Application de la théorie des ondelettes *

Valérie Perrier

Laboratoire de Modélisation et Calcul de l'IMAG
Institut National Polytechnique de Grenoble

`Valerie.Perrier@imag.fr`

*Enseignement UNESCO *Traitement du signal et des images numériques*, Tunis, ENIT, 14-18 mars 2005

Cours 3
Transformée en Ondelettes Continue 2D

Partie II : applications en imagerie médicale

1. Inversion globale et locale de la Transformée de Radon.
   Application en imagerie scanner.

2. Détection et caractérisation de contours dans une image.
   Application à la reconstruction 3D en chirurgie orthopédique.

Utilisation des ondelettes en Traitement d'Image

Compression d'images sur bases d'ondelettes : format JPEG 2000

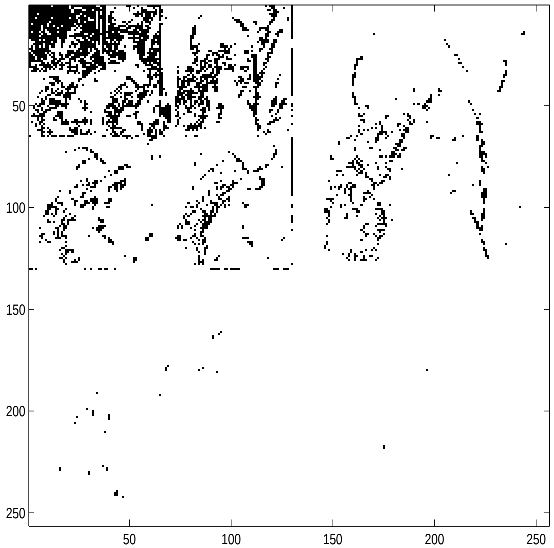


Figure de gauche : *Image* $256 \times 256 = 65536$ *valeurs, 256 niveaux de gris.*

Figure du milieu : *4000 plus grands coefficients d'ondelettes*

Figure de droite : *image recomposée à partir de ses 4000 plus grands coefficients sur une base d'ondelettes à 4 moments nuls.*

Compression = (65536 -4000)*100/65536 = **93,9 %**

Recherche sur les ondelettes en Traitement d'Image

Objectif : battre JPEG 2000

- Utiliser la **géométrie de l'image** : construction de bases d'ondelettes adaptées aux contours de l'image (curvelets, ridgelets, bandelettes, contourlets, ondelettes ENO, wedgelets, etc...) pour améliorer encore la compression.

- **Séparer partie géométrique** de l'image (comprimée par JPEG 2000) et **partie texturée** (nécessité de construire des méthodes d'analyse/synthèse de texture).

Utilisation des ondelettes en Imagerie Médicale

- **Traitement des données** : compression, débruitage (IRM, échographie), réhaussement (fluoroscopie, mammographie), détection d'objets (analyse de texture, description statistique).

- **Analyse statistique** de données fonctionnelles, classification.

- **Reconstruction** d'images et schéma d'acquisition : tomographie (locale), images à résonnance magnétique (IRM)

→Utilisation d'une transformée en ondelettes **redondante** : la **transformée en ondelettes continue**, ou sa version discrétisée en échelles, la **transformée dyadique**.

PLAN

Introduction : Motivations médicales.

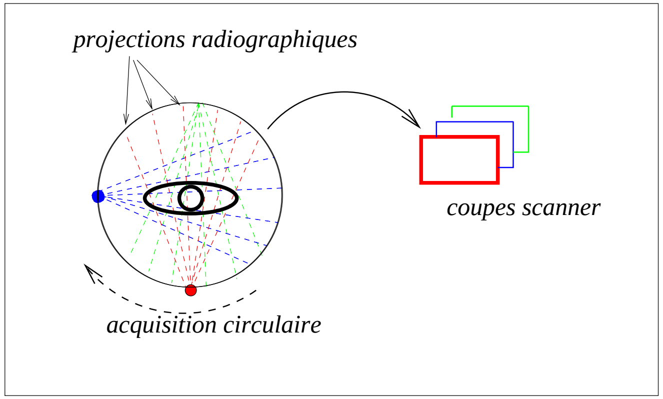
1. Ondelettes pour la reconstruction en tomographie locale.

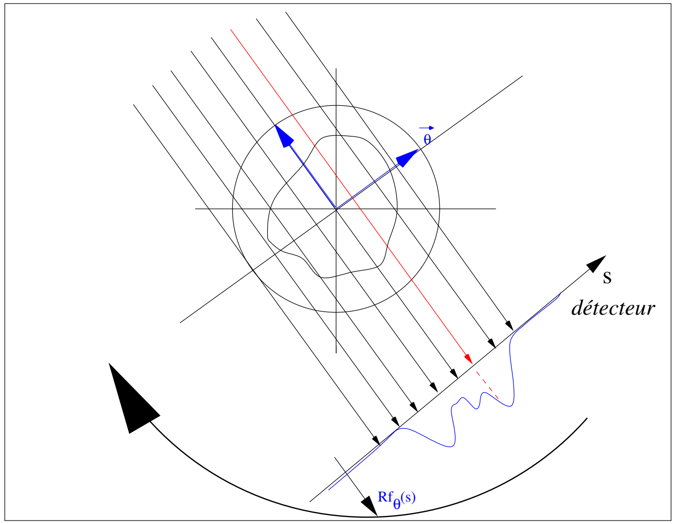
2. Ondelettes et segmentation d'image en vue de la reconstruction 3D.

Introduction

Motivations médicales

Introduction - Principe du scanner





Le scanner mesure la **Transformée de Radon** de la fonction d'atténuation $f(\vec{x})$ le long des droites $L_{\theta,s}$:

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \int_{L_{\theta,s}} f(\vec{x})\; d\ell = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^{\perp})\; dt$$

Inversion classique = formule de **rétro-projection filtrée :**

$$f(\vec{x}) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\; |\omega|\; e^{2i\pi\omega\vec{x}.\vec{\theta}} d\theta\; d\omega, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration de : $f(\vec{x}) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)\ |\omega|\ e^{2i\pi\omega\vec{x}.\vec{\theta}} d\theta\ d\omega$

(1) Montrer que la transformée de Fourier 1D de $\mathcal{R}_\theta f(s)$ vérifie :

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) = \hat{f}(\omega\vec{\theta})$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier 2D de f, et $\vec{\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

(2) En déduire la formule, en utilisant l'inversion de Fourier 2D.

Autre écriture de la formule

$$f = \mathcal{R}^{\#}(\mathcal{R}_\theta f \star e)$$

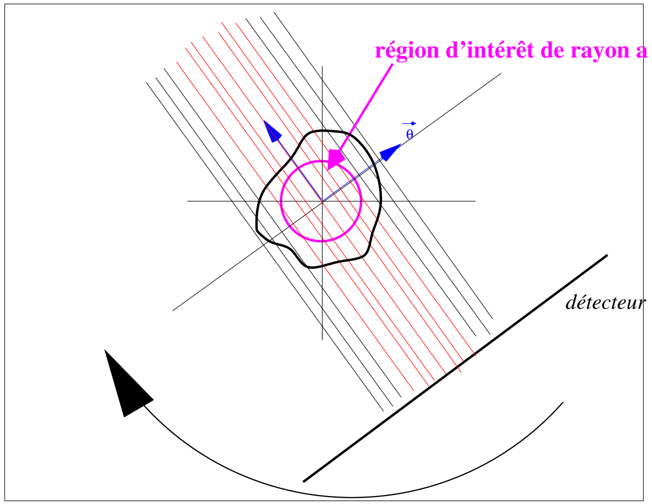
où e est le *filtre rampe* ($\hat{e}(\omega) = |\omega|$), et $\mathcal{R}^{\#}$ l'opérateur de *rétroprojection* :

$$\mathcal{R}^{\#} g(\vec{x}) = \int_0^{\pi} g\left(\vec{x}.\vec{\theta}\right) d\theta$$

Introduction - Motivations médicales

But : reconstruction de structures anatomiques.
Scanner solution efficace mais trop invasive ou non praticable (en cours d'intervention par exemple)

1. Trop invasive, petits détecteurs → **Tomographie locale**

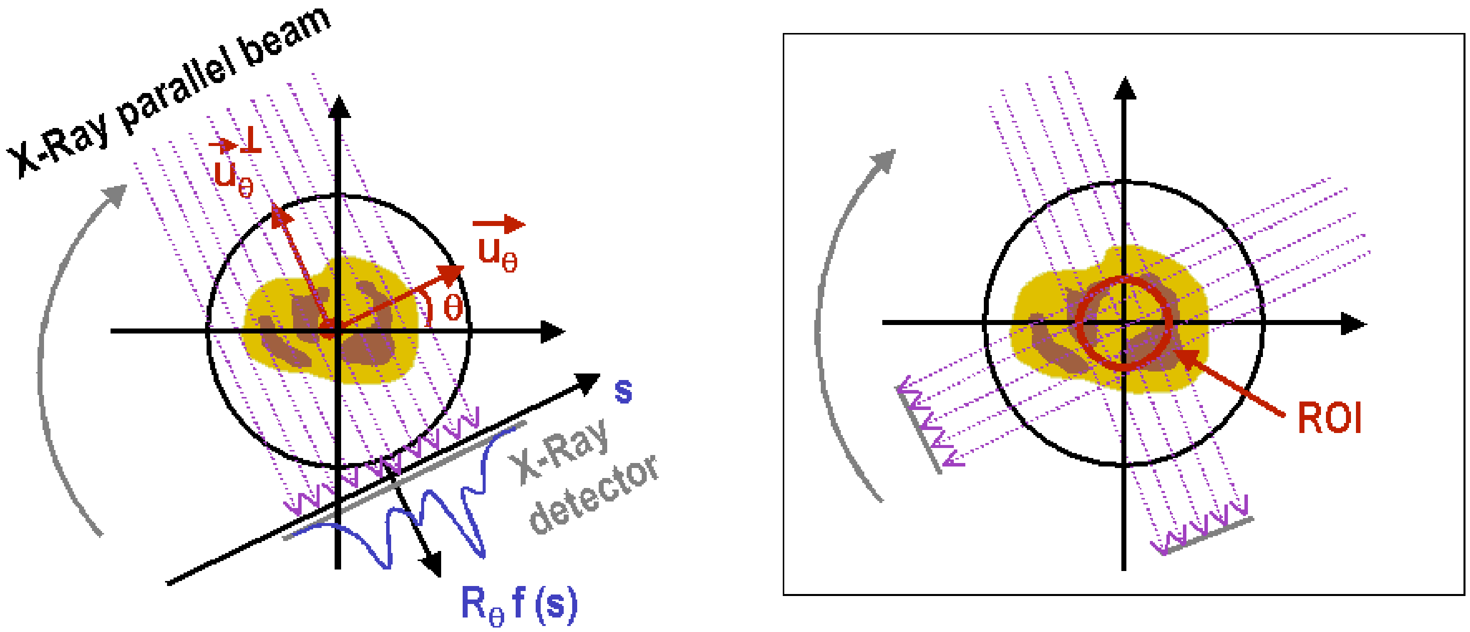


Le problème intérieur : en irradiant uniquement la **Région d'Intérêt (RI)**, *comment reconstruire cette région? (Problème mal posé)*

2. Non praticable → **Autres solutions**
   Reconstruction de surfaces 3D en temps réel sur la table d'opération à partir de seulement 2 prises de vue.

Partie 1

Ondelettes pour la Reconstruction en Tomographie Locale

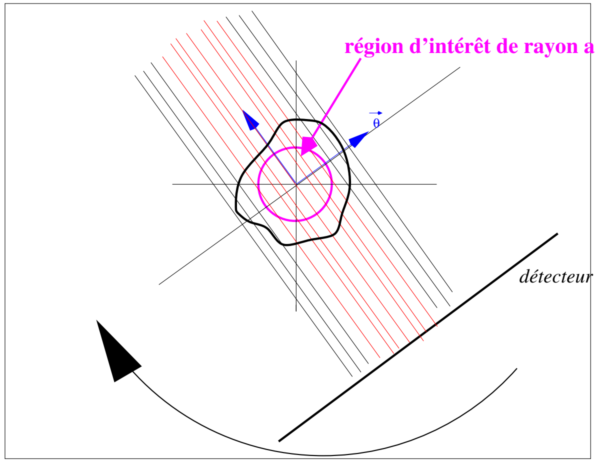


(a) The acquisition and parametrization of the Radon Transform

(b) The interior problem : only measures of the Radon Transform across a region of interest are computed.

The Radon Transform, in case of complete or truncated data.

1- Le problème de la tomographie locale



Le problème intérieur : en irradiant uniquement la **Région d'Intérêt (RI)**, *i.e. connaissant* $\mathcal{R}_\theta f(s)$ *pour* $|s| \leq A$ *comment reconstruire la fonction* $f(x)$ *dans la région* $\|x\| \leq A$*?*

Ce problème est mal posé (Natterer, 1986), au sens où il n'y a pas unicité de la solution. Néanmoins, il est montré qu'il est théoriquement possible de reconstruire les discontinuités de f.

1- Ondelettes et tomographie

1. [Walnut, Berenstein, 1993] On relie les coefficients d'ondelettes 2D de la fonction f contre une ondelette Ψ, avec les coefficients d'ondelettes 1D de $\mathcal{R}_\theta f$ contre une ondelette ψ :

$$W_\Psi f(a,b) = C \int_0^{2\pi} W_\psi(\mathcal{R}_\theta f)(a, b.\vec{\theta})\ d\theta$$

   Les deux ondelettes sont reliées par la relation : $\Psi = \mathcal{R}^{\#}(\psi)$ ($\mathcal{R}^{\#}$ opérateur de rétroprojection)

2. "Décomposition en Ondelettes/Vaguelettes" [Donoho, 1995] :

$$[\mathcal{R}_\theta f, \gamma_{j,k}] =< f, \Psi_{j,k} >$$

   $\Psi_{j,k}$ base d'ondelettes orthonormée (2D), $\gamma_{j,k}$ vaguelettes (réguliéres, oscillantes, locales) définies par :

$$\gamma_{j,k}(s,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|\ \hat{\Psi}_{j,k}(\omega\vec{\theta})\ e^{2i\pi s\omega}\ d\omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]$$

1- Utilisation de la Transformée en Ondelettes 2D directionnelle

(Murenzi, 1989)

Soit $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ la fonction à analyser.

Décomposition en ondelettes de $f(x)$ avec une *ondelette d'analyse* g:

$a > 0, b \in \mathbb{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi]$,

$$W_g f(a,b,\varphi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\ \frac{1}{a}\bar{g}\left(r_{-\varphi}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)\ dx =< T_b D_a R_\varphi g, f >$$

Synthèse avec une *ondelette de reconstruction* h :

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{c_{gh}} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} W_g f(a,b,\varphi)\ \frac{1}{a} h\left(r_{-\varphi}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)\ \frac{da}{a^3} db\ d\varphi$$

Condition d'admissibilité sur les fonctions g et h $(g, h \in L^2(\mathbb{R}^2))$:

$$c_{gh} = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{\hat{g}}(k)\hat{h}(k)}{\|k\|^2} dk < +\infty$$

1- L'approche de M. Holschneider (1991)

Idée : *la transformée de Radon peut être directement vue comme une décomposition en "ondelettes" continue, avec une ondelette d'analyse singulière.*

- Extension de la TO à des *ondelettes d'analyse* g **distributions** :

$$< T_b D_a R_\varphi g, f > = < g, R_{-\varphi} D_{\frac{1}{a}} T_{-b} f >$$

où les opérateurs T_b, D_a et R_α sont définis dans l'espace des distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ par : pour toute fonction test φ,

$< T_b g, \varphi > = < g, \varphi(x+b) >$, $< D_a g, \varphi > = < g, a\varphi(ax) >$,
$< R_\alpha g, \varphi > = < g, \varphi(r_\alpha x) >$.

(Pour simplifier, on considérera dans la suite que les fonctions f étudiées sont des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$).

- **Transformée de Radon** :

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\vec{\theta} + t\vec{\theta}^\perp)\ dt$$

Si on considère comme *ondelette d'analyse* :

$$g = \delta(x_1)1(x_2) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \mapsto < g, f >= \int_{\mathbb{R}} f(0, x_2)dx_2$$

alors on a :

$$\boxed{< T_b D_a R_\theta g, f >= \mathcal{R}_\theta f(\vec{b}.\vec{\theta})}$$

Inversion globale et locale de la Transformée de Radon

On utilise alors la **formule d'inversion** de la transformée en ondelettes

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{c_{gh}} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\theta f(\vec{b}.\vec{\theta}) \; \frac{1}{a} h\left(r_{-\theta}\left(\frac{\vec{x}-\vec{b}}{a}\right)\right) \frac{da}{a^3} d\vec{b}\; d\theta$$

où

$$c_{gh} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{h}(k_1,0)}{|k_1|^2} dk_1 < +\infty$$

i.e. *h ondelette "classique"* avec 2 moments nuls dans la direction x_1
$\int_{\mathbb{R}} h(x_1,x_2)\; dx_1 = \int_{\mathbb{R}} x_1\; h(x_1,x_2)\; dx_1 = 0$.(exemple $h(\vec{x}) = \Delta e^{-\pi\|\vec{x}\|^2}$).

Pour faire le lien avec la formule d'inversion classique (rétro-projection filtrée) on réécrit l'équation :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{c_{gh}} \int_0^{2\pi} (\mathcal{R}_\theta f \star H_\theta)(\vec{x}.\vec{u}_\theta) d\theta$$

avec H_θ, défini par: $H_\theta(\vec{x}) = \int_{a>0} \frac{1}{a^3} h\left(\frac{r_{-\theta}\vec{x}}{a}\right) \frac{da}{a}$

Formule locale $\rightarrow$ $\mathbf{b} \in (\mathbf{RI})$ et $\mathbf{a} \leq \mathbf{rayon}(\mathbf{RI}) + \varepsilon$.

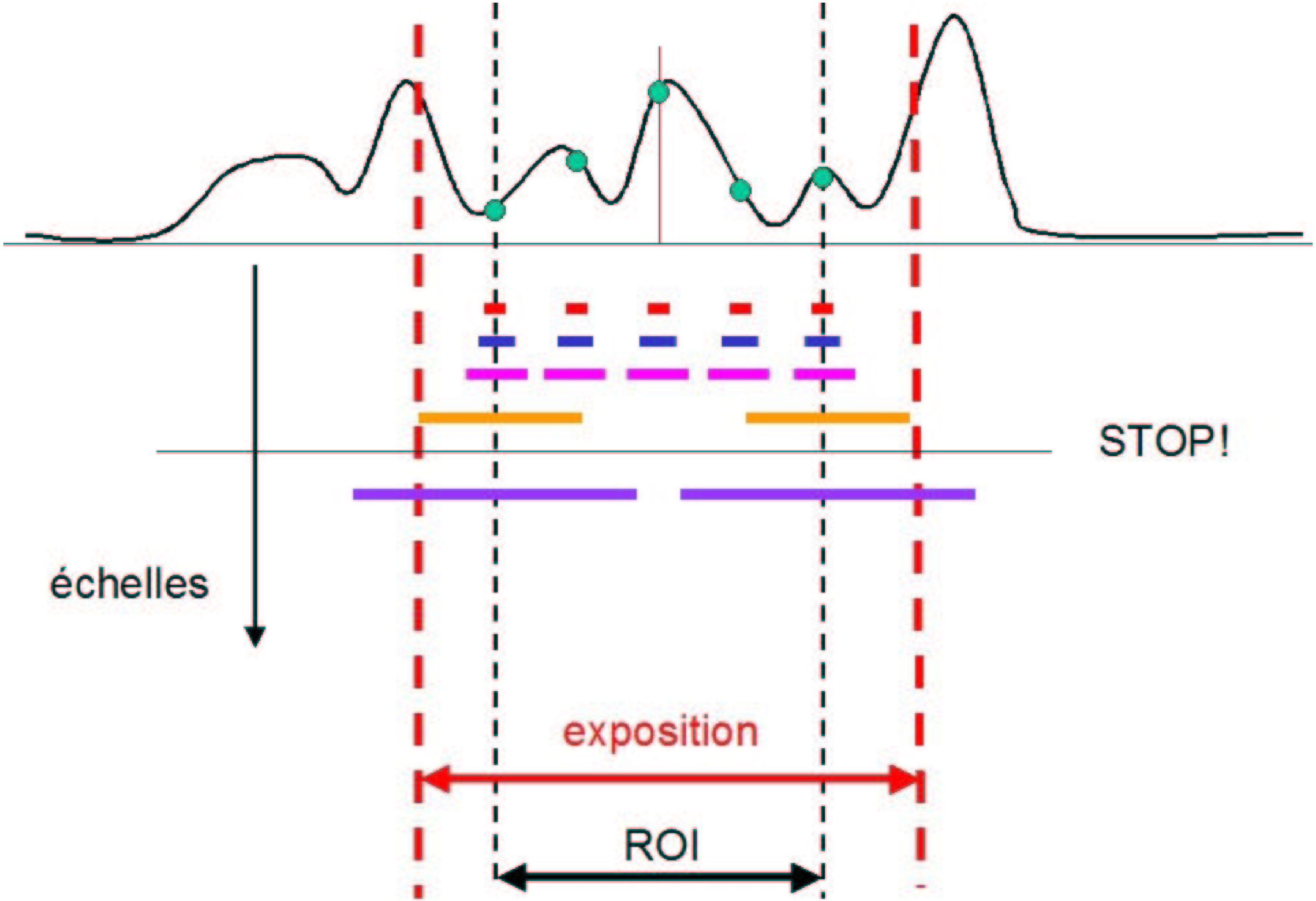
Implémentation : deux étapes

1. Le filtre H_θ est précalculé :

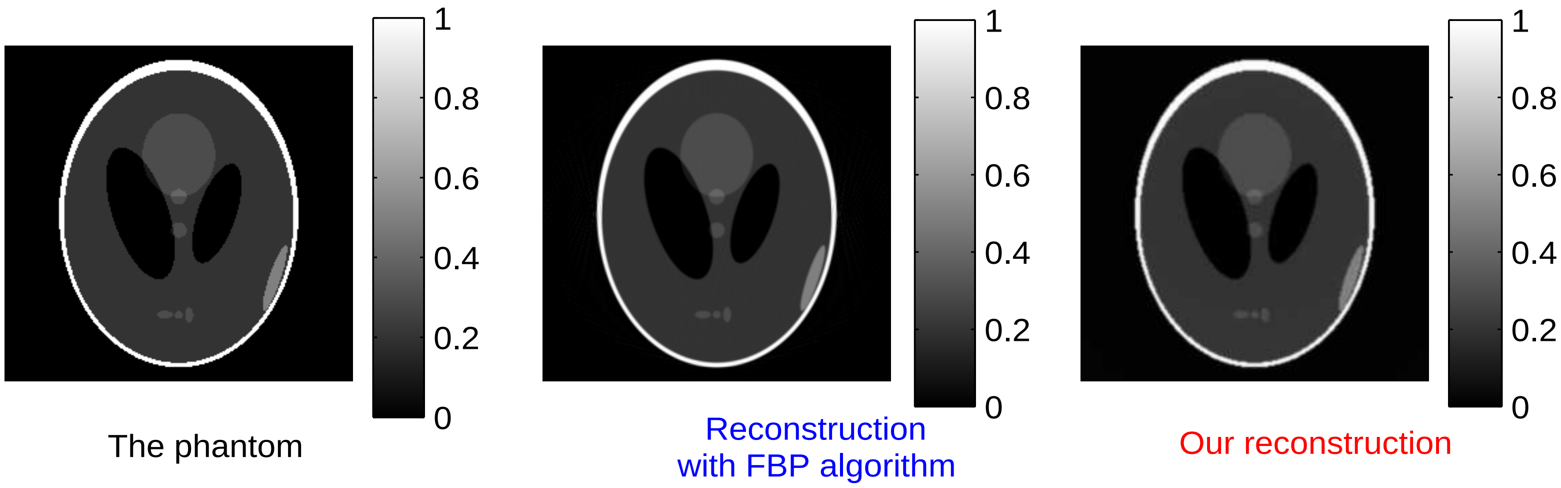
$$H_\theta(\vec{x}) \simeq \ln(a_0) \sum_{\mathtt{j}=\mathtt{scale}_{\mathtt{min}}}^{\mathtt{scale}_{\mathtt{max}}} \frac{1}{a_0^{3j}} h\left(\frac{r_{-\theta}\vec{x}}{a_0^j}\right)$$

   avec $a_0 = 2^{1/4}$, et $\mathtt{scale}_{\mathtt{min}}$, $\mathtt{scale}_{\mathtt{max}}$ dépendent du rayon de la Région d'Intérêt et du support de l'ondelette de reconstruction (voir figure).

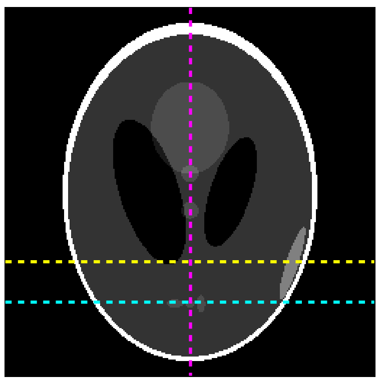
2. f est reconstruite par une formule classique de rétroprojection filtrée (convolution discrète, interpolation linéaire pour la rétroprojection).

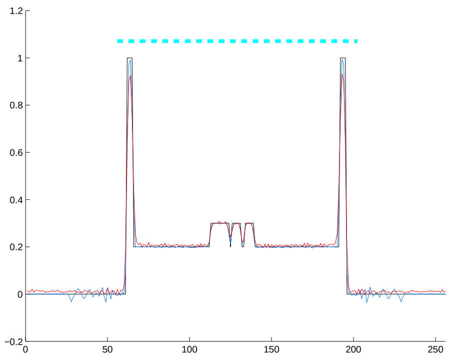

STOP!
échelles
exposition
ROI

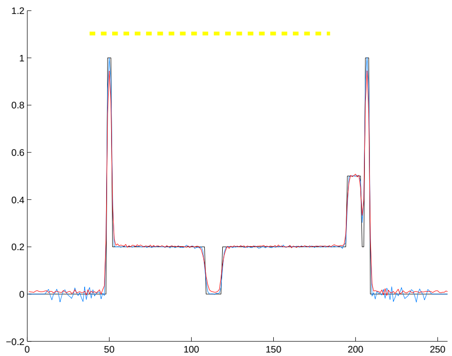
Le fantôme de Shepp Logan. Cas tests

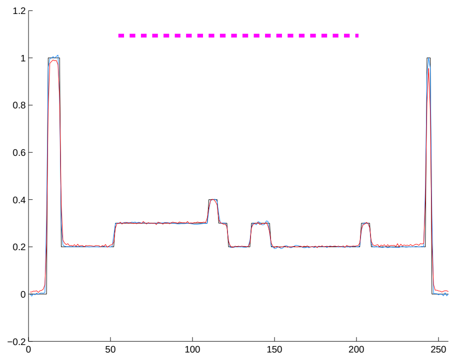


(c) Image reconstruction results







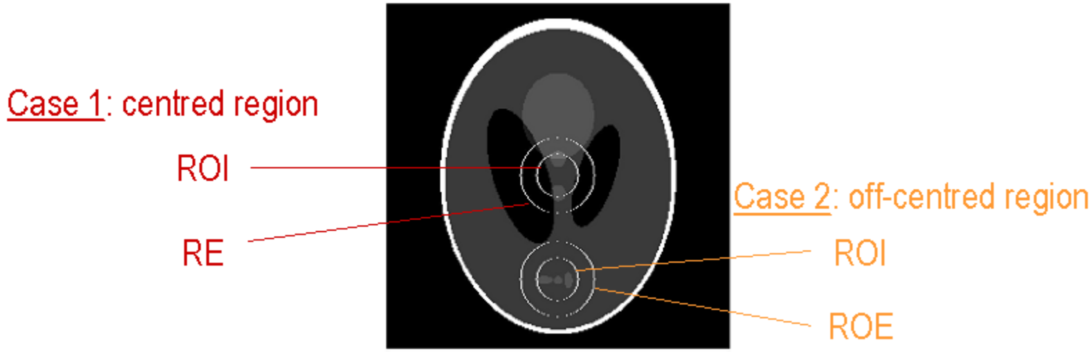


(d) Cross- sections of

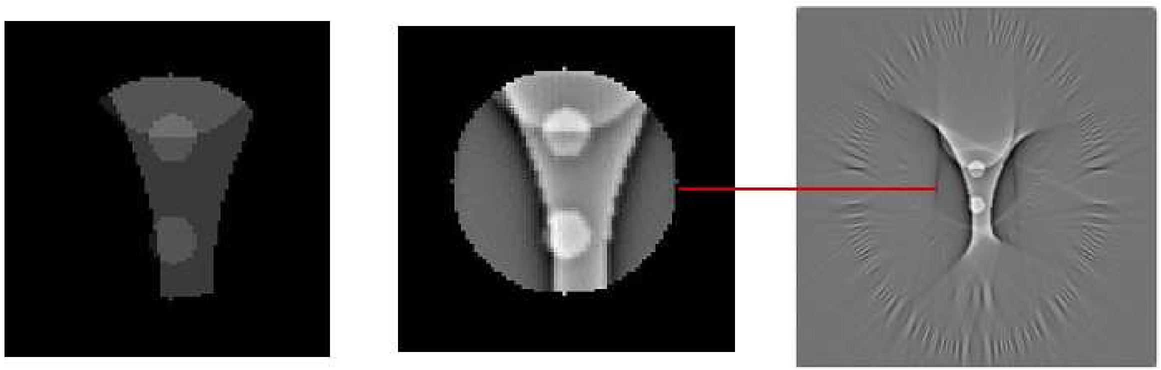
(e) Cross-section 1 (in black: the

(f) Cross-section 2

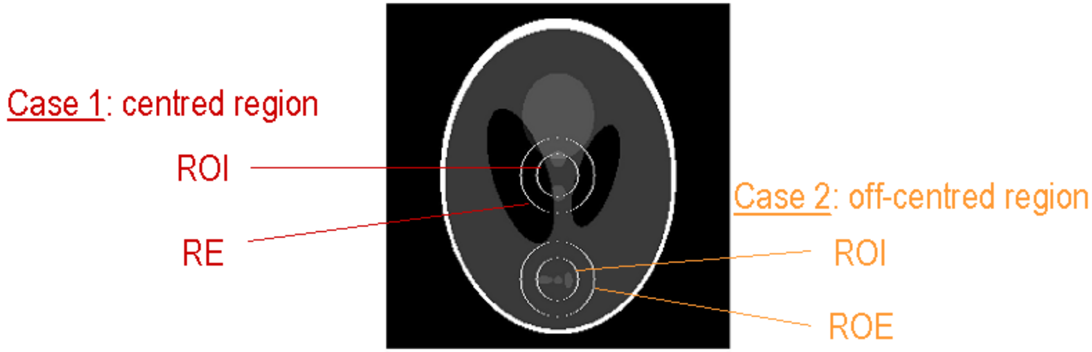
(g) Cross- section 3



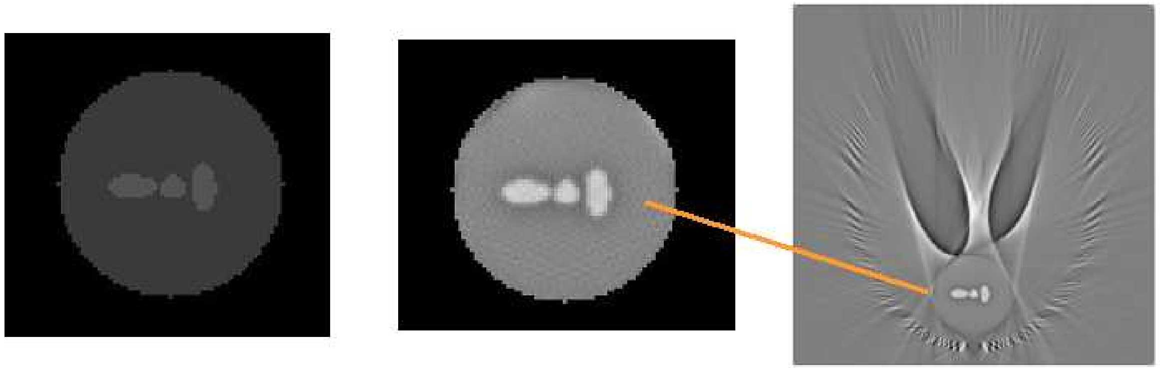
(a) Definition of regions of interest, with associated region of exposition.



(b) Case 1: the region of interest is centered.

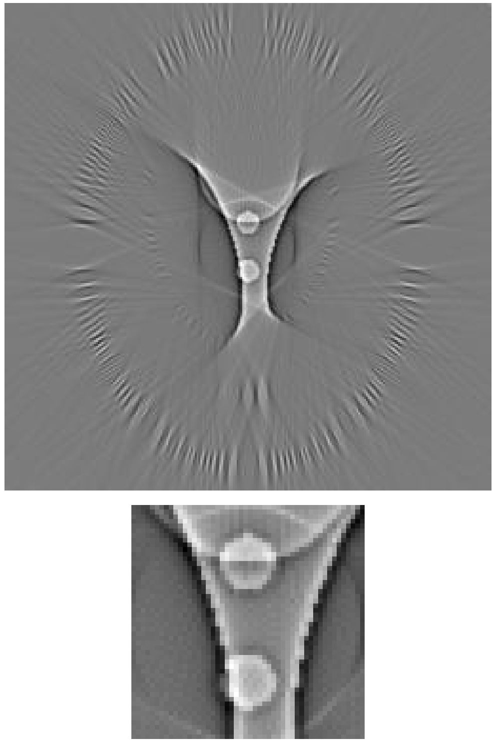


(c) Definition of regions of interest, with associated region of exposition.



(d) Case 2: the region of interest is off-centered.

Nos résultats avec données locales



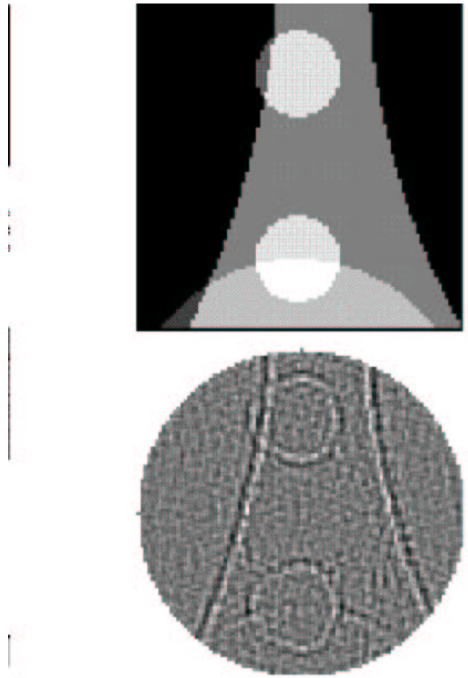


Figure 8: Top: The central 91×91 pixel region of the Shepp–Logan phantom; Bottom: Local edge picture of Shepp-Logan head phantom computed using projections on lines passing through the central disk of diameter 91 pixels.

27

[Berenstein Walnut 97]

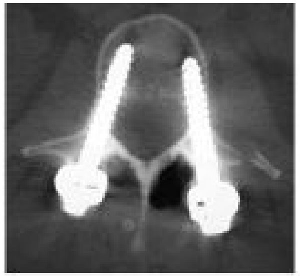
Partie 2

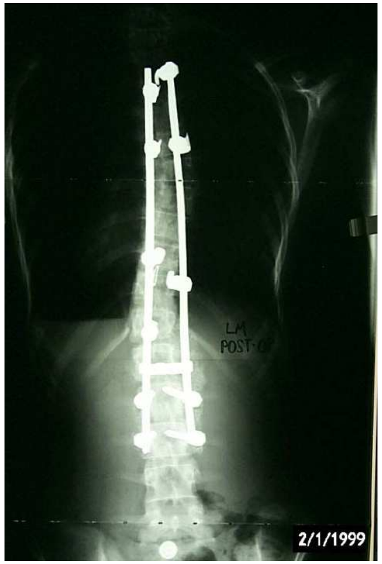
Ondelettes pour la Segmentation en vue de la reconstruction 3D

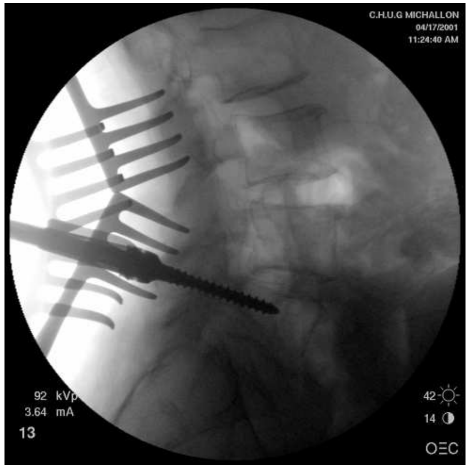
Reconstruction en temps réel

Cas du vissage pédiculaire

(Instrumentation d'une scoliose)







Vissage pédiculaire avec fluoroscopie

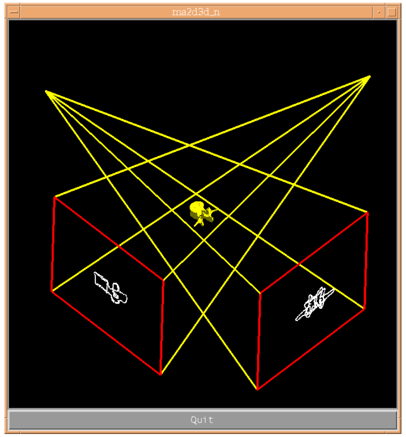
Utilisation de 2 radios et d'un modèle de vertèbre

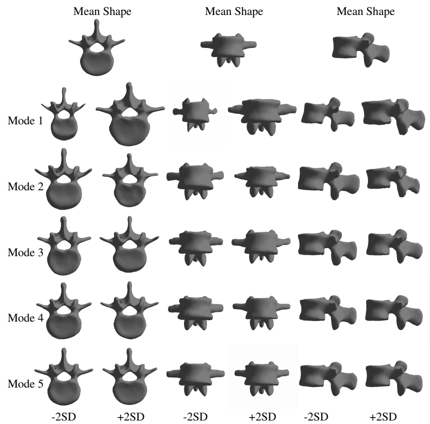
Figure 3: à gauche : imagerie scanner (3 vues 2D et la vue 3D) à droite : fluoroscopie virtuelle

- Segmenter automatiquement deux vues de la vertèbre (face et profil)
- Déformer un modèle moyen de vertèbre jusqu'à ce que ses projections sur les deux vues correspondent à la segmentation.

Identification de la surface d'une vertèbre à partir de deux radiographies et d'un modèle statistique de forme

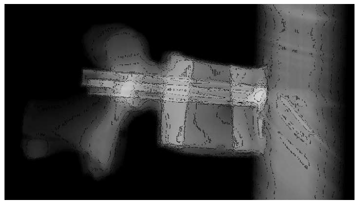
Thèse de M. Fleute (TIMC - UJF, 2001)

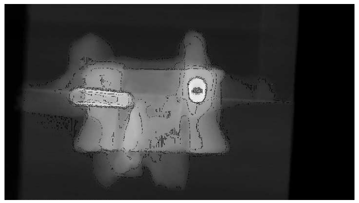




Algorithme itératif : alternance de **recalages rigides** (rotations, translations) et de **recalages élastiques** (déformations admissibles).

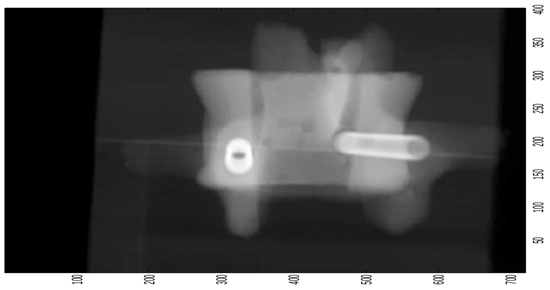
→ Etape initiale : segmentation de 2 radiographies

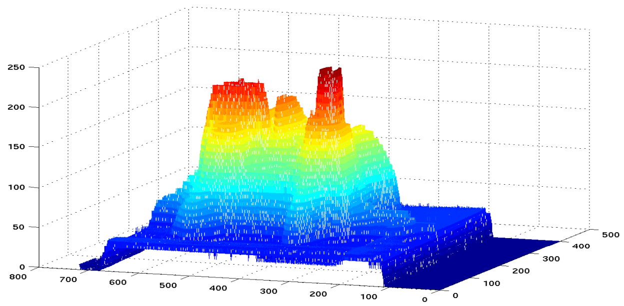




2 - Segmentation automatique de radiographies

But : identifier les contours de la vertébre $\rightarrow$ problème *classique* de traitement d'image.

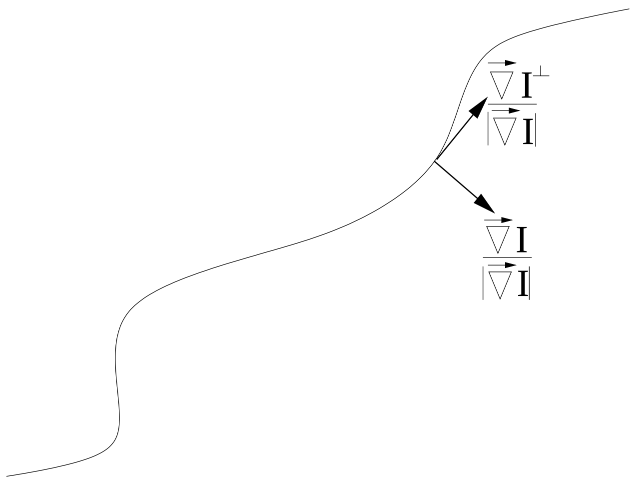




- **Caractérisation** des contours de l'image par des courbes singulières de la fonction d'atténuation, le long desquelles **la régularité lipschitzienne** varie peu dans la direction orthogonale au gradient de l'image.
- **Les ondelettes** sont le bon outil mathématique pour calculer ces courbes et leur paramètre de régularité (utilisation d'une décomposition en ondelettes directionnelles avec pour ondelette génératrice le gradient de la gaussienne).

2- Modèle de contours

Utilisation de la géométrie pour caractériser les contours d'une image supposée régulière sauf sur des courbes.

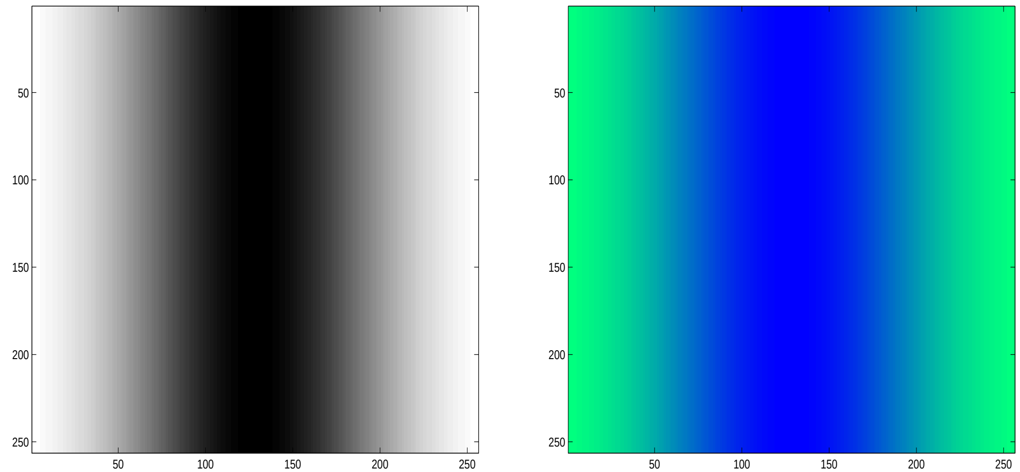


Le contour est caractérisé par une singularité de l'intensité I, dans la direction du gradient $\vec{\nabla} I$. Le long du contour,i.e. dans la direction orthogonale au gradient, la régularité est maximale

En pratique on considérera $\vec{\nabla}(I * \frac{1}{a^2} G(\frac{x}{a}))$, ce qui revient à calculer les coefficients d'ondelettes de I avec une ondelette *gradient de Gaussienne*.

Modélisation des arêtes

Définition[Canny 86] Un point (x_0, y_0) d'une image appartient à une **arête** si en ce point le module du gradient de l'intensité lumineuse lissé par un noyau θ_a, $|\vec{\nabla}(I \star \theta_a)|$, est localement maximum dans la direction de $\vec{\nabla}(I \star \theta_a)$.



Variation d'intensité de loi gaussienne; où sont les contours?

Définition[Mallat-Zhong, Mallat-Hwang 92] f image lissée par un noyau de convolution θ_a d'échelle a variant continuement entre 0 et a_{max}; Posons $g_a = f \star \theta_a$. Alors s'il existe une chaîne ininterrompue à travers les échelles reliant des max locaux dans la direction $\vec{\nabla} g_a$ du gradient de g_a, le sommet (x_0, y_0) de cette chaîne vers les échelles fines est alors un point de contour.

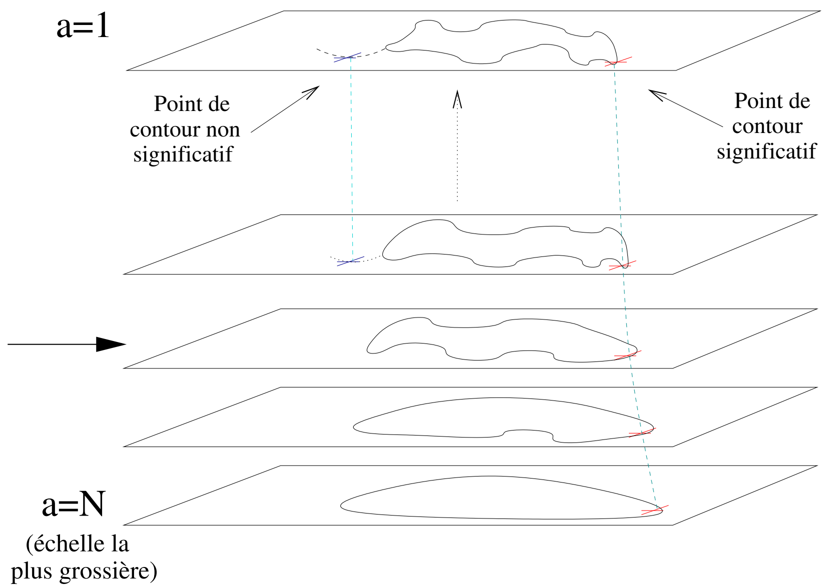
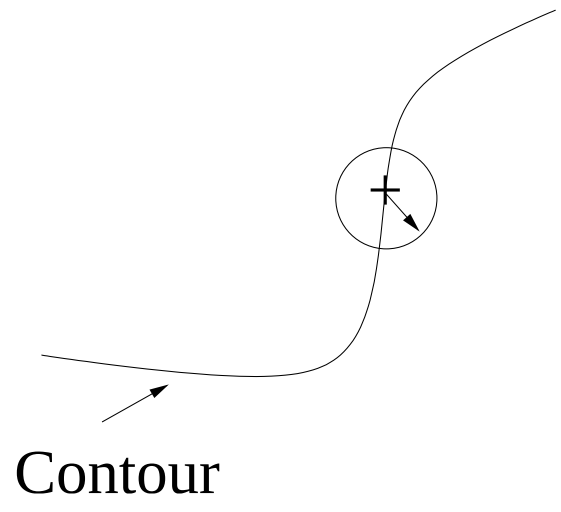


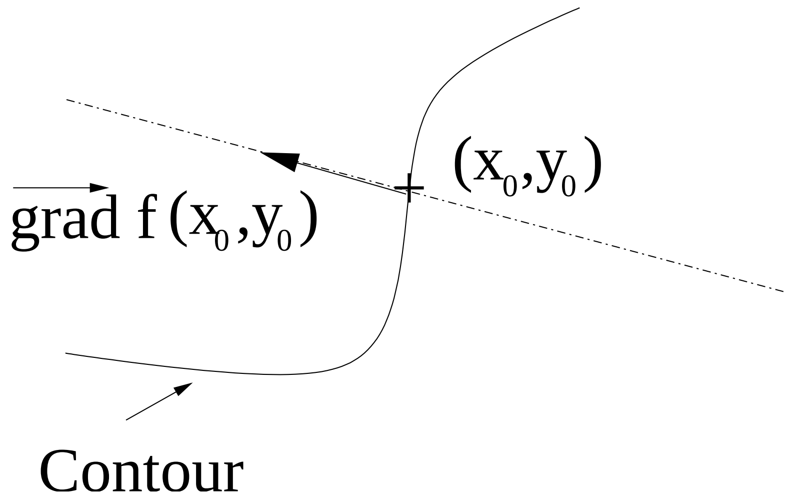
Figure 4: *Chaînage à travers les échelles*

Régularité des contours

Soit $0 \leq \alpha < 1$

$f(x,y)$ Lipschitz-α en (x_0, y_0) si $\exists A$ t.q. $\forall \vec{h} = (h_1, h_2)$,
$|f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)| \leq A|\vec{h}|^\alpha$.





Sur une courbe de discontinuité, le calcul de la régularité peut se ramener au cas monodimensionnel.

Le détecteur de Canny multi-échelles (suite)

$G(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ est un noyau de lissage.

• **Ondelettes directionnelles** : $\Psi(x) = \nabla G(x) = (\psi^1, \psi^2)$ où

$$\psi^1 = \frac{\partial G}{\partial x_1} \text{ et } \psi^2 = \frac{\partial G}{\partial x_2}.$$

• **Analyse :** Calcul de la transformée $\overrightarrow{Wf}(a,b) = (W^1 f(a,b), W^2 f(a,b))$

$W^1 f(a,b) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{a} \psi^1(\frac{x-b}{a}) dx$ $\rightarrow$ singularités verticales.

$W^2 f(a,b) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{a} \psi^2(\frac{x-b}{a}) dt$ $\rightarrow$ singularités horizontales.

$$W_{\psi^1} f(a,b,\varphi) = \vec{\varphi} \,.\, \overrightarrow{Wf}(a,b) \rightarrow \text{singularités dans la direction } \vec{\varphi}^{\perp}$$

De plus $\overrightarrow{Wf}(a,b) = -a\vec{\nabla}(f * \frac{1}{a}G(\frac{x}{a}))(b)$ (gradient de l'image lissée).

• **Synthèse :** $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \overrightarrow{W} f(a,b) . \frac{1}{a} \vec{\nabla} G(\frac{x-b}{a}) \frac{da}{a^3} db$

2- Détecteur de contours multi-échelles

Principe du détecteur de Canny (1986) : *"Les contours sont définis par l'ensemble des points où le gradient de l'image lissée est maximum dans la direction de ce gradient"*

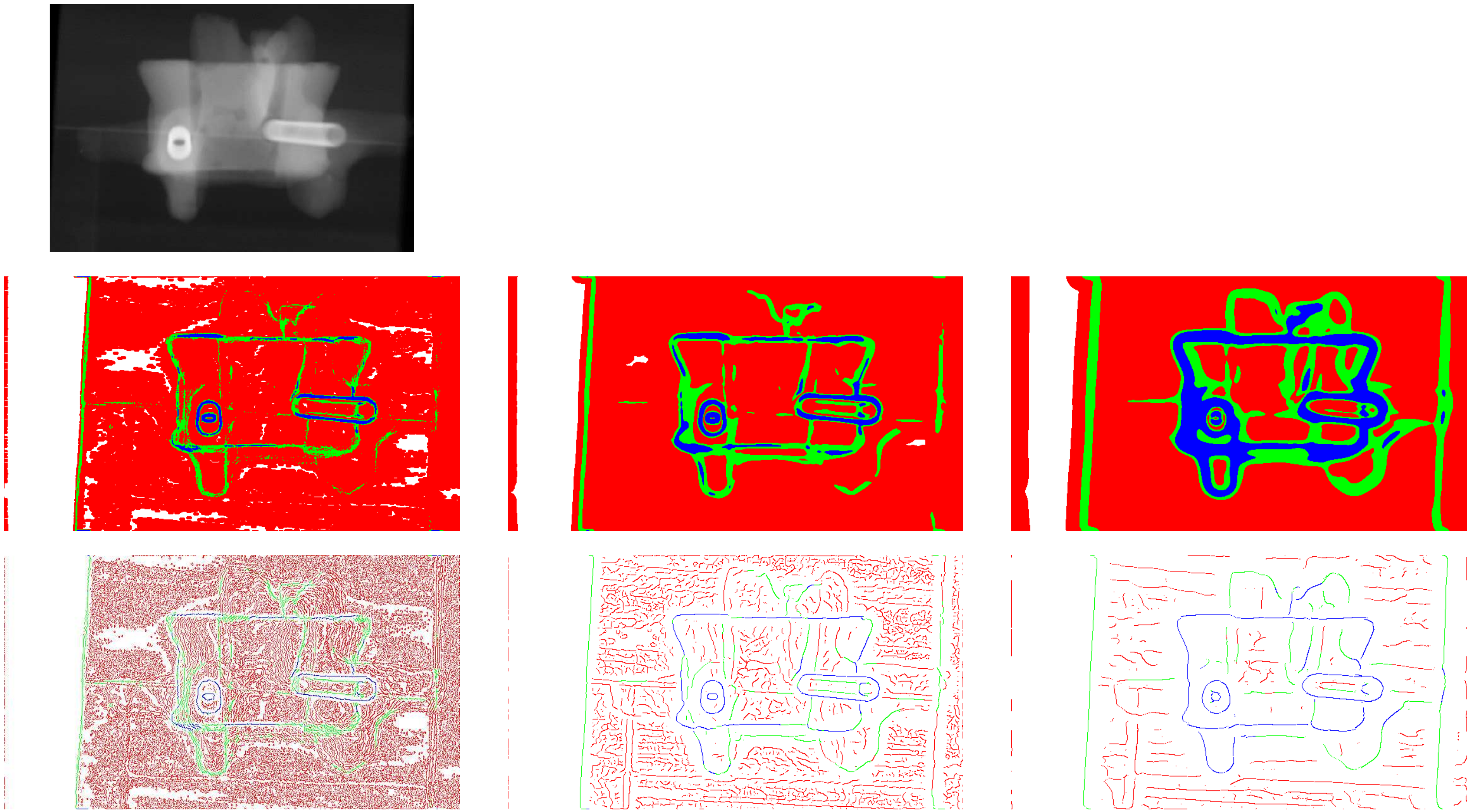
- **Module et orientation de la TO avec Gradient de Gaussienne** :

$$Mf(a,b) = ||\overrightarrow{Wf}|| \qquad\qquad Af(a,b) = arg(\overrightarrow{Wf})$$

- **Points de contours à l'échelle a** : les points où $b \mapsto Mf(a,b)$ est localement maximum dans la direction $Af(a,b)$.

- Détermination de **chaînes de maxima** reliant les points de contours à travers les échelles a. Les *sommets* de ces chaînes ($a \to 0$) forment alors des points de contours de l'image.

- Calcul de la **régularité locale** de l'image en chaque point de contour.



- Régularité locale d'une fonction en un point

Régularité Lipschitzienne d'ordre α d'une fonction $f(x)$ (dimension 1) :

(α : paramètre de régularité).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est Lipschitzienne d'ordre α en x_0, si $f \in C^n(V_{x_0})$ et si il existe un polynôme P_n de degré n où $n = [\alpha]$, tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad |f(x_0 + h) - P_n(h)| \leq C|h|^\alpha \tag{1}$$

P_n est le polynôme de Taylor de f en x_0. (Si $0 < \alpha < 1$, $P_0(h) = f(x_0)$).

• f **uniformément Lipschitz-α** sur $[A, B]$ si f vérifie (1) pour tout $x_0 \in [A, B]$, uniformément.

• **Extension aux α négatifs** (distributions) : f uniformément Lipschitz-α sur $]A, B[$ si sa primitive est Lipschitz-$(\alpha + 1)$ sur $]A, B[$.

Caractérisation de la régularité Lipschitzienne par les coefficients d'ondelettes

Soit α fixé. On considère ψ une ondelette à support compact $\subset [-C, C]$, avec $N \geq \alpha$ moments nuls ($\int \psi = \int x\psi = \cdots = \int x^{N-1}\psi = 0$).

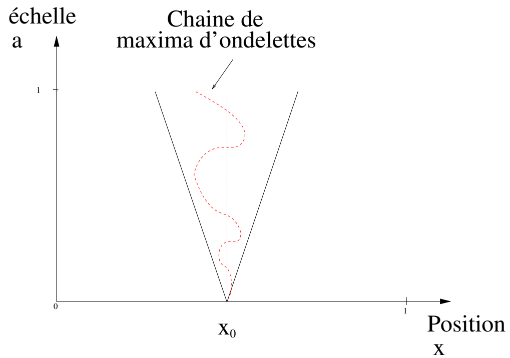
$$W_\psi f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) \, dx$$

- Si f est Lipschitz-α en x_0, alors il existe $C > 0$, tel que $\forall b$, $|b - x_0| < Ca$ (*i.e. b dans le cône d'influence de x_0*), on a

$$|W_\psi f(a,b)| \leq C' a^{\alpha + \frac{1}{2}}$$

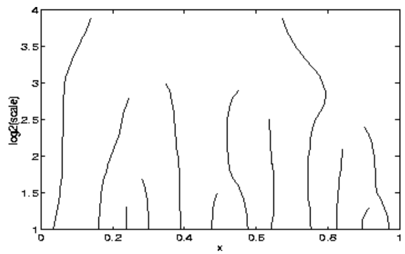
.

α est estimé par la pente de la courbe $\log a \to \log |Wf(a,b)|$.



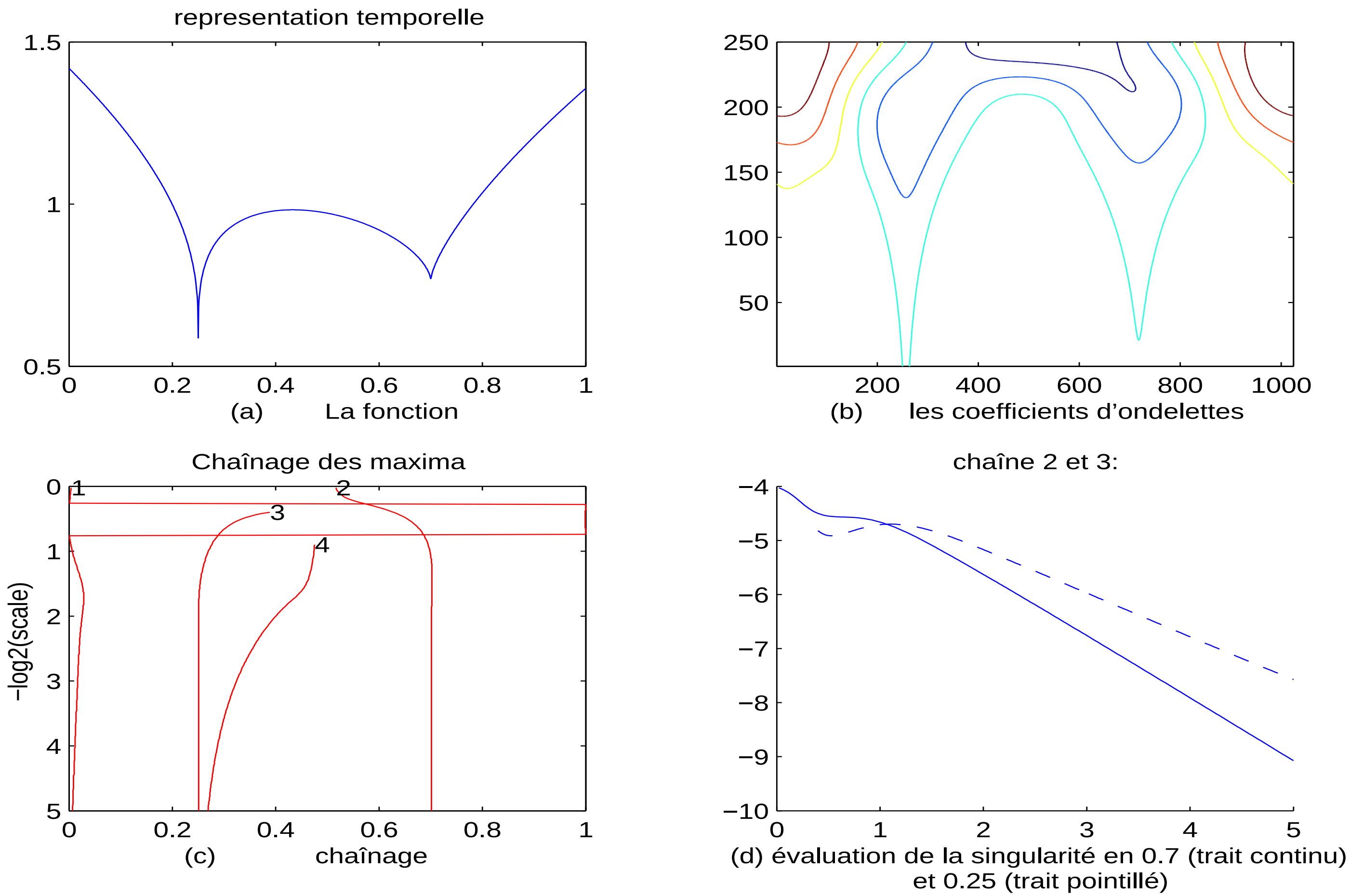
Les lignes de maxima [Mallat-Hwang, 1992]

- **Point de module max** : tout point (b_0, a_0) t.q. la courbe $b \longrightarrow |Wf(b, a_0)|$ est localement maximum en $b = b_0$.
- **Lignes de maxima** : toute courbe connexe $(b, a(b))$ de points de module max dans le demi-plan position-échelle.



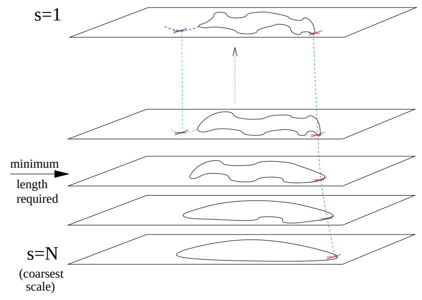
- Toutes les singularités $(\alpha < 1)$ sont détectées en suivant les modules max d'ondelettes dans les petites échelles a.
- Si $\psi = (-1)^n G^{(n)}$ avec G gaussienne, alors les points de module max de $W_\psi f(a, b)$ appartiennent à une courbe connexe, qui ne s'interrompt jamais quand l'échelle diminue.

Exemple 1D : $f(x) = |x - 0.25|^{\frac{1}{3}} + |x - 0.7|^{\frac{2}{3}}$

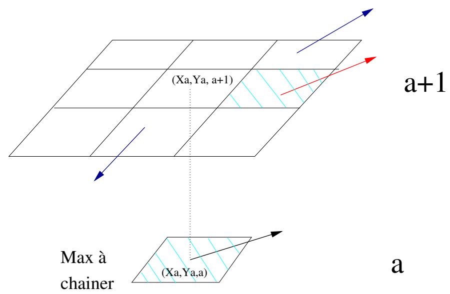


Construction de chaînes de maxima en dim 2

• Carte des points de module max (dans la direction du gradient) à chaque échelle :



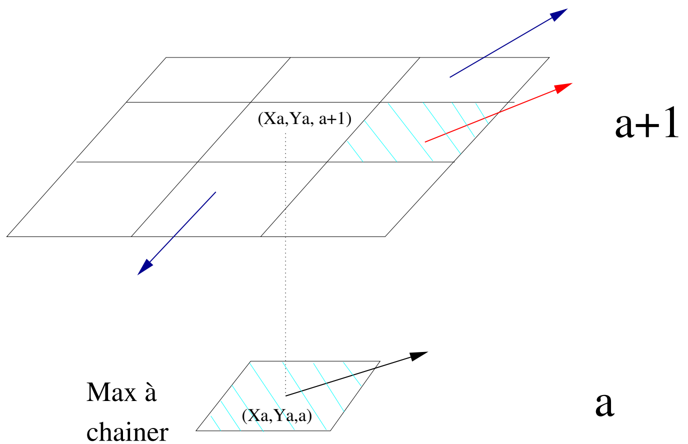
• On chaîne deux maxima locaux entre deux échelles successives, supposés provenir d'un même point singulier de l'image initiale, si ils sont voisins dans la direction du gradient.



Pratique du chaînage des modules max

- Soit $Mf(x_0, y_0, a_{dep})$ un max local qu'on veut associer à un max de l'échelle a_{dep+1}.

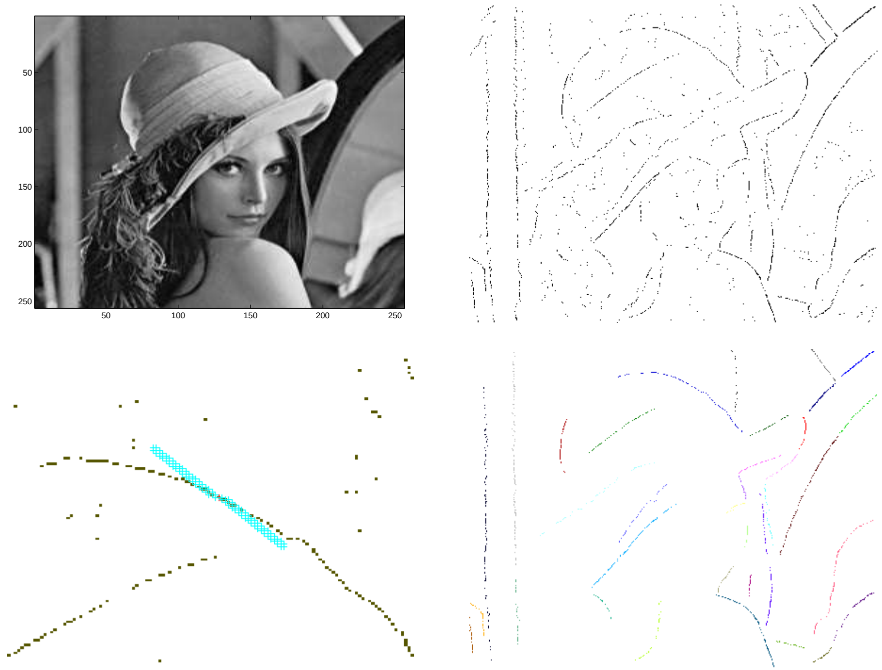
- On considère, les 9 modules $Mf(x_0(\pm 1), y_0(\pm 1), a_{dep+1})$



- on chaîne avec celui dont l'orientation du grad $Af(x_1, y_1, a_{dep+1})$ est la plus proche de $Af(x_0, y_0, a_{dep})$.

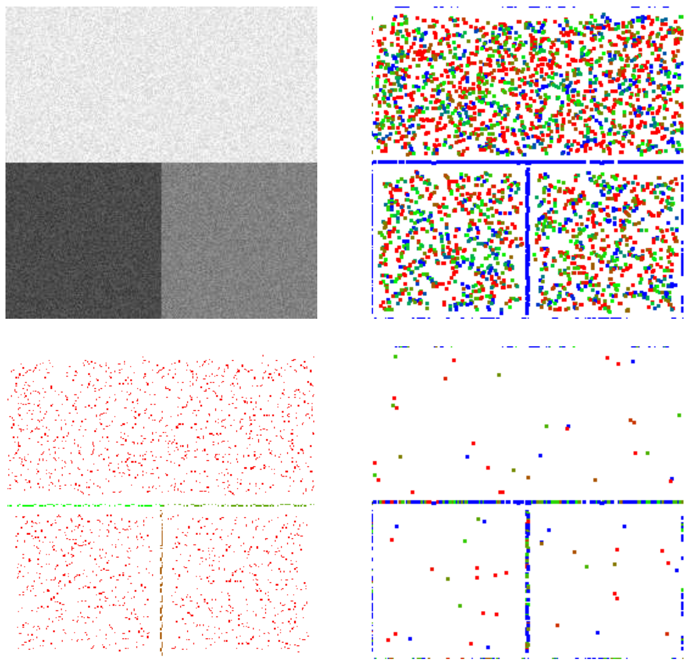
Assemblage des points de contours en segments significatifs

L' image résultat est constituée de points appartenant à des contours. Ils sont regroupés en **segments** de points appartenant à un même contour (en utilisant la direction orthogonale au gradient et le paramètre de régularité locale).

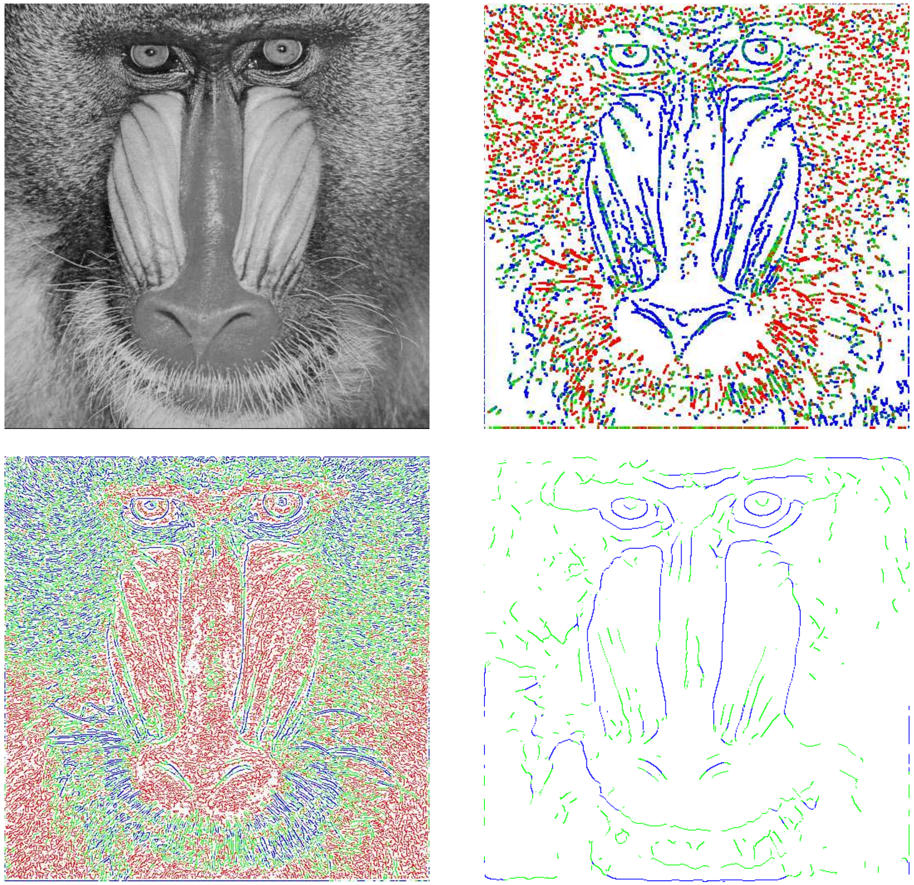


Résultats

Le long de chaque chaîne qui traverse les échelles, on évalue la régularité lipschitzienne du point de contour qu'elle caractérise (en calcuIant la pente de $\log Mf(x_C, y_C, a) = g(\log a)$)



Trois régions bruitées : carte des modules, des régularités, sélection sur les régularités pour débruiter



Mandrill : régularités, échelle fine, échelle grossiére

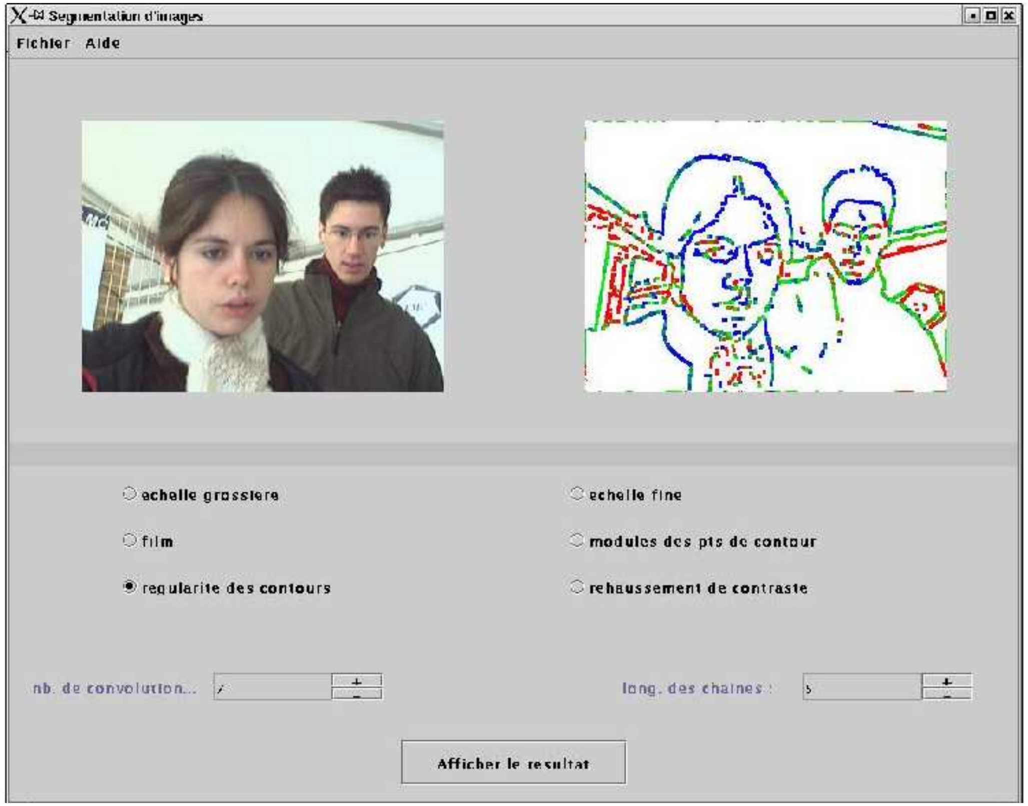
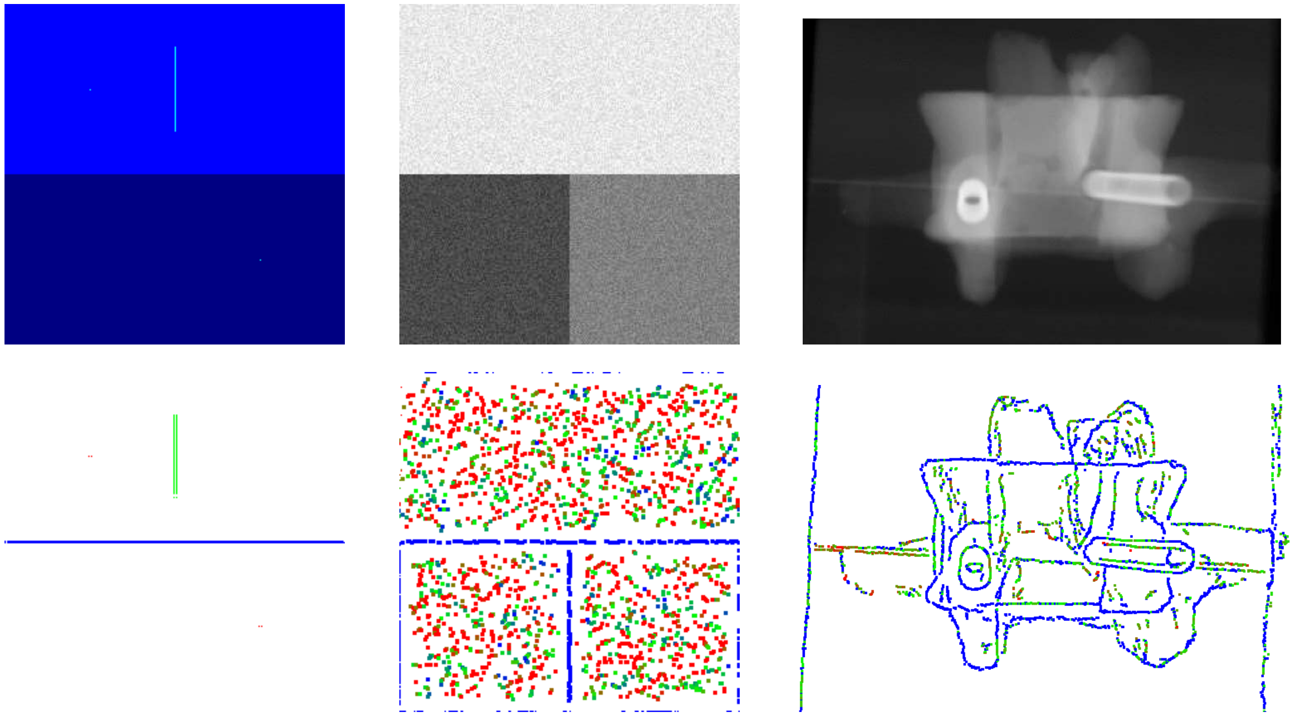


Figure 5: interface java de l'algorithme de détection et de caractérisation de contours

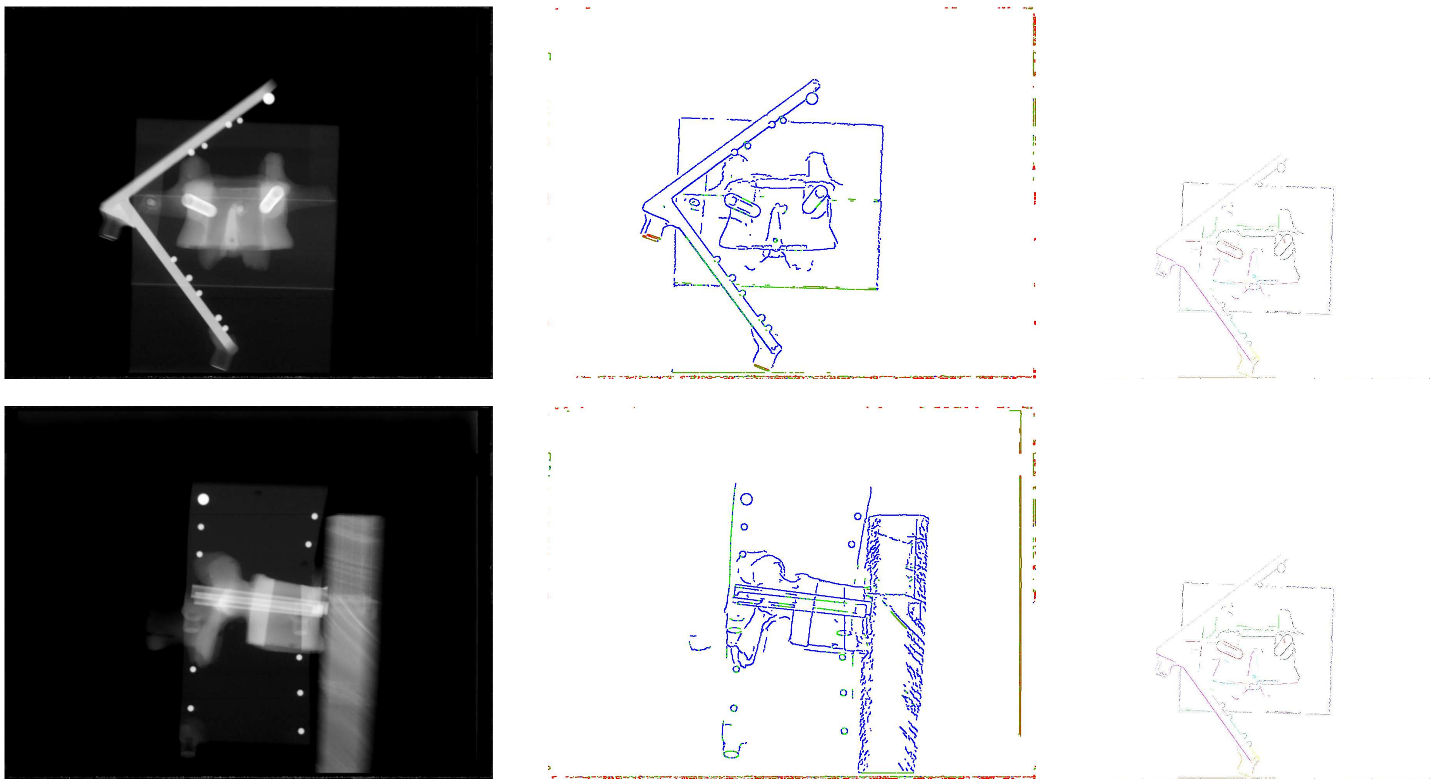
Exemples de détection de contours par Ondelettes



Figures du dessus : images originales.

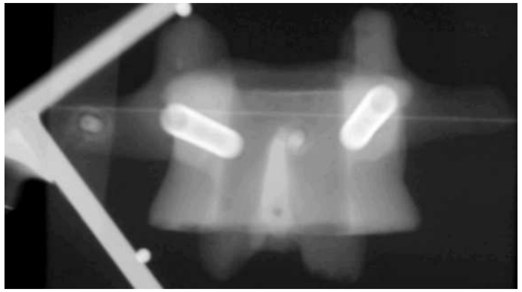
Figures du dessous : points de contours détectés. La **couleur** représente le paramètre de régularité le long du contour.

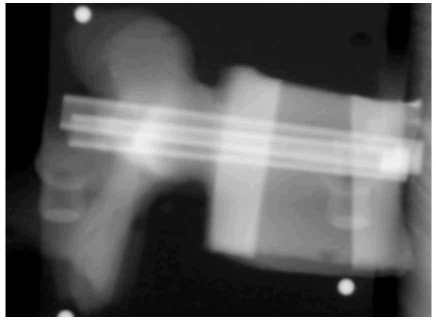
Détection des contours sur deux radios de vertèbres séches

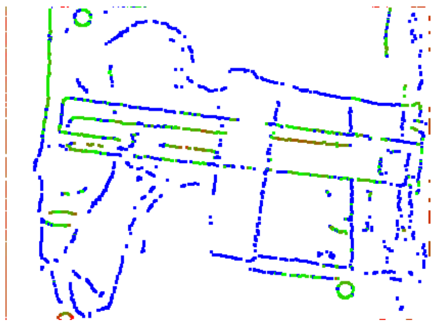


2- Application à la reconstruction 3D

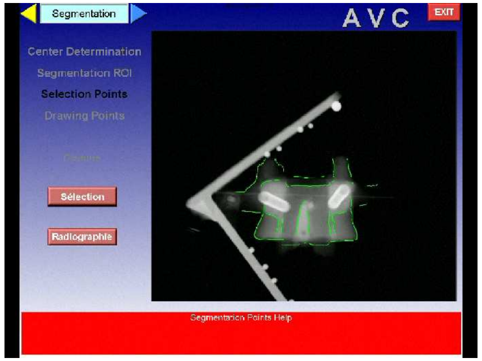
Etape 1 : Détection des contours dans deux radiographies de vertèbres

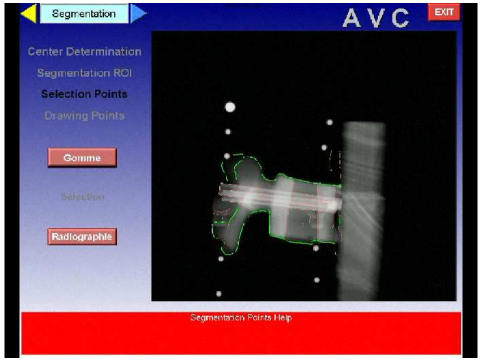




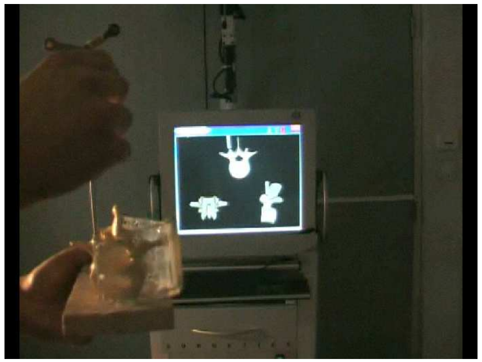


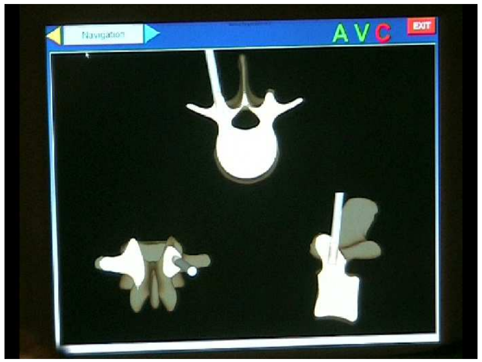
Etape 2 : Sélection de contours pertinents par le praticien (méthode semi-automatique).



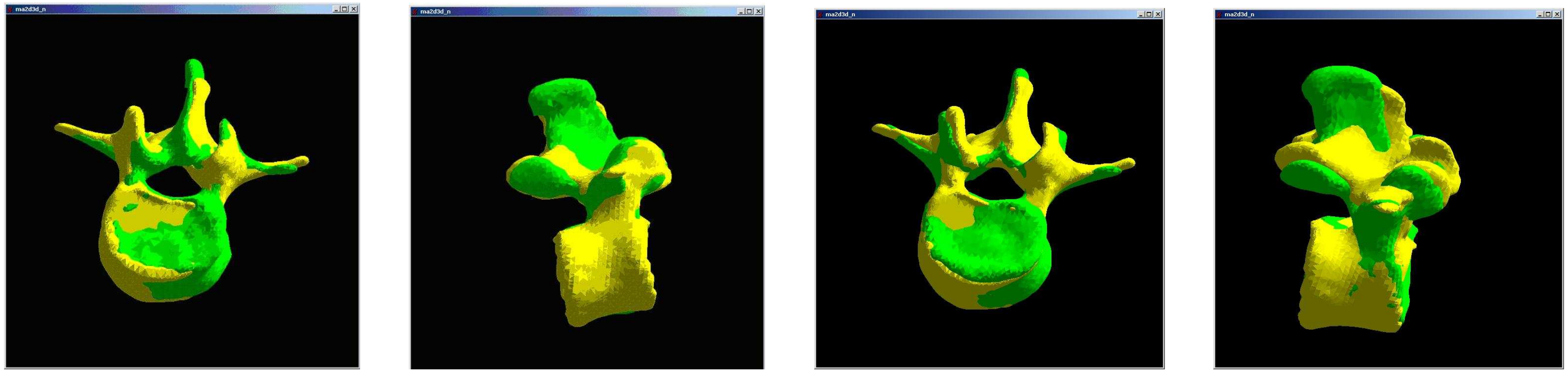


Etape 3 : La méthode de reconstruction 3D fournit les différentes vues de la vertèbre reconstituée : le praticien peut naviguer à l'intérieur.

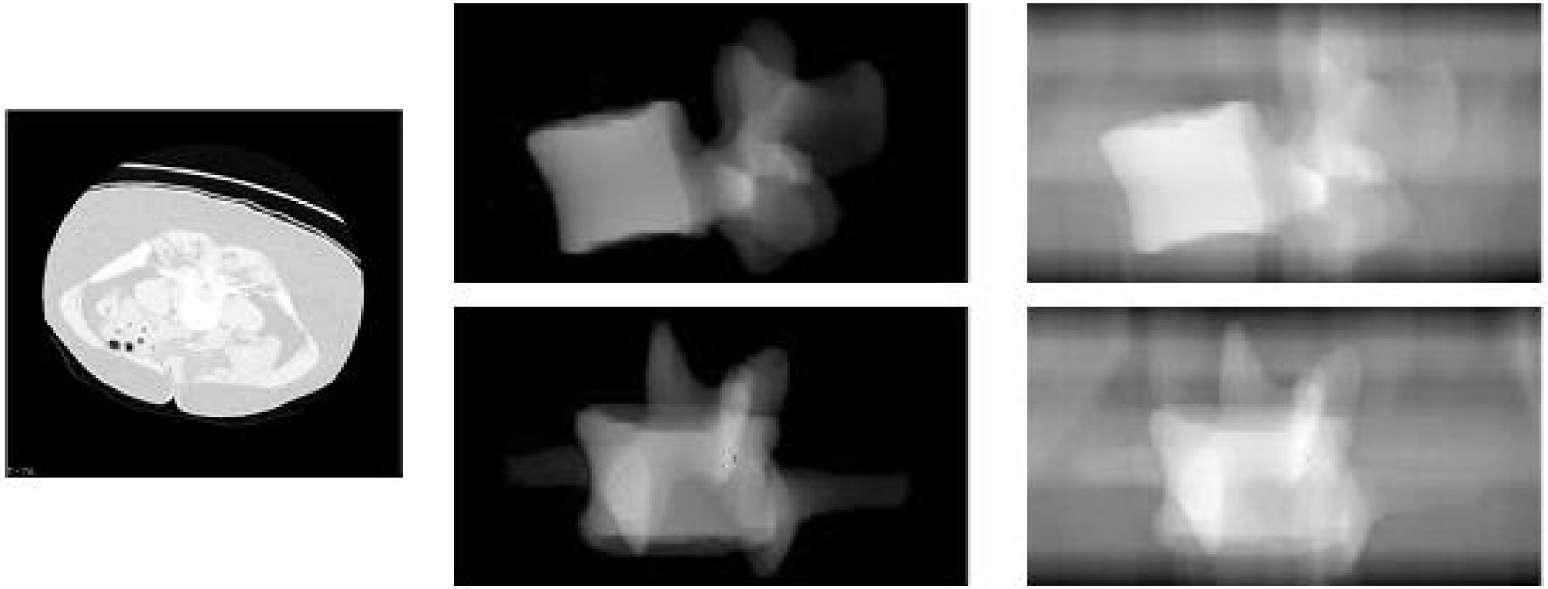




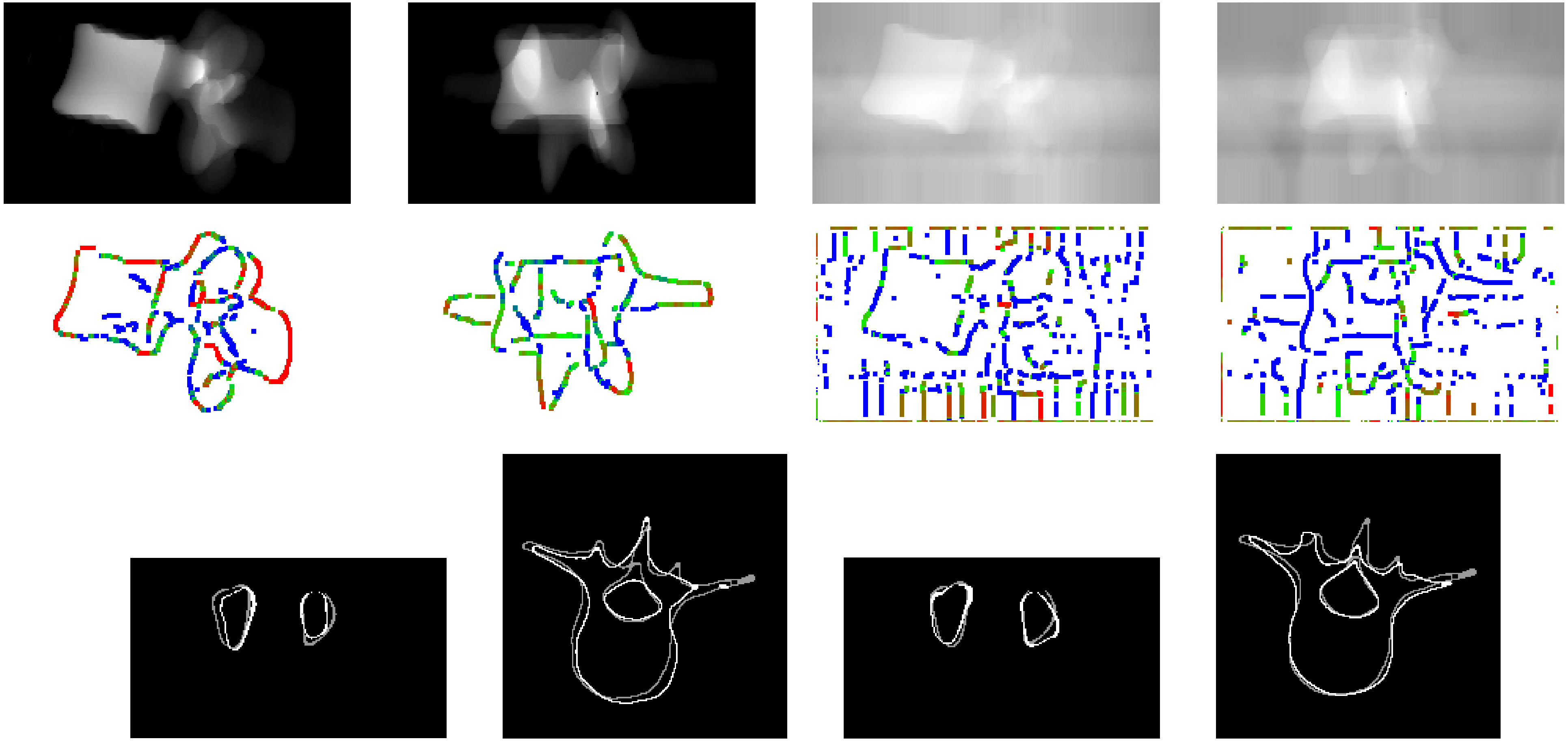
Reconstruction de la surface de la vertèbre par le modèle statistique déformable



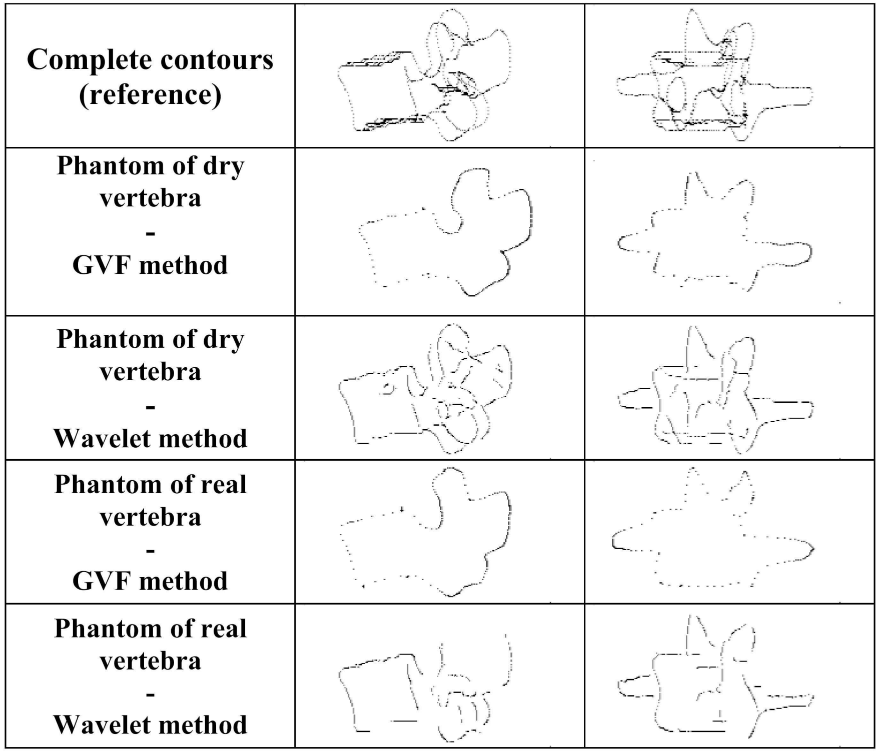
Vues 3D (face et profil) de la vertèbre reconstruite (à gauche : vertèbre sèche; à droite : radiographies simulées de la même vertèbre). La forme de la vertèbre reconstruite est en vert, celle de la vertèbre de référence, en jaune.



Our phantom. Left: an example of CT-slice where the initial vertebra is replaced by a slice of the reference synthetic vertebra. Middle: the simulated X-Ray images in the dry case. Right: the simulated X-ray images in the realistic case.



Radiographies simulées d'une vertèbre isolée et d'une vertèbre plongée dans un vrai scanner, segmentation des radiographies par l'algorithme, et sections horizontales et verticales des surfaces reconstruites. L'erreur ne dépasse jamais 2mm, dans la zone pédiculaire.



Edge detection results for two detectors (wavelet-based or GVF), in comparison with the reference provided by complete contours.

Références

- **Revue** : *Special issue on "Wavelets in Medical Imaging"*, M. Unser, A. Aldroubi and A. Laine eds, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol.22, no. 3, mars 2003.

- **Tomographie** : F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, Wiley, 1986.

- **Transformée en Ondelette directionnelle** : B. Torrésani, *Analyse continue par ondelettes*, CNRS Editions, Paris, 1995.

- M. Holschneider (*Inverse Problems, 1991*), M. Fleute (*Thése Grenoble I, 2001*), S. Mallat *et al* (*IEEE Trans. PAMI, IEEE Trans. Info. Theory, 1992*).

- O. Le Cadet, *Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images. Applications à l'imagerie médicale et au tatouage d'images*, Thèse de l'INPG, 2004.
- A. Bilgot, Thèse en cours.