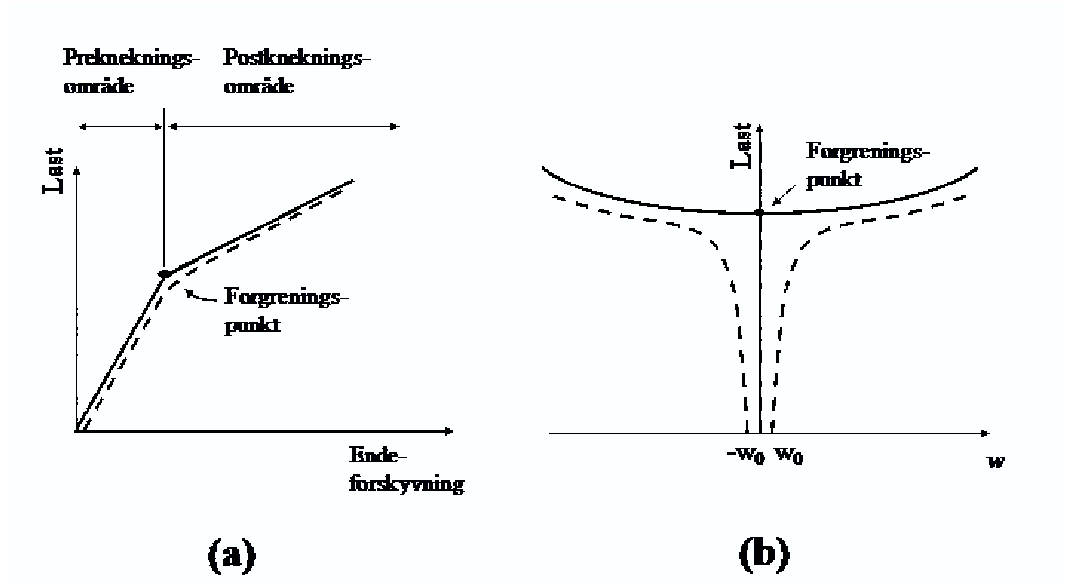
2.8 Knekningsteori

2.8.1 Innledning

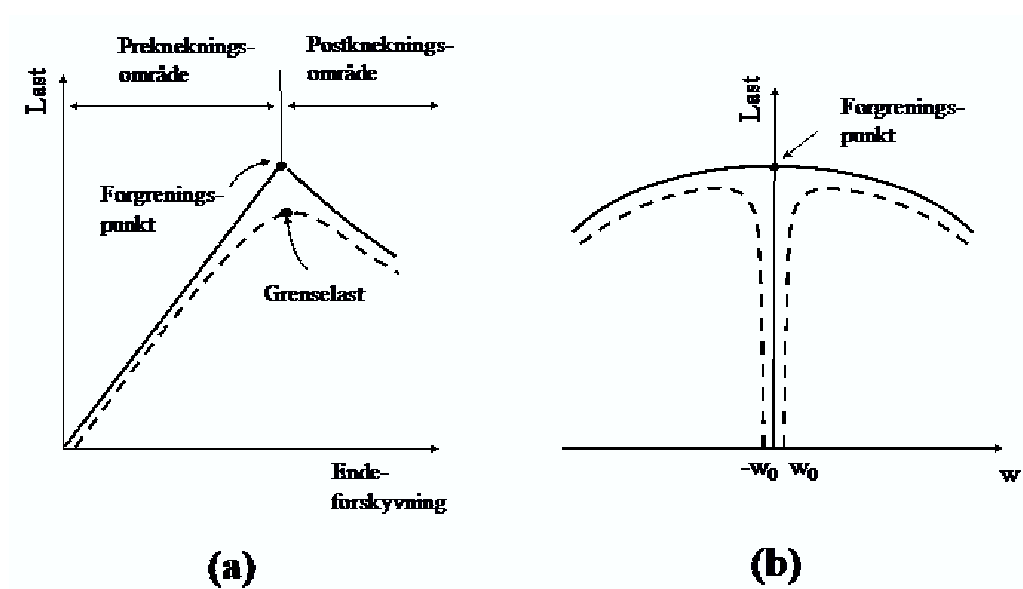
For å danne et grunnlag for den senere presentasjonen i oppgaven omhandler dette avsnittet knekningsteori for plater og skall, og sentrale begreper innen dette fenomenet blir innført. I 1.ordens teori er forskyvningen proporsjonal med lasten. Ved å betrakte forskyvningene i plater og skall belastet med trykkspenninger, finner vi ikke en samsvarende proporsjonal last. Følgelig er knekning et ikke-lineært fenomen. Ordet knekning blir brukt med forskjellig betydning i forskjellige sammenhenger. Fysisk sier vi at en plan plate knekker når membrankreftene forårsaker en forskyvning ut av flaten. Matematisk er knekning forbundet med et stabilitetsproblem. Bakgrunnsteorien er hentet fra [8, 27, 15, 14, 19]

2.8.2 Lineær elastisk knekning

Lineær elastisk knekningsanalyse er et rent stabilitetsproblem av en plate eller et skall. Teorien som anvendes blir vanligvis referert til som 2.ordens teori. For å få med effekten av membrankreftenes bidrag til utbøyning må de elastiske likevektslikningene etableres for en deformert flate. Den lasten som medfører knekning blir kalt for den lineære knekklasten eller bare knekklasten. Det er også vanlig å referere til denne lasten som en egenverdi. Egenverdien blir beregnet ved å anta



Figur 2.11: Last-endeforskyvningskurve (a) og Last-tverrforskyvningskurve (b) for en plate uten formavvik i heltrukken kurve og med formavvik i stiplet kurve.



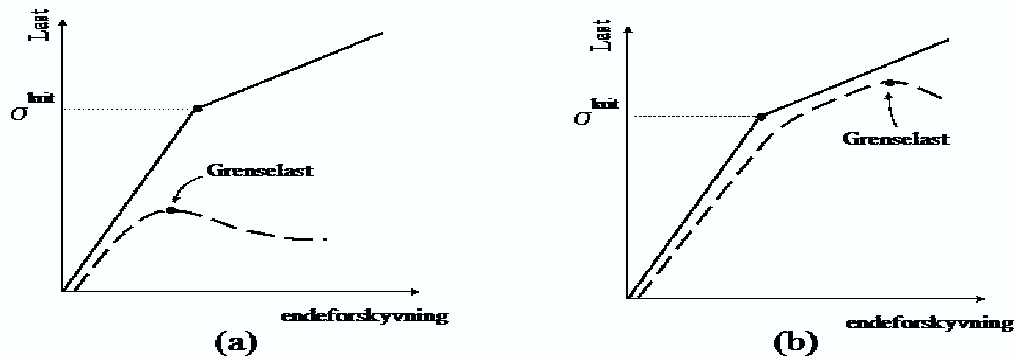
Figur 2.12: Last-endeforskyvningskurve (a) og Last-tverrforskyvningskurve (b) for et skall uten formavvik i heltrukken kurve og med formavvik i stiplet kurve

at det ikke oppstår forskyvninger ut av flaten før knekklasten er nådd. I det øyeblikket flaten får en utbøyning vil last-forskyvningskurven endre karakter. Denne endringen vises tydelig i figur 2.11 og 2.12, der hver av de heltrukne kurvene har et forgreiningspunkt eller bifurkasjonspunkt. Etter at knekklasten er nådd endres helningen til kurven og stivheten til konstruksjonen endres. For å klassifisere om en konstruksjon er i stabil eller ustabil likevekt, kan teorien til Koiter [19] anvendes. I figur 2.11 ser vi at helningen til kurven fortsatt er stigende etter knekning, hvilket betyr at konstruksjonen kan belastes ytterligere. Forgreiningspunktet er derfor et stabilt likevektspunkt. Dette er et typisk last-forskyvningsforløp for en plate. For et skall ser dette forløpet ut som i figur 2.12, der vi ser at kurven synker etter knekning. I dette tilfellet er forgreiningspunktet et ustabil likevektspunkt. Som avmerket på figurene betegnes område før og etter knekning henholdsvis for preknekningsområde og postknekningsområdet. For en konstruksjon uten initielle formavvik er last-forskyvningskurven lineær før bifurkasjonspunktet er nådd. Etter knekning er responsen av ikke-lineær karakter.

Knekklasten eller egenverdien til en konstruksjon finnes ved å løse et egenverdiproblem, som er et sett av likninger etablert ved likevektsbetraktninger. Et egenverdiproblem er kun veldefinert dersom det ikke er noen forskyvninger ut av flaten før knekning. Flaten kan derfor ikke ha geometriske avvik eller imperfeksjoner. En plate må derfor utspenne et perfekt plan. For et skall er dette mer komplisert. Da må grensebetingelsene og lastene kombineres, slik at spennings-tilstanden kun består av membranspenninger før den knekker. Et eksempel der dette er mulig, er en perfekt sylinder belastet med en aksiallast og et ytre trykk. En flate med et initiell formavvik w_0 har en last-forskyvningskurve som vist med stiplet kurve i figurene, og det eksisterer ikke et veldefinert egenverdiproblem. Platen vil få en tverrforskyvning umiddelbart etter at lasten er påført og responsen er ikke-lineær fra starten av. I figur 2.12(a) ser vi at kurven flater ut og begynner å synke. Kurven har et maksimumspunkt, som ofte blir referert til som grenselasten eller kapasiteten til konstruksjonen. I dette tilfellet tåler ikke konstruksjonen en ytterligere belastning og den kollapser. Dette blir kalt for grenselastkneking. Dette temaet vil få en grundigere gjennomgang i neste avsnitt.

2.8.3 Grenselastkneking av plater og skall

Ved kollaps reduseres evnen konstruksjonen har til å ta opp en ytterligere økning i belastningen. Den maksimale belastningen den kan tåle er grenselasten. Tilstanden vil være i ustabil likevekt når grenselasten er nådd. Ustabil likevekt inntreer når last-forskyvningskurven flater ut og begynner å synke. Dette knekningsforløpet blir ofte kalt for grenselastkneking. I figur 2.12(a) så vi at et skall kollapset forårsaket at last-forskyvningskurven nærmet seg et forgreiningspunkt. Deformasjonene i skallet blir større uten at det klarer å ta opp en ytterligere belastning. Etterhvert vil deformasjonene bli så store at materialet begynner å

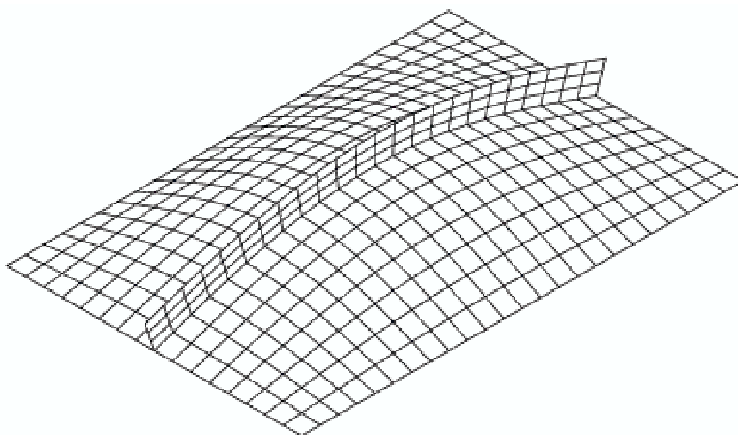


Figur 2.13: Grenselastknekningskurver for en tykk (a) og en tynn (b) plate i stiplet kurve

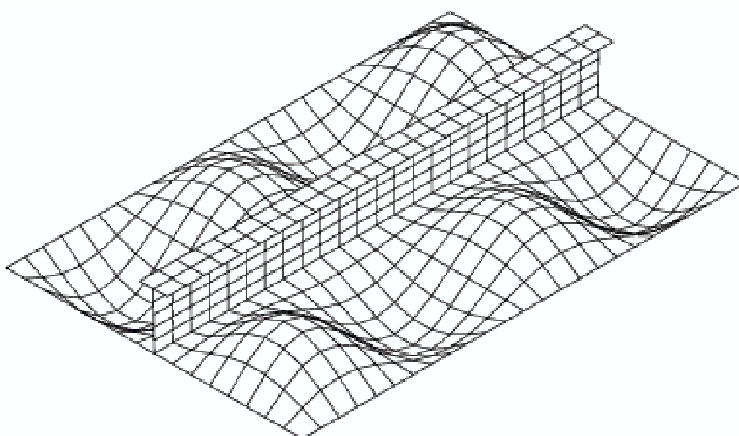
flyte, og vi får permanente forskyvninger. En egenverdiregning tar ikke hensyn til at spenningsforholdene kan medføre materialflyt. Ved å ta med innvirkningen av materialflyt får vi et mer korrekt bilde av konstruksjonens virkelige styrke. Grenselasten kan både være mindre og større enn den elastiske knekklasten, som fremstilt i figur 2.13. For å finne grenselasten gjøres beregninger på en flate med initiale formavvik. Dette er ikke urimelig siden alle konstruksjoner har formavvik som oppstår under produksjon. For slike tilfeller vil bøyepenninger oppstå med en gang pålastingen begynner. I det øyeblikket last-forskyvningskurven flater ut og begynner å synke er grenselasten nådd. Tykkelsen til en plate kan dimensjoneres slik at den lineære knekklasten er større enn grenselasten som vist i figur 2.13(a). Da er forskyvningene ut av flaten små, og konstruksjonen kollapser som en følge av at membranspenningene medfører materialflyt. For tynne plater kan grenselasten være større enn den elastiske knekklasten som illustrert i figur 2.13(b). Når den ytre belastningen overstiger knekklasten blir forskyvningene tilslutt så store at materialflyt inntreffer, og etterhvert kollapser konstruksjonen.

2.8.4 Knekkformer

I det øyeblikket knekning inntreffer har den ytre belastningen nådd en kritisk verdi. Den formen en konstruksjon har ved knekning kalles knekkformen. Videre i oppgaven når vi refererer til en knekklast eller en knekkform, er den forbundet med den minste egenverdien hvis ikke annet er oppgitt. For avstivede plater er det vanlig å dele inn knekkformer i to hovedklasser. Den ene formen klassifiseres som en global knekkform og den andre en lokal knekkform. Forskjellige knekkformer illustreres i figur 2.14 - 2.17 som av er fremstilt ved hjelp av et elementprogram som heter Abaqus.



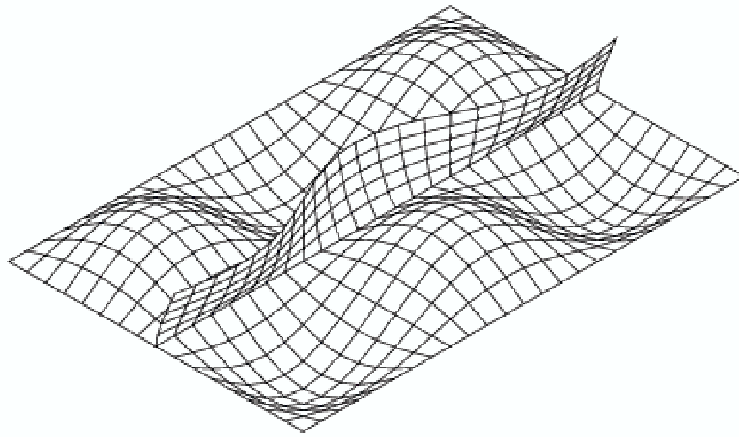
Figur 2.14: Global knekning for en plate med stiver



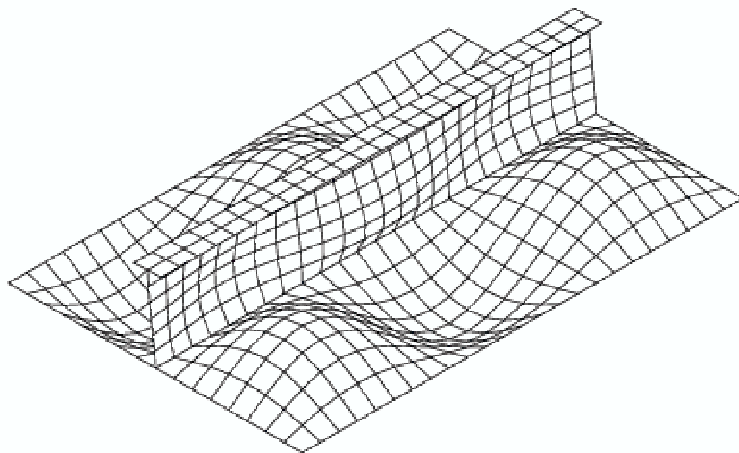
Figur 2.15: Lokal platekneknig for en plate med stiver

Global knekkform

I tilfelle der stiveren har liten bøyestivhet motvirker den ikke forskyvninger ut av planet i betydelig grad. Da er det platen som i hovedsak tar opp den ytre belastningen, og det er derfor platens dimensjoner som har størst innvirkning på formen ved knekning. Med en svært liten avstivning vil platen omtrent knekke som en uavstivet plate. Platen og stiveren knekker da i en global knekkform. Et eksempel på en global knekkform er illustrert i figur 2.14. Platen knekker ut i en halv bølgelengde over platens lengde og bredde som den også ville gjort om platen ikke var avstivet. Skipskonstruksjoner er vanligvis dimensjonert slik at dette ikke er den dominerende knekkformen.



Figur 2.16: Kombinert lokal plateknekning og torsjonsknekning for en plate med stiver



Figur 2.17: Kombinert lokal plateknekning og knekning av steg for en plate med stiver

Lokal knekkform

For en avstivet plate er det vanlig å skille mellom lokal knekning av plate og stiver. I en lokal plateknekkform knekker platen lokalt mellom hver stiver. Når denne formen dominerer har stiverene stor torsjon- og bøyestivhet, samt et kraftig steg. Dette vises i figur 2.15. Når lengden er større enn avstanden mellom hver stiver knekker platen ut i en halvbølge mellom stiverene i retningen normalt på aksialretningen.

Lokal knekning av stiver er ofte kombinert med lokal plateknekkning. Det er vanlig å dele inn stiverknekkning i to forskjellige former. I den ene formen roterer stiveren om sin egen akse, som en følge av at den har liten torsjonsstivhet. Dette blir kalt for torsjonsknekkning, og illustreres i figur 2.16. Den andre formen for stiverknekkning er knekkning av steget, som vises i figur 2.17. Steget er i dette tilfellet så svakt at platen roterer om avstivningen.

I praksis involverer lokal knekning av en avstivet plate både plate- og stiverknekkning.

Kapittel 3

Analysemetoder

3.1 Innledning

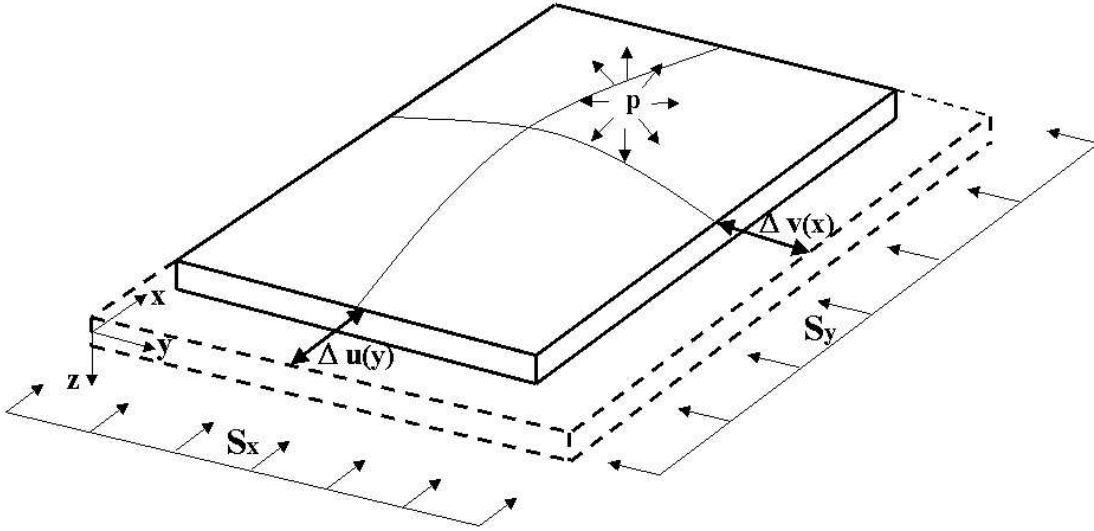
Knekningsproblemer som oppstår i praksis er ofte svært komplekse, med komplisert geometri og belastning. Forskjellige grensebetingelser kan også være problematiske. I et skip kan for eksempel en plate være avstivet med en stiver som ikke er parallell med platens lengderetning. I tillegg kan spenningsfordelingen langs randen variere. Slike problemer kan ikke løses analytisk, og vi må derfor benytte numeriske metoder. Forskjellen mellom en analytisk og en numerisk løsningsmetode er ikke alltid like klar. Analytiske metoder refereres ofte til som en metode med en eksakt, lukket løsning. En numerisk metode karakteriseres ofte som en metode med et endelig antall frihetsgrader. To eksempler på numeriske metoder er elementmetoden og Rayleigh-Ritz metoden. Dette kapitlet omhandler disse metodene, og bakgrunnsstoffet er hentet fra [8, 10]

3.2 Linearisert egenverdiberegning

Likevektslikningene for platen i figur 3.1 kan stilles opp ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden eller elementmetoden. Platen er utsatt for i-planet-krefter og et ytre hydrostatisk trykk. Likningssystemet vi ender opp med, er på formen

$$\left(\mathbf{K}^M + \mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}^{ref}) \right) \mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (3.1)$$

der \mathbf{K}^M er materialstivhetsmatrisen, \mathbf{K}^G er den geometriske stivhetsmatrisen og \mathbf{r} er forskyvningen ut av planet. \mathbf{R} er lastvektoren p.g.a ytre laster og $\boldsymbol{\sigma}^{ref}$ er referansespenningen langs randen av platen. Vi skal senere se hvordan dette likningssystemet etableres for en plate. Tilsvarende fremgangsmetode skal også benyttes for å analysere et krumt skall.



Figur 3.1: Plate i deformert og udeformert tilstand

Den påført spenningen langs randen på platen, skrives om ved hjelp av en lastparameter eller last proporsjonalitetsfaktor Λ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \Lambda \boldsymbol{\sigma}^{ref} \quad (3.2)$$

og det kan da vises at

$$\mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}) = \Lambda \mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}^{ref}) \quad (3.3)$$

Den inkrementelle likevektslikningen for preknekningsområdet blir nå

$$\left(\mathbf{K}^M + \Lambda \mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}^{ref}) \right) \Delta \mathbf{D} = \Delta \mathbf{R} \quad (3.4)$$

I det øyeblikket instabilitet oppstår kan platen vise endring i $\Delta \mathbf{D}$ uten at de ytre lastene endrer størrelse (dvs. $\Delta \mathbf{R} = 0$). Likevektslikningene på inkrementell form blir derfor

$$\left(\mathbf{K}^M + \Lambda^i \mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}^{ref}) \right) \Delta \mathbf{D}^i = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

der Λ^i er egenverdi nummer i med tilhørende egenvektor eller knekkform $\Delta \mathbf{D}^i$. Dette representerer et klassisk egenverdiproblem for en plate, der det er like mange egenverdier Λ^i som frihetsgrader for systemet. Knekkning oppstår når last-faktoren er lik den minste av egenverdiene, og knekkspenningen $\boldsymbol{\sigma}^{krit}$ er derfor

$$\boldsymbol{\sigma}^{krit} = \Lambda^{krit} \boldsymbol{\sigma}^{ref} \quad (3.6)$$

der $\Lambda^{krit} = \Lambda^1$ som er den første og laveste egenverdien.

3.3 Rayleigh-Ritz metoden

Et elastisk legeme har et uendelig antall frihetsgrader, siden frihetsgradene til legemet er forskyvningene i et hvert punkt. Ved å foreta en romlig diskretisering kan forskyvningene beskrives ved et endelig antall frihetsgrader. Forskyvningen i en konstruksjon, representeres av et antatt forskyvningsfelt som består av en sum av funksjoner. For et to-dimensjonalt problem som en tynn plate, kan forskyvningen ut av planet beskrives som

$$w(x, y) = \sum_i^m \sum_j^n a_{ij} g_i(x) g_j(y) \quad (3.7)$$

der $g_i(x)$ og $g_j(y)$ er formfunksjoner som er definert over hele konstruksjonen, og a_{ij} er tilhørende amplitude. Problemet reduseres til å bestemme koeffisientene a_{ij} . Rayleigh-Ritz metoden er generelt ikke eksakt, men nøyaktigheten øker når antall frihetsgrader øker. En mer grundig gjennomgang av en egenverdianalyse ved hjelp av denne metoden vil bli gjennomgått i kapittel 4.

Ideen i Rayleigh-Ritz metoden er å benytte prinsippet om stasjonær potensiell energi med det antatte forskyvningsfeltet. Det kreves derfor at formfunksjonene er lineært uavhengige og at de essensielle randbetingelsene er oppfylt, men funksjonene trenger ikke tilfredstille de naturlige randbetingelsene. De essensielle randbetingelsene er forskyvninger og rotasjoner til platens rand, og de naturlige randkravene er krefter og momenter påført langs randen.

I samsvar med prinsippet om stasjonær potensiell energi, med det antatte forskyvningsfeltet i likning 3.7, får vi et likningsystem med m ganger n ukjente:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{ij}} = 0 \quad (3.8)$$

Ved å løse dette likningsystemet er forskyvningen fullstendig definert.

I Rayleigh-Ritz metoden tvinges et legeme til å deformere seg i en bestemt form. Dette medfører at legemet blir stivere enn det er i virkeligheten, og det trengs derfor større krefter for å deformere en konstruksjon. Nøyaktigheten til metoden er avhengig av hvor godt det antatte forskyvningsfeltet beskriver virkeligheten. Med et stort antall formfunksjoner er konstruksjonens forskyvningsfelt friere, hvilket betyr at konstruksjonen blir mykere. Rayleigh-Ritz metoden konvergerer ovenifra, mot den eksakte løsningen etterhvert som antall formfunksjoner eller frihetsgrader øker. I det spesielle tilfellet, der det antatte forskyvningsfeltet inneholder et ledd som er lik den eksakte forskyvningen i henhold til antagelsene som ligger til grunn, vil også løsningen til Rayleigh-Ritz metoden være eksakt.

3.4 Elementmetoden

3.4.1 Innledning

Rayleigh-Ritz metoden er som tidligere presisert avhengig av at det antas fornuftige formfunksjoner som er definert over hele konstruksjonen. De kinematiske randbetingelsene skal være tilfredstilt, hvilket kan by på problemer for konstruksjoner med komplisert geometri. Disse vanskelighetene unngås i elementmetoden ved at konstruksjonen deles opp i en rekke elementer, slik at formfunksjonene kun gjelder for hvert enkelt element. Dersom formfunksjonene tilfredstiller visse kontinuitetskrav mot naboelementet [10], vil løsningen konvergere mot den eksakte løsningen, når antall elementer øker. Denne konvergensen er analog med at Rayleigh-Ritz metoden konvergerer når antall formfunksjoner økes.

3.4.2 Elementmetodens bakgrunnsprinsipper

I elementmetoden antas en forskyvning over et element som

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (3.9)$$

der \mathbf{u} er forskyvningen i elementet, \mathbf{N} er en matrise av formfunksjoner og \mathbf{d} er knutepunktsforskyvningene. Relasjonen mellom forskyvninger og tøyninger er gitt ved

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{N}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (3.10)$$

der $\boldsymbol{\epsilon}$ er tøyningen og $\boldsymbol{\Delta}$ er en differensialoperator. Hvis matrisen \mathbf{E} beskriver materialeegenskapene, er sammenhengen mellom spenninger og tøyninger i lineærteorien

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (3.11)$$

Det kan vises at prinsippet om virtuelt arbeid [10], som sier at det indre virtuelle arbeidet er lik det ytre, kan skrives som

$$\int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{S_\sigma} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} dS + \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f} dV \quad (3.12)$$

der \mathbf{t} og \mathbf{f} er henholdsvis overflatekrefter og volumkrefter. For et element er V volumet, og S_σ er overflaten. Ved innsetning av likning 3.9-3.11 i dette prinsippet, får vi likevektslikningen for elementet

$$\delta\mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} dV \mathbf{d} = \delta\mathbf{d}^T \left(\int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV \right) \quad (3.13)$$

En vanlig notasjonsform for denne likevektslikningen er

$$\mathbf{k}^M \mathbf{d} = \mathbf{S} \quad (3.14)$$

der $\mathbf{k}^M = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV$ er elementets materialstivhetsmatrise og $\mathbf{S} = (\int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV)$ er en lastvektor. Likning 3.14 gjelder kun på elementnivå i et lokalt aksesystem. På grunn av at frihetsgradene til et element er avhengig av andre elementer, trengs en likevektslikning på globalt nivå. For å etablere et globalt system, trengs det en sammenheng mellom de lokale frihetsgradene \mathbf{d}_i og de globale frihetsgradene \mathbf{D} for hvert element i

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{D} \quad (3.15)$$

der \mathbf{a}_i er en passende tilordningsmatrise. Ved hjelp av denne sammenhengen, samt å ta med knutepunktskreftene \mathbf{P} , blir stivhetsrelasjonen

$$\mathbf{K}^M \mathbf{D} = \mathbf{R} \quad (3.16)$$

der $\mathbf{K}^M = \sum_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{k}_i^M \mathbf{a}_i$ er materialstivhetsmatrisen på systemnivå og $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{S}_i + \mathbf{P}$ er de totale knutepunktskreftene. Vi må derfor summere sammen bidragene fra alle elementene for å komme fram til likevektslikningen 3.16. Ved å løse denne likningen finner vi forskyvningene i hele konstruksjonen.

3.4.3 Egenverdianalyse i elementmetoden

Knekning av en plan plate oppstår når membrankreftene blir så store at vi får en forskyvning ut av planet. Lineærteori om elastisitet neglisjerer slike effekter, som knekning. For å ta hensyn til membrankreftenes virkning må en geometrisk stivhetsmatrise $\mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma})$ innføres i likevektslikningen. Denne matrisen etableres ved å betrakte arbeidet som utføres av de ytre kreftene. Ved å anta at de indre spenningene er konstant lik de påsatte spenningen S_x , S_y og S_{xy} , blir dette arbeidet

$$\begin{aligned} T &= \int_0^b tS_x \Delta u(y) dy + \int_0^L tS_y \Delta v(x) dx \\ &+ \int_0^L \int_0^b tS_{xy} (u_{,y} + v_{,x}) dy dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

der $\Delta u(y)$ og $\Delta v(x)$ er endeforlengelsene til nøytralflaten, som vist i figur 3.1. Som vi skal se senere i oppgaven, er membrantøyningene i linearisert 2.ordens teori konstante og uavhengige av utbøyningen i tverretning. Dette medfører at vi kan se bort ifra membrantøyningene, siden bidraget faller bort ved derivasjon av den potensielle energien. Fra likning 2.29-2.31 får vi derfor

$$u_{,x}^m = -\frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (3.18)$$

$$v_{,y}^m = -\frac{1}{2} w_{,y}^2 \quad (3.19)$$

$$u_{,y}^m + v_{,x}^m = -w_{,x} w_{,y} \quad (3.20)$$

Dette gir endeforkortningene

$$\Delta u(y) = \int_0^L u_{,x}^m dx = - \int_0^L \frac{1}{2} w_{,x}^2 dx \quad (3.21)$$

$$\Delta v(x) = \int_0^b v_{,y}^m dy = - \int_0^b \frac{1}{2} w_{,y}^2 dy \quad (3.22)$$

Ved å anta et forskyvningfelt $w(x, y) = \mathbf{Nd}$, som impliserer at $[w_{,x}, w_{,y}]^T = \nabla \mathbf{Nd} = \mathbf{Gd}$, samt å benytte likning 3.20 - 3.22, får vi

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}^G \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dette betyr at den geometriske stivhetmatrisen på elementnivå blir

$$\mathbf{k}^G = - \int_0^b \int_0^L t \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{bmatrix} \mathbf{G} dy dx \quad (3.24)$$

Ved å benytte tilordningsmatrisen \mathbf{a}_i , som kobler de globale frihetsgradene \mathbf{D} med de lokale frihetsgradene \mathbf{d}_i for element nummer i blir den geometriske stivhetsmatrisen \mathbf{K}^G på systemnivå

$$\mathbf{K}^G = \sum_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{k}^G \mathbf{a}_i \quad (3.25)$$

Den modifiserte likevektlikningen som tar hensyn til membrankreftenes innvirkning på utbøyningen av platen blir derfor

$$\left(\mathbf{K}^M + \mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}) \right) \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

For disse likevektlikningene blir egenverdi problemet

$$\left(\mathbf{K}^M + \Lambda^i \mathbf{K}^G(\boldsymbol{\sigma}^{ref}) \right) \Delta \mathbf{D}^i = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

der Λ^i er en egenverdi med tilhørende knekkform $\Delta \mathbf{D}^i$. Referansespenningen er $\boldsymbol{\sigma}^{ref}$ som medfører at knekkspenningen $\boldsymbol{\sigma}^{krit}$ for den laveste egenverdien Λ^{krit} blir

$$\boldsymbol{\sigma}^{krit} = \Lambda^{krit} \boldsymbol{\sigma}^{ref} \quad (3.28)$$

3.4.4 Elementprogrammet Abaqus

Elementmetoden er veldig generell og kan benyttes i mange forskjellige analyser som for eksempel i konstruksjonsanalyser. Dette har medført at den er veldig populær blant ingeniører. Siden denne metoden er så utbredt finnes det mange forskjellige dataprogrammer for elementanalyser. Et eksempel er Abaqus, som blir benyttet i denne oppgaven. En elementanalyse ved hjelp av et dataprogram er ofte delt opp i tre deler. Først må modellen bygges opp, som her gjøres i et eget program som heter Prefem. Dette programmet deler opp geometrien i elementer og fastsetter materialeegenskaper til modellen. Neste steg i analysen er å utarbeide løsninger av problemet. Modellen leses inn i elementprogrammet Abaqus, der laster og randbetingelser innføres. En mer detaljert beskrivelse av dette programmet finnes i bruker-manualene [2, 3]. Abaqus produserer filer med resultater fra beregningene. Disse filene blir brukt i siste del av analysen, der resultatene av analysen presenteres. I denne oppgaven benyttes postprosessoren til Abaqus. Dette programmet gir en grafisk visualisering av forskjellige spenningsfelt og forskyvningene i konstruksjonene. Det er mange funksjoner i postprosessoren, og resultatene kan presenteres på forskjellige måter. Dette er nærmere forklart i bruker-manualen [1].

I Abaqus finnes det tre hovedklasser av skall-elementer bestående av tynne, tykke og generelle elementer. Forrige avsnitt skisserte kort en knekningsanalyse i elementmetoden av en flat tynn plate. For en slik plate kan tøyningene beskrives ved hjelp av likning 2.26-2.31. Denne plateteorien blir ofte betegnet som Kirchhoffs klassiske plateteori [8, 27], som kort ble gjennomgått i avsnitt 2.6. Elementene i Abaqus som benytter denne teorien heter *STR13* og *STR135*. Disse elementene har tre knutepunkt. For tykke skall gir ikke disse elementene tilfredstillende resultater. Da må elementer som benytter teori for tykke plater benyttes. De tykke skallene bygger på teorien til Midlin [27]. Disse elementene er egnet for å løse problemer, der skjærdeformasjonene ikke kan neglisjeres. Det er også utviklet elementtyper i Abaqus som kan utarbeide gode løsninger både for tynne og tykke skall. Dette er de generelle skall-elementene. *S3* og *S4* er to typer av denne klassen, som henholdsvis har tre og fire knutepunkt. Disse elementene er meget robuste og vi får ikke skjærlåsning. Elementene kan behandle store deformasjoner og problemer med både material og geometriske ikke-lineariteter. I teorimanualen til Abaqus [2] finnes detaljert informasjon om alle elementtypene.

I denne oppgaven benyttes elementtypen *S4* fra den generelle klassen og *STR13* som tilhører klassen for tynne skall.

Kapittel 4

Modeller for egenverdiberegninger v.h.a. Rayleigh-Ritz metoden

4.1 Innledning

Dette kapittelet behandler teorien for å utvikle modeller for egenverdiberegninger av en plate og et skall ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden. Som en del av oppgaven blir modellene implementert i Fortran, slik at løsningene kan beregnes. Bakgrunns materialet er hentet fra [8, 9, 27].

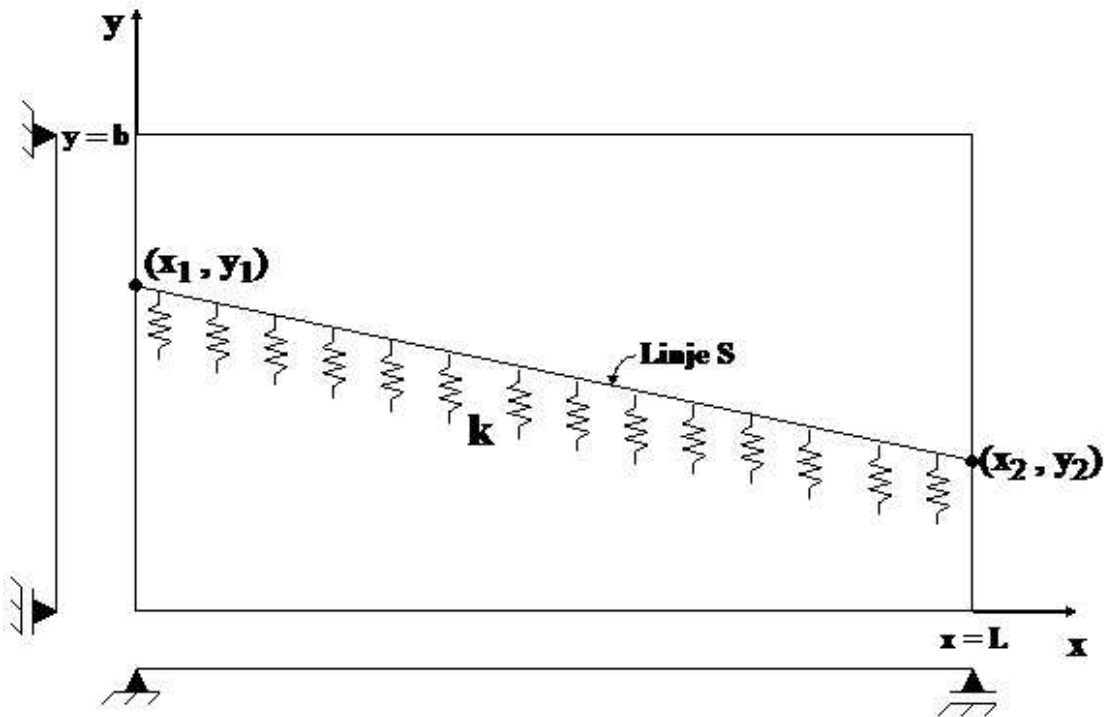
4.2 Egenverdiberegning av avstivet plate

4.2.1 Modell og antagelser

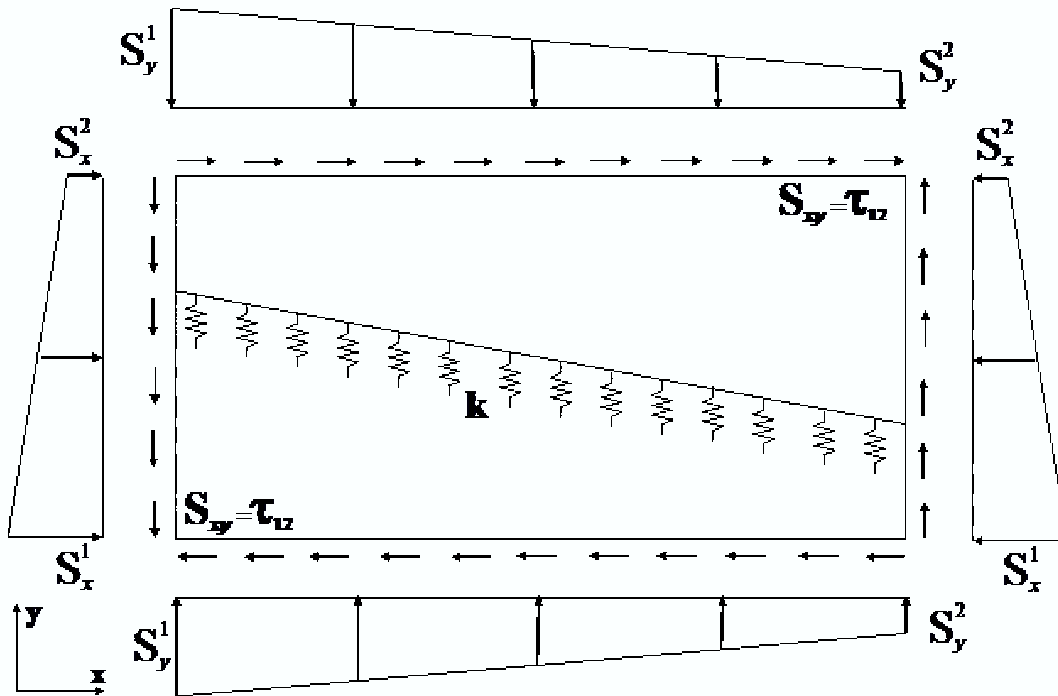
Figur 4.1 viser en fritt opplagt plate som er avstivet med fjærer med fjærstivhet k . For å finne knekklasten til en slik plate kan Rayleigh-Ritz metoden anvendes. Første steg i denne metoden er å anta følgende forskyvningsfelt, som tilfredstiller grensebetingelsene

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \sin\left(\frac{\pi i x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi j y}{b}\right) \quad \text{der} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq b \end{matrix} \quad (4.1)$$

der a_{ij} er amplituder, L er platelengden og b er platebredden. Hvert ledd i det antatte forskyvningsfeltet er komponenter fra Fourierrekkeløsningen av differensiallikningen 2.47. I en Fourierrekkeløsning, er uendelig antall ledd tatt med, slik at den løser differensiallikningen. Det vil si at nøyaktigheten til den tilnærmede løsningen øker, når antall ledd øker. Hvis $w(x, y)$ består av ett eller flere ledd som gjengir den eksakte forskyvningen i henhold til antagelsene som er lagt til grunn, vil også løsningen til Rayleigh-Ritz metoden være eksakt.



Figur 4.1: Fritt opplagt plate avstivet med fjærer



Figur 4.2: Ytre spenninger

Som vist i figur 4.2 påføres platen en kombinasjon av spenninger bestående av $S_x(y)$, $S_y(x)$ og S_{xy} . Målet er da å finne en skalar Λ^{krit} , slik at den kritiske spenningen er lik den påsatte spenningen multiplisert med Λ^{krit} :

$$\sigma_x^{krit} = \Lambda^{krit} S_x(y) \quad (4.2)$$

$$\sigma_y^{krit} = \Lambda^{krit} S_y(x) \quad (4.3)$$

$$\tau_{xy}^{krit} = \Lambda^{krit} S_{xy} \quad (4.4)$$

Vi begrenser oss til at den påsatte aksialspenningen og spenning normalt på aksialretningen, er lineært varierende langs rendene til platen og skjærspenningen er konstant, som vist i figur 4.2. Spenningene normalt på randen kan skrives som

$$S_x(y) = S_x^1 + (S_x^2 - S_x^1) \frac{y}{b} \quad (4.5)$$

$$S_y(x) = S_y^1 + (S_y^2 - S_y^1) \frac{x}{L} \quad (4.6)$$

For å benytte Rayleigh-Ritz metoden må vi finne den potensielle energien til platen, når forskyvningen $w(x, y)$ er antatt. Den potensielle energien Π er

$$\Pi = U + T \quad (4.7)$$

der U er tøyingsenergi og T er potensialet til de ytre kreftene. I det generelle tilfellet der vi har et tre-dimensjonalt isotropisk legeme med overflate A og volum V er

$$U = \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.8)$$

$$T = \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA \quad (4.9)$$

der $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$ er de indre spenningene og $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$ er tøyningene. Forskyvningene i legemet er \mathbf{u} , mens \mathbf{t} er overflatespenningen.

I dette tilfellet vil tøyingsenergi oppstå som en følge av at både platen og fjærene deformerer seg. U er derfor sammensatt av tøyingsenergien fra fjærene og fra platen slik at

$$U = U_{fjærer} + U_{plate} \quad (4.10)$$

Tøyingsenergien til platen er avhengig av hele forskyvningsfeltet, mens tøyingsenergien til fjærene er knyttet til den vertikale forskyvningen langs linjen S , som vist i figur 4.1. Dette impliserer at begge bidragene til en viss grad er forbundet til hverandre gjennom $w(x, y)$. Hvis for eksempel stivheten til fjærene er svært stor, vil den vertikale forskyvningen langs S være liten. Dette påvirker tøyingsenergien U_{plate} til hele platen.

Den potensielle energien forårsaket av de ytre lastene kan deles opp et bidrag for hver lastkombinasjon. I dette tilfellet er det mulig å påføre tre forskjellige laster slik at

$$T = T_{S_x} + T_{S_y} + T_{S_{xy}} \quad (4.11)$$

der T_{S_x} , T_{S_y} og $T_{S_{xy}}$ er bidrag fra henholdsvis aksialspenning, spenning normalt på aksialretningen og skjærspenning.

Som vi senere skal se, blir den potensielle energien med det antatte forskyvningsfeltet på formen

$$\Pi = U + T = \frac{1}{2} a_{ij} K_{ijkl} a_{kl} + G(S_x, S_y, S_{xy}) \quad (4.12)$$

der K_{ijkl} er stivhetsmatrisen og $G(S_x, S_y, S_{xy})$ er en funksjon uavhengig av amplitudene a_{ij} . Ved å derivere denne likningen to ganger finner vi at

$$K_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} + \frac{\partial^2 T}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} = K_{ijkl}^M + K_{ijkl}^G \quad (4.13)$$

der K_{ijkl}^M og K_{ijkl}^G er henholdsvis material og en geometrisk stivhetsmatrise. Fra prinsippet om stasjonær potensiell energi får vi følgende likevektslikninger

$$(K_{ijkl}^M + K_{ijkl}^G) a_{kl} = 0 \quad (4.14)$$

I linearisert 2.ordens teori er koeffisientene i K_{ijkl}^G lineære med hensyn på de påsatte spenningene S_x , S_y og S_{xy} . Ved å sette inn likning 4.2-4.4 i den geometriske stivhetsmatrisen, oppnås følgende egenverdiproblem

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{ij}} = 0 \quad (4.15)$$

↓

$$(K_{ijkl}^M + \Lambda^e K_{ijkl}^G) da_{kl}^e = 0 \quad (4.16)$$

der Λ^e er egenverdi nummer e med tilhørende egenvektor da_{kl}^e . Antall egenverdier og egenvektorer for dette systemet er lik antall frihetsgrader. Etter at egenverdiene Λ^e er beregnet, finner vi knekklasten ved hjelp av likning 4.2-4.4. Knekklasten er gitt av den minste egenverdien. Den tilhørende knekkformen finnes fra likning 4.1, med egenvektoren da_{ij}^e innsatt.

4.2.2 Tøyningsenergien til platen

For å beregne tøyningsenergien til platen skriver vi om på likning 4.8. Det er svært vanlig å splitte opp U_{plate} i et bidrag fra membrantøyning og et fra bøy-
etøyning. Ved å benytte seg av Kirchhoffs antagelse [8], vil membrantøyningene

være konstant over tykkelsen, mens bidraget fra bøyning varierer lineært. Med denne antagelsen vil det ikke bli noen kobling mellom membrantøyninger og bøy-
etøyninger, siden koblingsleddene forsvinner ved integrasjon over tykkelsen, slik
at

$$\begin{aligned}
 U_{\text{plate}} &= \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\
 &= \int_V (\boldsymbol{\epsilon}^b + \boldsymbol{\epsilon}^m)^T (\boldsymbol{\sigma}^b + \boldsymbol{\sigma}^m) dV \\
 &= \int_V [(\boldsymbol{\epsilon}^b)^T \boldsymbol{\sigma}^b + (\boldsymbol{\epsilon}^m)^T \boldsymbol{\sigma}^m] dV \\
 &= U_{\text{plate}}^b + U_{\text{plate}}^m
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

De to bidragene kan derfor beregnes separat ved innsetning av Hookes lov, og de
kinematiske relasjonene i likning 2.26-2.31. For bøyingsenergien får vi

$$U_{\text{plate}}^b = \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^b [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2] dy dx \tag{4.18}$$

$$= \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^b [(w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xy}^2)] dx dy \tag{4.19}$$

Integralet i likning 4.19 kan utregnes eksakt med det antatte forskyvningsfeltet.
Resultatet som finnes i tillegg A består av kvadratiske ledd av amplituden a_{ij} .
Det betyr at bøyingsenergien gir bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell
energi, siden K_{ijkl} oppnås ved å derivere to ganger med hensyn på amplituden
 a_{ij} . For membrantøyningsenergien får vi

$$U_{\text{plate}}^m = \frac{t}{2E} \int_0^L \int_0^b [(\sigma_x^m + \sigma_y^m)^2 - 2(1-\nu)(\sigma_x^m\sigma_y^m - (\tau_{xy}^m)^2)] dy dx \tag{4.20}$$

$$= \frac{t}{2E} \int_0^L \int_0^b [(F_{,yy} + F_{,xx})^2 - 2(1-\nu)(F_{,x}F_{,y} - F_{,xy}^2)] dy dx \tag{4.21}$$

der $F(x, y)$ er Airys spenningsfunksjon. Denne funksjonen finnes ved å løse likning
2.51 med det antatte forskyvningsfeltet. Resultatet er utarbeidet i doktorgrads-
oppgaven til Byklum [9], og finnes i tillegg A. I en egenverdiberegning lineariseres
Airys spenningsfunksjon, slik at kvadratiske ledd av amplituden neglisjeres. Det
vil si at

$$F(x, y) = -S_x^1 \frac{y^2}{2} - (S_x^2 - S_x^1) \frac{y^3}{6s} - S_y^1 \frac{x^2}{2} - (S_y^2 - S_y^1) \frac{x^3}{6L} - S_{xy} xy \tag{4.22}$$

Denne funksjonen er uavhengig av amplituden. Følgelig gir ikke membrantøy-
ningene bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell energi, siden vi derivere to
ganger med hensyn på amplituden. Spenningsfunksjonen tilfredstiller også følgen-
de krav

$$\sigma_x^m = F_{,yy} = S_x \quad \sigma_y^m = F_{,xx} = S_y \quad \tau_{xy}^m = -F_{,xy} = S_{xy} \tag{4.23}$$

som viser at i linearisert 2.ordens teori er de indre spenningene konstant lik de ytre spenningene.

4.2.3 Tøyningsenergi p.g.a. fjærer

For fjærene forenkles likning 4.8 til

$$U_{\text{fjærer}} = \frac{1}{2} \int_S k w^2 ds \quad (4.24)$$

I bidrag fra fjæren må vi integrere langs linjen S i figur 4.1, der fjærene er spent fast. Dette integralet lar seg generelt ikke integrere eksakt, og vi må benytte numerisk integrasjon. For å gjennomføre denne integrasjonen er det enklest å parametrisere koordinatene langs linjen S:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\bar{x} \quad (4.25)$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\bar{x} \quad \text{der} \quad 0 < \bar{x} < 1 \quad (4.26)$$

Koordinatene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er definert i figur 4.1. Ved hjelp av denne parametriseringen kan vi foreta et variabelskifte i integralet i likning 4.24:

$$\begin{aligned} U_{\text{fjærer}} &= \int_S \frac{1}{2} k w[x, y]^2 ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} k w[x_1 + (x_2 - x_1)\bar{x}, y_1 + (y_2 - y_1)\bar{x}]^2 L_{\text{stiver}} d\bar{x} \\ &= \int_0^1 g[\bar{x}] d\bar{x} \end{aligned} \quad (4.27)$$

der $L_{\text{stiver}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ er lengden til avstivningen. For å integrere likning 4.27 benytter vi den numeriske integrasjonsreglen trapes-reglen [18] :

$$\begin{aligned} U_{\text{fjærer}} &= \int_0^1 g(\bar{x}) d\bar{x} \\ &= \frac{1}{2} g(0)h + h \sum_{i=1}^{n-1} g(ih) + \frac{1}{2} g(1)h \end{aligned} \quad (4.28)$$

der antall integrasjonspunkter er $(n + 1)$ og $h = \frac{1}{n}$.

4.2.4 Potensiell energi p.g.a ytre laster

Neste steg er å finne T, som er potensiell energi på grunn av ytre laster. Denne potensielle energien er lik arbeidet utført av de ytre kreftene. I det generelle

tilfellet, der et legeme er utsatt for en ytre spenning \mathbf{t} på overflaten S kan denne energien skrives som

$$T = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (4.29)$$

der \mathbf{u} er forskyvningsfeltet. Den potensielle energien til de ytre lastene kan deles opp i tre forskjellige bidrag, et for hver komponent av den påsatte spenningen

$$T = T_{S_x} + T_{S_y} + T_{S_{xy}} \quad (4.30)$$

For aksialspenningen S_x forenkles likning 4.29 til

$$T_{S_x} = \int_0^s \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} S_x \Delta u(y) dz dy \quad (4.31)$$

der $\Delta u(y)$ er endeforkortningen i x-retning. Hvis de ytre påsatte spenningene S_x er positive får vi en endeforkortning av platen. I samsvar med den kinematiske relasjonen i likning 2.29 kan endeforkortningen skrives som

$$\Delta u(y) = \int_0^L u_{,x}^m dx = \int_0^L (\epsilon_x^m - \frac{1}{2} w_{,x}^2) dx \quad (4.32)$$

Tilsvarende kan vises for de andre komponentene og tilsammen får vi

$$\begin{aligned} T &= T_{S_x} + T_{S_y} + T_{S_{xy}} \\ &= -\frac{t}{2} \int_0^L \int_0^b (S_x w_{,x}^2 + 2S_{xy} w_{,x} w_{,y} + S_y w_{,y}^2) dy dx \\ &\quad + t \int_0^L \int_0^b (S_x \epsilon_x^m + S_y \epsilon_y^m + S_{xy} \gamma_{xy}^m) dy dx \end{aligned} \quad (4.33)$$

Begge integralene kan utregnes eksakt ved hjelp av det antatte forskyvningsfeltet og Airys spenningsfunksjon $F(x, y)$. I en egenverdiberegning benyttes den lineariserte $F(x, y)$, som medfører at det siste integralet i likning 4.33 ikke er avhengig av amplituden a_{ij} . Dette integralet gir derfor ikke noe bidrag i en egenverdiberegning, siden det forsvinner ved derivasjon med hensyn på amplituden a_{ij} . Bidraget fra hver av de ytre lastene er utregnet i tillegg A.

4.2.5 Rotasjonsfjærer om linje S og langs rendene

I enkelte tilfeller ønsker vi å analysere en plate som ikke kan rotere fritt om linjen S eller langs randen. Platen kan for eksempel være fast innspent langs rendene. For å modellere dette kan rotasjonsfjærer benyttes for å stive opp platen. Fjærer med svært stor stivhet vil motvirke en rotasjon, og platen blir tilnærmet lik fast innspent. I andre tilfeller vil vi beskrive en kraftig stiver, som hindrer

rotasjon om linje S . Dette kan også modelleres med kraftige rotasjonsfjærer langs S . Tøyningsenergien T^{rot} forårsaket av en enkelt rotasjonsfjær er generelt

$$T^{rot} = \frac{1}{2} k^{rot} \beta^2 \quad (4.34)$$

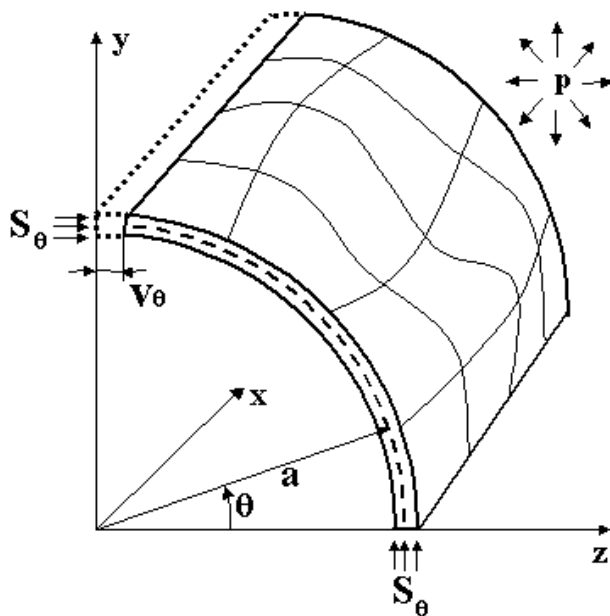
der k^{rot} er fjærstivheten og β er rotasjonen. Antagelsene om små forskyvninger og rotasjoner i platen medfører at rotasjonen i et punkt er lik den deriverte. Med rotasjonsfjærer langs randen $x = 0$, blir tøyningsenergien dermed

$$T_{x=0}^{rot} = \int_0^b \frac{1}{2} k_{x=0}^{rot} (w_{,x}^2)|_{x=0} dy \quad (4.35)$$

På tilsvarende måte kan tøyningsenergien til rotasjonsfjærene langs alle rendene settes opp. Uttrykkene er utarbeidet i tillegg A med det antatte forskyvningsfeltet $w(x, y)$. Langs rendene kan integralene regnes ut eksakt, men det er ikke tilfelle langs linje S . Da må numerisk integrasjon benyttes, på samme måte som for de avstivende fjærene i vertikalretningen. Hvis vi skal beskrive en rotasjon om linje S må den dekomponeres i rotasjon både om x - og y -aksen. Integralet blir derfor

$$T_S^{rot} = \int_S \frac{1}{2} k_S^{rot} w_{,n}^2 ds + \int_S \frac{1}{2} k_S^{rot} [(w_{,x} \mathbf{i} + w_{,y} \mathbf{j}) \cdot \mathbf{n}]^2 ds \quad (4.36)$$

Uttrykket $w_{,n}$ er den deriverte, k_S^{rot} er fjærstivheten og \mathbf{n} er en enhetsvektor normalt på linjen S . Vektorene \mathbf{i} og \mathbf{j} er enhetsvektorer i henholdsvis x - og y -retning.



Figur 4.3: En fjerdedels sylinder

4.3 Egenverdiberegning av sylindrisk skall

4.3.1 Modell og antagelser

Rayleigh-Ritz metoden kan anvendes i utallige eksempler. Kravet er at vi har lineært uavhengige formfunksjoner som tilfredstiller de essensielle randbetingelsene. Dette kravet kan være vanskelig å oppfylle i enkelte tilfeller. Nøyaktigheten til metoden er avhengig av formfunksjonenes evne til å beskrive forskyvningene i konstruksjonen. Derfor er det fordel å ha en viss anelse om formen til den deformerte konstruksjonen. I dette avsnittet benyttes Rayleigh-Ritz metoden til å finne egenverdien til et fritt opplagt, krumt skall. Skallet er en fjerdedel av en sylinder, som vist i figur 4.3. Det er derfor naturlig å velge formfunksjoner som løser differensiallikningen for sylindre i likning 2.64, og derfor antar forskyvningsfeltet

$$w_r(x, \theta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \sin\left(\frac{\pi x i}{L}\right) \sin(2j\theta) \quad \text{der} \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad (4.37)$$

Denne forskyvningen er null langs randen til skallet. I den totale forskyvningen w_r^{tot} i radiell retning må en forskyvning $w_r^{statisk}$ legges til. Dette skyldes at radiusen til skallet endres som en følge av Poissons tverrkontraksjonsforhold, slik at

$$w_r^{tot} = w_r^{statisk} + w_r \quad (4.38)$$

Hvis for eksempel skallet er belastet med en ren aksiallast vil radiusen øke, men $w_r^{statisk}$ har ingen betydning i en egenverdianalyse siden denne forskyvningen faller

bort i prinsippet om stasjonær energi. Videre i oppgaven ser vi derfor kun på det antatte forskyvningsfeltet w_r , som er knekkformen til skallet.

For å utvikle en egenverdmodell i dette problemet benytter vi teori hentet fra sylindriske skall i avsnitt 2.7. Fra dette avsnittet benytter vi Donnels kinematiske relasjoner fra likning 2.56-2.58 og Airys spenningsfunksjon for sylindre, som finnes i tillegg B. Med disse antagelsene atskiller ikke skallet i figur 4.3 seg mye fra en hel sylinder. Forskjellen er at det ikke er noen forskyvning radielt langs randen til skallet. Ved å kreve at forskyvningen i en sylinder tilfredstiller likning 4.37, med en vinkel θ som går over en hel periode, vil egenverdmodellene være identiske.

Skallet kan påføres aksialspenningen S_x , skjærspenning $S_{x\theta}$ og et ytre hydrostatisk trykk p . Etersom forskyvningene er små, kan vi tilnærme at det hydrostatiske trykket virker i radiell retning etter knekning, slik at trykkets retningen ikke endres. I det tilfellet der skallet er belastet med et ytre trykk, må en balanserende spenning S_θ være påsatt for å opprettholde likevekt. Denne spenningen er konstant i linearisert 2.ordens teori og kan finnes ved enkle likevektsbetraktninger i y- og z-retning av skallet i figur 4.3. Likevektslikningen blir

$$S_\theta t L \mathbf{j} = \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \theta \mathbf{j} a \, d\theta \, dx \quad (4.39)$$

$$S_\theta t L \mathbf{k} = \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \sin \theta \mathbf{k} a \, d\theta \, dx \quad (4.40)$$

der t er tykkelsen, L er lengden og a er radiusen til skallet. Vektorene \mathbf{j} og \mathbf{k} er enhetsvektorer i henholdsvis y- og z-retning. For at disse likningene skal være oppfylt må

$$S_\theta = \frac{a}{t} p \quad (4.41)$$

Som for platen i forrige avsnitt vil vi finne en skalarverdi Λ^{krit} , slik at den kritiske spenningen er

$$\sigma_x^{krit} = \Lambda^{krit} S_x \quad (4.42)$$

$$p^{krit} = \Lambda^{krit} p \quad (4.43)$$

$$\tau_{x\theta}^{krit} = \Lambda^{krit} S_{x\theta} \quad (4.44)$$

Denne belastningen tilfører skallet en potensiell energi Π som er

$$\Pi = U_{skall} + T \quad (4.45)$$

der U_{skall} er tøyingsenergien til skallet og T er den potensielle energien til de ytre kreftene. Egenverdiproblemet for skallet blir

$$(K_{ijkl}^M + \Lambda^e K_{ijkl}^G) da_{kl}^e = 0 \quad (4.46)$$

der

$$K_{ijkl}^M = \frac{\partial^2 U_{skall}}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \quad \text{og} \quad K_{ijkl}^G = \frac{\partial^2 T}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \quad (4.47)$$

Λ^e er egenverdi nummer e med tilhørende egenvektor da_{kl}^e

4.3.2 Tøyningsenergi

På tilsvarende måte som for en plate kan tøyningsenergien til et skall splittes opp i et bidrag fra bøyingsenergi U_{skall}^b og et fra membrantøyningsenergi U_{skall}^m , slik at

$$U_{skall} = U_{skall}^b + U_{skall}^m \quad (4.48)$$

I en egenverdiberegning for en plate har ikke U_{skall}^m innvirkning. Dette skyldes at den potensielle energien på grunn av membrantøyningene i linearisert 2.ordens teori er uavhengig av forskyvningen ut av planet. Bidraget forsvinner når vi deriverer med hensyn på amplituden a_{ij} i prinsippet om stasjonær potensiell energi. Dette er ikke tilfellet for en egenverdiberegning av et krumt skall. Krumningen av skallet gjør at U_{skall}^m er avhengig av den radielle forskyvningen også i linearisert 2.ordens teori. For å beregne U_{skall}^m benytter vi Airys spenningsfunksjon $F(x, \theta)$, som er regnet ut i tillegg B med det antatte forskyvningsfeltet. Skallets potensielle energi på grunn av membrantøyningsenergien er

$$\begin{aligned} U_{skall}^m &= \frac{aC}{2} \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sigma_x^m + \sigma_\theta^m)^2 - 2(1 - \nu)(\sigma_x^m \sigma_\theta^m - (\tau_{x\theta}^m)^2)] d\theta dx \quad (4.49) \\ &= \frac{aC}{2} \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(F_{,\theta\theta} + a^2 F_{,xx})^2 \\ &\quad - 2(1 - \nu)(a^2 F_{,\theta\theta} F_{,xx} - a^2 F_{,x\theta}^2)] d\theta dx \end{aligned} \quad (4.50)$$

Skallets potensielle energi på grunn av bøyning er

$$U_{skall}^b = \frac{aD}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^L [(w_{,xx} + \frac{w_{,\theta\theta}}{a^2})^2 - 2(1 - \nu)(w_{,xx} \frac{w_{,\theta\theta}}{a^2} - \frac{w_{,x\theta}^2}{a^2})] dx d\theta \quad (4.51)$$

Begge disse bidragene er utarbeidet i tillegg A.

4.3.3 Potensiell energi p.g.a ytre spenninger langs randen

Den potensielle energien til de ytre spenningene \mathbf{t} er lik arbeidet utført av spenningene, som generelt er

$$T = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (4.52)$$

der S er overflaten til legemet og \mathbf{u} er forskyvningene. For aksialspenningen blir dette

$$T_{S_x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t_{S_x} \Delta u(\theta) a d\theta \quad (4.53)$$

der $\Delta u(\theta)$ er endeforkortningen i x-retning og S_x er den påsatte spenningen. Ved hjelp av den kinematiske relasjonen i likning 2.56 finner vi at denne endeforkortningen er

$$\Delta u(\theta) = \int_0^L u_{,x}^m dx = \int_0^L (\epsilon_x^m - \frac{1}{2} w_{r,x}^2) dx \quad (4.54)$$

På tilsvarende måte kan den potensielle energien på grunn av de andre spennin-
gene utarbeides, og vi får tilsammen

$$\begin{aligned}
 T &= T_{S_x} + T_{S_\theta} + T_{S_{x\theta}} \\
 &= -\frac{t}{2} \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(S_x w_{,x}^2 + 2S_{x\theta} w_{r,x} w_{r,\theta} + S_\theta \left(\frac{w_{r,\theta}^2}{a^2} + 2\frac{w_r}{a} \right) \right) a \, d\theta \, dx \\
 &\quad + t \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} (S_x \epsilon_x^m + S_\theta \epsilon_\theta^m + S_{x\theta} \gamma_{x\theta}^m) a \, d\theta \, dx
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

der $S_\theta = \frac{a}{t}p$. Bidragene fra de ulike spenningskomponentene er utarbeidet i tillegg
B.

4.3.4 Potensiell energi p.g.a ytre hydrostatisk trykk

Med et ytre trykk p må en balanserende spenning $S_\theta = \frac{a}{t}p$ være påsatt for at skal-
let skal være i likevekt. Den potensielle energien på grunn av et ytre hydrostatisk
trykk er lik arbeidet dette trykket gjør på skallet som er

$$T_p = - \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} p w_r \, d\theta \, dx \tag{4.56}$$

Dette arbeidet gir ikke bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell energi, siden
det ikke inngår kvadratiske ledd av amplituden a_{ij} , som vist i tillegg B.

4.3.5 Rotasjonsfjærer langs rendene

På tilsvarende måte som for plater ønsker vi i enkelte tilfeller å analysere et skall
som ikke kan rotere fritt langs randen. Rotasjonene langs randen motvirkes ved
å legge inn rotasjonsfjærer. For fjærer langs randen $x = 0$, blir tøyingsarbeidet

$$U_{x=0}^{rot} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} k_{x=0}^{rot} (w_{,x}^2)|_{x=0} a \, d\theta \tag{4.57}$$

På tilsvarende måte kan tøyingsenergien på grunn av rotasjonsfjærer langs alle
rendene settes opp. Uttrykkene for tøyingsenergien til rotasjonsfjærene finnes i
tillegg B.

Kapittel 5

Verifikasjon av platemodellen

5.1 Innledning

I dette kapittelet skal platemodellen som ble utarbeidet i forrige kapittel verifiseres. For å prøve ut hvor gode tilnærmingene er, sammenliknes platemodellen med elementberegninger i Abaqus. I enkelte tilfeller er det også mulig å finne en analytisk løsning som kan benyttes til å kontrollere modellene.

5.2 Sammenlikning med analytisk løsning

Et eksempel der det er mulig å etablere en analytisk løsning er en fritt opplagt plate som er belastet med en aksialspenning og en spenning normalt på aksialretningen. Fra likning 2.47 har vi at differensiallikningen som beskriver forskyvningen $w(x, y)$ for en plate er

$$D\nabla^4 w = N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} \quad (5.1)$$

I linearisert 2. ordens teori antas spenningene å være konstante igjennom hele platen, slik at $N_x = tS_x$, $N_y = tS_y$ og $N_{xy} = 0$. Den kritiske spenningen finnes ved hjelp av den minste egenverdien Λ^{krit} :

$$\sigma_x^{krit} = -\Lambda^{krit} \frac{N_x}{t} = \Lambda^{krit} S_x \quad (5.2)$$

$$\sigma_y^{krit} = -\Lambda^{krit} \frac{N_y}{t} = \Lambda^{krit} S_y \quad (5.3)$$

der S_x og S_y er referansespenninger.

For å sammenlikne med platemodellen tillates kun løsninger av differensiallikningen som tilfredstiller grensebetingelsene. En fritt opplagt plate har ingen

forskyvning ut av planet langs randen. I tillegg må forskyvningsfeltet gjengi momentfri opplagring langs randen til platen. Matematisk kan dette skrives som

$$w = w_{,xx} = 0 \quad \text{når } x = 0 \text{ og } x = L \quad (5.4)$$

$$w = w_{,yy} = 0 \quad \text{når } y = 0 \text{ og } y = b \quad (5.5)$$

Dette medfører at løsningen må være på formen

$$w(x, y) = a_{ij} \sin\left(\frac{\pi i x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi j y}{b}\right) \quad (5.6)$$

der i og j er heltall og a_{ij} er amplituden. Forskyvningsfeltet har kun en frihetsgrad og ved å sette inn dette feltet i likning 5.1 finner vi at

$$D \left(\frac{(\pi i)^2}{L^2} + \frac{(\pi j)^2}{b^2} \right)^2 - \Lambda^e \left(S_x t \frac{(\pi i)^2}{L^2} + S_y t \frac{(\pi j)^2}{b^2} \right) = 0 \quad (5.7)$$

der Λ^e er egenverdi nummer e med en tilhørende knekkform. Problemet er nå redusert til å bestemme hvilke i og j som gir den minste egenverdien, slik at knekkspenningen til platen kan beregnes ved hjelp av likning 5.2-5.3.

Denne analytiske løsningen kan nå sammenliknes direkte med et egenverdi-problem som etableres med Rayleigh-Ritz metoden. Dette egenverdi-problemet blir

$$(K_{ij,kl}^M + \Lambda^e K_{ij,kl}^G) da_{kl}^e = 0 \quad (5.8)$$

↓

$$\left(\frac{\partial^2 U_{plate}^b}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} + \Lambda^e \frac{\partial^2 T}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \right) da_{kl}^e = 0 \quad (5.9)$$

↓

$$\left[\frac{D\pi^4 Lb}{4} \left(\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2 - \Lambda^e \left(S_x \frac{tb(i\pi)^2}{4L} + S_y \frac{tL(j\pi)^2}{4b} \right) \right] \delta_{ij,kl} da_{kl}^e = 0 \quad (5.10)$$

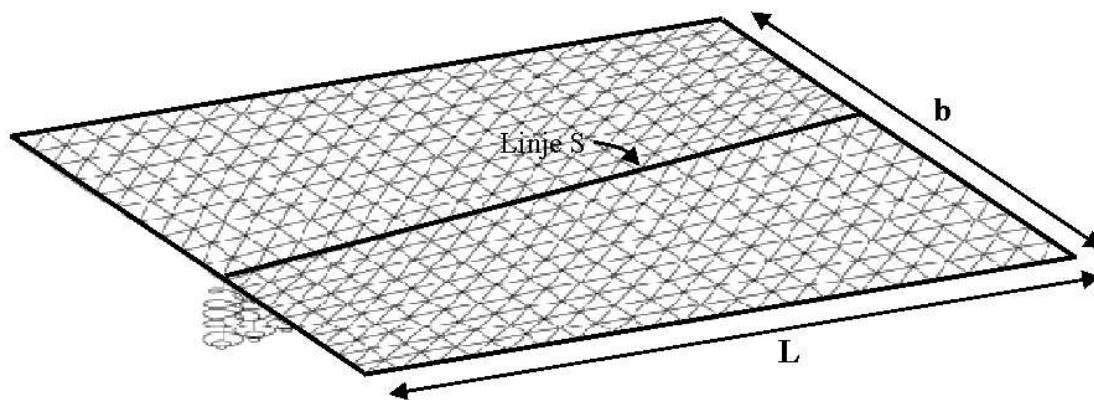
der $\delta_{ij,kl}$ er Kroneckers delta definert som følgende

$$\delta_{ij,kl} = \begin{cases} 1 & \text{hvis både } i = k \text{ og } j = l \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5.11)$$

Matrisen i dette likningsystemet er diagonal, som medfører at alle likningene i likningsystemet er fullstendig ukoblet. For å unngå den trivielle løsningen $da_{kl}^e = 0$ må vi kreve at likning 5.7 er oppfylt, hvilket betyr at vi får samme resultat. Dette impliserer at Rayleigh-Ritz metoden er eksakt i dette eksempelet. Egenverdiene og egenvektorene fra den analytiske løsningen og Rayleigh-Ritz metoden kan bestemmes ved følgende likning

$$\Lambda^e = \frac{D \left[\left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2 \right]^2}{S_x t \left(\frac{\pi i}{L} \right)^2 + S_y t \left(\frac{\pi j}{b} \right)^2} \quad (5.12)$$

Den minste av egenverdiene Λ^e gir knekkspenningen σ^{krit} , som finnes ved hjelp av likning 5.2-5.3



Figur 5.1: Elementmodell av plate avstivet med fjærer

5.3 Sammenlikning med elementanalyser

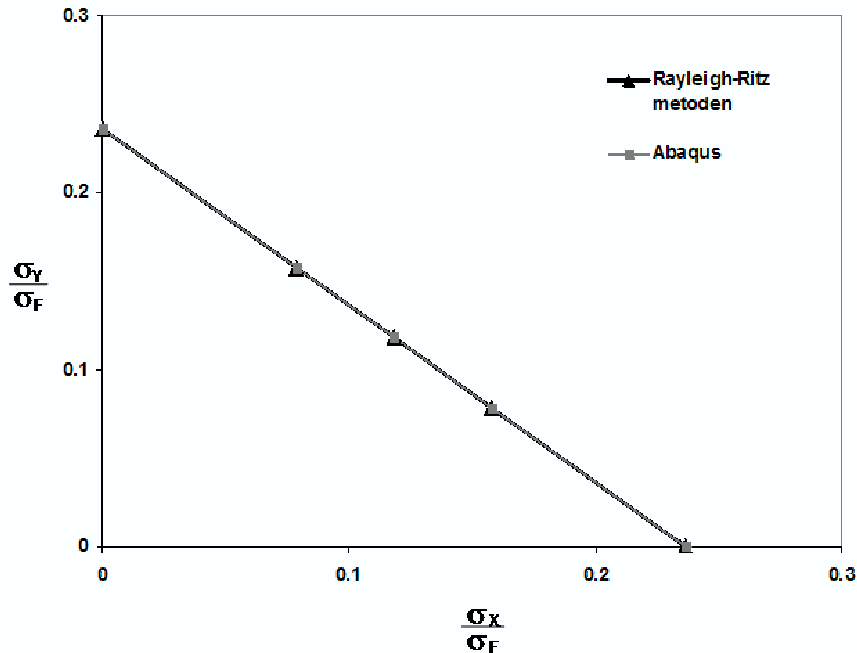
5.3.1 Innledning

I forrige avsnitt ble Rayleigh-Ritz metoden sammenliknet med en analytisk løsning for en flat plate. Slike analytiske uttrykk er vanskelig å etablere i de tilfellene der stivheten til fjærene langs linjen S i figur 5.1 eller rotasjonsfjærene ikke er null. Dette skyldes at det trengs flere enn et ledd i en Fourierrekke til å beskrive forskyvningene i platen. Dette er også tilfelle når platen er belastet med en skjærspenning eller lineært varierende normalspenninger. For å gjøre en verifisering av egenverdmodellen i disse spesielle tilfellene kan resultatene vurderes opp mot analyser med elementmetoden. I denne oppgaven benyttes dataprogrammet Abaqus for elementanalyser.

5.3.2 Elementmodell

Det er hensiktsmessig å lage en elementmodell, som er mest mulig lik den som blir brukt i egenverdiregningene med Rayleigh-Ritz metoden. Figur 5.1 viser geometrien til platemodellen. Platen er fritt opplagt og den har lengde L , bredde b og tykkelse t . Langs linjen S er det festet fjærer, som motvirker en vertikal forskyvning av platen. I elementmodellen benyttes trekantelementene STRI3 og fjærelementer som henholdvis beskriver platens og fjærenes elastiske oppførsel. Som nevnt tidligere bygger STRI3-elementene på den klassiske Kirchhoff teorien, som også benyttes i egenverdmodellen vår med Rayleigh-Ritz metoden.

I Rayleigh-Ritz metoden er forskyvningene glatte funksjoner. Fjærene er jevnt fordelt langs linje S med fjærstivhet k per lengdeenhet. I elementmodellen er hver fjær tilknyttet et knutepunkt. Fjærstivheten til disse fjærene må være ekvivalent med den som benyttes i Rayleigh-Ritz metoden. Lastene i begge modellen må også samsvare mest mulig. I elementmetoden må en påsatt spenning fordeles



Figur 5.2: Interaksjonskurver for den kvadratiske platen

som punktlaster til knutepunktene.

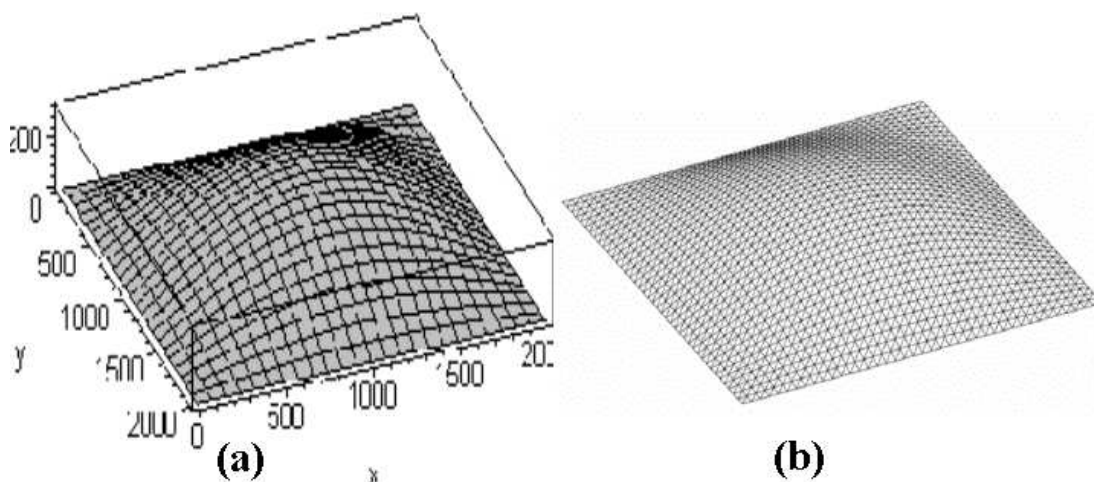
I dette kapitlet studeres to forskjellige typer randkrav. Platen kan være fritt opplagt eller fast innspent langs randen. Tilfellet der vi har fast innspenning kan for eksempel modelleres i Rayleigh-Ritz metoden ved å legge inn rotasjonsfjærer langs randen med svært stor stivhet. Rotasjonene til platen langs randen blir derfor så små at platen blir tilnærmet lik fast innspent. I dataprogrammet kan en uendelig stivhet modelleres ved å sette den lik den største verdien maskinen kan beherske. Denne verdien har ingen innvirkning på regnetiden til egenverdi-beregningen.

5.3.3 Fritt opplagt plate uten avstivning

Som en første kontroll velger vi det enkleste tilfellet som er en fritt opplagt plate uten avstivende fjærer. Dimensjonene til platen velges som følger

$$L = 2000\text{mm} \quad b = 2000\text{mm} \quad t = 20\text{mm} \quad (5.13)$$

En vanlig måte å fremstille resultater fra en egenverdianalyse av en plate er å lage kurver i σ_x - σ_y planet. Igjennom hele oppgaven refererer vi til slike kurver som interaksjonskurver. Vi må derfor gjøre beregninger med flere forskjellige lastkombinasjoner. Platen belastes med konstante referansespenninger S_x og S_y , som kombineres på ulike måter. Referansespenningene er definert som positive for

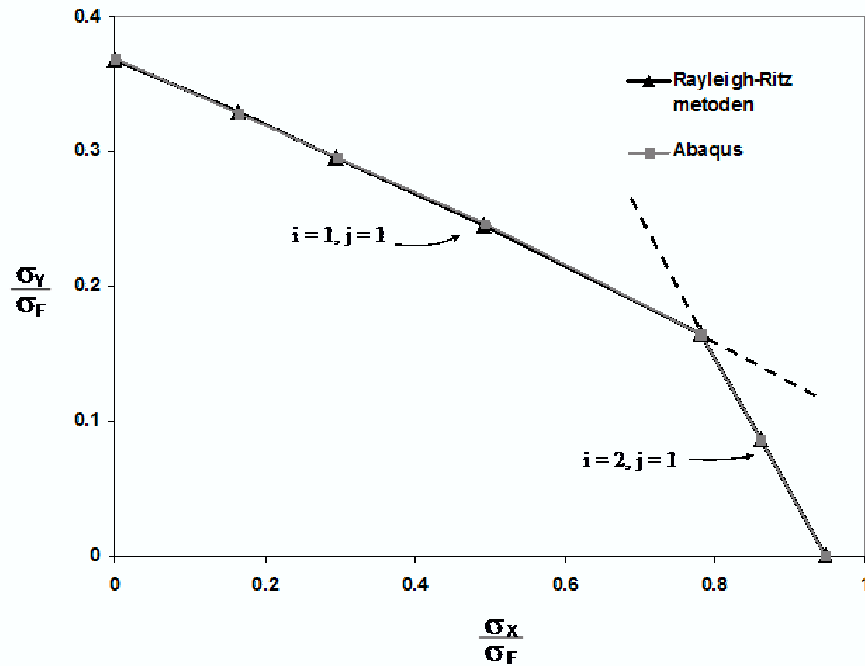


Figur 5.3: Knekkformen for den kvadratiske platen: (a) Rayleigh-Ritz metoden og (b) Abaqus

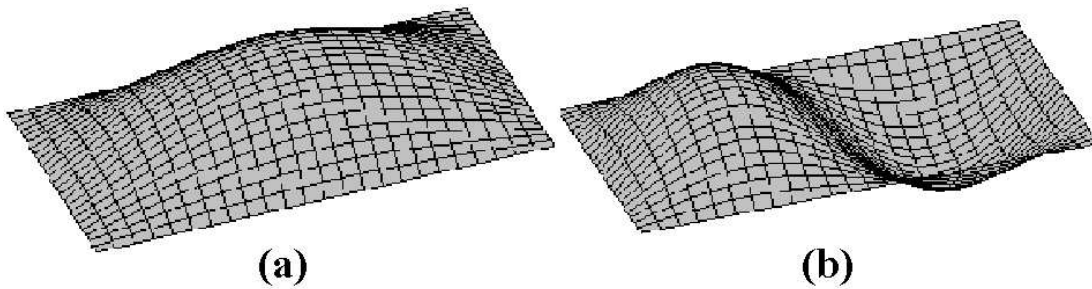
trykk og negative for strekk av platen. Igjenom hele oppgaven er belastningen trykkspenning, hvis ikke annet er oppgitt. For denne platen velges kombinasjonene

Referansespenninger :	S_x	S_y
Tilfelle 1 :	σ_F	0
Tilfelle 2 :	σ_F	$\frac{1}{2}\sigma_F$
Tilfelle 3 :	σ_F	σ_F
Tilfelle 4 :	$\frac{1}{2}\sigma_F$	σ_F
Tilfelle 5 :	0	σ_F

der $\sigma_F = 315 \text{ MPa}$ er flytespenningen til stålet i platen. Fra beregningene finner vi en kritisk verdi Λ^{krit} som bestemmer knekkspenningen. Λ^{krit} er den minste egenverdien og den tilhørende egenvektoren er knekkformen til platen. Resultatene fra analysene vises i figur 5.2. Figuren angir forholdet mellom flytespenningen og knekkspenningen ved forskjellige lastkombinasjoner. Kurvene er nesten sammenfallende for elementmetoden og Rayleigh-Ritz metoden i dette eksempelet. I dette tilfellet er Rayleigh-Ritz metoden eksakt, slik vi så i forrige avsnitt. Fra teori om elementmetoden vet vi at den konvergerer mot den eksakte løsningen, når antall elementer øker. En konstruksjon er stivere desto grovere elementinndeling. Elementmetoden konvergerer derfor ovenifra, og knekkspenningen beregnet i Abaqus ligger derfor over den eksakte løsningen. Dette forutsetter at vi benytter elementene STRI3, som bygger på den samme plateteorien. Kurvene antyder at det er en lineær sammenheng mellom de to spenningskomponentene til den kritiske lasten. Fra likning 5.7 har vi en analytisk løsning for den fritt opplagte platen. Likningen viser at dersom knekkformen ikke endrer seg (dvs i og j), er S_x og S_y lineært avhengige av hverandre. Det kan derfor være en grei kontroll



Figur 5.4: Interaksjonskurver for den rektangulære platen



Figur 5.5: Knekkformer for den rektangulære platen: (a) last normalt på aksialretningen og (b) aksiallast

å undersøke hvilken form platen har ved knekning. Ved en inspeksjon av disse formene finner vi at platen knekker i en halvbølge over både lengden og bredden, uansett lastkombinasjon. Dette er vist i figur 5.3, både for Rayleigh-Ritz modellen (a) og Abaqus-modellen (b).

Som vi så for den kvadratiske platen er det en lineær sammenheng mellom de pålagte lastene, siden knekkformen ikke endrer seg. For å øke forståelsen for hva som skjer når knekkformen forandrer form avhenging av S_x og S_y , betrakter vi en plate med rektangulær form. Dimensjonene velges nå til å være

$$L = 2000\text{mm} \quad b = 1000\text{mm} \quad t = 20\text{mm} \quad (5.14)$$

Interaksjonskurvene for analysene er presentert i figur 5.4. Den heltrukne linjen er knekkspenningen, mens den stiplede linjen er den analytiske løsningen til høyere ordens egenverdier. Også i dette tilfellet er Rayleigh-Ritz metoden eksakt, og elementmetoden konvergerer mot denne løsningen. Figuren viser at interaksjonskurven er stykkevis lineær. Kurven får en knekk for en bestemt kombinasjon av referansespenningene S_x og S_y . Ved å studere knekkformen til platen omkring dette punktet finner vi at den endrer seg. Formen til platen varierer fra en til to halvbølger i lengderetningen. Dette er illustrert i figur 5.5, der den ene platen (a) er belastet med spenning normalt på aksialretningen og den andre platen (b) med aksialspenning. For den analytiske løsningen i likning 5.7 tilsvarer dette at $i = 1$ eller $i = 2$.

5.3.4 Fritt opplagt plate med avstivning

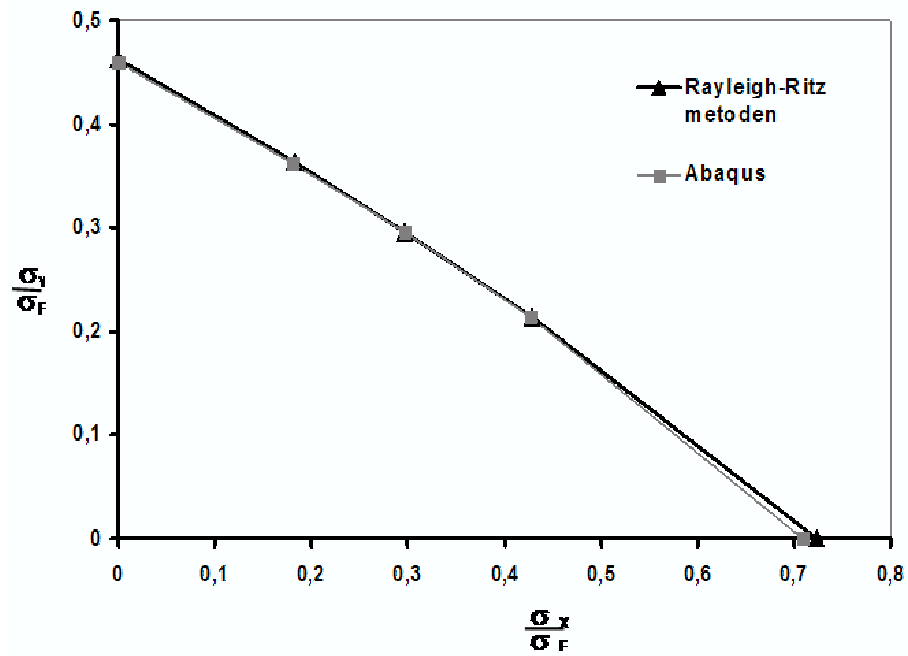
I de to foregående avsnittene studerte vi en fritt opplagt plate som kun var belastet med aksialspenning og spenning normalt på aksialretningen, der enkle analytiske løsninger eksisterte. Uttrykk ble etablert ved å sette inn et enkelt ledd fra Fourierrekkeløsningen i differensiallikningen for plater. Dette leddet måtte i tillegg tilfredstille randkravene. Slike enkle løsninger finnes ikke i mer kompliserte problemer, der vi trenger flere ledd for å beskrive forskyvningene. Da må numeriske beregninger som elementmetoden benyttes for å verifisere Rayleigh-Ritz modellen. Et eksempel der dette problemet oppstår er en plate avstivet med fjærer som vist i figur 5.1. I dette avsnittet skal vi analysere en slik plate. Vi kan benytte et forskyvningsfelt som består av mange ledd fra Fourierrekkeløsningen i Rayleigh-Ritz metoden. Dette gjør at forskyvningene kan beskrive virkeligheten bedre enn et enkelt ledd. For å illustrere dette betrakter vi en plate avstivet med fjærer, der fjærstivhet er uendelig stor. Dette medfører at det ikke er noen vertikal forskyvning langs avstivning. I en Fourierrekkeløsning må derfor leddene eliminere hverandre ut langs denne avstivningen, slik at $w(x, y)$ blir null. Dette er kun teoretisk mulig siden vi trenger uendelig mange ledd for å få til dette eksakt. Som en tilnærming benytter vi derfor et endelig antall ledd i Rayleigh-Ritz metoden. Hvert ledd tilsvarer en frihetsgrad på lik linje med frihetsgradene i elementmetoden. I denne analysen bruker vi 20 ledd, både i x- og y-retning, som betyr at vi har 400 frihetsgrader. Antall elementer som benyttes i elementmetoden er 3904. Dimensjonene til platen velges som følger

$$L = 2000\text{mm} \quad b = 2000\text{mm} \quad t = 20\text{mm} \quad (5.15)$$

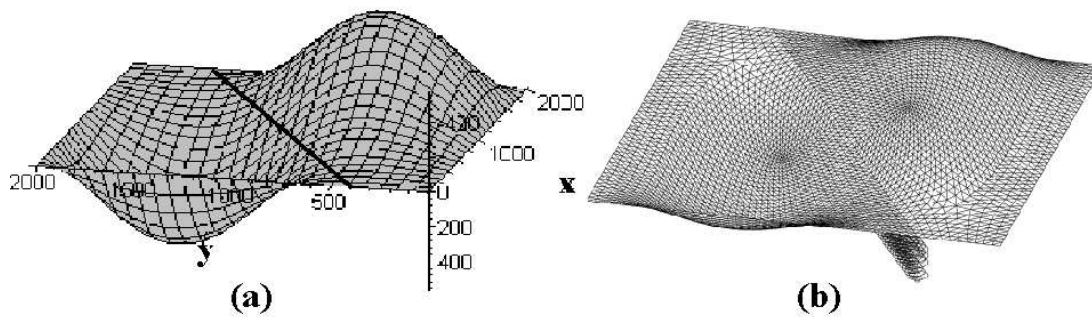
Linje S er definert av endepunktene til avstivningen, som vist i figur 4.1. Koordinatene til endene er som følger

$$(x_1, y_1) = (0, 400\text{mm}), \quad (x_2, y_2) = (2000\text{mm}, 1600\text{mm}) \quad (5.16)$$

Knekkformen til platen er vist i figur 5.7, både for Rayleigh-Ritz metoden (a) og elementmetoden (b). Vi ser at de vertikale forskyvningene omtrent er null langs



Figur 5.6: Interaksjonskurver for platen med avstivning på skrå



Figur 5.7: Knekkformen for platen med avstivning på skrå: (a) Rayleigh-Ritz metoden og (b) Abaqus

avstivningen, siden fjærstivheten er stor. I dette tilfellet er ikke Rayleigh-Ritz metoden eksakt, og vi kan derfor ikke forvente at knekkspenningen er lavere enn for elementmodellen i Abaqus, men de ligger svært nær hverandre. Interaksjonskurven som vist i figur 5.6 viser at løsningen fra Abaqus ligger lavere når vi har ren aksialspenning.

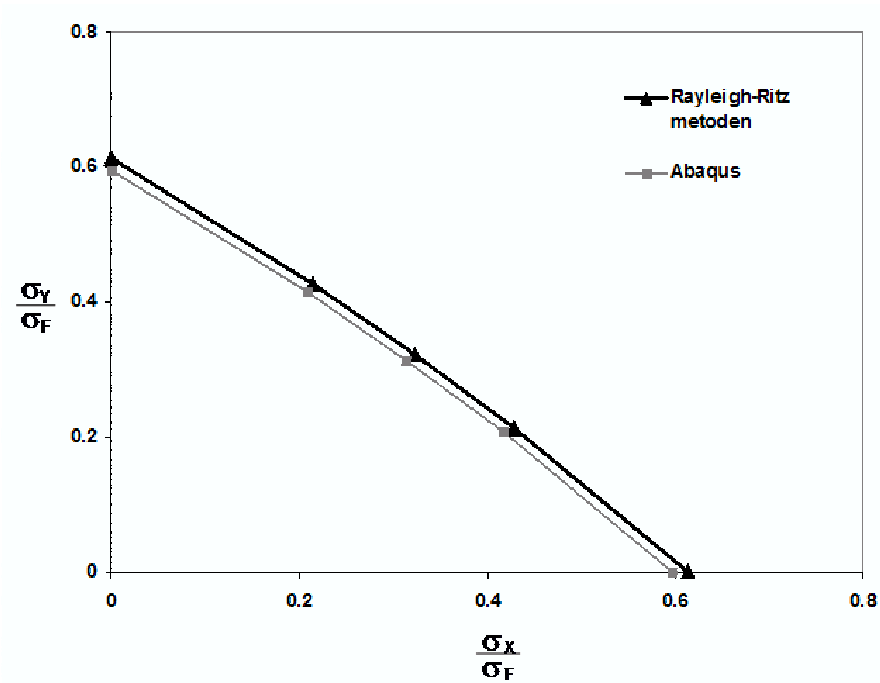
Det er også interessant å prøve ut Rayleigh-Ritz modellen der platen er belastet med ren skjærspenning. Ved å variere tykkelsen til platen blir resultatene som følger

	τ_{xy}^{krit}	τ_{xy}^{krit}
	Abaqus (MPa)	Rayleigh-Ritz metoden (MPa)
Platetykkelse 16mm :	150	151
Platetykkelse 17mm :	169	170
Platetykkelse 18mm :	189	190
Platetykkelse 19mm :	211	212
Platetykkelse 20mm :	233	235

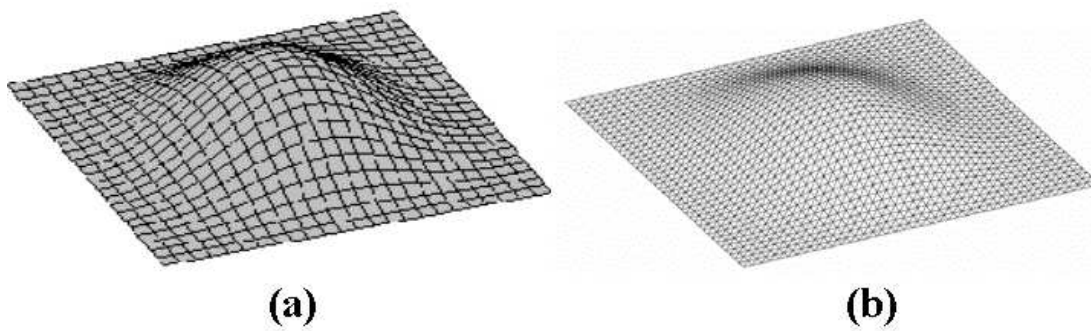
Også med en påsatt skjærspenning, samsvarer metodene godt med hverandre.

5.3.5 Fast innspent plate

Langs rendene til platen i Rayleigh-Ritz modellen er det mulig å innføre rotasjonsfjærer. Med en svært stor fjærstivhet vil platen tilnærmet lik være fast innspent. Med en fastinnpenning klarer ikke ett enkelt ledd fra Fourierrekkeløsningen å beskrive forskyvningsfeltet. Dette medfører at vi heller ikke i dette problemet kan finne en enkel analytisk løsning ved innsetning av en Fourierkomponent i differensiallikningen. Igjen benytter vi derfor elementprogrammet Abaqus for å verifisere modellen for egenverdiberegning. Ved å gjøre tilsvarende analyser som i forrige avsnitt finner vi interaksjonskurver som vist i figur 5.8. Knekkformen til platen illustreres i figur 5.9, både for Rayleigh-Ritz metoden (a) og for Abaqus (b). Interaksjonskurven viser at knekkspenningen i Abaqus er noe lavere enn den som blir beregnet i Rayleigh-Ritz metoden. Det kan være nyttig å inspisere om knekkformen er slik vi forventer. Knekkformene i figur 5.9 ser fornuftige ut, siden rotasjonene er små langs randen.



Figur 5.8: Interaksjonskurver for platen med fast innspenning



Figur 5.9: Knekkformen for platen med fast innspenning: (a) Rayleigh-Ritz metoden og (b) Abaqus

Kapittel 6

Verifikasjon av skallmodellen

6.1 Innledning

I dette kapittelet blir skallmodellen verifisert og sammenliknet med elementberegninger i Abaqus. I enkelte tilfeller skal analytisk løsninger benyttes til å kontrollere modellen.

6.2 Sammenlikning med analytisk løsning

For å finne en analytisk løsning for enkle tilfeller, kan differensiallikningene for en sylinder benyttes. Forskyvningene i en sylinder kan beskrives ved de tre likningene 2.62-2.64, der den siste av disse likningene er fullstendig koblet fra de andre. Denne likning styrer forskyvningene radielt og er

$$D\nabla^8 w_r + \frac{1-\nu^2}{a^2} C w_{r,xxxx} - \nabla^4 \left(N_x w_{r,xx} + \frac{2}{a} N_{x\theta} w_{r,x\theta} + \frac{1}{a^2} N_{\theta} w_{r,\theta\theta} \right) = 0 \quad (6.1)$$

Ideen er nå å finne løsningen til denne likningen for spesielle tilfeller og sammenlikne resultatene med egenverdiberegningen ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden. Enkle analytiske uttrykk kan etableres når de ytre lastene består av en kombinasjon mellom aksialspenning og hydrostatisk trykk. Vi vil finne en kritiske verdi Λ^{krit} , slik at knekkspenningen er

$$\sigma_x^{krit} = -\Lambda^{krit} \frac{N_x}{t} = \Lambda^{krit} S_x \quad (6.2)$$

$$p^{krit} = -\Lambda^{krit} \frac{N_{\theta}}{a} = \Lambda^{krit} p \quad (6.3)$$

der S_x og p er referansespenninger. Som tidligere i oppgaven, krever vi at den indre spenningen i ringretning er konstant, slik at $N_{\theta} = tS_{\theta} = -ap$. For å kunne

benytte teorien for et sylindrisk skall, vil vi kun tillate løsninger av differensiallikningen som tilfredstiller grensebetingelsene for skallmodellen. For et fritt opplagt skall må forskyvningen radielt langs randen være null. I tillegg må forskyvningsfeltet gjengi momentfri opplagring langs randen til skallet. Matematisk kan dette skrives som

$$w_r = w_{r,xx} = 0 \quad \text{når } x = 0 \text{ og } x = L \quad (6.4)$$

$$w_r = w_{r,\theta\theta} = 0 \quad \text{når } \theta = 0 \text{ og } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (6.5)$$

Dette medfører at løsningen må være på formen

$$w_r(x, y) = a_{ij} \sin\left(\frac{\pi i x}{L}\right) \sin(2j\theta) \quad (6.6)$$

Ved innsetning av likning 6.2-6.6 og den antatte løsningen i differensiallikningen oppnås

$$\begin{aligned} D \left(\frac{(\pi i)^2}{L^2} + \frac{(2j)^2}{a^2} \right)^4 + \frac{1 - \nu^2}{a^2} C \frac{(\pi i)^4}{L^4} \\ - \Lambda^e \left(S_x t \frac{(\pi i)^2}{L^2} + p a \frac{(2j)^2}{a^2} \right) \left(\frac{(\pi i)^2}{L^2} + \frac{(2j)^2}{a^2} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nå kan en egenverdi Λ^e beregnes for hver knekkform gitt av i og j . Den minste egenverdien gir knekklasten.

Med samme lastkombinasjon i en egenverdiregning ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden blir likningssystemet

$$(K_{ijkl}^M + \Lambda^e K_{ijkl}^G) da_{kl}^e = 0 \quad (6.8)$$

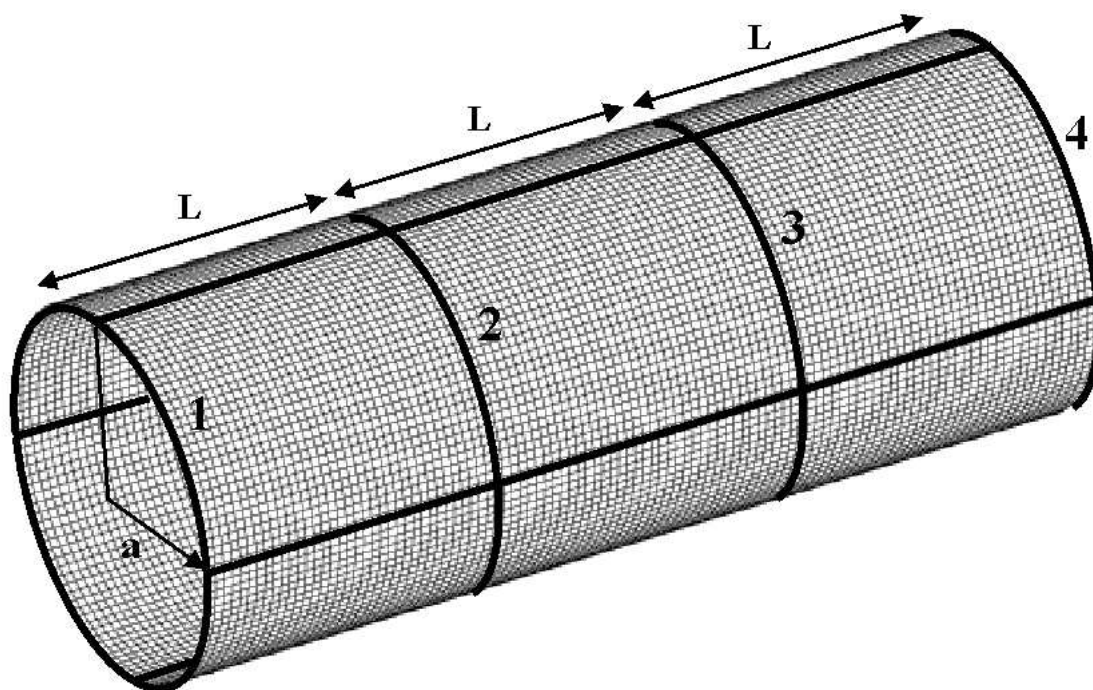
↓

$$\left(\frac{\partial^2 U_{skall}^b}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} + \frac{\partial^2 U_{skall}^m}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} + \Lambda^e \frac{\partial^2 T}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \right) da_{kl}^e = 0 \quad (6.9)$$

↓

$$\begin{aligned} \left[\frac{\pi}{8} D a L \left(\frac{(\pi i)^2}{L^2} + \frac{(2j)^2}{a^2} \right)^2 + \frac{\pi E t L}{8 a} \frac{(\frac{\pi i}{L})^4}{[(\frac{\pi i}{L})^2 + (\frac{2j}{a})^2]^2} \right. \\ \left. - \Lambda^e \left(p L j^2 \frac{\pi}{2} + S_x \frac{a t}{L} i^2 \frac{\pi^3}{8} \right) \right] \delta_{ij,kl} da_{kl}^e = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Tilsvarende som for platen er matrisen i dette likningssystemet diagonalt, hvilket medfører at hver likningene er uavhengig av hverandre. For å få ikke-trivielle løsninger må likning 6.7 være oppfylt. Dette betyr at begge fremgangsmåtene gir samme knekklasten og knekkformen.



Figur 6.1: Elementmodell av sylinder

6.3 Sammenlikning med elementanalyser

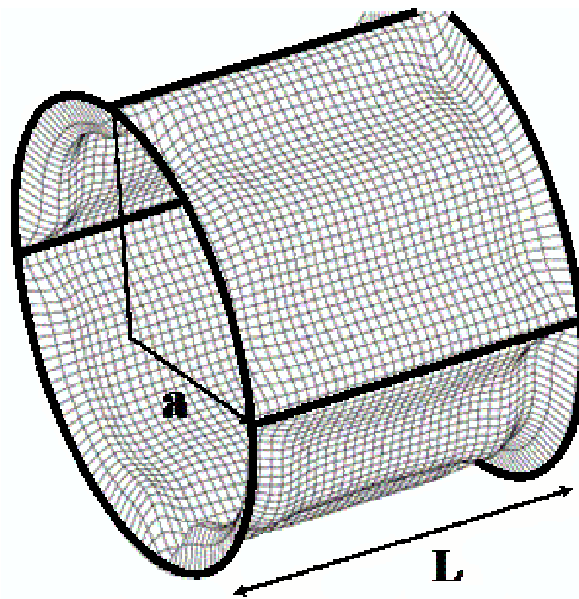
6.3.1 Innledning

I forrige avsnitt fant vi eksakte analytiske løsninger, der et fritt opplagt skall var belastet med aksialspenning S_x og et ytre hydrostatisk trykk p med en balanserende spenning $S_\theta = \frac{a}{t}p$ i ringretning. I dette avsnittet skal Rayleigh-Ritz modellen sammenliknes med elementanalyser i Abaqus. Dette er spesielt viktig i de tilfellene der enkle eksakte løsninger ikke finnes, som for et skjærbelastet skall eller et fast innspent skall.

6.3.2 Elementmodell

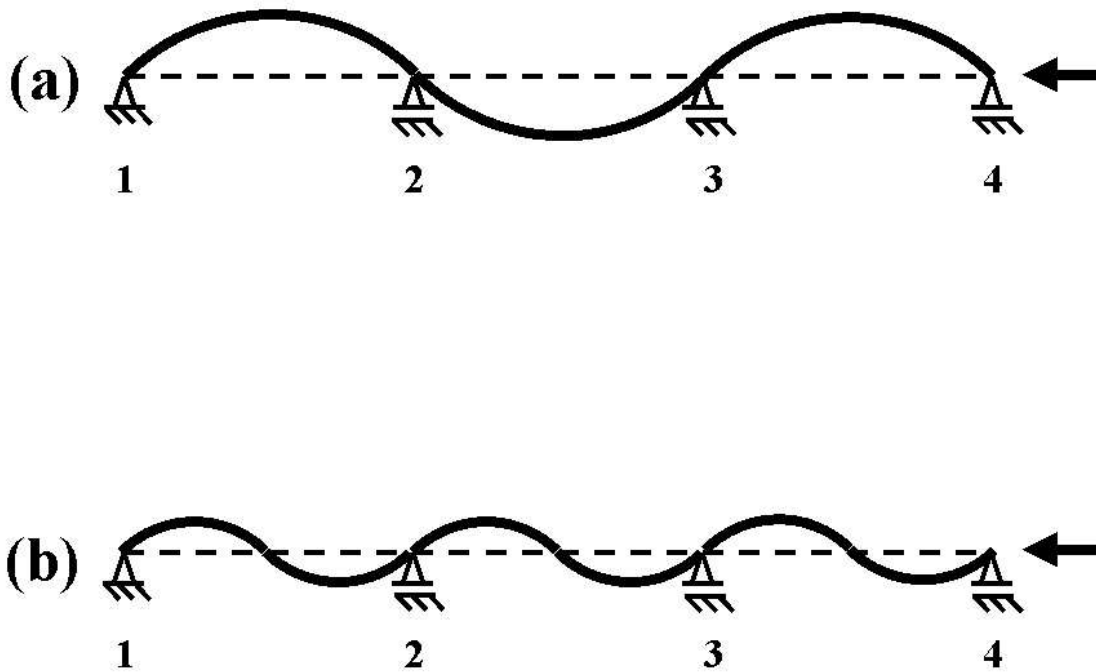
Det er hensiktsmessig at elementmodellen er mest mulig lik den som ble utarbeidet i Rayleigh-Ritz metoden. Bakgrunnsteorien i denne egenverdiberegningen er hentet fra sylindre, der vi benyttet Donnells kinematiske relasjonene og Airys spenningsfunksjon for sylindre. Som nevnt tidligere tilsvarer Rayleigh-Ritz modellen, en egenverdiberegning av hel sylinder med en radiell forskyvning på formen

$$w_r(x, \theta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \sin\left(\frac{\pi x i}{L}\right) \sin(2j\theta) \quad \text{der} \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \quad (6.11)$$



Figur 6.2: Første knekkform til en elementmodell som består av en sylinder med lengde L

Det er derfor naturlig å velge en hel sylinder som elementmodell, lik den som vist i figur 6.1. Modellen kan belastes, enten med en kombinasjon av en aksialspenning og et ytre hydrostatisk trykk, eller med ren skjærkraft. Ved pålastning av en aksialspenning vil sylinderens lengde bli mindre. Det medfører at radiusen øker, som en følge av Poissons tverrkontraksjonsforhold. Hvis radiusen holdes konstant kan ikke modellen gjenskape en ren aksialspenning. Vi må derfor tillate at radiusen kan variere avhengig av de ytre lastene. For å få samsvar med modellen utviklet i kapittel 4 krever vi at hvert punkt på de tykke linjene i figuren har samme avstand fra senteraksen til enhver tid. På den måten kan vi si at sylinderen i figur 6.1 består av tolv 90 graders sylindriske skall. Sylinderen er sammensatt av tre identiske sylindre med lengde L og radius a . Årsaken til at vi bruker en elementmodellen med tre sylindre er for å hindre uønskede ende-effekter. Med kun en enkel sylinder med lengde L blir knekkformen til den første egenverdien urealistisk. De radielle forskyvningene til denne knekkformen er størst langs endene til sylinderen, som vist i figur 6.2. Denne knekkformen vil ikke passe inn i en større geometri, som for eksempel hvis vi vil modellere overgangen fra bunnen til siden i et skip. For å løse dette problemet kan vi sette visse betingelser på rotasjonene i elementmodellen med tre sylindre. Disse betingelsene kan forklares ved å betrakte figur 6.3, der en bjelke knekker i en symmetrisk (a) og antisymmetrisk (b) form sett i forhold til bjelkens midtpunkt. Som for sylinderen er bjelken sammensatt av tre andre bjelker. Rotasjonen i opplager 1 og 3 til knekkform (a) er like, samt at rotasjonene 2 og 4 er like for den symmetriske formen. I den antisymmetriske knekkformen (b) er alle rotasjonene i opplagerene like. Dette er tilsvarende for



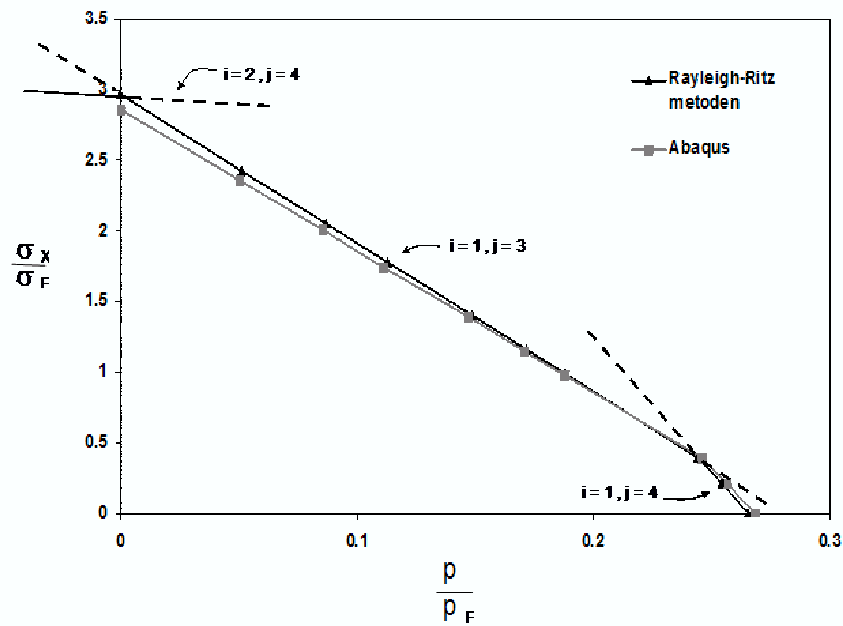
Figur 6.3: Symmetrisk (a) og antisymmetrisk (b) knekkform for en bjelke

synderen. For å tillate både symmetriske og antisymmetriske knekkformer for sylindere kan vi kreve at rotasjonene til punkt langs sirkel 1 i figur 6.1 er lik rotasjonene i et punkt med samme tverrsnittskoordinater i sirkel 3. På tilsvarende måte er rotasjonene til sirkel 2 og 4 like.

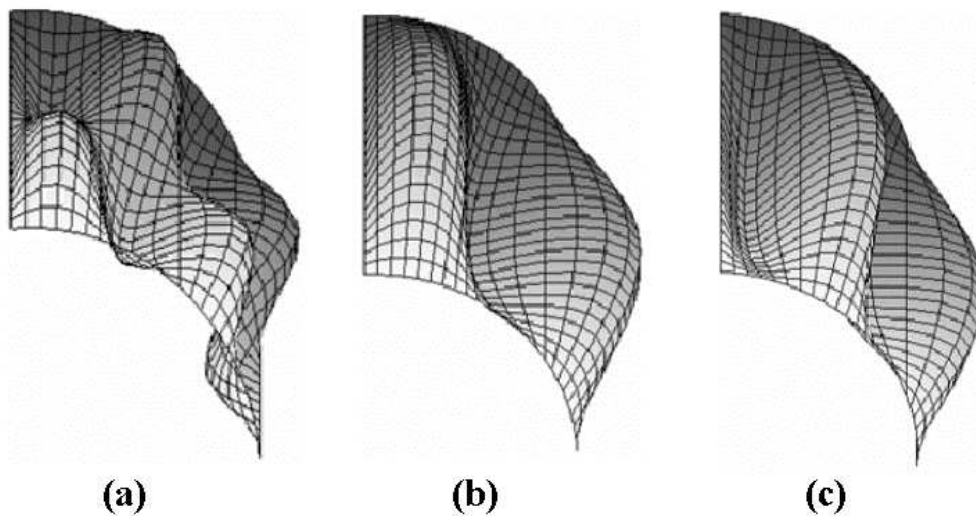
I kapittel 5 benyttet vi trekantelementet STRI3, som bygger på Love-Kirchhoffs skallteori. Vi analyserte en plate der avstivningen ikke lå parallelt med lengderetningen. Trekantelementer er best egnet til å dele inn en slik geometri i et elementnett, siden de kan beskrive en meget generell flate. Dette problemet oppstår ikke i elementmodellen med sylindere, og vi benytter derfor firkantelementet S4 i dette tilfellet. Elementklassen som S4 tilhører, er det generelle skall-element. Bakgrunnsteorien for denne klassen bygger på teori som er tilfredsstillende både for tykke og tynne skall. Skjærdeformasjoner blir ikke neglisjert, slik det blir i Love-Kirchhoffs skall teori. Dette forårsaker at resultatene i elementmetoden og Rayleigh-Ritz metoden avviker noe fra hverandre, men for tynne skall vil resultatene samsvare rimelig godt.

6.3.3 Sylinder belastet med aksialspenning og ytre trykk

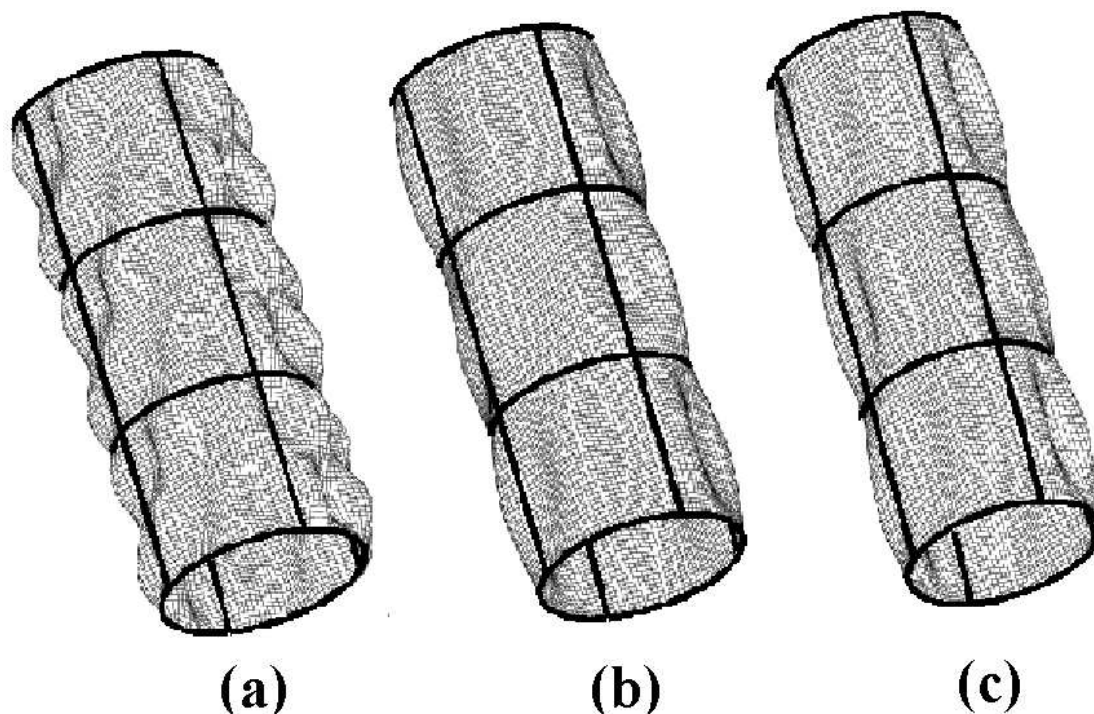
I forrige avsnitt viste det seg at Rayleigh-Ritz modellen var eksakt i henhold til teorien som ligger til grunn, hvis skallet belastes med kombinasjon av en aksialspenning og et ytre hydrostatisk trykk. Vi velger dette lasttilfellet som det første



Figur 6.4: Interaksjonskurver for skallet med $L=3400\text{mm}$, $a=2000\text{mm}$ og $t=15\text{mm}$



Figur 6.5: Knekkformen ved forskjellige belastninger for Rayleigh-Ritz modellen



Figur 6.6: Knekkformen ved forskjellige belastninger i Abaqus

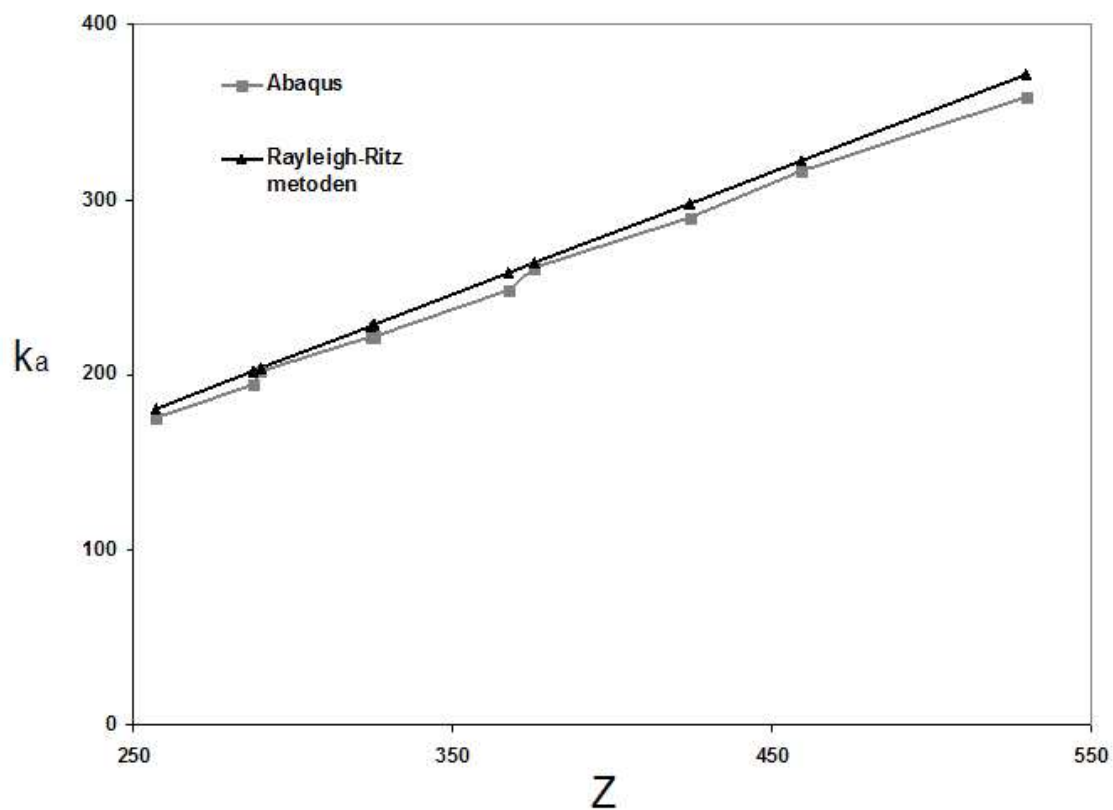
eksempelet i sammenlikningen. Dimensjonene til modellen er som følger

$$L = 3400\text{mm} \quad b = 2000\text{mm} \quad t = 15\text{mm} \quad (6.12)$$

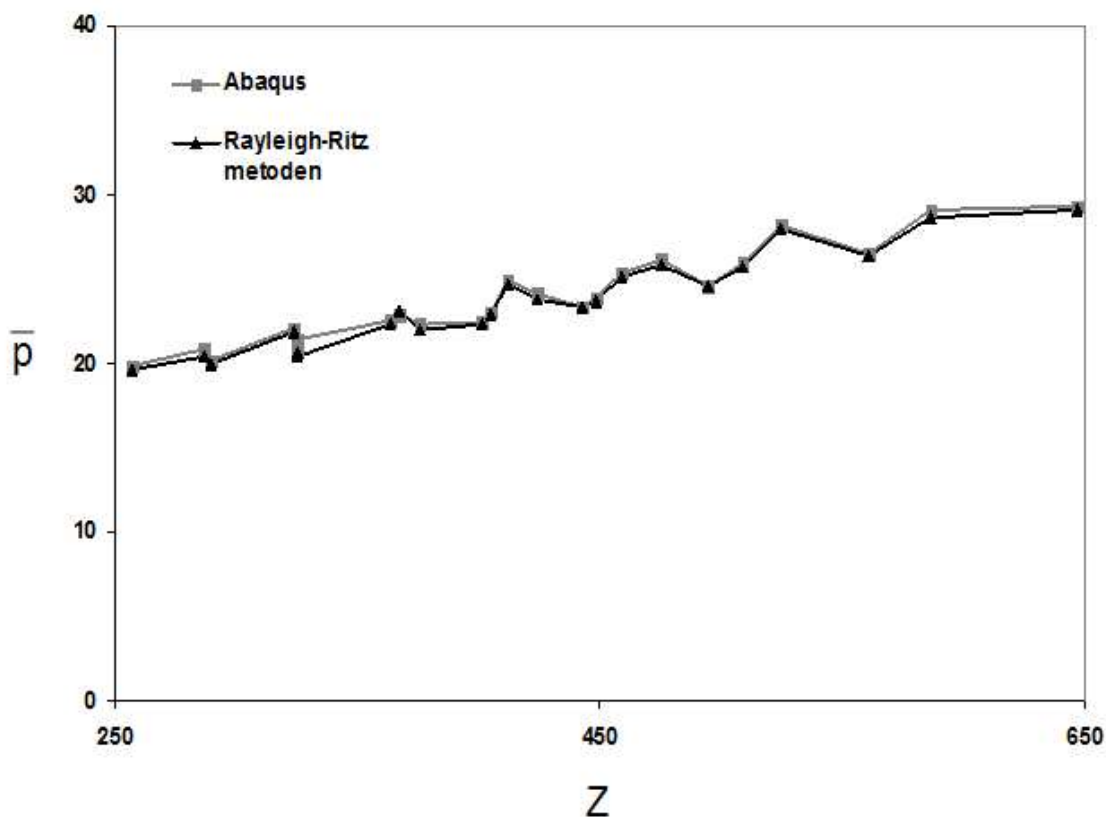
Ved hjelp av flytespenningen $\sigma_F = 315\text{MPa}$ definerer vi en størrelse p_F som er

$$p_F = \frac{t}{a} \sigma_F \quad (6.13)$$

I en statisk analyse av en sylinder belastet hydrostatisk trykk er p_F størrelsen på det ytre trykket, når spenningen i ringretning er lik flytespenningen. Vi kan nå angi et forhold mellom den elastiske knekkspenningen og flytespenningen til sylindere. Dette vises med interaksjonskurver i figur 6.4. Som for en flat plate er kurven stykkevis lineær. Dette skyldes at aksialspenningen S_x og det ytre trykket p er lineært avhengig av hverandre hvis i og j holdes konstante i likning 6.7. Den heltrukne svarte linjen viser Rayleigh-Ritz løsningen, som er lik den eksakte verdien. På linjen er det merket av antall sinus-halvbølger som skallet knekkform har for hver lastkombinasjon. De stiplede linjene representerer høyere ordens egenverdier. De forskjellige knekkformene er vist i figur 6.5 for Rayleigh-Ritz metoden og i figur 6.6 for Abaqus. Med en ren aksialbelastning har knekkformen to halvbølger i x-retning og fire i den sirkulære retningen (a). Omtrent med det samme et hydrostatisk trykk blir påført endres formen som vist i (b). Ved et rent hydrostatisk



Figur 6.7: Kritiske verdier for aksialspenningen til sylindre med forskjellige dimensjoner: $3200\text{mm} \leq L \leq 4200\text{mm}$, $13\text{mm} \leq t \leq 19\text{mm}$ og $a = 2000\text{mm}$



Figur 6.8: Kritiske verdier for ytre hydrostatisk trykk på sylindre med forskjellige dimensjoner: $3200\text{mm} \leq L \leq 4200\text{mm}$, $13\text{mm} \leq t \leq 19\text{mm}$ og $a = 2000\text{mm}$

trykk har knekkformen en halv sinus-bølge i x-retning og fire i ringretningen (c).

En annen vanlig måte å fremstille knekkspenningen til sylindren er vist i figur 6.7, der

$$k_a = \frac{L^2 t}{\pi^2 D} \sigma_x^{krit} \quad (6.14)$$

er en dimensjonsløs koeffisient for kritisk aksialspenning og

$$Z = \frac{L^2}{at} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (6.15)$$

Den dimensjonsløse parameteren Z blir ofte kalt for Batdorf parameteren. I en slik kurve kan mange forskjellige dimensjoner av sylindre presenteres i samme figur. I denne fremstillingen varierer lengden L mellom 3200mm og 4200mm , og tykkelsen mellom 13mm og 19mm , samt at radiusen a er konstant lik 2000mm . Dette er typiske dimensjoner til et sylindrisk skall i overgangen fra skipsside til bunnen i et skip. På tilsvarende måte kan kritiske verdier for et ytre hydrostatisk

trykk fremstilles ved hjelp av den dimensjonsløse parameteren

$$\bar{p} = \frac{L^2 a}{\pi^2 D} p^{krit} \quad (6.16)$$

Dette illustreres i figur 6.8.

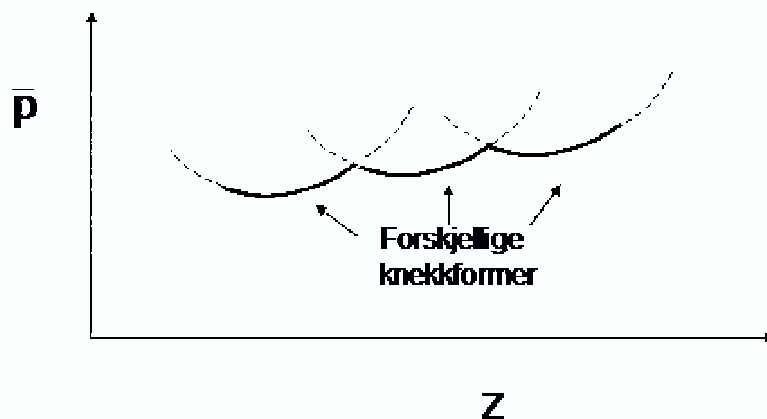
I de to foregående fremstillingene så vi hvordan knekkspenningen til sylindren endret seg med Batdorf parameteren. Resultatene i Rayleigh-Ritz metoden og elementmetoden er nesten sammenfallende når sylindre er belastet med en kombinasjon av en aksiallast og et ytre trykk. Parameteren Z går mot null når radiusen a går mot uendelig. De kritiske spenningskoeffisientene k_a og \bar{p} nærmerer seg da løsninger av egenverdiberegninger av en uendelig bred plate.

Kurvenes helning endres plutselig langs Z -aksen ettersom geometrien forandret seg. For å forklare denne egenskapen betrakter vi figur 6.9. I denne figur er det tre kurver med forskjellige knekkformer. Knekkspenningen eller den minste egenverdien er gitt av den heltrukne linjen i figuren. De stiplede linjene representerer høyere ordens egenverdier. Vi ser at ettersom Z varierer vil helning til den heltrukne kurven plutselig endres når knekkformen endres. Dette er årsaken til at kurven i figur 6.8 svinger opp og ned. Denne egenskapen er ikke like markert for kurven i figur 6.7 med aksialbelastede sylindre. Dette skyldes at mange av de høyere ordens egenverdiene ligger nær den minste egenverdien for en aksialbelastet sylinder, som vises i følgende tabell.

	Λ^{krit} med aksiallast	Λ^{krit} med ytre trykk
Egenverdi 1 :	2.968	0.6271
Egenverdi 2 :	2.968	0.6656
Egenverdi 3 :	2.968	0.8680
Egenverdi 4 :	2.970	1.2070
Egenverdi 5 :	2.970	1.4540
Egenverdi 10 :	2.979	2.0190

Til hver av de høyere ordens egenverdiene er det en tilhørende egenvektor som bestemmer formen. Denne formen kan representeres i tilsvarende kurver som i figur 6.9. Siden de høyere ordens egenverdiene for en aksialbelastet sylinder ligger tett, vil ikke knekklasten endres like markert ettersom knekkformen endres langs Z -aksen.

Ettersom egenverdiene for den aksialbelastet sylindren ligger nær hverandre kan vi ikke forvente oss at knekkformen i Rayleigh-Ritz modellen og Abaqus likner på hverandre, slik det gjorde i det foregående eksempelet. Vi må også være påpasselige når knekkformen benyttes som imperfeksjon i en ikke-lineær knekningsanalyse. En vanlig rutine for å finne kapasiteten til en plate er å benytte knekkformen til den laveste egenverdien som imperfeksjon. Det er som oftest



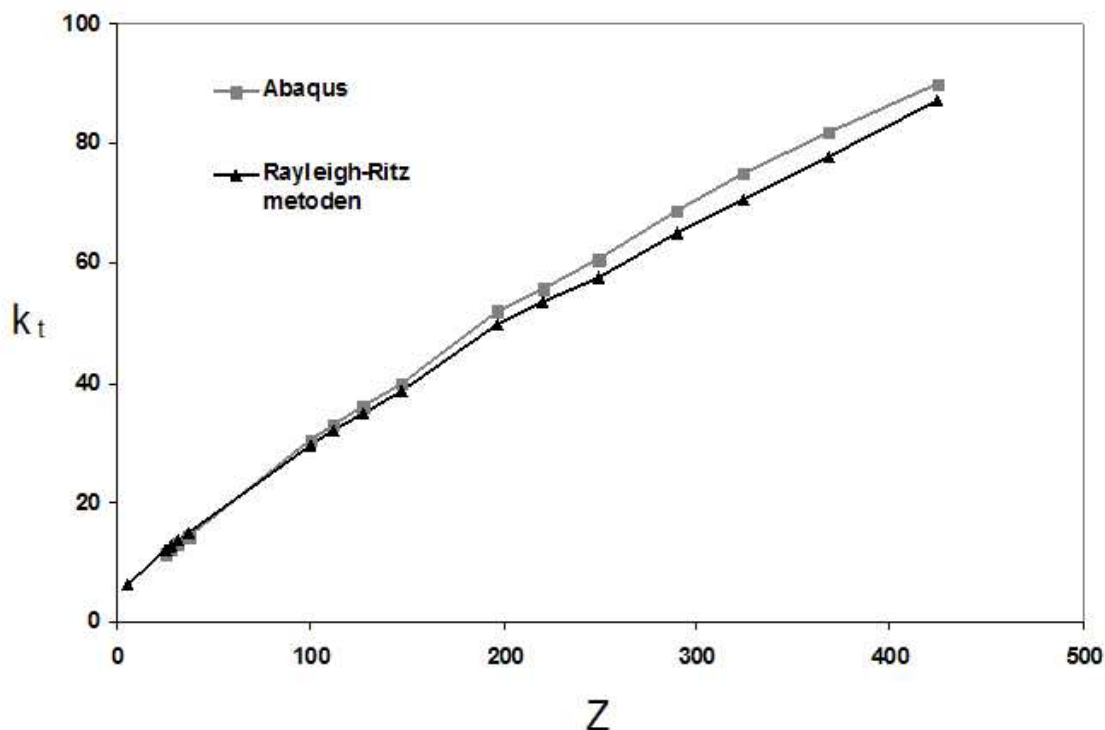
Figur 6.9: Den heltrukne kurven er kritiske knekkklaster og de stiplede kurvene representerer høyere ordens egenverdier

denne formen som gir lavest kapasitet og denne analysen gir derfor platens maksimale evne til å ta opp en ytre belastning. Dette er ikke tilfelle for en sylinder der egenverdiene ligger forholdsvis tett. For å estimere sylinderens kapasitet må vi også utføre ulike ikke-lineære analyser med høyere ordens knekkformer som imperfeksjoner. Den analysen som gir lavest kapasitet defineres som sylinderens kapasitet. Dette problemet er ikke videre analysert i denne oppgaven.

I en egenverdianalyse finner vi at knekkspenningen beregnet i Abaqus ikke alltid ligger over Rayleigh-Ritz metoden, som i dette tilfellet er eksakt i henhold til Love-Kirchhoff plateteori. Dette skyldes at vi benytter element $S4$, som er utviklet med en annen plateteori. Denne teorien tar hensyn til skjærdeformasjoner og den gir gode resultater både for tykke og tynne skall. Mer informasjon og bakgrunnsteori for dette elementet er å finne i teorimanualen til Abaqus [2].

6.3.4 Sylinder belastet med skjærspenning

For en sylinder belastet med en aksialspenning og et hydrostatisk trykk, fant vi en eksakt analytisk løsning ved innsetning av komponent fra Fourierrekkeløsningen til differensiallikningen. Med en skjærbelastning klarer ikke en enkel komponent å beskrive forskyvningsfeltet tilfredsstillende. Det er derfor vanskelig å finne en analytisk løsning. Igjen benytter vi derfor en elementmodell for å verifisere Rayleigh-Ritz modellen. I forrige avsnitt benyttet vi elementmodell bestående av tre sylindre, for å få knekkformer som passet inn i en større modell. Dette problemet oppstår ikke når kun skjærspenning er påsatt elementmodellen med en sylinder. Det er derfor ikke nødvendig å bruke tre sylindre i dette lasttilfellet.

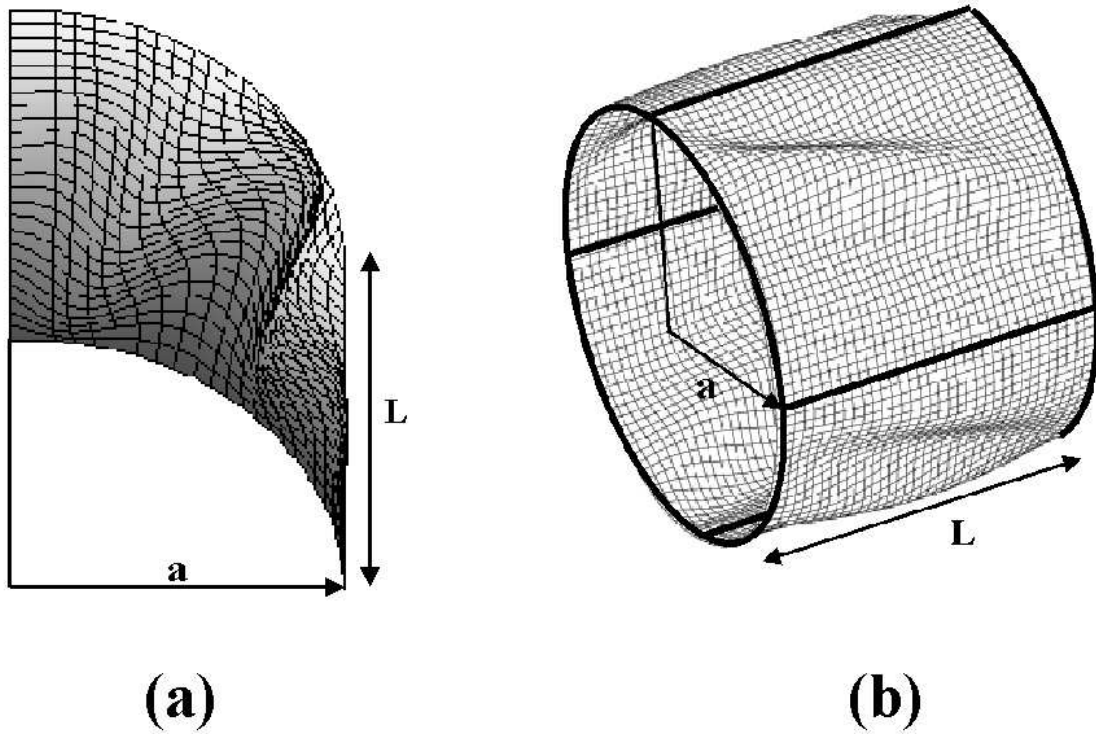


Figur 6.10: Kritiske verdier for skjærspenningen for sylindre med forskjellige dimensjoner: $3200\text{mm} \leq L \leq 4200\text{mm}$, $13\text{mm} \leq t \leq 19\text{mm}$ og $a = 2000\text{mm}$

På tilsvarende måte som for aksialspenningen og det hydrostatiske trykket kan kritisk skjærspenning fremstilles med en dimensjonsløs koeffisient k_t som er

$$k_t = \frac{L^2 t}{\pi^2 D} \tau_{x\theta}^{krit} \quad (6.17)$$

Dette vises i figur 6.10. Kurvene ligger nær hverandre også med en ren skjærbelastning. Parameteren Z går mot null når radiusen a går mot uendelig. Den kritiske spenningskoeffisientene k_t nærmer seg da løsningen av en egenverdiregning av en uendelig bred plate belastet med skjærspenning. Figur 6.11 presenterer knekkformen for både for Rayleigh-Ritz metoden (a) og Abaqus (b). Ved å sammenlikne en fjerdedel av cylinderen i Abaqus med skallet i Rayleigh-Ritz modellen ser vi at knekkformene er svært like.



Figur 6.11: Knekkformen til sylindren med en skjærbelastning der $L = 3400\text{mm}$, $a = 2000\text{mm}$ og $t = 15\text{mm}$: (a) Rayleigh-Ritz metoden og (b) Abaqus

Kapittel 7

Anvendelse av platemodell

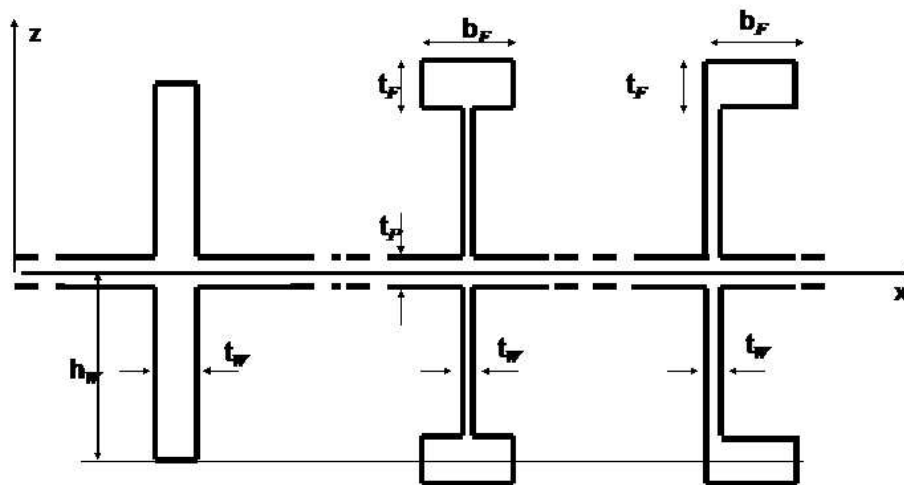
7.1 Innledning

I dette kapittelet skal en egenverdiberegning med Rayleigh-Ritz metoden for en plate vurderes opp mot elementberegninger av en plate med en reell stiver, slik vi finner i skipsskrog.

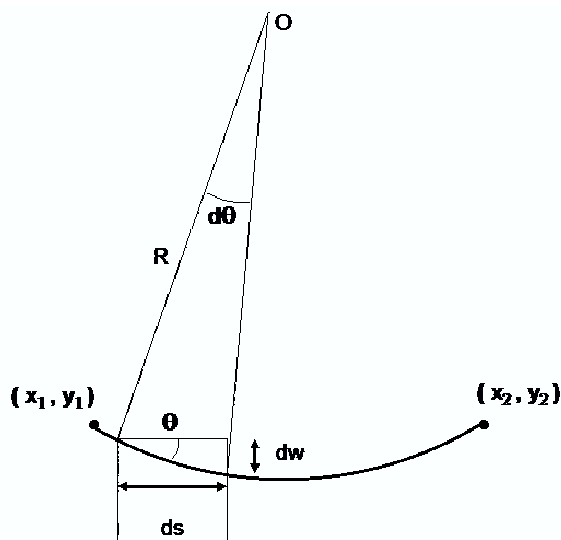
7.2 Modifisert modell

7.2.1 Motivasjon for å modifisere modellen

I virkeligheten ønsker vi å beskrive reelle stivere som finnes i skip. For enkelhetens skyld betraktes stivere som er symmetriske, som vist i figur 7.1. I dette tilfellet vil nøytralflaten ligge midt i platen. Hvis vi har stivere kun på den ene siden av platen blir problemet mer komplisert, siden nøytralplanet ikke ligger midt i platen. Det finnes mange forskjellige profiler på stivere som benyttes i dag. Figuren viser en I-profil, L-profil og en T-profil, som er svært vanlige i skip. Til nå har vi modellert en stiver med fjærer som motvirket vertikal forskyvning av platen. I modellen med fjærer kan det være vanskelig å bestemme en fjærstivhet som beskriver en reell stiver. Vi har kun sett på det spesielle tilfellet der avstivningen er så kraftig at nedbøyningen til platen blir liten langs avstivningen, som kan modelleres med en svært stor fjærstivhet. Dette kan klassifiseres som en lokal knekkform. Denne formen oppstår når det er en ustabilitet i platen som medfører at konstruksjonen knekker. Når en konstruksjon knekker globalt skyldes det ustabilitet både i platen og stiveren. I en slik knekkform vil ikke forskyvningene til stiveren ut av planet være små. Det blir nå problematisk å bestemme en fjærkonstant som modellerer den reelle stiveren. For å kunne gjøre en mer direkte sammenlikning med en reell stiver velger vi å modifisere Rayleigh-Ritz modellen. Vi modifiserer modellen ved å bytte ut fjærene med en bjelke med en bøyestivhet EI . Ved å la bjelken



Figur 7.1: Forskjellige stivertyper



Figur 7.2: stiver i deformert tilstand

ha samme arealtrehetsmoment som stiveren i elementmetoden blir det en mer direkte sammenlikning enn om vi benyttet avstivende fjærer.

7.2.2 Modifisering av modell

I Rayleigh-Ritz modellen kan vi ta hensyn til bjelkens avstivning, ved å legge til bidrag fra bjelkens tøyingsenergi. Forskyvningene og krumningene i bjelken er lik platens forskyvning langs linje S . I en slik modell kan ordinær bjelketeori benyttes for å ta hensyn til stiveren. Vi betrakter derfor bjelken i figur 7.2. Bjelken stiver av platen langs linjen S på tilsvarende måte som modellen utviklet

i kapittel 4. Ved å anta små rotasjoner er lengden ds i figuren

$$ds = R d\theta \quad (7.1)$$

der R er krumningsradiusen og $d\theta$ er en liten vinkel. Ved en omskrivning blir dette

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} \quad (7.2)$$

For små rotasjoner er $\theta = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\nabla w \cdot \mathbf{s}$, der \mathbf{s} er en enhetsvektor i stiverens retning. Vi kan da finne at krumningen κ_S til bjelken er

$$\begin{aligned} \kappa_S &= \frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ &= \frac{[(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

der (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er koordinatene til endepunktene til avstivningen. Tillegget i den potensielle energien på grunn av avstivningen er lik bøyingsenergien til bjelken som er

$$\begin{aligned} U_{\text{bjelke}}^b &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_S^b \epsilon_S^b dV = \frac{1}{2} \int_S EI \frac{1}{R^2} dS \\ &= \frac{1}{2} \int_S EI \left(\frac{(x_2 - x_1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (y_2 - y_1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right)^2 dS \end{aligned} \quad (7.4)$$

der σ_S^b og ϵ_S^b henholdsvis er bøyepeningen og bøyetøyningen i stiverens retning og w er det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1. Dette integralet lar seg generelt ikke løse eksakt, og numerisk integrasjon må benyttes. Som for avstivningen med fjærer benytter vi trapes-regelen for numerisk integrasjon.

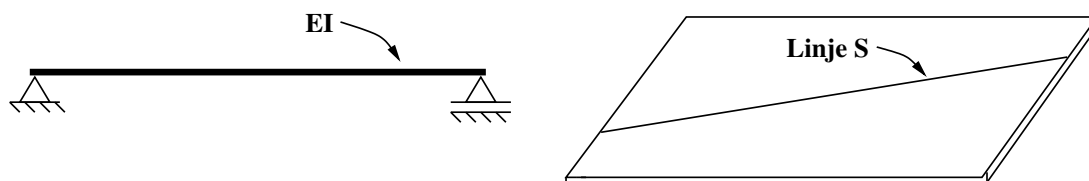
I den modifiserte modellen må arealtreghetsmomentet til stiveren oppgis, istedenfor en fjærstivhet. Begge modellene gir samme resultat når fjærstivheten og bøyestivheten blir svært stor.

I det tilfellet der vi vil modellere en plate med stivere kun på den ene siden, kan vi benytte oss av empiriske regelverk, for å bestemme den effektive bøyestivheten til bjelken. Skipsreglene til DNV [28] er et eksempel på et regelverk med koder som kan anvendes til dette.

7.3 Sammenlikning med elementmetoden

7.3.1 Innledning

I dette avsnittet skal den modifiserte Rayleigh-Ritz modellen sammenliknes med elementanalyser ved hjelp av Abaqus. I denne utprøvingen velger vi å benytte



Figur 7.3: Elementmodell 1

to forskjellige elementmodeller, som henholdsvis refereres til som elementmodell 1 og 2. Platen i elementmodell 1 er avstivet med en bjelke på samme måte som den modifiserte Rayleigh-Ritz modellen. Denne elementmodellen benyttes til å verifisere om implementeringen er korrekt. Elementmodell 2 har en reell stiver, slik et vi kan sammenlikne den modifiserte modellen med avstivede plater som finnes i virkeligheten.

7.3.2 Sammenlikning med elementmodell 1

Det er hensiktsmessig å begynne med en modell, som er mest mulig lik Rayleigh-Ritz modellen. Elementmodell 1 består både av en plate og en bjelke, som begge er fritt opplagte. Dette er vist i figur 7.3. Vi benytter som før elementtypen *STR13* i platen. Bjelkeelementet er *B33*, som er beskrevet mer detaljert i teorimanualen til Abaqus [2]. Bjelken og linje *S* er like lange, og har samme plassering. Frihetsgradene til bjelken er avhengig av frihetsgradene langs linje *S* i platen, slik at deformasjonene og krumningene er like. Ved en nedbøyning av linje *S*, vil også bjelken deformere seg. På den måten blir platen avstivet. Formålet med denne elementmodellen er å verifisere at den modifiserte Rayleigh-Ritz modellen er implementert korrekt i Fortran. Ved utprøving av forskjellige platedimensjoner og bøyestivheter til bjelken finner vi at elementmodell 1 og Rayleigh-Ritz modellen samsvarer godt med hverandre. Figur 7.4 viser interaksjonskurvene til en slik sammenlikning. I denne analysen var dimensjonen på platen som følgende

$$L = 2000mm \quad b = 2000mm \quad t = 20mm \quad (7.5)$$

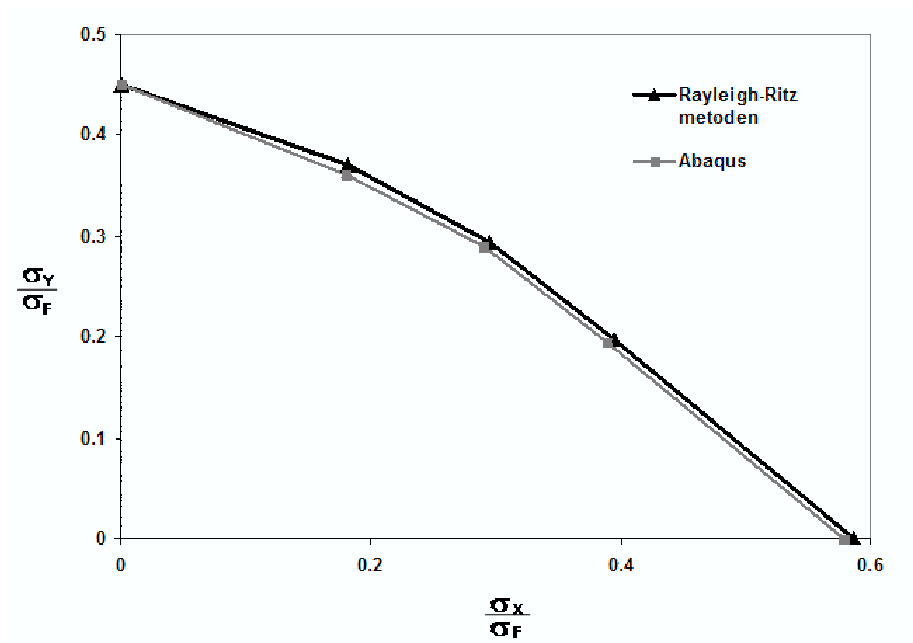
og arealtregghetsmomentet

$$I = 8333333mm^4 \quad (7.6)$$

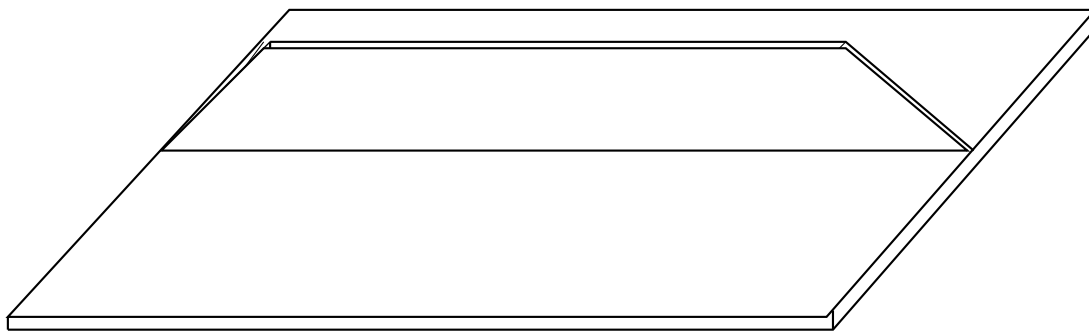
Avstivningen i dette tilfellet er så svak at platen knekker i en global knekkform. En slik knekkform kan ikke beskrives i modellen med avstivende fjærer.

7.3.3 Sammenlikning med elementmodell 2

Neste steg er å se hvor godt modellen beskriver en reell stiver som anvendes i skip og liknende konstruksjoner. Vi benytter derfor en elementmodell med en reell stiver. Tverrsnitt profiler til forskjellige stivere er illustrert i figur 7.1. Vanligvis er



Figur 7.4: Sammenlikning av Rayleigh-Ritz modellen og elementmodell 1



Figur 7.5: stiver som kun er forbundet med platen

endene til en stiver sveist sammen med andre bærende elementer i et skipskrog. Svært ofte blir derfor stiveren belastet med spenninger inn i tverrsnittet. I enkelte tilfeller er ikke endene til en stiver koblet med øvrig konstruksjon. Dette er tilfeller der vi ønsker å unngå spenningskonsentrasjoner som kan oppstå ved innspenningen til stiveren. En slik plate er illustrert i figur 7.5. Det er dette tilfellet vi forsøker å modellere i Rayleigh-Ritz modellen. Vi velger derfor en elementmodell der stiveren ikke tar opp ytre spenninger. I en skipsskonstruksjon vil det være langsgående bærere og tverrbærere langs rendene til en plate som vist i figur 1.1. Siden platen skal passe inn i en større skipsskonstruksjon er rendene fritt opplagte og de holdes rette. Innvirkningen på resultatene, ved å holde sidekantene rette er neglisjerbar i linearisert 2. ordens teori. Som tidligere er ytre spenninger påført langs randen. Både platen og stiveren deles inn i *STR13*-elementer.

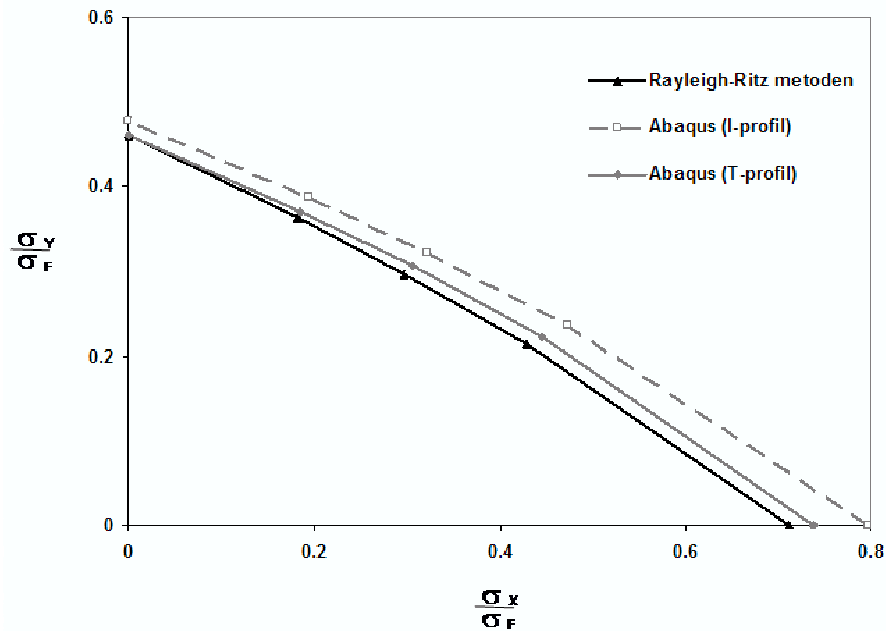
Modellen som definert over refererer vi til som elementmodell 2. Det er enkelte forskjeller mellom denne modellen og Rayleigh-Ritz modellen, som vil bidra til avvik i resultatene. Ved en statisk analyse av elementmodell 2 finner vi at spenningene ikke er konstante i platen. Dette skyldes at spenninger forplanter seg i stiveren ettersom platen deformeres. Den reelle stiveren motvirker derfor iplanet-forskyvninger. Dette tar vi ikke i hensyn til i Rayleigh-Ritz modellen, der vi antar at de indre spenningene er konstant lik de ytre spenningene i hele platen. En annen forskjell er at det ikke blir tatt hensyn til at stiveren tipper til siden i Rayleigh-Ritz modellen. Det trengs krefter til for å deformere en reell stiver, slik at den tipper. Stiveren vil derfor motvirke en rotasjon om dens akse, hvilket betyr at platen stives opp. Tøyningsenergi på grunn av deformasjoner i stiveren blir lagret. Dette betyr imidlertid ikke at knekklasten beregnet i Rayleigh-Ritz modellen nødvendigvis er lavere. Hvis den tipper til siden vil stiverens evne til å motvirke en forskyvning ut av planet reduseres. Det fins mange tekstbøker som omhandler denne vridnings-effekten [4, 8, 27]. Knekklasten i Rayleigh-Ritz modellen kan derfor både være høyere og lavere enn den vi beregner i elementmetoden med en reell stiver. Forhåpentlig vil ikke resultatene avvike for mye, slik at Rayleigh-Ritz modellen kan anvendes til å estimere knekkspenning til en slik plate.

I den modifiserte Rayleigh-Ritz modellen er den oppstivende effekten til stiver kun avhengig av arealtreghetsmomentet, og ikke formen til tverrsnittsprofilen. Det vil si at resultatene blir identiske både for en I-profil og for en T-profil, dersom arealtreghetsmomentet er det samme. Det er ikke tilfellet for den reelle stiveren modellert i elementmetoden. Da er den avstivende effekten avhengig av utformingen på profilen. I dette kapittelet skal vi se på tilfeller der to forskjellige profiler med lik arealtreghetsmomentet sammenliknes. Platens dimensjoner velges som følgende

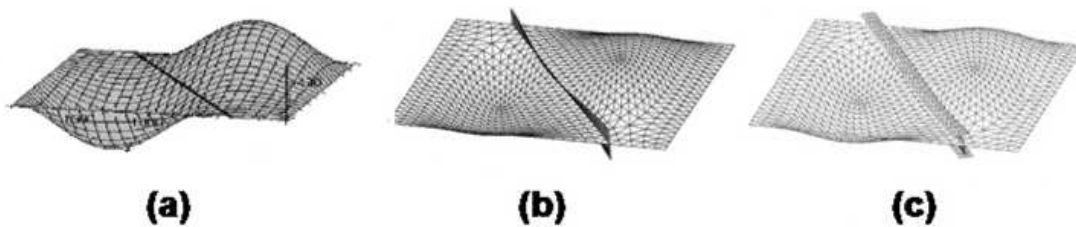
$$L = 2000mm \quad b = 2000mm \quad t = 20mm \quad (7.7)$$

Plasseringen til stiver bestemmes av koordinatene

$$(x_1, y_1) = (0, 400mm), \quad (x_2, y_2) = (2000mm, 1600mm) \quad (7.8)$$



Figur 7.6: Interaksjonskurve for plate der stiverens arealtrehetsmoment er $I = 38177173.33mm^4$



Figur 7.7: Knekkformen for platen med Rayleigh-Ritz metoden (a), I-profil i Abaqus (b) og T-profil i Abaqus (c), der stiveren har arealtrehetsmoment $I = 38177173.33mm^4$

som definert i figur 4.1. I forsøket benytter vi en T-profil med målene

$$t_w = 5mm \quad h_w = 100mm \quad t_f = 15mm \quad b_f = 100mm \quad (7.9)$$

og en I-profil med målene

$$t_w = 20mm \quad h_w = 142mm \quad (7.10)$$

Som definert i figur 7.1 er t_w og h_w henholdsvis tykkelsen og høyden til steget, t_f er tykkelsen til flensen og b_f er bredden til flensen. Begge profilene har det

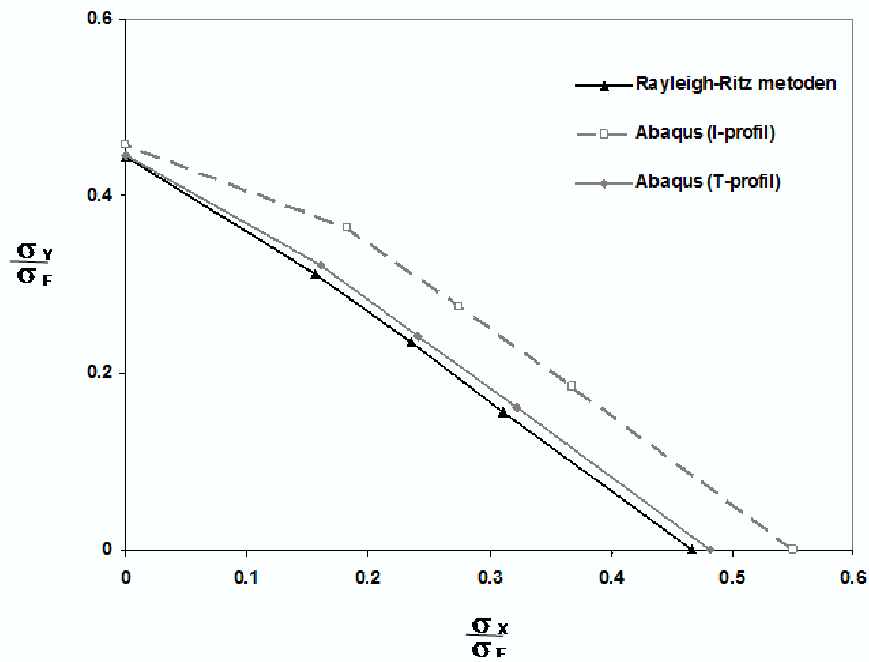
samme arealtreghetsmomentet $I = 38177173.33\text{mm}^4$. Ved å beregne knekklasten for forskjellige lastkombinasjoner finner vi interaksjonskurver som vist i figur 7.6. Resultatene viser at den knekkspenningen til platen med en I-profil er noe høyere enn den med en T-profil. Dette skyldes at T-profilen ikke motvirker platens rotasjon om stiverens akse og i-planet-forskyvninger like sterkt som I-profilen. Årsaken til det er at flensen til T-profilen er tynn i forhold til platetykkelsen, og er derfor svakere enn I-profilen til å forhindre platens rotasjoner og forskyvninger. I dette tilfellet er tykkelsen til I-profilen og platen lik. Knekkformen til platen for de to forskjellige profilene og knekkformen fra Rayleigh-Ritz modellen vises i figur 7.7. Dette er typisk en lokal knekkform, der de vertikale forskyvningene er små langs avstivningen. Denne avstivningen er så sterk at det ikke hadde vært noen dårligere tilnærming å benytte fjæravstivningen med svært stor fjærstivhet. Det kan derfor være interessant å utføre analysene på den samme platen, der avstivningen er så svak at vi får en global knekkform. Vi velger en T-profil med målene

$$t_w = 5\text{mm} \quad h_w = 60\text{mm} \quad t_f = 15\text{mm} \quad b_f = 50\text{mm} \quad (7.11)$$

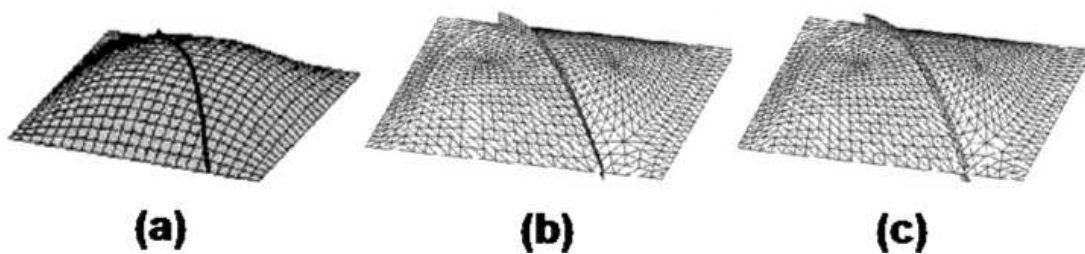
og en I-profil med målene

$$t_w = 20\text{mm} \quad h_w = 72\text{mm} \quad (7.12)$$

Knekkformene til begge profilene fra elementberegningene, samt knekkformen fra Rayleigh-Ritz metoden illustreres i figur 7.9. Stiveren er så svak at platen knekker i global knekkform. I figur 7.8 ser vi at også i dette tilfellet ligger interaksjonskurvene til de tre modellene nærme hverandre. Som før ser vi at en stiver med I-profil gir høyere knekkspenning enn en T-profil. Igjen er dette forårsaket at flensen til T-profilen er så svak at den ikke motvirker platens rotasjoner og forskyvninger i samme grad som I-profilen. Dette medfører at knekkspenningene beregnet ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden i dette eksempelet ligger nærmere elementanalyser med T-profilen.



Figur 7.8: Interaksjonskurver for plate der stiverens arealtrehetsmoment er $I = 4964574 \text{mm}^4$



Figur 7.9: Knekkformen for platen med Rayleigh-Ritz metoden (a), I-profil i Abaqus (b) og T-profil i Abaqus (c), der stiveren har arealtrehetsmoment $I = 4964574 \text{mm}^4$

Kapittel 8

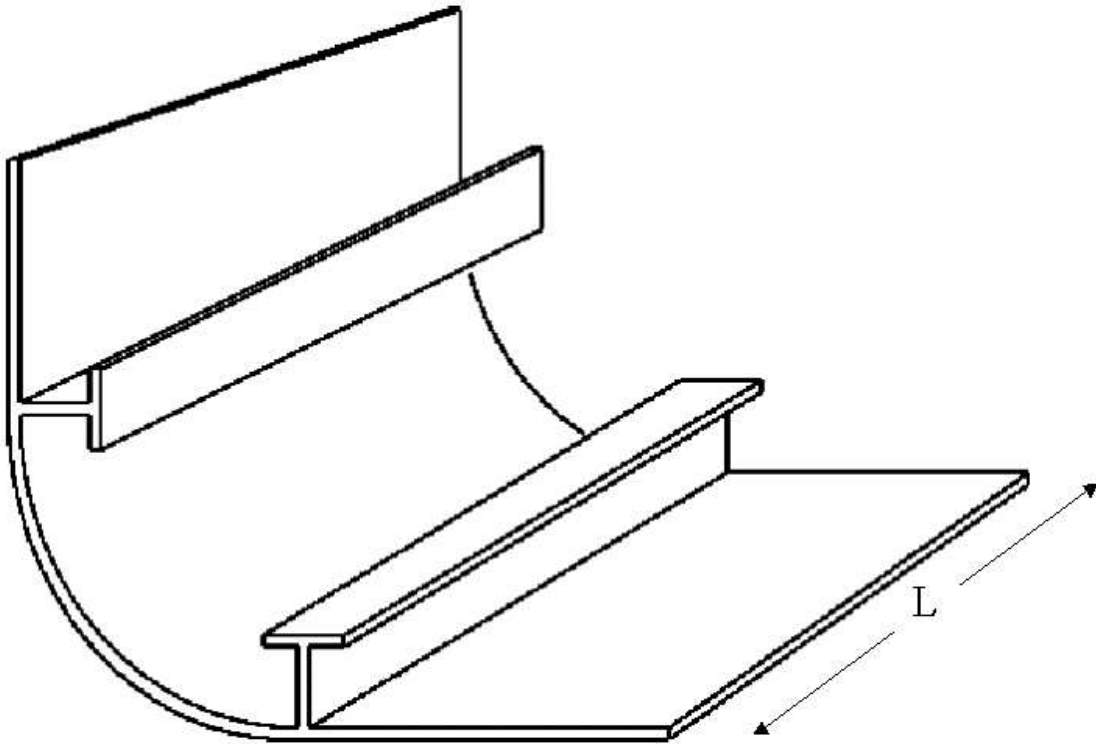
Anvendelse av skallmodell

8.1 Innledning

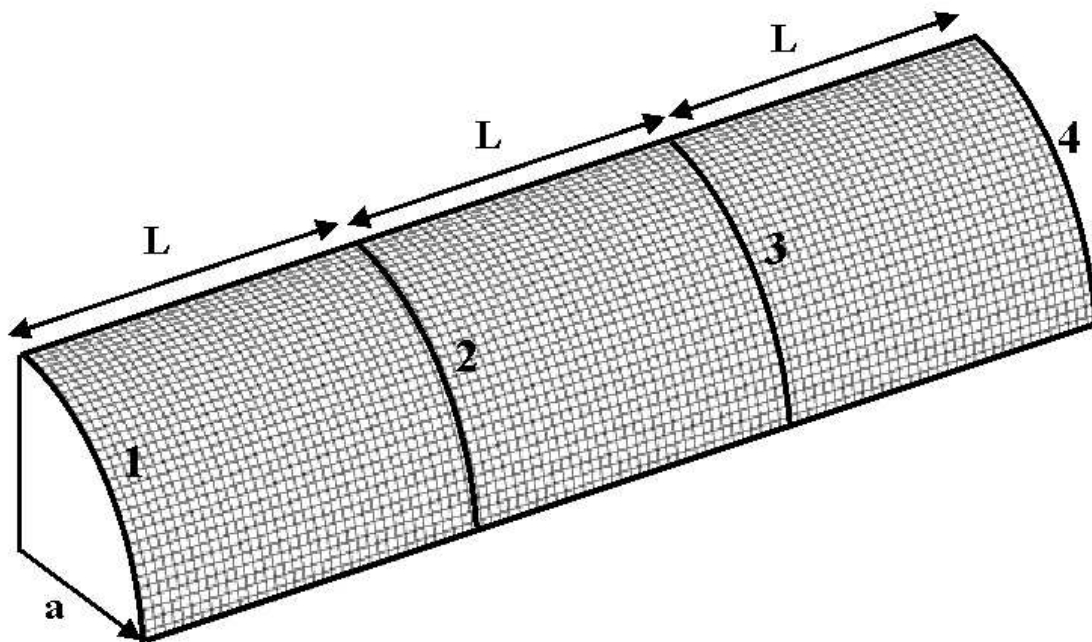
I dette kapittelet skal egenverdiberegningen med Rayleigh-Ritz modellen for skall vurderes opp mot en elementmodell av et sylindrisk skall, slik vi finner i overgangen fra skipside til bunn i et skip. Til nå er egenverdimodell vår sammenliknet med en hel sylinder, siden teorien som ligger til grunn i beregningen er hentet fra sylindre.

8.2 Elementmodellen

Som vist i figur 8.1 er overgangen fra bunn til skipsside svært ofte et sylindrisk skall. Langs de rette sidene til skallet er konstruksjonen forsterket med stivere. Skipsskroget er også avstivet med stivere eller såkalte tverrbærere som går parallelt med tverrsnittet til skipet. Lengden L til skallet som analyseres er derfor lik avstanden mellom tverrbærere. Tverrbærere i hver ende av skallet forhindrer utbøyning langs endene til skallet. På tilsvarende måte som for elementmodellen med en hel sylinder behandlet i kapittel 6 lar vi denne modellen være sammensatt av tre skall med lengde L . Modellen vises i figur 8.2. De radielle forskyvningene til punktene på de tykke linjene i figuren kreves å være like i elementprogrammet. En annen likhet med den hele sylindren er betingelsene vi setter på rotasjonene til sirkelbuene 1 til 4 som vist i figuren. Disse betingelsene var at rotasjonene i et punkt med samme tverrsnittskoordinater er like i sirkelbuene 1 og 3, og i sirkelbuene 2 og 4. I figur 8.1 ser vi at det er stivere og plater festet til de rette rendene til skallet. Vi lar derfor disse rendene forbli rette ved å fastholde de i ringretning. I Rayleigh-Ritz modellen holdes ikke rendene rette. Dette gjør at vi forventer at knekklasten i Abaqus vil bli noe høyere enn i Rayleigh-Ritz modellen. For å forhindre stivlegemebevegelse holdes modellen fast mot bevegelse i lengeretning i et knutepunkt. De ytre lastene som kan påføres modellen er en



Figur 8.1: Sylindrisk skall i overgangen fra bunn til skipsside



Figur 8.2: Elementmodell som modellerer skall i skipsskrog

konstant aksialspenning og et ytre hydrostatisk trykk.

8.3 Sammenlikning med elementmodellen

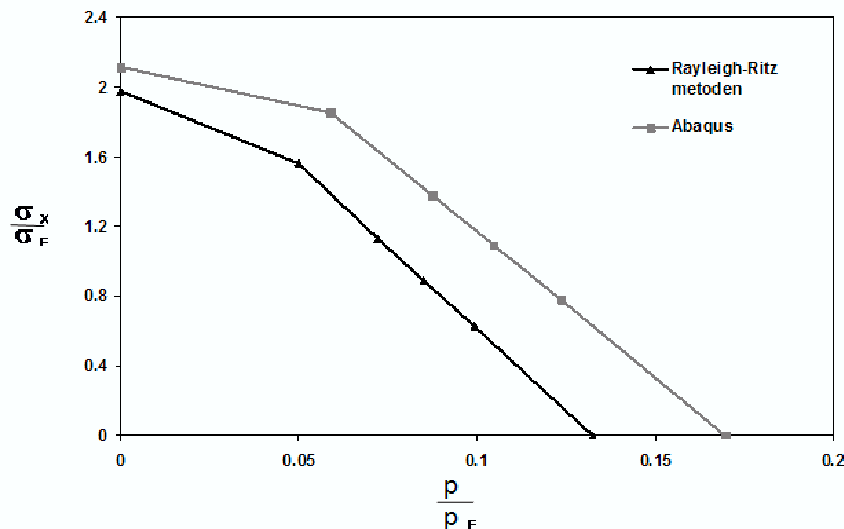
Fra utprøving i kapittel 6 fant vi at Rayleigh-Ritz modellen samsvarte godt med Abaqus analyser av en hel sylinder. I tillegg kunne vi vise at modellen vår var eksakt i tilfellet der skallet kun var belastet med aksialspenninger og et ytre hydrostatisk trykk. Vi kunne derfor konkludere med at resultatene fra beregningene var tilfredstillende i henhold til de antagelsene som lå til grunn. I dette avsnittet skal vi sammenlikne Rayleigh-Ritz modellen med elementmodellen som beskrevet i forrige avsnitt. Først velger vi dimensjonene til skallet til å være

$$L = 3400mm \quad a = 2000mm \quad t = 10mm \quad (8.1)$$

Som i kapittel 6 definerer vi en størrelse p_F ved hjelp av flytespenningen $\sigma_F = 315MPa$ som er

$$p_F = \frac{t}{a} \sigma_F \quad (8.2)$$

I en statisk analyse av en trykkbelastet sylinder er p_F størrelsen på det ytre trykket når spenningen i ringretning er lik flytespenningen. Forholdet mellom knekkspenningen og flytespenningen for de to numeriske metodene vises med interaksjonskurver i figur 8.3. Som forventet ligger Abaqus resultatene over Rayleigh-Ritz modellen, siden rendene langs sidene holdes rette. For dette skallet er forskjellen størst når skallet kun er belastet med et ytre hydrostatisk trykk, og knekklasten i Abaqus er nesten 25% høyere. For å forklare forskjellen kan vi se på differensiallikningene 2.62-2.64 som beskriver forskyvningene i en sylinder. Dette er et koblet likningsett som kobler de radielle forskyvningene w_r med forskyvningene u i lengderetning og v_θ i ringretning. Dette betyr at forskyvningene ut av sylinderflaten forårsaker forskyvninger langs de andre forskyvningskomponentene. Ved å forhindre disse forskyvningene vil konstruksjonen bli stivere. For en plate viste det seg at det ikke hadde noen betydning at rendene ble holdt rette. Dette skyldes at forskyvningene ut av planet var fullstendig koblet fra de andre komponenten i en linearisert 2.ordens teori. Forskjellen i teorien vi benyttet for å utvikle Rayleigh-Ritz modellen for en plate og et sirkulert skall ligger i antagelsene vi gjorde på tøyningene. Ved å sammenlikne de kinematiske relasjonene til en sylinder i likning 2.56-2.58 og en plate i likning 2.26-2.31 ser vi at tøyningene i skallets ringretning har et ledd mer enn tøyningene i y-retning til platen. Det er dette leddet som bidrar til koblingene mellom forskyvningskomponentene i en sylinder. Dersom radiusen a blir svært stor i forhold til de andre dimensjonene vil effekten av krumning bli mindre. Koblingen mellom forskyvningskomponentene blir derfor svakere og resultatene nærmer seg løsningen til en uendelig bred plate. Når koblingen mellom forskyvningskomponenten er svak vil ikke de rette rendene



Figur 8.3: Interaksjonskurver for skall der $L = 3400mm$, $a = 2000mm$ og $t = 10mm$

i elementmodellen påvirke resultatet i like stor grad. Vi prøver derfor et tilfelle der dimensjonen til skallet er

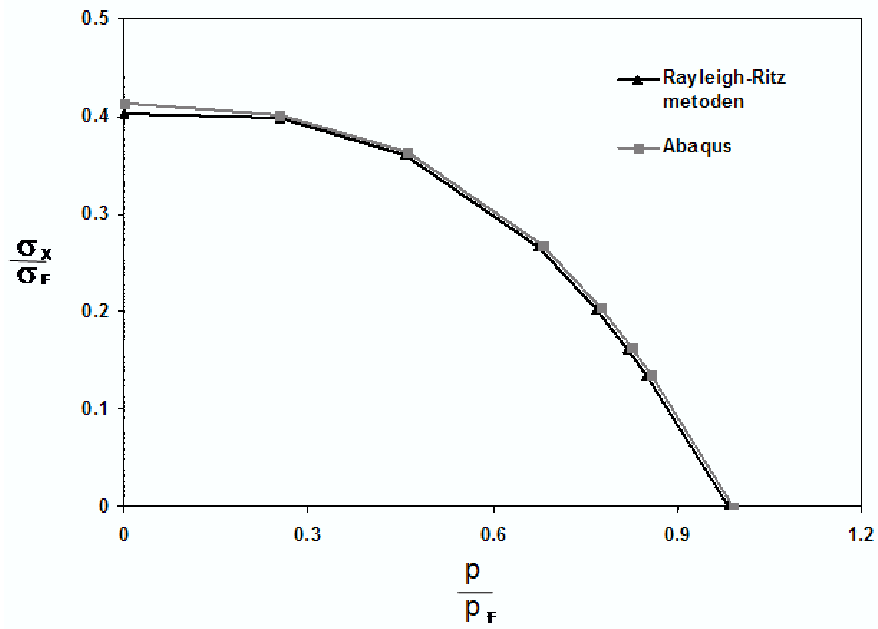
$$L = 100mm \quad a = 2000mm \quad t = 2mm \quad (8.3)$$

Her er radiusen a stor i forhold til de andre dimensjonene. Resultatet fra analysene vises i figur 8.4. Vi ser at Rayleigh-Ritz metoden og Abaqus samsvarer godt med hverandre i dette eksempelet. Knekklasten i Abaqus ligger litt over resultatene beregnet ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden. Dette betyr at avviket i resultatene til metodene er sterkt avhengig av dimensjonene til skallet. Det er derfor nyttig å illustrere analyser av mange forskjellige dimensjoner i samme figur. Som for sylindringen i kapittel 6 benytter vi derfor Batdorf parameteren som er

$$Z = \frac{L^2}{at} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (8.4)$$

Resultatene vises i figur 8.5-8.7. De dimensjonløse parameterene k_a , \bar{p} og k_t i figurene er definert i kapittel 6. I kurvene er mange forskjellige dimensjoner representert i samme figur. Som i kapittel 6 varierer lengden L mellom $3200mm$ og $4200mm$, og tykkelsen mellom $13mm$ og $19mm$, samt at radiusen a er konstant lik $2000mm$. Dette er typiske dimensjoner til et sylindrisk skall i overgangen fra skipsside til bunnen i et skip.

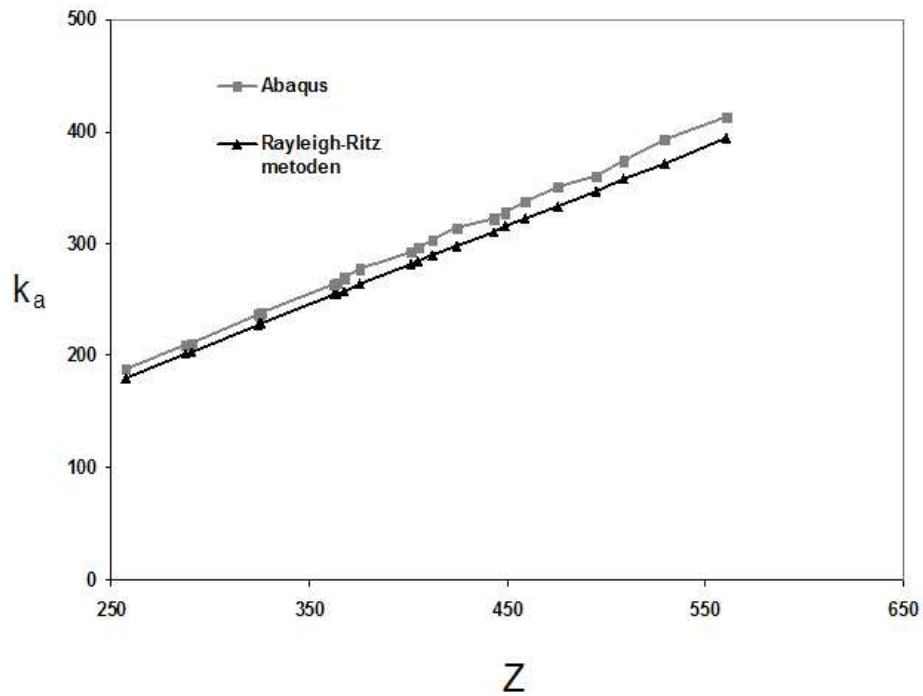
Knekklasten beregnet i Abaqus er størst for alle verdier til parameteren Z , og Rayleigh-Ritz modellen er konservativ i forhold til elementanalysene. Overensstemmelsen mellom de to metodene avhenger av størrelsen på radius a i forhold



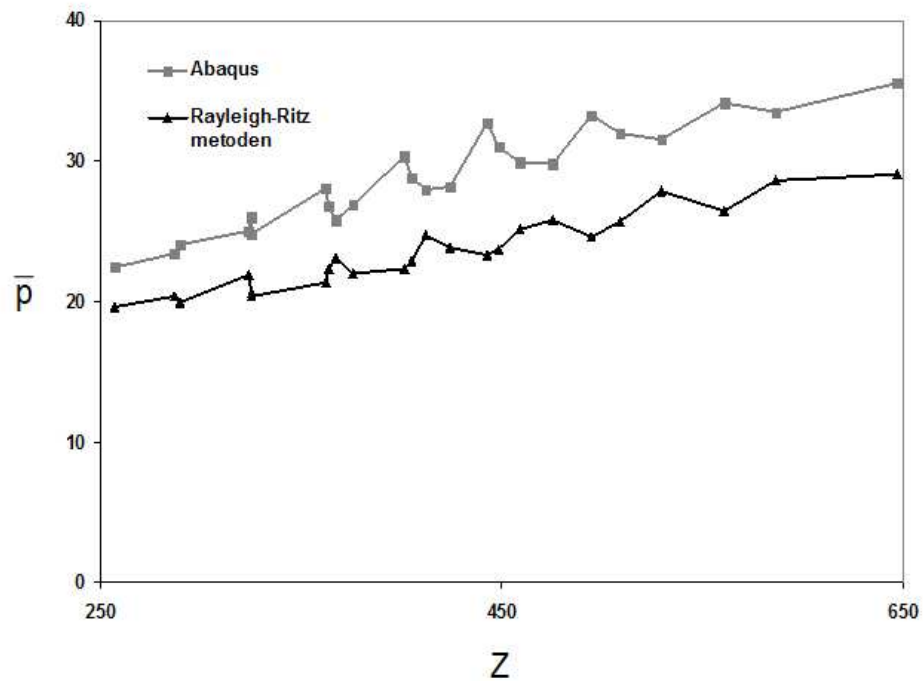
Figur 8.4: Interaksjonskurver for skall der $L = 100mm$, $a = 2000mm$ og $t = 2mm$

til de andre dimensjonene som vi illustrerte tidligere. Forskjellen er størst for et skall belastet med et ytre hydrostatisk trykk.

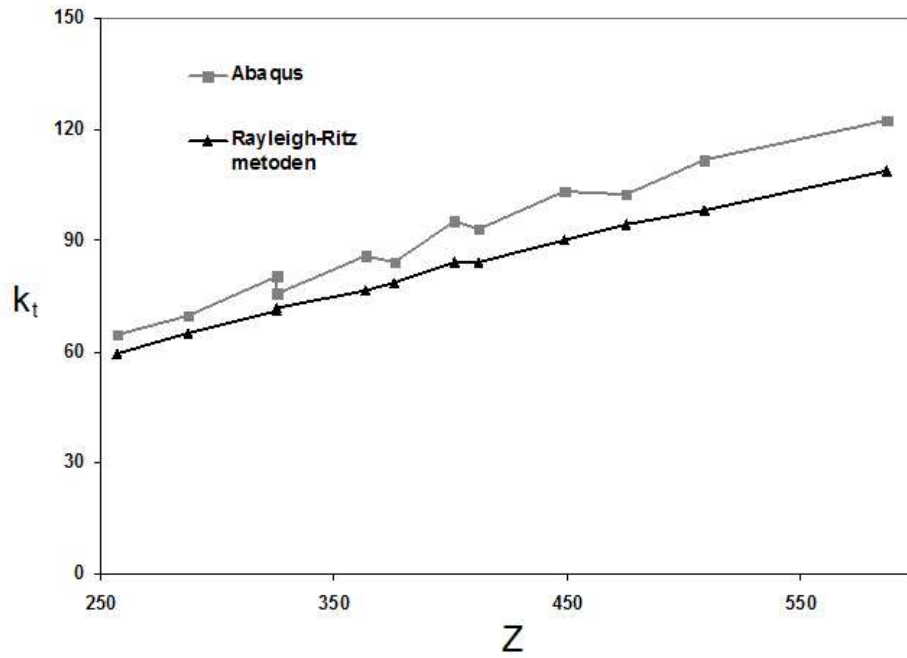
Som for den hele sylindere svinger kurvene i fremstillingene med parameteren Z opp og ned. Analogt med sylindere skyldes dette at knekkformen varierer langs Z -aksen som medfører svingninger i den kritiske lasten. Igjen er ikke disse svingningene like markerte for et aksialbelastet skall.



Figur 8.5: Kritiske verdier for aksialspenningen i skall med forskjellige dimensjoner: $3200\text{mm} \leq L \leq 4200\text{mm}$, $13\text{mm} \leq t \leq 19\text{mm}$ og $a = 2000\text{mm}$



Figur 8.6: Kritiske verdier for trykkspenningen i skall med forskjellige dimensjoner: $3200\text{mm} \leq L \leq 4200\text{mm}$, $13\text{mm} \leq t \leq 19\text{mm}$ og $a = 2000\text{mm}$



Figur 8.7: Kritiske verdier for skjærspenningen i skall med forskjellige dimensjoner: $3200\text{mm} \leq L \leq 4200\text{mm}$, $13\text{mm} \leq t \leq 19\text{mm}$ og $a = 2000\text{mm}$

Kapittel 9

Estimering av kapasitet

9.1 Innledning

I de foregående kapitlene beregnet vi den elastiske knekklasten eller egenverdien for to ulike geometrier. En lineær egenverdiberegning ikke kan fastsette styrken til en konstruksjon. I dette kapitlet skal vi utvikle en forenklet modell som tar hensyn til at spenningsforholdene kan forårsake flytning av materialet. Denne modellen kan derfor gi bedre inntrykk av konstruksjonens styrke enn en egenverdiberegning.

9.2 Modell som estimerer platens kapasitet

Når vi snakker om kapasiteten til en plate mener vi platens maksimale evne til å ta opp en ytre belastning. I dette kapitlet estimerer vi kapasiteten, ved å beregne spenningene i en plate med initielle imperfeksjoner. Vi definerer kapasiteten til å være platens tilstand, når de indre spenningene i nøytralplanet forårsaker materialflyt. For å bestemme kapasiteten følger vi en last-forskyvningskurve til en plate med initielle imperfeksjoner. Ved pålastning skaleres imperfeksjonen, slik at forskyvningene i platen øker. For hvert inkrement i pålastningen må vi hele tiden kontrollere at materialetflyt ikke inntre. Hvis spenningsforholdene i et punkt i platens nøytralflate medfører flytning, stoppes pålastningen. Den maksimale lasten som oppnås estimerer grenselasten til platen. Flytkriteriet som benyttes er von Mises flytekriterium der alle spenningskomponentene i tverretning neglisjeres i platens nøytralflate (dvs. $\sigma_z^m = \tau_{xz}^m = \tau_{yz}^m = 0$) som i likning 2.20. Vi trenger derfor å kjenne til de membranspenningene σ_x^m , σ_y^m og τ_{xy}^m i ethvert punkt på nøytralflaten. Som i doktorgradsavhandlingen til Byklum [9] kan membranspenningene for en plate med initielle imperfeksjoner w_0 bestemmes ved hjelp av

kompatibilitetslikningen

$$\nabla^4 F = E(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{0,xy}w_{,xy} - w_{0,xx}w_{,yy} - w_{0,yy}w_{,xx}) \quad (9.1)$$

der F er Airys spenningsfunksjon som tilfredstiller følgende

$$\sigma_x^m = F_{,yy} \quad \sigma_y^m = F_{,xx} \quad \tau_{xy}^m = -F_{,xy} \quad (9.2)$$

I denne beregningen er ikke Airys spenningsfunksjon linearisert, slik at den er avhengig av forskyvningene i tverretning og imperfeksjonen. Vi benytter det samme antatte forskyvningsfeltet w som i likning 4.1. Den initielle imperfeksjonen w_0 er en skalert forskyvning av knekkformen til platen fra egenverdberegningen ved hjelp av Rayleigh-Ritz modellen. Ved å finne løsningen til $F(x, y)$ som i tillegg A kan de indre spenningene i alle punkt på nøytralflaten beregnes. I en numerisk beregning på en datamaskin vil pålastningen deles opp i flere steg med lastnivåer, der von Mises flytekriterium benyttes på hvert nivå. For å kunne følge en pålastning må vi kunne relatere den ytre lasten til forskyvningene i platen. Som utledet i tekstboken til Timoshenko og Gere [27] kan dette gjøres ved hjelp av følgende uttrykk

$$\delta = \frac{\Lambda}{\Lambda^{krit} - \Lambda} \delta_0 \quad (9.3)$$

der Λ er lastfaktoren og Λ^{krit} er den minste egenverdien. Symbolene δ og δ_0 er dimensjonsløse amplituder som skalerer størrelsen på henholdsvis forskyvningsfeltet og den initielle imperfeksjonen. Fra dette uttrykket ser vi at forskyvningene går mot uendelig når lastfaktoren Λ nærmer seg egenverdien Λ^{krit} . Lastfaktoren vil derfor aldri bli større enn egenverdien, som igjen medfører at kapasiteten til platen ikke er større enn den elastiske knekklasten. Fra ikke-lineær knekningsteori vet vi at dette ikke alltid er riktig, siden platen ofte kan ta opp en ytterligere belastning etter at knekklasten er nådd. Men i mange tilfeller gir vår modell et godt inntrykk av platens kapasitet, og den er konservativ i forhold til ikke-lineære analyser.

For hvert steg i pålastningen kontrolleres spenningene i platen, slik at materialet ikke begynner å flyte. Fra plateteorien vet vi at spenningen omfordes når en plate knekker, slik at membranspenningene er størst langs randen og ved stiverne. Det er derfor ikke nødvendig å benytte von Mises flytekriterium i etthvert punkt på platen. For å redusere regnetiden for datamaskinen kontrolleres spenningene kun langs randen og ved stiverne for hvert lastinkrement. Først når kapasiteten til platen er nådd, kan vi beregne spenningene i hele platen, slik at vi kan tegne figurer med spenningsfordelinger.

9.3 Utprøving av modellen

I dette avsnittet skal modellen beskrevet i forrige avsnitt prøves ut med forskjellige lastkombinasjoner og platedimensjoner. Vi velger først dimensjonene til å være

$$L = 2000\text{mm} \quad b = 2000\text{mm} \quad t = 20\text{mm} \quad (9.4)$$

og plasseringen til stiveren bestemmes av koordinatene

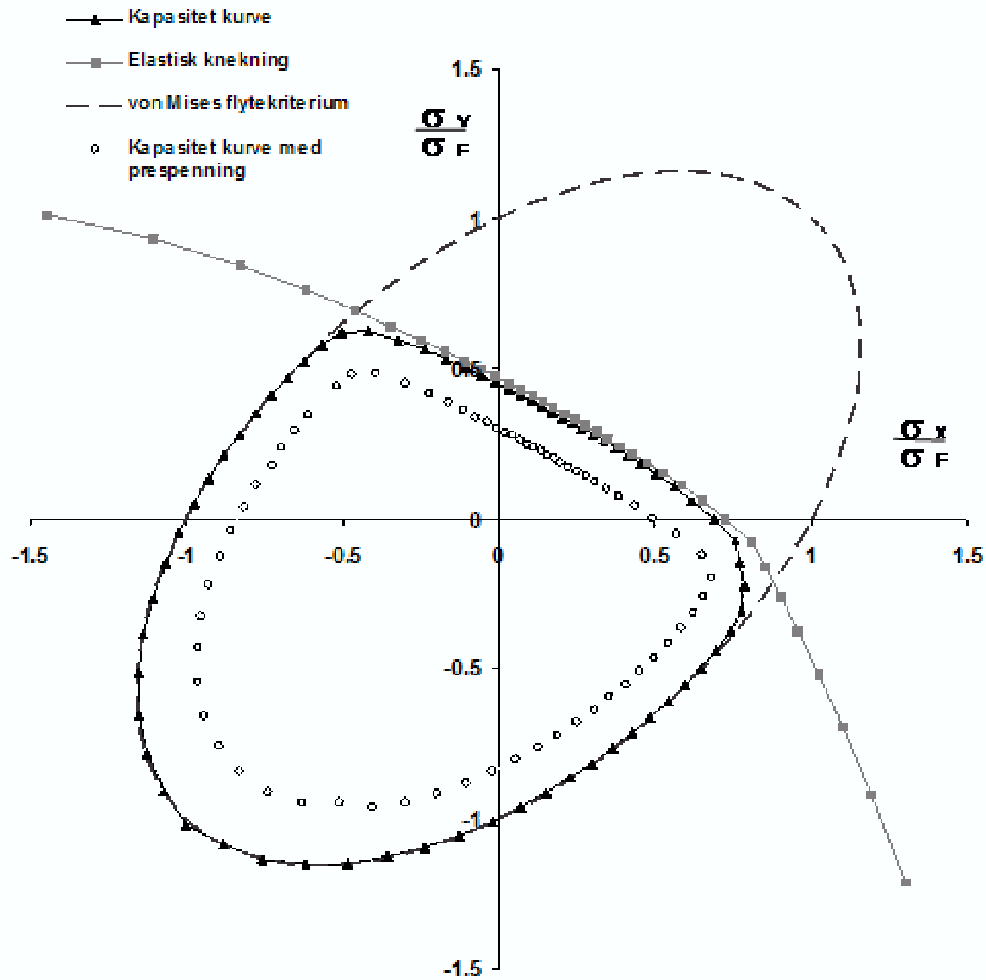
$$(x_1, y_1) = (0, 400\text{mm}), \quad (x_2, y_2) = (2000\text{mm}, 1600\text{mm}) \quad (9.5)$$

som definert i figur 4.1. Bøvestivheten til bjelken velges stor slik at arealtreghtetsmomentet er $I = 100000000\text{mm}^4$, og da blir forskyvningene langs avstivningen små. Flytespenningen til materialet er $\sigma_F = 315\text{MPa}$ og Youngs elastisitetsmodul er $E = 206000\text{MPa}$. Den maksimale forskyvning ut av planet til imperfeksjonen velges til å være 1mm .

I modellen er det mulig med en ytre belastning som består av en kombinasjon av aksialspenning, spenning normalt på aksialretningen og skjærspenning. Interaksjonskurver for platen kan derfor fremstilles slik som i figur 9.1 og 9.2. I figurene er det kurver av den elastiske knekklasten, kapasiteten til platen og von Mises flytekriterium. Kapasitetskurven er for enhver belastning innenfor von Mises kriteriet og kurven for knekkspenningen. Dette tyder på at kapasiteten beregnet i modellen vår er fornuftig i henhold til de antagelsene som ligger til grunn. Det er også mulig å fremstille kurver med interaksjon mellom to ytre laster der platen er påført en konstant ytre spenning. Den konstante spenningen er det vanlig å referere til som prespenning. For eksempel kan interaksjonskurver tegnes for aksialspenning og spenning normalt på aksialretningen, der en ytre konsant skjærspenning virker på platen. Den konstante skjærspenning medfører at den elastiske knekkspenningen og kapasiteten til platen reduseres. I figur 9.1 vises en kapasitetskurve med prespenningen $\tau_{xy} = 100\text{MPa}$.

Med våre antagelser styres kapasiteten til en plate av størrelsen på den elastiske knekklasten og flytespenningen til materialet hver for seg, eller som en kombinasjon av de to. Platen som beskrevet over har en forholdsvis slank geometri. I en slank geometri er platetykkelsen så liten i forhold til de andre dimensjonene, slik at kapasiteten til en trykkbelastet plate i hovedsak domineres av elastisk knekking. Da er det den elastiske knekklasten og ikke flytespenningen til materialet som har størst innvirkning på kapasiteten. For den samme platen finnes det tilfeller der kapasiteten styres av flytespenningen til materialet. Som vist i figur 9.1 kan platen belastes med ren strekkspenning. I dette tilfellet eksisterer det ingen knekklast, og vi får derfor negative egenverdier. Kapasiteten til platen beregnes derfor uten en initiell imperfeksjon, og platen kollapser kun som en følge av at strekkspenningene medfører materialflyt.

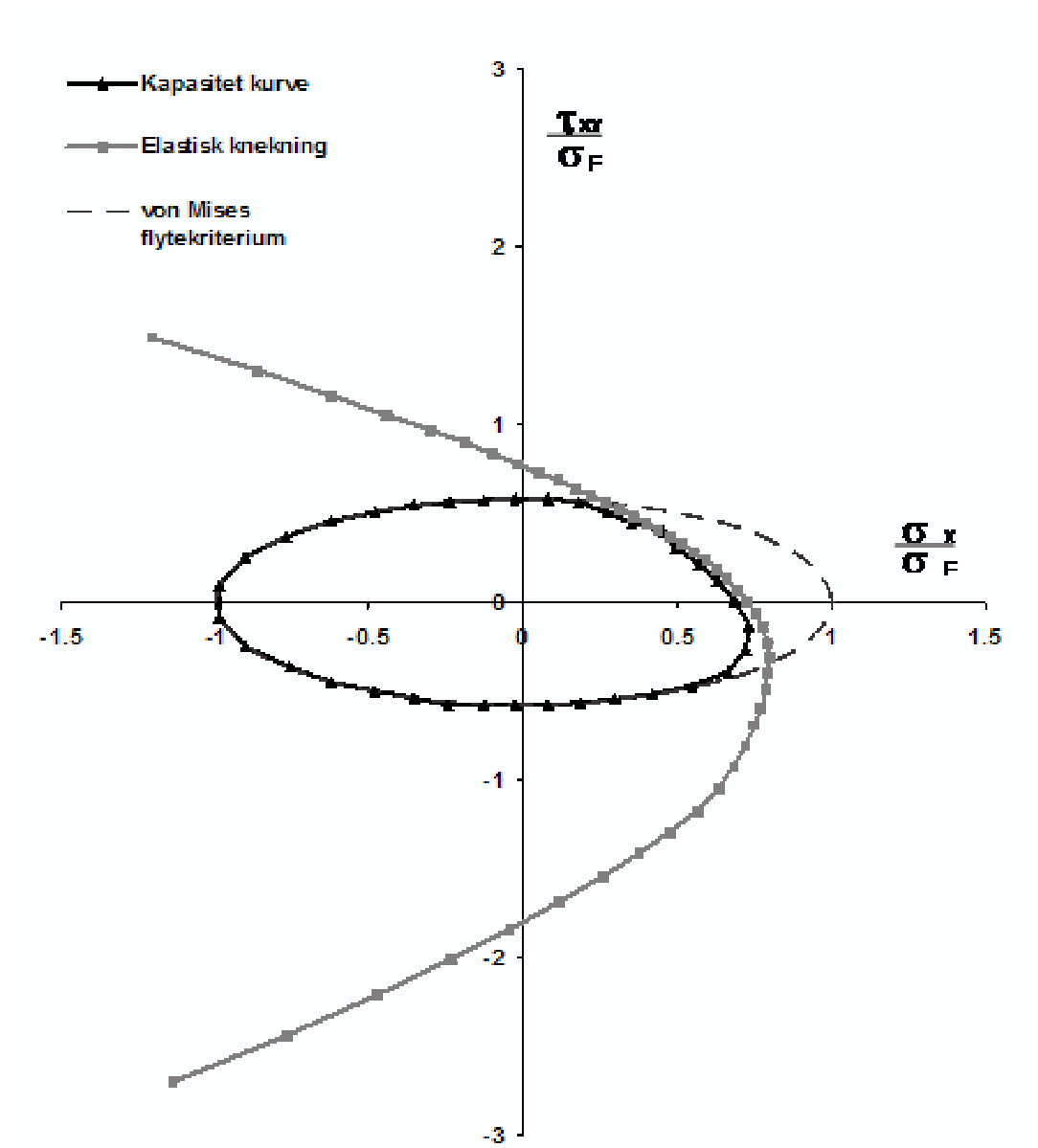
Når platens kapasitet er nådd kan spenningsfordelingen for de ulike spenningskomponentene og ekvivalent spenning σ_e i von Mises flytekriterium tegnes



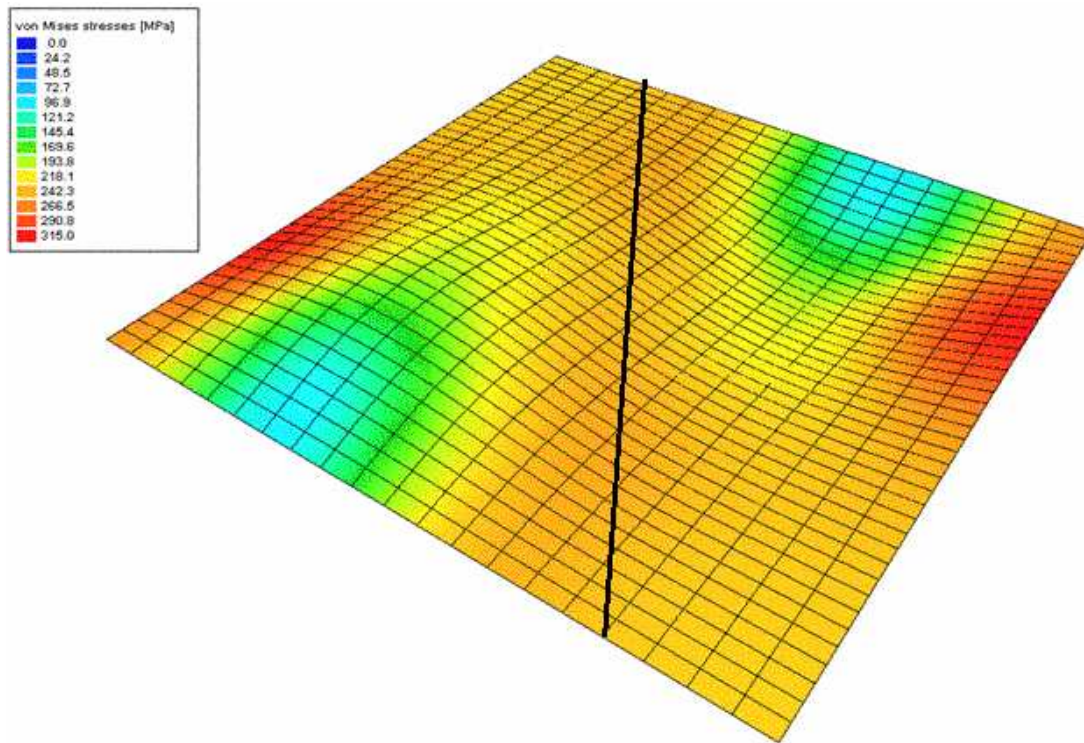
Figur 9.1: Den elastiske knekklasten og kapasitetskurve for plate belastet med bi-aksielle spenninger

opp ved hjelp av Fortran-programmet. Det er vanlig å referere til den ekvivalente spenningen som von Mises spenningen. Som en illustrasjon belaster vi platen som beskrevet over, med en ren aksialspenning. I figur 9.3 vises von Mises spenninger, og det er disse spenningene som avgjør når pålastningen skal avbrytes. I denne figuren ser vi at spenningene langs randen medfører materialflyt, siden von Mises spenningene er lik flytespenningen σ_F til materialet. I figur 9.4- 9.6 illustreres aksialspenninger, spenninger normalt på aksialretningen og skjærspenninger. Selv om platen kun var belastet med en ytre aksialspenning ser vi at både spenninger normalt på aksialretningen og skjærspenninger oppstår i platen.

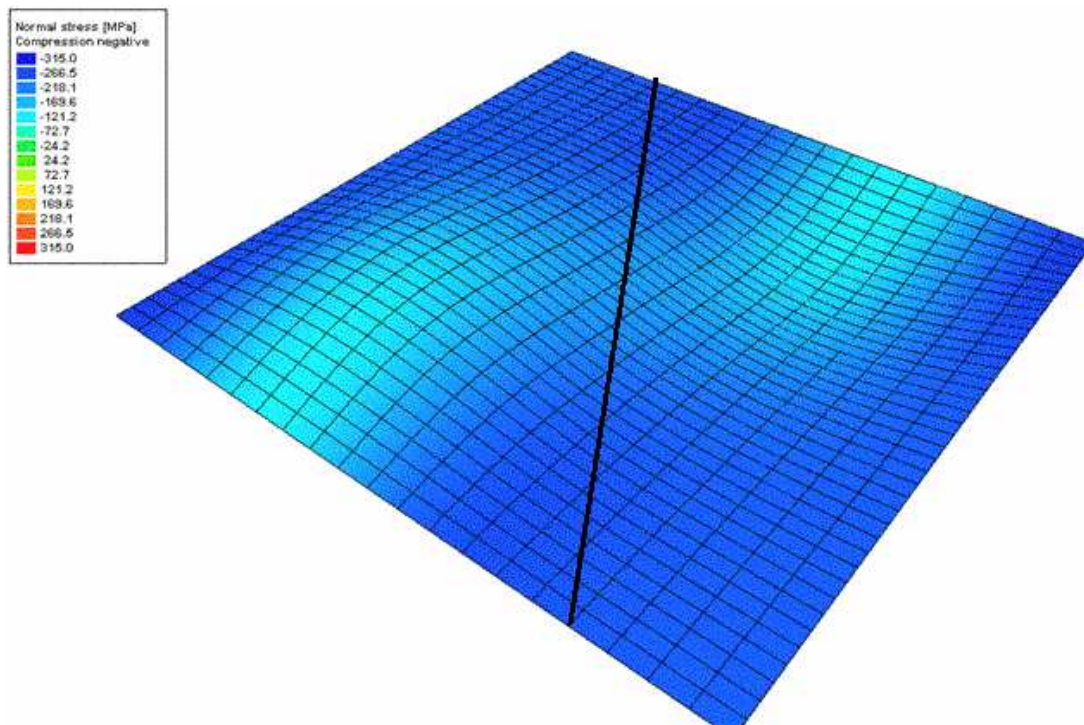
Imperfeksjonen til platen har også innflytelse på kapasiteten til en plate. Kapasiteten blir mindre hvis en større imperfeksjon benyttes. For å belyse dette



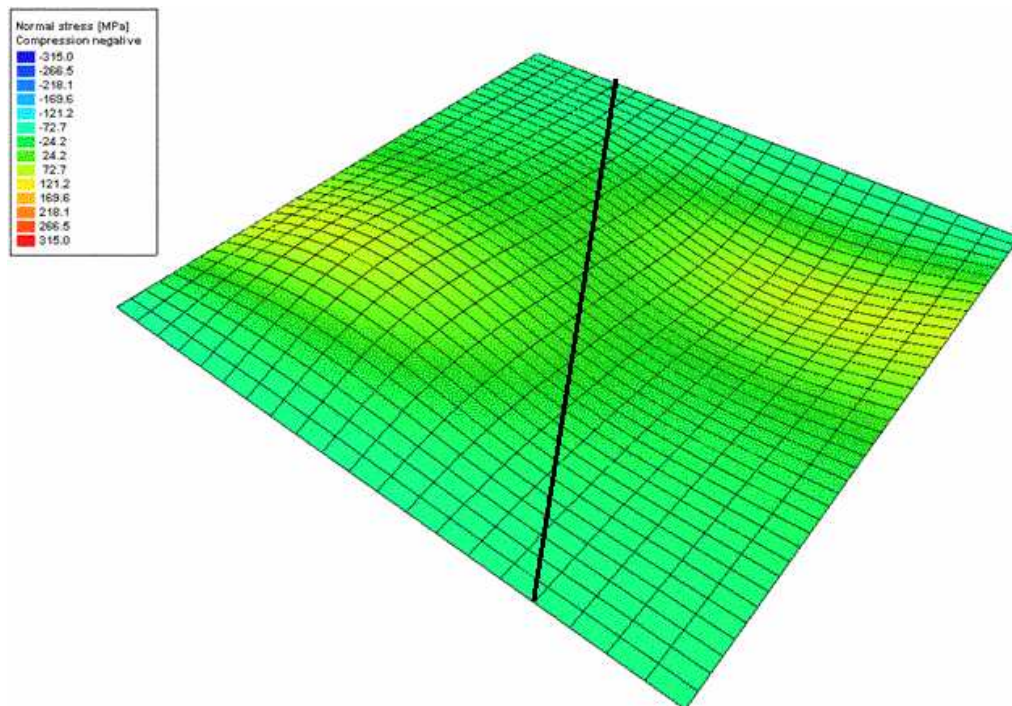
Figur 9.2: Den elastiske knekklasten og kapasitetskurve for plate belastet med aksial- og skjærspenning



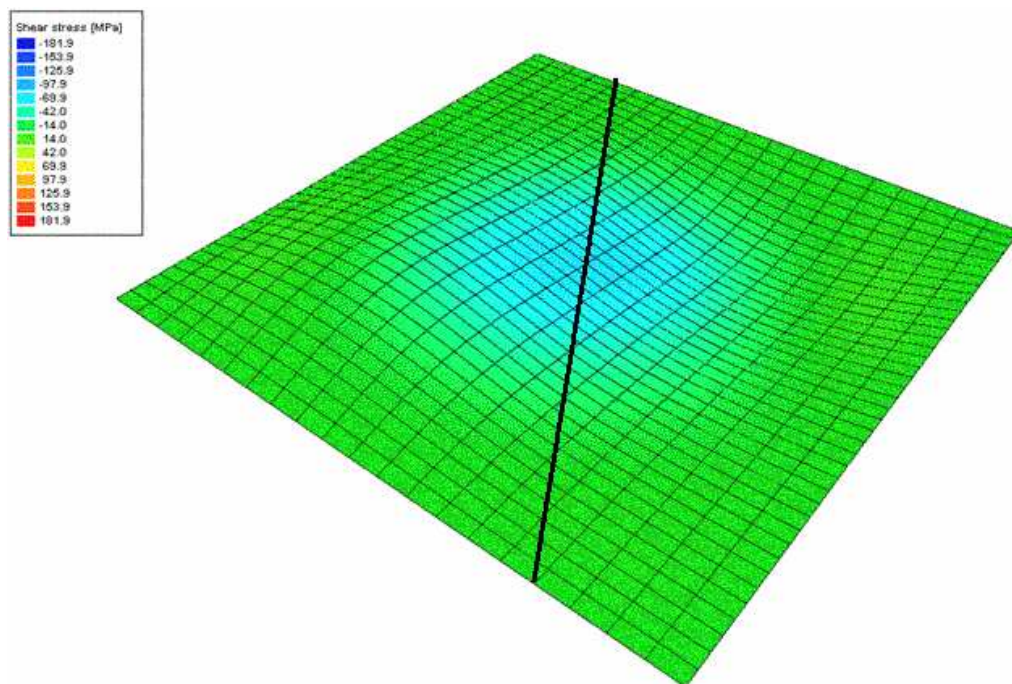
Figur 9.3: von Mises spenninger for platen med avstivning på skrå



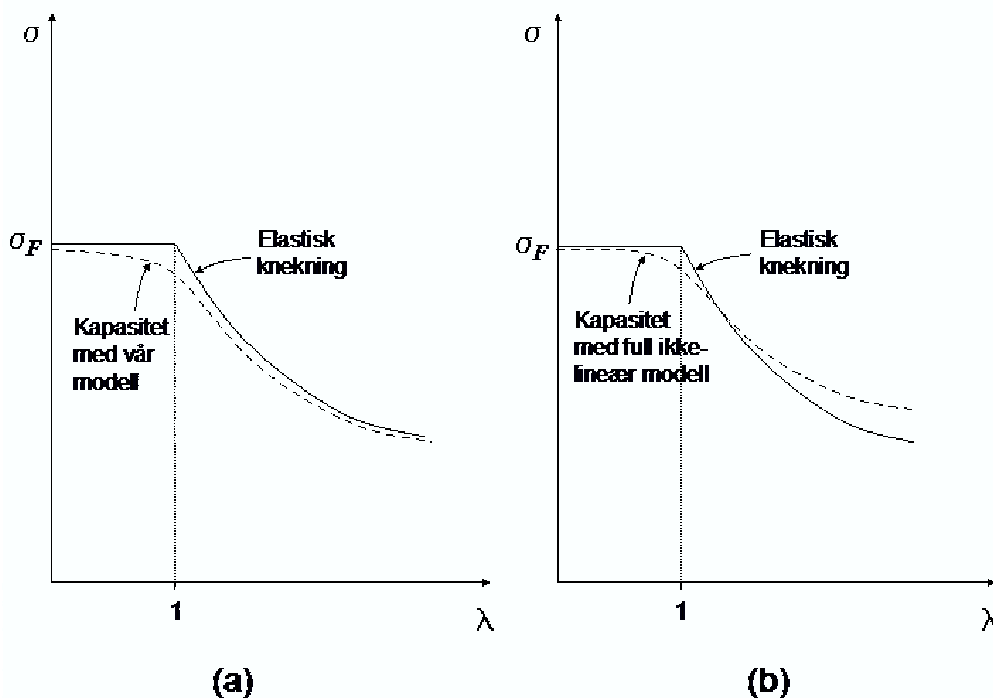
Figur 9.4: Aksialspenninger for platen med avstivning på skrå



Figur 9.5: Spenninger normalt på aksialretningen for platen med avstivning på skrå



Figur 9.6: Skjærspenninger for platen med avstivning på skrå



Figur 9.7: Kapasiteten for vår modell og for full ikke-lineær modell

betrakter vi en plate belastet med en ren aksiallast. Ved å variere platetykkelsen å beregne den elastiske knekklasten og kapasiteten kan kurver som illustrert i figur 9.7 fremstilles ved hjelp av parameteren

$$\lambda = \frac{\sigma^{krit}}{\sigma^F} \quad (9.6)$$

Parameteren λ angir slankheten til en plate. De stiplede kurvene på figuren representerer kapasiteten til platen beregnet i modellen vår (a) og i en ikke-lineær knekningsmodell (b). I begge modellene reduseres kapasiteten ettersom imperfeksjonen øker. For slanke konstruksjonen der $\lambda > 1$, vil kapasiteten beregnet i en ikke-lineær modell være størst, og modellen vår er konservativ. I området der $\lambda < 1$ er det mulig å kalibrere imperfeksjonene slik at modellen samsvarer godt med en ikke-lineær knekningsanalyse. Til dette formålet kan en ikke-lineær elementberegning benyttes. Dette er ikke behandlet videre i oppgaven. Vi har kun sett på tilfeller der en trykkbelastet plate kan klassifiseres som en slank konstruksjon, slik at $\lambda > 1$. Da vil den virkelige kapasiteten være større enn den vi beregnet i vår modell.

Kapittel 10

Sammendrag og konklusjon

10.1 Innledning

I denne oppgaven har vi utviklet to forskjellige modeller for egenverdiberegninger. Den ene modellen analyserer en plate med vilkårlig orienterte stivere. Denne skal modellere avstivede plater der geometrien og den ytre belastningen er meget kompleks, slik som i akterskip og forskip. Platens avstivning ble utarbeidet på to ulike måter, den ene med avstivende fjærer og den andre med bjelker. Fjærene var svært stive, hvilket medførte at vi bare kunne beskrive en lokal knekkform. Med bjelker som stivere kunne modellen beskrive interaksjon mellom lokal og global knekkform. Bøvestivheten til de avstivende bjelkene kan velges fritt. Den andre modellen analyserer et sylindrisk skall. Dette skallet skal beskrive overgangen fra skipsside til bunn i et skip.

Egenverdiberegningene ble utviklet ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden. I korte trekk går denne metoden ut på at vi antar et fornuftig forskyvningsfelt som består av en sum av formfunksjoner som er definert over hele konstruksjonen. Dette forskyvningsfeltet må også tilfredstille kinematisk kompatibilitet. Ideen i Rayleigh-Ritz metoden er å finne den forskyvningen som gjør den potensielle energien stasjonær. Fra beregningene finner vi egenverdier med tilhørende egenvektorer. Den elastiske knekklasten og knekkformen er relatert til den minste egenverdien.

I denne oppgaven har vi gjort mange analyser for å prøve ut modellene våre. Det viktigste verktøyet til dette formålet er elementprogrammet Abaqus, siden det er vanskelig å etablere gode analytiske uttrykk i de fleste tilfeller. Elementanalysene i Abaqus samsvarte som oftest godt med egenverdiberegningene ved hjelp av Rayleigh-Ritz metoden. I enkelte eksempler var avvikene noe større. I hovedsak skyldtes dette at modellene vi sammenliknet, ikke beskrev nøyaktig det samme problemet. Både geometrien og randkravene til elementmodellen kunne i disse tilfellene være litt forskjellige fra de som benyttes i de matematiske mo-

dellene vi utviklet. Elementmodellen var noe stivere, og knekklasten beregnet i Fortran-programmet var derfor konservativ i forhold til elementanalysene. Vi er derfor på den sikre siden hvis konstruksjonen dimensjoneres etter Rayleigh-Ritz modellene. For å belyse dette nærmere velger vi å se på platemodellen og skallmodellen hver for seg i de to neste avsnittene.

10.2 Platemodell

Vi begynner med å vurdere analysene for den avstivede platen, der vi gjør sammenlikninger med en elementmodell med en reell symmetrisk stiver. Geometrien er forskjellig i denne sammenlikningen, og vi kan derfor forvente at knekklasten til de ulike metodene avviker litt fra hverandre. Vi fant ut at den elastiske knekklasten i Rayleigh-Ritz modellen og i Abaqus lå nærme hverandre, men i noen tilfeller var den noe større i Abaqus. Dette skyldes at elementmodellen er stivere. Det er flere faktorer som spiller inn på at elementmodellen er stivere. Den ene faktoren er at skjærspenninger forplanter seg fra platen og opp i stiveren. Den reelle stiveren motvirker derfor i-planet-forskyvninger. Denne effekten stiver opp elementmodellen, og vi tar ikke hensyn til dette i Rayleigh-Ritz modellen. En annen faktor som vi heller ikke tar i betraktning i Rayleigh-Ritz modellen er at en reell stiver motvirker en rotasjon av platen om stiverretningen. Det er også effekter som gjør elementmodellen svakere. Når stiveren tipper til siden, reduseres evnen til å motvirke en forskyvning ut av planet. Det viste seg allikevel at det bare er små forskjeller i resultatene fra elementanalysene og modellen vi utviklet, og modellen er konservativ.

10.3 Skallmodell

Rayleigh-Ritz modellen med et skall ble vurdert opp mot en elementmodell som beskrev overgangen fra bunn til skipsside. I virkeligheten er skallet en del av en større konstruksjon med plater og bærere langs de rette rendene. Dette motvirker at rendene til skallet deformeres. Disse rendene ble derfor holdt rette i elementmodellen.

I sammenlikninger finner vi at elementmodellen gir en noe høyere knekklast. Dette skyldes at rendene holdes rette i elementmodellen. Et slikt krav har ikke Rayleigh-Ritz modellen. Vi har utført mange analyser for ulike dimensjoner på skallet og elementmetoden gir litt større knekklast. Forskjellen i resultatene blir mindre, desto større skallets radius er i forhold til de andre dimensjonene.

10.4 Estimering av kapasitet til en plate

I oppgaven estimerte vi også kapasiteten til den avstivede platen. Dette estimatet fant vi ved å avbryte en pålastning når materialet i et punkt på nøytralflaten begynte å flyte. Den maksimale lasten vi oppnådde ved pålastningen definerte platens kapasitet. Forenklingene og antagelsene som ligger til grunn i denne beregningen gjør at kapasiteten ikke overstiger den elastiske knekklasten. Platens kapasitet er avgrenset av von Mises flytekriterium og knekklasten fra en egenverdianalyse. Ved å anvende en fullstendig ikke-lineær teori vil ikke dette være tilfelle, og kapasiteten kan være større enn knekklasten. Dette betyr at estimatet på kapasiteten i denne oppgaven også er konservativ i forhold til ikke-lineære analyser.

Årsaken til at kapasiteten til platen kan overstige knekklasten i en ikke-lineær knekningsanalyse er at platens likevekstilstand ved knekning er stabil, som illustrert i figur 2.11. Den kan derfor ta opp en ytterligere belastning etter at knekklasten er nådd. Dette er ikke tilfellet for et sylindrisk skall som vist i 2.12, der bifurkasjonspunktet er et ustabil likevektspunkt. Da vil ikke kapasiteten overstige knekklasten i en ikke-lineær knekningsanalyse. For å estimere kapasiteten til et skall kan vi derfor ikke anvende samme metoden som vi benyttet på platen, siden den i dette tilfellet ikke er konservativ i forhold til en ikke-lineær analyse. Vi må derfor utvikle en ikke-lineær beregningsmodell for å estimere kapasiteten til et skall, hvilket krever mye arbeid.

10.5 Forslag til videre arbeid

Som et forslag til videre arbeid og studie kan beregningsmodellene videreutvikles og modifiseres, slik at bruksområdet øker og modellene forbedres. I denne sammenhengen er følgende punkter interessante:

- Utvide platemodellen slik at platetykkelsen kan variere, som er vanlig i skipskonstruksjoner.
- Videreutvikle stiverene slik at torsjonsvridning blir tatt hensyn til. Dette kan gjøres ved å ta med den potensielle energien p.g.a. torsjonsvridning i prinsippet om stasjonær potensiell energi.
- Utvide skallmodellen slik at den kan avstives med stivere i ringretning og lengderetning.

- Videreutvikle modellene til ikke-lineære modeller for knekningsanalyser som er gyldig for store deformasjoner. De samme metodene og prinsippene som anvendes i PULS [9, 23] kan benyttes, men dette krever mye arbeid. Med en slik modell kan også kapasiteten til skallet estimeres.

Litteraturhenvisninger

- [1] Abaqus. *Advance/Post, Version 5.8*. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, inc. U.S.A, 1998.
- [2] Abaqus. *Theory Manual, Version 5.8*. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, inc. U.S.A, 1998.
- [3] Abaqus. *User's Manuals, Version 5.8*. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, inc. U.S.A, 1998.
- [4] P.P. Behnham, R.J. Crawford, and C.G. Armstrong. *Mechanics of Engineering Materials*. Longman Scientific and Technical, second edition, 1996.
- [5] P.G Bergan, P.K. Larsen, and E. Mollestad. *Svingning av konstruksjoner*. Tapir, Trondheim, 2.utgave, 1985.
- [6] P.G Bergan and T.G. Syvertsen. *Knekning av søyler og rammer*. Tapir, Trondheim, 2.utgave, 1978.
- [7] A. Bobb. *Buckling of stiffened plates - numerical analysis using ANSYS*. University of Oslo, Mechanics Division, Department of Mathematics, 1994.
- [8] D.O. Brush and B.O. Almroth. *Buckling of bars, plates and shells*. McGraw-Hill Book Company, 1975.
- [9] E. Byklum. *Ultimate strength analysis of stiffened steel and aluminium panels using semi-analytical methods*. Dr. Ing. thesis, NTNU, Trondheim, 2002.
- [10] R.D Cook, D.S. Malkus, and M.E. Plesha. *Concept and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons Ltd, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, third edition, 1989.
- [11] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley and Sons Ltd, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, first edition, 1991.
- [12] L.H. Donnell. *Stability of Thin-walled Tubes under Torsion*. NACA Rep. 479, 1933.

- [13] L. Euler. *Elastic Curves*. oversatt av W.A. Oldfather, C.A. Ellis and D.M. Brown, 1933.
- [14] W. Flügge. *Stresses in Shells*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, Second Edition, 1973.
- [15] J.N. Goodier and N.J. Hoff. *Structural Mechanics*. Pergamon Press, Inc, 1958.
- [16] T.E. Hals. *Konstruksjonsmekanikk*. Tapir, Trondheim, 2.utgave, 1990.
- [17] E. Hinton. *Nafems. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. NA-FEMS, Birniehill, East Kilbridge, Glasgow G75 0QU, first edition, 1992.
- [18] D. Kincaid and W. Cheney. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Publishing Company, 1996.
- [19] W.T. Koiter. *Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht*. Delft thesis, Holland, 1945. Engelsk oversettelse: NASA TT F-10, 833, 1967.
- [20] B. Kolbein. *Matrisestatikk*. Tapir, Trondheim, 1987.
- [21] K. Marguerre. Die mittragende breite der gedruckten platte. *Luftfahrtsforschung*, 14(3):121–128, 1937.
- [22] T. Pedersen. *Lokal og global pre- og postknekningsoppførsel for eksentrisk avstivede plater*. University of Oslo, Mechanics Division, Department of Mathematics, 2001.
- [23] PULS. *User's Manual, Version 1.5*. Det Norske Veritas, 2002.
- [24] L. Rønning. Analytical solution to problems of plate buckling. Technical report, Institutt for Konstruksjonsteknikk NTNU, Trondheim, 2001.
- [25] A. Sandvik. *Virkingen av restspenninger og geometriske imperfeksjoner på platers pre- og postknekningsoppførsel*. University of Oslo, Mechanics Division, Department of Mathematics, 1999.
- [26] E. Steen. *Buckling and Postbuckling of Stiffened Plates*. Dr. Scient. thesis, University in Oslo, 2001.
- [27] S.P. Timoshenko and J.M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill Book Company, second edition, 1963.
- [28] Det Norske Veritas. *DNV Rules for classification of ships*. Det Norske Veritas, Veritasveien 1, N-1322 Høvik, Norway, 2002.

Tillegg A

Knekning av avstivet plate

A.1 Airys spenningsfunksjon for flat plate

Airys spenningsfunksjon F for en flat plate løser likningen [1,3]

$$\nabla^4 F = E(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy}) \quad (\text{A.1})$$

der

$$\sigma_x^m = F_{,yy} \quad \sigma_y^m = F_{,xx} \quad \tau_{xy}^m = -F_{,xy} \quad (\text{A.2})$$

Fremgangsmetoden for å løse denne likning A.1 er vist av E. Byklum [9]. Med det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1 blir løsningen

$$\begin{aligned} F(x, y) = & -S_x^1 \frac{y^2}{2} - (S_x^2 - S_x^1) \frac{y^3}{6b} - S_y^1 \frac{x^2}{2} - (S_y^2 - S_y^1) \frac{x^3}{6L} - S_{xy}xy \\ & + \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} f_{ij}^C \cos\left(\frac{i\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{j\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

der

$$f_{ij}^C = \frac{E}{4\left(i^2 \frac{b}{L} + j^2 \frac{L}{b}\right)} \sum_{rspq} b_{rspq}^C a_{rs} a_{pq} \quad (\text{A.4})$$

der f_{00}^C er definert som null og koeffisientene b_{rspq}^C er

$$b_{rspq}^C = r spq + r^2 q^2, \text{ hvis } \begin{cases} \pm(r-p) = i & , s+q = j \\ r+p = i & , \pm(s-q) = j \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$b_{rspq}^C = r spq - r^2 q^2, \text{ hvis } \begin{cases} r+p = i & , s+q = j \\ \pm(r-p) = i & , \pm(s-q) = j \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

I linearisert 2.ordens teori er forskyvningene små, og derfor neglisjeres kvadratiske ledd av amplituden a_{ij} :

$$F(x, y) = -S_x^1 \frac{y^2}{2} - (S_x^2 - S_x^1) \frac{y^3}{6b} - S_y^1 \frac{x^2}{2} - (S_y^2 - S_y^1) \frac{x^3}{6L} - S_{xy}xy \quad (\text{A.7})$$

Som utarbeidet av Byklum [9] kan kompatibilitetslikningen for en plate med en initiell imperfeksjon w_0 skrives som

$$\begin{aligned}\nabla^4 F &= E(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{0,xy}w_{,xy} - w_{0,xx}w_{,yy} - w_{0,yy}w_{,xx}) \\ &= E[(w_{,xy} + w_{0,xy})^2 - (w_{,xx} + w_{0,xx})(w_{,yy} + w_{0,yy})] \\ &\quad - E[w_{0,xy} - w_{0,xx}w_{0,yy}]\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Dette viser at løsningen av spenningsfunksjonen F kan skrives som differansen mellom to løsninger slik at

$$F = F(w + w_0) - F(w_0) \quad (\text{A.9})$$

Dette betyr at med en initiell imperfeksjon

$$w_0(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \sin\left(\frac{\pi i x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi j y}{b}\right) \quad , \text{der} \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq b \end{array} \quad (\text{A.10})$$

kan koeffisientene f_{ij}^C skrives som

$$\begin{aligned}f_{ij}^C &= \frac{E}{4(i^2 \frac{b}{L} + j^2 \frac{L}{b})} \sum_{rspq} [b_{rspq}^C (a_{rs} + b_{rs})(a_{pq} + b_{pq}) - b_{rspq}^C b_{rs} b_{pq}] \\ &= \frac{E}{4(i^2 \frac{b}{L} + j^2 \frac{L}{b})} \sum_{rspq} b_{rspq}^C (a_{rs} a_{pq} + a_{rs} b_{pq} + a_{pq} b_{rs})\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

A.2 Bøyningsenergi

Platens potensielle energi p.g.a bøyning:

$$U_{\text{plate}}^b = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^L [(w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xy}^2)] dx dy \quad (\text{A.12})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1 og integrasjon er bøyningsenergien:

$$U_{\text{plate}}^b = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{D\pi^4 L b}{8} \left[\left(\frac{i}{L}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2 \right]^2 a_{ij} a_{ij} \quad (\text{A.13})$$

A.3 Membrantøyningsenergi

Platens potensielle energi p.g.a membrantøyningsenergien:

$$U_{\text{plate}}^m = \frac{t}{2E} \int_0^L \int_0^b [(\sigma_x^m + \sigma_y^m)^2 - 2(1 - \nu)(\sigma_x^m \sigma_y^m - (\tau_{xy}^m)^2)] dy dx \quad (\text{A.14})$$

Med en omskrivning ved hjelp av Airys spenningsfunksjon A.7 kan membrantøyningsenergien beregnes

$$\begin{aligned}
U_{plate}^m &= \int_0^L \int_0^b \frac{t}{2E} [(S_x(y) + S_y(x))^2 - 2(1 - \nu)(S_x(y)S_y(x) - S_{xy}^2)] dy dx \\
&= \frac{Lst}{12E} \left(2(S_x^1 + S_x^2)^2 + 2(S_y^1 + S_y^2)^2 - 2S_x^1 S_x^2 - 2S_y^1 S_y^2 \right. \\
&\quad \left. + 3\nu(S_x^1 + S_x^2)(S_y^1 + S_y^2) + 12(1 - \nu)S_x y^2 \right)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Dette viser at i linearisert 2.ordens teori for en flat plate, er U_{plate}^m uavhengig av amplituden a_{ij} . Det betyr at den ikke gir bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell energi.

A.4 Ytre arbeid

A.4.1 Arbeid fra normalspenningene

Potensialet til de ytre kreftene er lik arbeidet utført. For normalkreftene blir dette

$$T_{S_x} = \int_0^b t S_x(y) \Delta u(y) dy \tag{A.16}$$

$$T_{S_y} = \int_0^L t S_y(x) \Delta v(x) dy \tag{A.17}$$

der $\Delta u(y)$ og $\Delta v(x)$ er henholdsvis endeforkortninger i x- og y- retning x-retning. S_x og S_y er den påsatte spenningen, som er lineært varierende.

$$\Delta u(y) = \int_0^L u_{,x} dx = \int_0^L (\epsilon_x^m - \frac{1}{2} w_{,x}^2) dx \tag{A.18}$$

$$\Delta v(x) = \int_0^b v_{,y} dy = \int_0^b (\epsilon_y^m - \frac{1}{2} w_{,y}^2) dy \tag{A.19}$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1 og integrasjon blir den potensielle energien p.g.a. normalkreftene i x-retning:

$$\begin{aligned}
T_{S_x} &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(\frac{S_x^1 t b (i\pi)^2}{8L} \delta_{ij,kl} + I_{ijkl}^{S_x} \right) a_{ij} a_{kl} \\
&\quad - \frac{tsL}{12E} [4(S_x^1 + S_x^2)^2 - 3(S_x^1 + S_x^2)(S_y^1 + S_y^2) - 4S_x^1 S_x^2]
\end{aligned} \tag{A.20}$$

der

$$I_{ijkl}^{S_x} = \begin{cases} 0 & , \text{ hvis } i \neq k \\ \frac{(S_x^2 - S_x^1)bt(i\pi)^2}{16L} & , \text{ hvis } i = k, j = l \\ (S_x^2 - S_x^1)\frac{bt}{L} \frac{ijkl}{j^2 - l^2} & , \text{ hvis } i = k, j \pm l \text{ er oddetall} \\ 0 & , \text{ hvis } i = k, j \pm l \text{ er partall} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

og p.g.a krefter i y-retning:

$$T_{S_y} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(\frac{S_y^1 t L (j\pi)^2}{8s} \delta_{ij,kl} + I_{ijkl}^{S_y} \right) a_{ij} a_{kl} \quad (\text{A.22})$$

$$- \frac{tsL}{12E} [4(S_y^1 + S_y^2)^2 - 3(S_x^1 + S_x^2)(S_y^1 + S_y^2) - 4S_y^1 S_y^2]$$

der

$$I_{ijkl}^{S_y} = \begin{cases} 0 & , \text{ hvis } j \neq l \\ \frac{(S_y^2 - S_y^1)Lt(j\pi)^2}{16s} & , \text{ hvis } i = k, j = l \\ (S_y^2 - S_y^1)\frac{Lt}{b} \frac{ijkl}{i^2 - k^2} & , \text{ hvis } j = l, i \pm k \text{ er oddetall} \\ 0 & , \text{ hvis } j = l, i \pm k \text{ er partall} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

A.4.2 Arbeid fra skjærspenningene

Den ytre potensielle energien p.g.a skjærkreftene

$$T_{S_{xy}} = \int_0^L \int_0^b S_{xy} t (u_{,y} + v_{,x}) dy dx \quad (\text{A.24})$$

$$\int_0^L \int_0^b S_{xy} t (\gamma_{xy}^m - w_{,x} w_{,y}) dy dx$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1 og integrasjon er den potensielle energien p.g.a skjærkreftene:

$$T_{S_{xy}} = - \Lambda \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n S_{xy} \frac{ilt}{Lb} I_{ijkl} a_{ij} a_{kl} \quad (\text{A.25})$$

$$- \frac{2tsL(1 + \nu)}{E} S_{xy}^2$$

der

$$I_{ijkl}^{S_{xy}} = \frac{Lb}{4\pi^2} \left(\frac{\cos((i+k)\pi) - 1}{i+k} + \frac{\cos((i-k)\pi) - 1}{i-k} \right) \cdot \left(\frac{\cos((j+l)\pi) - 1}{j+l} + \frac{\cos((j-l)\pi) - 1}{j-l} \right) \quad (\text{A.26})$$

A.5 Rotasjonsfjærer som stivere på skrå

Tøyingsenergien p.g.a rotasjonsfjærer med fjærstivhet k_S^{rot} langs linjen S er

$$T_S^{rot} = \int_S \frac{1}{2} k_S^{rot} w_n^2 ds \quad (\text{A.27})$$

$$\int_S \frac{1}{2} k_S^{rot} [(w_{,x}\mathbf{i} + w_{,y}\mathbf{j}) \cdot \mathbf{n}]^2 ds$$

$$\text{der } \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \left[(y_1 - y_2)\mathbf{i} + (x_2 - x_1)\mathbf{j} \right] \quad (\text{A.28})$$

Uttrykket w_n er den deriverte i retningen normalt på den skrå avstivningen. I det tilfellet der det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1 er sammensatt av summen $w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij}$ blir dette integralet

$$T_S^{rot} = \int_S \frac{1}{2} k_S^{rot} \sum_{ijkl} \frac{[(y_1 - y_2)w_{ij,x} + (x_2 - x_1)w_{ij,y}][(y_1 - y_2)w_{kl,x} + (x_2 - x_1)w_{kl,y}]}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ds \quad (\text{A.29})$$

Dette integralet lar seg generelt ikke løses eksakt og må derfor benytte numerisk integrasjon

A.6 Rotasjonsfjærer ved rendene

A.6.1 Randen $x = 0$

Tøyingsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{x=0}^{rot}$ langs linjen $x = 0$

$$U_{x=0}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^b k_{x=0}^{rot} (w_{ij,x} w_{kl,x})|_{x=0} dy \quad (\text{A.30})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.1 blir dette integralet

$$U_{x=0}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{4} k_{x=0}^{rot} \frac{\pi^2 b}{L^2} i k a_{ij} a_{kj} \quad (\text{A.31})$$

A.6.2 Randen $x = L$

Tøyingsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{x=L}^{rot}$ langs linjen $x = L$

$$U_{x=L}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^b k_{x=L}^{rot} (w_{ij,x} w_{kl,x})|_{x=L} dy \quad (\text{A.32})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet blir dette integralet

$$U_{x=L}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{4} k_{x=L}^{rot} \frac{\pi^2 b}{L^2} i k \cos(i\pi) \cos(k\pi) a_{ij} a_{kj} \quad (\text{A.33})$$

A.6.3 Randen $y = 0$

Tøyningsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{y=0}^{rot}$ langs linjen $y = 0$

$$U_{y=0}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^L k_{y=0}^{rot} (w_{i,j,y} w_{kl,y})|_{y=0} dx \quad (\text{A.34})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet blir dette integralet

$$U_{y=0}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{1}{4} k_{y=0}^{rot} \frac{\pi^2 L}{b^2} j l a_{ij} a_{il} \quad (\text{A.35})$$

A.6.4 Randen $y = b$

Tøyningsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{y=b}^{rot}$ langs linjen $y = b$

$$U_{y=b}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^L k_{y=b}^{rot} (w_{i,j,y} w_{kl,y})|_{y=b} dx \quad (\text{A.36})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet blir dette integralet

$$U_{y=b}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{1}{4} k_{y=b}^{rot} \frac{\pi^2 L}{b^2} j l \cos(j\pi) \cos(l\pi) a_{ij} a_{il} \quad (\text{A.37})$$

Tillegg B

Knekning av skall

B.1 Airys spenningsfunksjon for skall

Airys spenningsfunksjon F for et skall løser likningen [1,3]

$$\nabla^4 F = \frac{E}{a^4}(w_{r,x\theta}^2 - w_{r,xx}w_{r,\theta\theta} + aw_{r,xx}) \quad (\text{B.1})$$

der

$$\sigma_x^m = F_{,\theta\theta} \quad \sigma_\theta^m = a^2 F_{,xx} \quad \tau_{x\theta}^m = -a F_{,x\theta} \quad (\text{B.2})$$

Fremgangsmetoden for å løse den tilsvarende likningen for en flat plate er vist av E. Byklum [3]. Uten store forskjeller fra en flat plate, kan vi finne at løsningen til likning B.1 med det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 blir

$$\begin{aligned} F(x, \theta) = & -\frac{1}{2a^2} S_\theta x^2 - \frac{1}{2} S_x \theta^2 + \frac{1}{a} S_{x\theta} x\theta \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}^S \sin\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \sin(2j\theta) \\ & + \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} f_{ij}^C \cos\left(\frac{i\pi}{L} x\right) \cos(2j\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

der

$$f_{ij}^S = \frac{E\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}{a^3\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2j}{a}\right)^2\right]^2} a_{ij} \quad (\text{B.4})$$

$$f_{ij}^C = \frac{E\pi^2}{L^2\left[\left(\frac{i\pi a}{L}\right)^2 + (2j)^2\right]^2} \sum_{rspq} b_{rspq} a_{rs} a_{pq} \quad (\text{B.5})$$

der f_{00}^C er definert som null og koeffisientene b_{rspq} er

$$b_{rspq} = rspq + r^2q^2, \text{ hvis } \begin{cases} \pm(r-p) = i & , s+q = j \\ r+p = i & , \pm(s-q) = j \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$b_{rspq} = rspq - r^2q^2, \text{ hvis } \begin{cases} r+p = i & , s+q = j \\ \pm(r-p) = i & , \pm(s-q) = j \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

I linearisert 2.ordens teori er forskyvningene små, og derfor neglisjeres kvadratiske ledd av amplituden a_{ij} :

$$F(x, \theta) = \frac{1}{2a^2}S_\theta x^2 + \frac{1}{2}S_x\theta^2 - \frac{1}{a}S_{x\theta}x\theta + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}^S \sin\left(\frac{i\pi}{L}x\right) \sin(2j\theta) \quad (\text{B.8})$$

B.2 Bøyningsenergi

Skallets potensielle energi p.g.a bøyning:

$$U_{skall}^b = \frac{aD}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^L [(w_{r,xx} + \frac{w_{r,\theta\theta}}{a^2})^2 - 2(1-\nu)(w_{r,xx}\frac{w_{r,\theta\theta}}{a^2} - \frac{w_{r,x\theta}^2}{a^2})] dx d\theta \quad (\text{B.9})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 og integrasjon er bøyningsenergien:

$$U_{skall}^b = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\pi DLa}{16} \left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2j}{a}\right)^2 \right]^2 a_{ij}a_{ij} \quad (\text{B.10})$$

B.3 Membrantøyningsenergi

Skallets potensielle energi p.g.a membrantøyningsenergien:

$$U_{skall}^m = \frac{aC}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^L [(\sigma_x^m + \sigma_\theta^m)^2 - 2(1-\nu)(\sigma_x^m\sigma_\theta^m - (\tau_{x\theta}^m)^2)] d\theta dx \quad (\text{B.11})$$

Med det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 og integrasjon er membrantøyningsenergien:

$$U_{skall}^m = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\pi tLE}{16a} \frac{\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2}{\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{2j}{a}\right)^2\right]^2} + \frac{taL}{4E} [(S_x + S_\theta)^2 - 2(1-\nu)(S_xS_\theta - S_{x\theta}^2)] \quad (\text{B.12})$$

B.4 Potensiell energi p.g.a ytre laster langs randen

B.4.1 Potensiell energi p.g.a. aksialspenningen

Potensialet til de ytre kreftene er lik arbeidet utført. For aksialspenningen blir dette

$$T_{S_x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t S_x \Delta u(\theta) a d\theta \quad (\text{B.13})$$

der $\Delta u(\theta)$ er endeforkortningen i x-retning og S_x er den påsatte spenningen:

$$\Delta u(\theta) = \int_0^L u_{,x} dx = \int_0^L \left(\epsilon_x^m - \frac{1}{2} w_{r,x}^2 \right) dx \quad (\text{B.14})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 og integrasjon blir den potensielle energien p.g.a. normalkreftene i x-retning:

$$\begin{aligned} T_{S_x} = & - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{S_x t \pi a L}{16} \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 a_{ij} a_{ij} \\ & - \frac{t a L \pi}{2E} S_x^2 + \frac{\nu t a L \pi}{2E} S_x S_\theta - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}^{S_x} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

der

$$t_{ij}^{S_x} = \begin{cases} 0 & , \text{ hvis } i \text{ eller } j \text{ er partall} \\ f_{ij}^S \frac{2 t a^3 L S_x}{E \pi i j} \left[\left(\frac{2j}{a} \right)^2 - \nu \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] & , \text{ ellers} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Kun ledd av orden $a_{ij} a_{kl}$ gir bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell energi.

B.4.2 Potensiell energi p.g.a. spenningen i ringretning

Med et ytre trykk p , må en balanserende spenning $S_\theta = \frac{a}{t} p$ være påsatt for at skallet skal være i likevekt. Arbeidet som S_θ utgjør er

$$T_p = \int_0^L t S_\theta \Delta v_\theta dx \quad (\text{B.17})$$

der Δv_θ er forkortningen av platen i ring-retning

$$\begin{aligned} \Delta v_\theta(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{,\theta}}{a} a d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\epsilon_\theta^m - \frac{w_r}{a} - \frac{1}{2} \frac{w_{r,\theta}^2}{a^2} \right) a d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 og integrasjon blir den potensielle energien p.g.a. det ytre trykket:

$$T_p = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p \frac{\pi j^2 L}{4} a_{ij} a_{ij} - \frac{taL\pi}{2E} S_\theta^2 + \frac{\nu taL\pi}{2E} S_x S_\theta - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}^{S_\theta} \quad (\text{B.19})$$

der

$$t_{ij}^{S_\theta} = \begin{cases} 0 & , \text{ hvis } i \text{ eller } j \text{ er partall} \\ f_{ij}^{S_\theta} \frac{2ta^3 L S_\theta}{E \pi i j} \left[\left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 - \nu \left(\frac{2j}{a} \right)^2 \right] & , \text{ ellers} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Kun ledd av orden $a_{ij} a_{kl}$ gir bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell energi.

B.4.3 Potensiell energi p.g.a. skjærspenningen

Den ytre potensielle energien p.g.a skjærkreftene

$$T_{S_{x\theta}} = \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_{x\theta} t \left(\frac{u_{,\theta}}{a} + v_{\theta,x} \right) d\theta dx = \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_{x\theta} t \left(\gamma_{x\theta}^m - w_{r,x} \frac{w_{r,\theta}}{a} \right) a d\theta dx \quad (\text{B.21})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 og integrasjon er den potensielle energien p.g.a skjærkreftene:

$$T_{S_{x\theta}} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n S_{x\theta} \frac{t}{4} i l I_{ijkl} a_{ij} a_{kl} - \frac{taL\pi(1+\nu)}{E} S_{x\theta}^2 \quad (\text{B.22})$$

der

$$I_{ijkl} = \left(\frac{\cos((i+k)\pi) - 1}{i+k} + \frac{\cos((i-k)\pi) - 1}{i-k} \right) \left(\frac{\cos((j+l)\pi) - 1}{j+l} + \frac{\cos((j-l)\pi) - 1}{j-l} \right) \quad (\text{B.23})$$

B.4.4 Potensiell energi p.g.a. ytre trykk

Med et ytre trykk p , må en balanserende spenning $S_\theta = \frac{a}{t} p$ være påsatt for at skallet skal være i likevekt. Arbeidet som p utgjør, er

$$T_p = - \int_0^L \int_0^{\frac{\pi}{2}} p w_r d\theta dx \quad (\text{B.24})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 og integrasjon blir den potensielle energien p.g.a. det ytre trykket:

$$T_p = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{paL}{2\pi i j} (\cos(\pi i) - 1)(\cos(\pi j) - 1) a_{ij} \quad (\text{B.25})$$

Kun ledd av orden $a_{ij}a_{kl}$ gir bidrag i prinsippet om stasjonær potensiell energi.

B.5 Rotasjonsfjærer ved rendene

B.5.1 Randen $x = 0$

Tøyingsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{x=0}^{rot}$ langs linjen $x = 0$

$$U_{x=0}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_{x=0}^{rot} (w_{ij,x} w_{kl,x})|_{x=0} a d\theta \quad (\text{B.26})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet i likning 4.37 blir dette integralet

$$U_{x=0}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{8} k_{x=0}^{rot} \frac{\pi^3 a}{L^2} i k a_{ij} a_{kj} \quad (\text{B.27})$$

B.5.2 Randen $x = L$

Tøyingsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{x=L}^{rot}$ langs linjen $x = L$

$$U_{x=L}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_{x=L}^{rot} (w_{ij,x} w_{kl,x})|_{x=L} a d\theta \quad (\text{B.28})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet blir dette integralet

$$U_{x=L}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{8} k_{x=L}^{rot} \frac{\pi^3 a}{L^2} i k \cos(i\pi) \cos(k\pi) a_{ij} a_{kj} \quad (\text{B.29})$$

B.5.3 Randen $\theta = 0$

Tøyingsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{\theta=0}^{rot}$ langs linjen $\theta = 0$

$$U_{\theta=0}^{rot} = \frac{1}{2} \int_0^L k_{\theta=0}^{rot} \frac{1}{a^2} (w_{ij,\theta} w_{kl,\theta})|_{\theta=0} dx \quad (\text{B.30})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet blir dette integralet

$$U_{\theta=0}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m k_{\theta=0}^{rot} \frac{L}{a^2} j l a_{ij} a_{il} \quad (\text{B.31})$$

B.5.4 Randen $\theta = \frac{\pi}{2}$

Tøyningsarbeid p.g.a. rotasjonsfjærer med fjærstivhet $k_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{rot}$ langs linjen $\theta = \frac{\pi}{2}$ er

$$U_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^L k_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{rot} \frac{1}{a^2} (w_{ij,\theta} w_{kl,\theta})|_{\theta=\frac{\pi}{2}} dx \quad (\text{B.32})$$

Ved substitusjon av det antatte forskyvningsfeltet blir dette integralet

$$U_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{rot} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m k_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{rot} \frac{L}{a^2} j l \cos(j\pi) \cos(l\pi) a_{ij} a_{il} \quad (\text{B.33})$$

Tillegg C

Deler av fortran kode for platemodellen

C.1 Hovedfil

```
SUBROUTINE PlateWithStiffener(output, input, stiffOrientation, aEigMat, ULSDeflection, &
                               StressX, StressY, StressXY, StressEq, aImpMat)

!DEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT :: PlateWithStiffener
!DEC$ ATTRIBUTES STDCALL   :: PlateWithStiffener
!DEC$ ATTRIBUTES REFERENCE :: stiffOrientation, output, input
!DEC$ ATTRIBUTES REFERENCE :: ULSDeflection, StressEq, aImpMat, StressX, StressY,StressXY

USE EigenproblemHandler
USE CalculateStress
USE kind_values, only: wp => wp_swan

IMPLICIT NONE

REAL(wp) :: L, s, tp, I, E, Ny, kTheta, SIGF

INTEGER :: irow, jrow, stiffType

REAL,PARAMETER :: PI = 3.141592654

REAL(wp) :: LAM_E, sig_x1, sig_x2, sig_y1, sig_y2, tau_xy, ULSloadfactor, tolerance, &
           aEig_max, xArgument, yArgument, xValue, yValue

INTEGER iLambda, iNumDof, intI, intJ, iBoundCond, M, intS, intL, intK, intO, maxMs, &
        maxNs, diskret1, diskret2, intM, intW, intP, intQ

Real(wp), dimension(:,:), allocatable :: AA, BB, EigenVec, KKBB, KKEIG

REAL(wp), DIMENSION(1) :: YMU

!*****
!* Variable (ut)
!*****
type :: userDefinedOutput
sequence

real(wp) :: eigenvalue, ULSloadfactor
```

```

end type userDefinedOutput

type(userDefinedOutput), intent(out):: output

!*****
!* Variable (inn)
!*****
type :: userDefinedInput
sequence

REAL(wp) :: L, s, tp, I, E, My, kTheta, sigX1, sigX2, sigY1, sigY2, tauXY, &
           SIGF, tolerance

integer    :: stiffType, irow, jrow, diskret1, diskret2, iBoundCond, MAXM, MAXN

end type userDefinedInput

type(userDefinedInput), intent(in) :: input

!*****
!* Definerer matriser
!*****
real(wp), dimension(input.diskret1,input.diskret2)
intent(out) :: ULSDeflection, StressX, StressY, StressXY, StressEq, aEigMat, aImpMat
REAL(wp), DIMENSION(input.irow,input.jrow) :: stiffOrientation
!*****

!*****
!* Initialiserer
!*****
L = input.L
s = input.s
tp = input.tp
I = input.I
E = input.E
My = input.My
kTheta = input.kTheta
sig_x1 = input.sigX1
sig_x2 = input.sigX2
sig_y1 = input.sigY1
sig_y2 = input.sigY2
tau_xy = input.tauXY
SIGF = input.SIGF
tolerance = input.tolerance
stiffType = input.stiffType
irow = input.irow
jrow = input.jrow
diskret1 = input.diskret1
diskret2 = input.diskret2
iBoundCond = input.iBoundCond
maxMs = input.MAXM
maxNs = input.MAXN

Allocate(EigenVec(maxMs*maxNs,1))
Allocate(KKBB(maxMs*maxNs,maxMs*maxNs))
Allocate(KKEIG(maxMs*maxNs,maxMs*maxNs))
Allocate(AA(maxMs*maxNs,1))
Allocate(BB(maxMs*maxNs,1))

KKBB = 0
KKEIG = 0
StressX = 0

```

```

StressY = 0
StressXY = 0
StressEq = 0
aEigMat = 0
aImpMat = 0
ULSDeflection = 0
Eigenvec = 0
ULSloadfactor = 0
LAM_E = 0
aEig_max = 0

!*****
!* Frihetsgrader
!*****
iNumDof = maxMs*maxNs

!*****
!* Nummer på egenverdien
!*****
iLambda = 1

!*****
!* Bidraget fra stiverene
!*****
DO intI = 1, irow
  Call CalculateStiff(L, s, tp, E, iNumDof, maxMs, &
    maxNs, stiffOrientation(intI,1), &
    stiffOrientation(intI,3), stiffOrientation(intI,2), &
    stiffOrientation(intI,4), I, kTheta, KKBB)
END DO

!*****
!* Bidraget fra platen
!*****
Call CalculatePlate(L, s, tp, E, Ny, iNumDof, maxMs, maxNs, iBoundCond, sig_x1, sig_x2, &
  sig_y1, sig_y2, tau_xy, KKBB, KKEIG)

!*****
!* Løser egenverdiproblemet
!*****
CALL GiveInPutData(iLambda, 'M', iNumDof, M, -KKEIG, KKBB)
CALL GetOutPutData(YMU, Eigenvec) LAM_E = 1 / YMU(1)

!*****
!* Skalerer egenvektoren
!*****
DO intL = 1, diskret2; DO intK = 1, diskret1
  xValue = (intK - 1)*L/(diskret1-1)
  yValue = (intL - 1) *s/(diskret2-1)
  intM = 0
  DO intN = 1, maxMs; DO intO = 1, maxNs
    xArgument = PI*intN*xValue/L
    yArgument = PI*intO*yValue/s
    intM = intM + 1
    aEigMat(intK, intL) = aEigMat(intK, intL) + Eigenvec(intM, 1) * sin(xArgument) * &
      sin(yArgument)
  END DO; END DO
END DO; END DO
DO intQ = 1, diskret2; DO intP = 1, diskret1

```

```

      IF(aEig_max < Abs(aEigMat(intP,intQ)))Then
        aEig_max = Abs(aEigMat(intP,intQ))
      END IF
    END DO; END DO

    IF(aEig_max /= 0)Then
      aEigMat = (1/aEig_max) * aEigMat Eigenvec = (1/aEig_max) * Eigenvec
    END IF

!*****
!* Beregner spenninger
!*****
CALL CalcStress(Eigenvec, aEigMat, LAM_E, ULSloadfactor, L, s, maxMs, maxNs, E, Ny, &
  sig_x1, sig_x2, sig_y1, sig_y2, tau_xy, SIGF, tolerance, stiffOrientation, irow, &
  jrow, diskret1, diskret2, AA, BB, StressX, StressY, StressXY, StressEq)

!*****
!* Imperfeksjonen lagres i en matrise som kan fremstilles grafisk
!*****
DO intL = 1 , diskret2; DO intK = 1 , diskret1
  xValue = (intK - 1)*L/(diskret1-1)
  yValue = (intL - 1)*s/(diskret2-1) intM = 0
  DO intN = 1 ,maxMs; DO intO = 1 ,maxNs
    xArgument = PI*intN*xValue/L
    yArgument = PI*intO*yValue/s
    intM = intM + 1
    aImpMat(intK,intL) = aImpMat(intK,intL)+BB(intM,1)*sin(xArgument)*sin(yArgument)
  END DO; END DO
END DO END DO

!*****
!* Forskyvning ved platens kapasitetstilstand lagres i en matrise
!*****
DO intL = 1 , diskret2; DO intK = 1 , diskret1
  xValue = (intK - 1)*L/(diskret1-1)
  yValue = (intL - 1)*s/(diskret2-1)
  intM = 0
  DO intN = 1 ,maxMs; DO intO = 1 ,maxNs
    xArgument = PI*intN*xValue/L
    yArgument = PI*intO*yValue/s
    intM = intM + 1
    ULSDeflection(intK,intL) = ULSDeflection(intK,intL)+ &
      AA(intM,1)*sin(xArgument)*sin(yArgument)
  END DO; END DO
END DO; END DO

!*****
!* Avslutter
!*****
deallocate(EigenVec)
deallocate(KKBB)
deallocate(KKEIG)
deallocate(AA)
deallocate(BB)

output.eigenvalue = LAM_E
output.ULSloadfactor = ULSloadfactor

END SUBROUTINE

```


C.2 Bidrag fra platen

```

SUBROUTINE CalculatePlate(L, s, tp, E, Ny, iNumDof, maxMs, maxNs, iBoundCond, sig_x1, &
    sig_x2, sig_y1, sig_y2, tau_xy, KKBB, KKEIG)

USE kind_values, only: wp => wp_swan
USE AVVIEWER

IMPLICIT NONE

REAL(wp) :: L, s, tp, E, Ny, D, sig_x1, sig_x2, sig_y1, sig_y2, tau_xy, Int1shear, &
    Int2shear, Int3shear, Int4shear, k_rot1, k_rot2, k_rot3, k_rot4

INTEGER maxMs, maxNs, iNumDof, odd1, odd2, odd3, odd4, &
    rowNr, columnNr, intI, intJ, intP, intQ, iBoundCond

REAL, PARAMETER :: PI = 3.141592654

REAL(wp), DIMENSION(iNumDof, iNumDof) :: KKBB, KKEIG

D = (E*tp**3)/(12*(1-Ny**2))

rowNr = 1

odd1 = -1
odd2 = -1
odd3 = -1
odd4 = -1

!*****
!* Bidrag til den geometriske stivmatrisen og materialstivhetmatrisen
!*****
DO intI = 1, maxMs; odd3 = -1 * odd3 ;DO intJ = 1, maxNs
    odd1 = -1 * odd1
    columnNr = 1

    KKBB(rowNr, rowNr) = KKBB(rowNr, rowNr) + (D*PI**4*(intI**2 + (L*intJ/s)**2)**2)/(4*L**3/s)

    KKEIG(rowNr, rowNr) = KKEIG(rowNr, rowNr) - (sig_x1*tp*s*(intI*PI)**2)/(4*L) - &
        (sig_x2-sig_x1)*s*tp*(PI*intI)**2/(8*L) - (sig_y1*tp*L*(intJ*PI)**2)/(4*s) - &
        (sig_y2-sig_y1)*L*tp*(PI*intJ)**2/(8*s)

DO intP = 1, maxMs
    odd4 = -1 * odd4
DO intQ = 1, maxNs
    odd2 = -1 * odd2

!*****
!* Rotasjonsfjærene langs randen
!*****
IF(intJ == intQ)Then
    !** Randen x=0 **
    KKBB(rowNr, columnNr) = KKBB(rowNr, columnNr) + 0.5 * k_rot1 * &
        intI*intP*s*(PI/2*L)**2

    !** Randen x=L **
    KKBB(rowNr, columnNr) = KKBB(rowNr, columnNr) + 0.5 * k_rot2 * &
        intI*intP*s*(PI/2*L)**2 * cos(intI*PI)*cos(intP*PI)
END IF
IF(intI == intP)Then
    !** Randen y=0 **
    KKBB(rowNr, columnNr) = KKBB(rowNr, columnNr) + 0.5 * k_rot3 * &
        intJ*intQ*L*(PI/2*s)**2

```

```

      *** Randen y=L ***
      KKBB(rowNr,columnNr) = KKBB(rowNr,columnNr) + 0.5 * k_rot4 * &
                          intJ*intQ*L*(PI/2*s)**2 * cos(intJ*PI)*cos(intQ*PI)
END IF

!*****
!* Bidraget fra normalspenningene
!*****
IF(intI== intP)Then
  IF(intJ /= intQ)Then
    IF(odd1*odd2 < 0)Then
      KKEIG(rowNr,columnNr) = KKEIG(rowNr,columnNr) + 2 * s/L * tp * &
                          (sig_x2-sig_x1)*intI**2*intJ*intQ/((intJ**2-intQ**2)**2)
    END IF
  END IF
END IF
IF(intJ== intQ)Then
  IF(intI /= intP)Then
    IF(odd3*odd4 < 0)Then
      KKEIG(rowNr,columnNr) = KKEIG(rowNr,columnNr) + 2 * L/s * tp * &
                          (sig_y2-sig_y1)*intJ**2*intI*intP/((intI**2-intP**2)**2)
    END IF
  END IF
END IF

!*****
!* Bidraget fra skjærspenningene
!*****
Int1shear = L/(intI+intP)*(cos((intI+intP)*PI)-1)
Int3shear = s/(intJ+intQ)*(cos((intJ+intQ)*PI)-1)
IF(intI /= intP)Then
  Int2shear = L/(intP-intI)*(cos((intP-intI)*PI)-1)
ELSE
  Int2shear = 0
END IF
IF(intJ /= intQ)Then
  Int4shear = s/(intJ-intQ)*(cos((intJ-intQ)*PI)-1)
ELSE
  Int4shear = 0
END IF
KKEIG(rowNr,columnNr) = KKEIG(rowNr,columnNr) + tp*tau_xy/(4*L*s)*&
                      (intI*intQ*(Int1shear+Int2shear)*(Int3shear+Int4shear) + &
                      intP*intJ*(Int1shear-Int2shear)*(Int3shear-Int4shear) )

  columNr = columNr + 1
END DO
END DO
rowNr = rowNr + 1
END DO ;END DO
END SUBROUTINE

```

C.3 Bidrag fra stiverne

```
SUBROUTINE CalculateStiff(L, s, tp, E, iNumDof, maxMs, maxNs, x1, x2, y1, y2, I, kTheta, KKBB)
```

```

USE EigenproblemHandler
USE kind_values, only: wp => wp_swan ! Defines numeric precision
USE AVVIEWER

IMPLICIT NONE

REAL(wp) :: L, s, tp, E, I, kTheta, x1, x2, y1, y2, L_st, h, &
           diskretX, int1_stiffener, int2_stiffener, int3_stiffener

INTEGER maxMs, maxNs, iNumDof, intPoints, DifferentPoint, &
        rowNr, columnNr, intI, intJ, intP, intQ, intR

REAL,PARAMETER :: PI = 3.141592654

REAL(wp),intent(out), DIMENSION(iNumDof,iNumDof) :: KKBB

int1_stiffener = 0
int2_stiffener = 0
int3_stiffener = 0

rowNr = 1

intPoints = 100.
h = 1.0 / intPoints

L_st = sqrt((x1-x2)**2 + (y1-y2)**2)

!*****
!* Numerisk integrasjon av bidraget til stiveren
!*****
DO intI = 1, maxMs; DO intJ = 1, maxNs
columnNr = 1
  DO intP = 1, maxMs; DO intQ = 1, maxNs

    int1_stiffener = h * E * I / ( 4*((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)**2 ) &
      *((x2-x1)**2 * (intI*PI/L)**2 * sin(intI*PI/L*x1)*sin(intJ*PI/s *y1) &
      -2*(x2-x1)*(y2-y1)*(intI*PI/L)*(intJ*PI/s)* cos(intI*PI/L*x1)*cos(intJ*PI/s*y1)&
      +(y2-y1)**2 * (intJ*PI/s)**2 * sin(intI*PI/L*x1)*sin(intJ*PI/s *y1) )&
      *((x2-x1)**2 * (intP*PI/L)**2 * sin(intP*PI/L*x1)*sin(intQ*PI/s *y1) &
      -2*(x2-x1)*(y2-y1)*(intP*PI/L)*(intQ*PI/s)* cos(intP*PI/L*x1)*cos(intQ*PI/s*y1)&
      +(y2-y1)**2 * (intQ*PI/s)**2 * sin(intP*PI/L*x1)*sin(intQ*PI/s*y1) ) * L_st

    KKBB(rowNr,columnNr) = KKBB(rowNr,columnNr) + int1_stiffener
    KKBB(columnNr,rowNr) = KKBB(columnNr,rowNr) + int1_stiffener

  DO intR = 1, (intPoints-1)
    diskretX = h*intR
    IF(I /= 0)Then
      int2_stiffener = h * E * I / ( 2*((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)**2 ) &
        *((x2-x1)**2 * (intI*PI/L)**2 * sin(intI*PI/L*(x1+(x2-x1)*diskretX))*sin(intJ*PI/s*&
        (y1+(y2-y1)*diskretX))-2*(x2-x1)*(y2-y1)*(intI*PI/L)*(intJ*PI/s)* cos(intI*PI/L*&
        (x1+(x2-x1)*diskretX))*cos(intJ*PI/s *(y1+(y2-y1)*diskretX))&+(y2-y1)**2 * &
        (intJ*PI/s)**2 * sin(intI*PI/L*(x1+(x2-x1)*diskretX))*sin(intJ*PI/s * &
        (y1+(y2-y1)*diskretX) ) * ((x2-x1)**2*(intP*PI/L)**2 * sin(intP*PI/L*(x1+(x2-x1)&

```

```

*diskretX))*sin(intQ*PI/s *(y1+(y2-y1)*diskretX))-2*(x2-x1)*(y2-y1)*(intP*PI/L)*&
(intQ*PI/s)*cos(intP*PI/L*(x1+(x2-x1)*diskretX))*cos(intQ*PI/s *&
(y1+(y2-y1)*diskretX))+(y2-y1)**2*(intQ*PI/s)**2*sin(intP*PI/L*&
(x1+(x2-x1)*diskretX))*sin(intQ*PI/s *(y1+(y2-y1)*diskretX))) * L_st

KKBB(rowNr,columnNr) = KKBB(rowNr,columnNr) + int2_stiffener
KKBB(columnNr,rowNr) = KKBB(columnNr,rowNr) + int2_stiffener
END IF
END DO

int3_stiffener = h*E*I/(4*((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)**2)*((x2-x1)**2*(intI*PI/L)**2 * &
sin(intI*PI/L*x2)*sin(intJ*PI/s *y2)-2*(x2-x1)*(y2-y1)*(intI*PI/L)*(intJ*PI/s)* &
cos(intI*PI/L*x2)*cos(intJ*PI/s*y2)+(y2-y1)**2*(intJ*PI/s)**2*sin(intI*PI/L*x2)*&
sin(intJ*PI/s*y2))*((x2-x1)**2*(intP*PI/L)**2*sin(intP*PI/L*x2)*sin(intQ*PI/s *y2)&
-2*(x2-x1)*(y2-y1)*(intP*PI/L)*(intQ*PI/s)* cos(intP*PI/L*x2)*cos(intQ*PI/s *y2)&
+(y2-y1)**2 * (intQ*PI/s)**2 * sin(intP*PI/L*x2)*sin(intQ*PI/s *y2)) * L_st

KKBB(rowNr,columnNr) = KKBB(rowNr,columnNr) + int3_stiffener
KKBB(columnNr,rowNr) = KKBB(columnNr,rowNr) + int3_stiffener

columnNr = columnNr + 1

END DO;END DO
rowNr = rowNr + 1

END DO;END DO
END SUBROUTINE

```

C.4 Spenningsberegning

```
MODULE CalculateStress
```

```

use kind_values, only: wp => wp_swan
implicit none
private

```

```
public::CalcStress
```

```
INTEGER :: M, MN, N, ID, inc
```

```
REAL(wp) :: M1111, M2222, M1212, M1122, DET, CMAT(3,3),MMAT(3,3),DUM1(3),DUM2(3,3), F1, &
sigXFAC, sigYFAC, sigXYFAC
```

```
Real(wp), dimension(:), allocatable :: FFMN
```

```
Integer, dimension(:,:), allocatable :: MNNM1,MNNM2
```

```
REAL,PARAMETER :: PI=3.14159
```

```
contains
```

```

SUBROUTINE CalcStress(Eigenvec, aEigMat, LAM_E, LAM, L, s, MAXM, MAXN, E, NY, sig_x1, &
sig_x2, sig_y1, sig_y2, tau_xy, SIGF, tolerance, stiffOrientation, irow, jrow, diskret1, &
diskret2, AA, BB, SigXStress, SigYStress, SigXYStress, MisesStress)

```

```

use kind_values, only: wp => wp_swan ! Defines numeric precision
implicit none

REAL(wp),intent(in) :: L, s, E, NY,sig_x1, sig_x2, sig_y1, sig_y2, tau_xy, SIGF, tolerance

INTEGER,intent(in) :: irow, jrow, MAXM, MAXN

REAL(wp):: X, Y, sigX, sigY, sigXY, sigEQ, C1111, C2222, C1212, C1122, SNXA, SNXB, SNYA, &
          SNYB, SNXY, delta0, delta1, inc_LAM, SIGEQ_max, diskret_stiff, &
          DifferFromYieldAbs, LAM_E, LAM

INTEGER F,G,H, diskret1, diskret2, NNN, intI,intJ, row, intK, intL, stiff_points, Buckling

REAL(wp), DIMENSION(diskret1,diskret2) :: MisesStress, SigXStress, SigYStress, SigXYStress

REAL(wp),intent(in),DIMENSION(irow,jrow) :: stiffOrientation

REAL(wp), DIMENSION(MAXM*MAXN,1) :: EigenVec, BB, AA

real(wp), dimension(diskret1,diskret2) :: aEigMat

!*****
!* Beregner forskjellig koeffisienter
!*****
NNN = (2*MAXM+1)*(2*MAXN+1)-1

Call ComputeStiffnessParameters(C1111,C2222,C1212,C1122, E, NY)

CMAT(1,1)=C1111
CMAT(1,2)=C1122
CMAT(1,3)=0
CMAT(2,1)=C1122
CMAT(2,2)=C2222
CMAT(2,3)=0
CMAT(3,1)=0
CMAT(3,2)=0
CMAT(3,3)=C1212

MMAT=CMAT
DUM1=1
CALL MATINS(MMAT,3,3,DUM1,1,1,DET,ID,DUM2)
M1111=MMAT(1,1)
M1122=MMAT(1,2)
M2222=MMAT(2,2)
M1212=0.25*MMAT(3,3)

call AllocateMatrices(MAXM, MAXN, NNN,diskret1,diskret2)

MMMM1=0
MMMM2=0

CALL MMN(MMMM1,MMMM2,MAXM,MAXN,NNN)

!*****
!* Initialiserer
!*****
AA = 0
BB = 0
X = 0
Y = 0
LAM = 0

```

```

SIGX=0
SIGY=0
SIGXY=0
inc_LAM = SIGF/2
SIGEQ_max = 0
SIGEQ = 0
DifferFromYieldAbs = SIGF
SNXA = 0
SNXB = 0
SNYA = 0
SNYB = 0
SNXY = 0

!*****
!* Imperfeksjonen i en vektor
!*****
!IMP-vector
delta0 = tolerance
BB = delta0 * Eigenvec

!*****
!* Kontrollerer om egenverdiene er positive (de er negative ved strekk)
!*****
Buckling = 1
IF(LAM_E < 0 .OR. LAM_E == 0)Then
    Buckling = 0
END IF

!*****
!* Pålastning
!*****
inc = 0
DO WHILE (DifferFromYieldAbs > 0.1)
    inc = inc + 1

    DifferFromYieldAbs = Abs(SIGF- SIGEQ_max)

    IF(SIGEQ_max >= SIGF .OR. Abs(LAM) >= Abs(LAM_E))Then
        LAM = LAM - inc_LAM
        inc_LAM = inc_LAM/2
    END IF

    SIGEQ_max = 0

    LAM = LAM + inc_LAM

    SNXA = LAM*sig_x1
    SNXB = LAM*sig_x2
    SNYA = LAM*sig_y1
    SNYB = LAM*sig_y2
    SNXY = LAM*tau_xy

    IF(LAM /= LAM_E .AND. LAM_E > 0)Then

        delta1 = LAM/(LAM_E-LAM) * delta0

        AA = delta1 * Eigenvec

        CALL FNNN(FFMN,MAXM,MAXN,AA,BB,L,s,M1111,M2222,M1122,M1212)

```

```

!*****
!* Kontrollerer spenningen langs randen
!*****
!THE EDGE
DO F=1, diskret1; DO G=1, diskret2
  IF (F .eq. 1 .or. F .eq. diskret1 .or. &
      G .eq. 1 .or. G .eq. diskret2)Then

    X = L/(diskret1-1)*(F-1)
    Y = s/(diskret2-1)*(G-1)

    CALL ComputeStress(X,Y,SNXA, SNXB, SNYA, SNYB, SNXY, L, s, NNN,&
                      SIGX, SIGY, SIGXY, SIGEQ, Buckling)
    IF(SIGEQ_max < SIGEQ)Then
      SIGEQ_max = SIGEQ
    END IF
  END IF
END DO;END DO

!*****
!* Kontrollerer spenningen langs stiveren
!*****
stiff_points = 40
DO intK = 1, irow; DO intL = 1, stiff_points

  diskret_stiff = (intL-1)/(stiff_points-1)

  X = stiffOrientation(irow,1) + (stiffOrientation(irow,3)&
    - stiffOrientation(irow,1))*diskret_stiff
  Y = stiffOrientation(irow,2) + (stiffOrientation(irow,4)&
    - stiffOrientation(irow,2))*diskret_stiff

  CALL ComputeStress(X,Y,SNXA, SNXB, SNYA, SNYB, SNXY, L, s, NNN,&
                    SIGX, SIGY, SIGXY, SIGEQ, Buckling)

  IF(SIGEQ_max < SIGEQ)Then
    SIGEQ_max = SIGEQ
  END IF
END DO;END DO

ELSE

!*****
!* Kapasiteten er nådd og spenningsfelt beregnes
!*****
CALL ComputeStress(X,Y,SNXA, SNXB, SNYA, SNYB, SNXY, L, s, NNN,&
                  SIGX, SIGY, SIGXY, SIGEQ, Buckling)
IF(SIGEQ_max < SIGEQ)Then
  SIGEQ_max = SIGEQ
END IF

END IF
END DO

!*****
!* Lager matriser med spenningsfelt
!*****
DO F=1, diskret1; DO G=1, diskret2
  X = L/(diskret1-1)*(F-1)
  Y = s/(diskret2-1)*(G-1)

```

```

      CALL ComputeStress(X,Y,SNXA, SNXB, SNYA, SNYB, SNXY, L, s, NNN,&
          SIGX, SIGY, SIGXY, SIGEQ, Buckling)

      MisesStress(F,G) = SIGEQ
      SigXStress(F,G) = SIGX
      SigYStress(F,G) = SIGY
      SigXYStress(F,G) = SIGXY
    END DO; END DO

!*****
!* Spenningen uten imperfeksjon (ved f.eks. stekkspenninger)
!*****
    IF(Buckling==0)Then
      AA=0
      BB=0
      Eigenvec=0
      aEigMat = 0
      MisesStress = SIGEQ
      SigXStress = SIGX
      SigYStress = SIGY
      SigXYStress = SIGXY
    END IF

    call DeallocateMatrices

  END SUBROUTINE

SUBROUTINE AllocateMatrices(MAXM,MAXN,NNN,diskret1,diskret2)

      INTEGER, intent(in) :: diskret1, diskret2, MAXM, MAXN, NNN

      allocate(FFMN(NNN))
      Allocate(MMMM1(0:2*MAXM,0:2*MAXN))
      Allocate(MMMM2(NNN,3))

  END SUBROUTINE

SUBROUTINE DeallocateMatrices

      deallocate(FFMN)
      deallocate(MMMM1)
      deallocate(MMMM2)

  END SUBROUTINE

```