



Majeure Mécanique

UP1 - Mécanique des Matériaux

Mécanique des milieux continus, thermodynamique et
lois de comportement

J. Bruchon

École des Mines de Saint-Étienne

Centre SMS

Septembre - octobre 2023

Table des matières

1	Cinématique	1
1.1	Loi du mouvement	1
1.2	Gradient de la transformation	5
1.2.1	Produit mixte	6
1.2.2	Transport d'un volume	6
1.2.3	Transport d'une surface orientée	7
1.2.4	Décomposition polaire du gradient de la transformation	8
1.3	Mesures des déformations	11
2	Lois de conservation	17
2.1	Tenseur des contraintes de Cauchy	17
2.2	Lois de conservation sur la configuration courante	18
2.2.1	Dérivation d'une intégrale dépendant du temps	18
2.2.2	Conservation de la masse	18
2.2.3	Conservation de la quantité de mouvement	20
2.2.4	Conservation du moment de la quantité de mouvement	21
2.3	Tenseurs des contraintes alternatifs	22
2.4	Efforts intérieurs - Théorème de l'énergie cinétique	25
2.5	Conservation de l'énergie	27
2.6	Formulation locale du premier principe de la thermodynamique	28
2.7	Récapitulatif	29
3	Formulation des lois de comportement	31
3.1	Variété des comportements - Lois 1D	31
3.2	Le principe d'indifférence matérielle ou d'objectivité	34
3.2.1	Définitions : repère et référentiel	35
3.2.2	Loi de transformation des tenseurs	36
3.2.3	Invariance des lois de la MMC vis-à-vis d'un changement de référentiel	37
3.2.4	Caractère intrinsèque de certaines variables en MMC	38
3.2.5	Résultats d'opérateurs sur les grandeurs objectives	38
3.3	Comportement mécanique des matériaux	42
3.3.1	Déterminisme et fonctionnelle mémoire	42
3.3.2	Matériaux élastiques	43
3.4	Isotropie et anisotropie	44
3.4.1	Symétries matériaux et matériaux isotropes	44
3.4.2	Solides anisotropes	46

3.5	Fonctions isotropes de tenseurs	47
3.5.1	Invariants d'un tenseur	48
3.5.2	Théorème de Cayley - Hamilton	48
3.5.3	Théorèmes de représentation	49
3.5.4	Cas de \mathbb{R}^3	49
3.5.5	Matériau élastique isotrope	50
3.6	Thermodynamique des milieux continus	52
3.6.1	Second principe de la thermodynamique des milieux continus	53
3.6.2	Loi de Fourier	54
4	Hyperélasticité	55
4.1	Définition	55
4.2	Réversibilité des lois hyperélastiques	56
4.3	Hyperélasticité isotrope	57
4.3.1	Description matérielle (\mathbf{S}, \mathbf{C})	57
4.3.2	Descriptions matérielles alternatives	58
4.3.3	Matériau de type Saint Venant-Kirchhoff	59
4.3.4	Description spatiale	60
4.4	Hyperélasticité anisotrope	61
4.5	Matériaux Néo-hookéens	61
A	Rappels d'algèbre	65
A.1	Applications linéaires	65
A.2	Rotations	65
A.2.1	Rotations 2D	65
A.2.2	Rotations 3D	66
A.3	Transformations de corps rigide	67
A.3.1	Matrices orthogonales : définition	67
A.3.2	Matrices orthogonales et rotations	68
A.4	Décomposition polaire	69
B	Calcul tensoriel	71
B.1	Coordonnées	71
B.2	Changement de coordonnées	73
B.3	Tenseurs	74
B.3.1	Tenseurs d'ordre 0	74
B.3.2	Tenseurs d'ordre 1	74
B.3.3	Tenseurs d'ordre 2	75
B.4	Produit tensoriel	77
B.5	Contraction	77

Chapitre 1

Cinématique

1.1 Loi du mouvement

On considère un corps \mathcal{B} qui occupe initialement (à $t = t_0$) une région \mathcal{D}_0 de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , de frontière régulière notée $\partial\mathcal{D}_0$. Les sollicitations appliquées à \mathcal{B} s'accompagnent d'un changement de configuration depuis celle de référence, vers la configuration courante notée \mathcal{D}_t . On supposera ici que la configuration de référence coïncide avec la configuration initiale \mathcal{D}_0 . Au cours de cette évolution, un point matériel P appartenant à \mathcal{B} passe de la position \mathbf{X} , repérée par ses coordonnées cartésiennes X_I dans le repère \mathbf{E}_I , $I = 1, 2, 3$ à une position \mathbf{x} repérée par ses coordonnées cartésiennes x_i dans le repère \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Il est souvent commode d'identifier \mathbf{e}_i et \mathbf{E}_I , c'est-à-dire de travailler dans le même système de coordonnées. La loi du mouvement est la donnée d'une fonction vectorielle \mathbf{f} bijective (non pénétration de la matière) telle que

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t; t_0) \quad (1.1.1)$$

(voir figure 1.1.1).

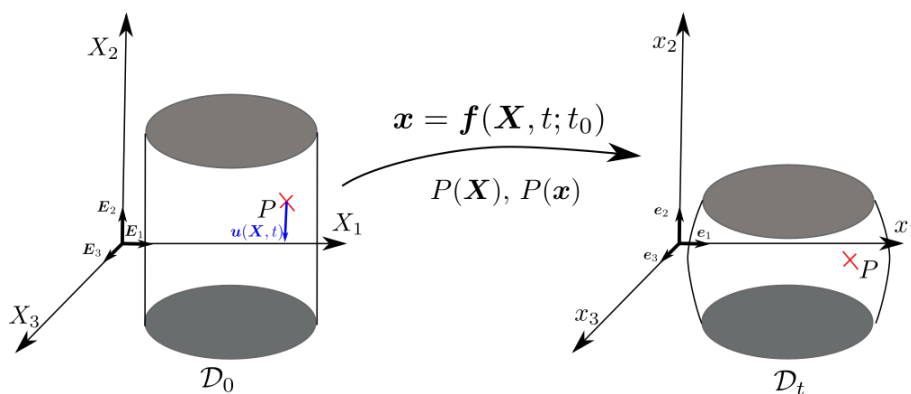


FIGURE 1.1.1 – Description du mouvement

On introduit le champ des vecteurs de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, qui sont les vecteurs reliant un point matériel de la configuration de référence et ce même point dans la configuration courante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t; t_0) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1.1.2)$$

Les quantités physiques (température, énergie, etc.), cinématiques (vitesse, accélération), et mécaniques (forces, déformations, contraintes) peuvent s'exprimer à un instant t sur le domaine de référence \mathcal{D}_0 en utilisant les coordonnées matérielles $X_I, I = 1, 2, 3$, ou sur le domaine courant \mathcal{D}_t à l'aide des coordonnées $x_i, i = 1, 2, 3$. Dans le premier cas, on dira que la description est lagrangienne, $(X_I)_I$ étant les coordonnées lagrangiennes (ou matérielles), tandis que le deuxième cas est qualifié de description eulérienne, les coordonnées $(x_i)_i$ étant les coordonnées eulériennes ou spatiales. Dans ce document, nous adopterons la convention d'écriture suivante : les lettres capitales seront utilisées pour désigner les quantités relatives à la configuration lagrangienne, et les lettres minuscules, celles relatives à la configuration eulérienne. La loi du mouvement permet de passer d'une représentation à l'autre.

Afin de visualiser la différence entre ces 2 descriptions, considérons un champ scalaire, par exemple la température, $\Theta(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_0$ et $\theta(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_t$, avec

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t; t_0), t) = \Theta(\mathbf{X}, t) \quad (1.1.3)$$

Prenons le cas de la traction uniaxiale d'une barre de longueur initiale $L = 2$, définie par la loi du mouvement

$$x = f(X, t) = (1 + t)X, \quad \text{avec } 0 \leq X \leq 2$$

De plus, considérons une certaine distribution de température sur la barre, donnée en description lagrangienne par le champ (en unité arbitraire)

$$\Theta(X, t) = Xt^2, \quad \text{avec } 0 \leq X \leq 2$$

La loi du mouvement permet de passer à une description eulérienne, avec un champ de température défini sur la configuration courante

$$\theta(x, t) = xt^2/(1 + t)$$

La figure 1.1.2 montre le champ de température Θ sur la configuration initiale pour 3 instants différents, et le champ de température θ sur la configuration courante (donc déformée) pour ces 3 mêmes instants. Cette figure met en avant le fait qu'une particule matérielle reste, tout au long de son mouvement, repérée par sa coordonnée X fixe de la configuration initiale, tandis que sa coordonnée x évolue avec le temps.

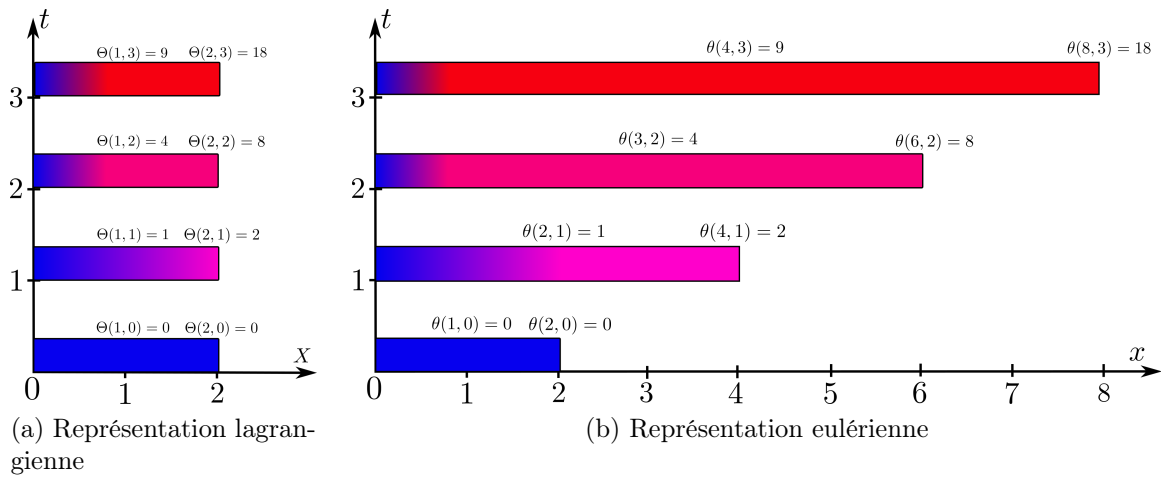


FIGURE 1.1.2 – Traction uniaxiale : description eulérienne de la température.

Intéressons nous maintenant au calcul de la dérivée en temps de la température en configurations lagrangienne et eulérienne. Simplifions d'abord le problème ci-dessus, en disant que la température de chaque particule matérielle X est constante, et prenons par exemple

$$\Theta(X, t) = X$$

Évidemment, nous avons dans ce cas, puisque X ne dépend pas de t ,

$$\frac{d\Theta}{dt}(X, t) = \frac{\partial\Theta}{\partial t}(X, t) = 0$$

lorsque l'on travaille dans la configuration initiale.

Dans la configuration courante, le champ de température s'écrit maintenant

$$\theta(x, t) = \frac{x}{1+t},$$

et sa dérivée par rapport au temps vaut

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x, t) = -\frac{x}{(1+t)^2}$$

ce qui est différent de zéro. Que peut-on faire de cette dérivée? Rien du tout. Elle est en effet la limite du rapport

$$\frac{\theta(x, t + \Delta t) - \theta(x, t)}{\Delta t}$$

lorsque Δt tend vers zéro. Or, la particule se trouvant en x à t n'est plus la même que celle se trouvant en x à $t + \Delta t$, et ainsi la différence $\theta(x, t + \Delta t) - \theta(x, t)$ est non nulle du fait du mouvement du milieu continu et non pas en raison d'une variation intrinsèque de la température. Les équations de la mécanique résultent de bilans effectués sur des quantités (masse, énergie, quantité de mouvement, ...) associées à une particule ou un groupe de particules que l'on suit dans leur mouvement. Calculer la variation en temps d'une quantité comme la température associée à une particule, ne nécessite, en description

lagrangienne, que de calculer la dérivée partielle $\partial\Theta(X, t)/\partial t$, mais demande, en configuration eulérienne, de considérer la limite de

$$\frac{\theta(x + \Delta x, t + \Delta t) - \theta(x, t)}{\Delta t} \quad (1.1.4)$$

lorsque Δt tend vers zéro, où $x + \Delta x$ est la position à $t + \Delta t$ de la particule se trouvant en x à t . Ainsi, Δx est un incrément de trajectoire parcouru durant Δt et déterminé comme suit :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + o(\Delta t) = x(t) + v(x, t)\Delta t + o(\Delta t)$$

où $x(t)$ représente la trajectoire de la particule suivie. Ainsi,

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = v(x, t)\Delta t$$

en négligeant les termes en $o(\Delta t)$ qui sont voués à tendre vers 0 lorsque l'on fera tendre Δt vers 0.

Dans notre exemple, la vitesse v vaut $v(x, t) = \frac{x}{1+t}$, et l'on peut vérifier que la limite de l'expression (1.1.4) est bien zéro.

Ainsi, la quantité $d\theta/dt$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}(x, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(x + \Delta x, t + \Delta t) - \theta(x, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(x, t + \Delta t) + \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, t + \Delta t)\Delta x + o(\Delta x) - \theta(x, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(x, t + \Delta t) - \theta(x, t)}{\Delta t} + \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, t)v(x, t) \\ &= \frac{\partial\theta}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, t)v(x, t) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

s'appelle dérivée particulaire de la quantité θ exprimée en variables eulériennes. Elle désigne, par définition, la variation en temps d'une quantité θ évaluée sur une même particule que l'on suit dans son mouvement. Pour un mouvement dans \mathbb{R}^3 , elle s'écrit

$$\frac{d\theta}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\theta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\theta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta \quad (1.1.6)$$

et est la dérivée totale en temps de la fonction $\theta(\mathbf{x}(t), t)$ où $\mathbf{x}(t)$ est la trajectoire d'une particule.

Notons que la dérivée particulaire de la i ème composante de la vitesse s'écrit, sur la configuration actuelle

$$\frac{dv_i}{dt}(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$$

ce qui est non linéaire par rapport à la vitesse. Nous utiliserons cette expression lors de l'expression de la conservation de la quantité de mouvement.

Notons également que lorsque les équations de la mécanique sont approchées par une méthode numérique comme les éléments finis, le domaine de définition spatial est discrétisé

par un maillage qui peut avoir une vitesse \mathbf{v}_m “quelconque” (*i.e.* différente de zéro et de \mathbf{v}). Ce mouvement du maillage doit être pris en compte dans les équations en remplaçant $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ par $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla \theta$ dans (1.1.6).

Enfin, la dérivée particulaire d’une quantité Θ exprimée en variables de Lagrange est confondue avec sa dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{d\Theta}{dt}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (1.1.7)$$

1.2 Gradient de la transformation

Considérons comme sur la figure 1.2.1 deux points matériels de la configuration de référence, \mathbf{X} et $\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}$, proches l’un de l’autre. Ces points forment un vecteur (ou fibre) matériel(le) $\delta \mathbf{X}$. Dans la configuration courante, ces points correspondent, par la loi du

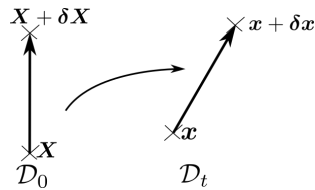


FIGURE 1.2.1 – Transformation d’un vecteur matériel élémentaire de la configuration de référence sur la configuration matérielle.

mouvement, à \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$, et la fibre matérielle devient $\delta \mathbf{x}$. On a les relations suivantes, pour chaque composante i :

$$x_i = f_i(\mathbf{X}, t; t_0)$$

et

$$x_i + \delta x_i = f_i(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}, t; t_0)$$

Cette dernière relation permet d’écrire, au premier ordre,

$$x_i + \delta x_i = f_i(\mathbf{X}, t; t_0) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial X_k}(\mathbf{X}, t; t_0) \delta X_k$$

Ainsi, on en conclut que

$$\delta x_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_1} \delta X_1 + \frac{\partial f_i}{\partial X_2} \delta X_2 + \frac{\partial f_i}{\partial X_3} \delta X_3$$

pour toute composante i . Donc :

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_1} & \frac{\partial f_3}{\partial X_2} & \frac{\partial f_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \end{pmatrix}$$

que l'on écrit

$$\delta \mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \delta \mathbf{X}, \quad \text{ou encore } \delta x_i = \sum_j F_{ij} \delta X_j \quad (1.2.1)$$

Le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ s'appelle le "gradient de la transformation \mathbf{f} " et est défini par la relation

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \mathbf{f}(X, t; t_0)}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \quad (1.2.2)$$

Il fait correspondre à toute fibre matérielle $\delta \mathbf{X}$ de la configuration initiale, $\delta \mathbf{x}$, son vecteur transporté par le mouvement du milieu dans la configuration à l'instant t . Dans un système de coordonnées cartésiennes, ce tenseur est représenté par une matrice dont les composantes F_{ij} sont définies par

$$F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \equiv \frac{dx_i}{dX_j}$$

En utilisant la relation $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, on peut réécrire $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ comme

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (1.2.3)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ est le tenseur identité.

Le déterminant de $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ est noté J et est appelé jacobien de la transformation. L'annexe B donne un complément sur les tenseurs et le calcul tensoriel. Dans ce cours nous considérerons toujours les coordonnées cartésiennes, si bien que la place haut/bas des indices évoquée dans l'annexe est indifférenciée. La manipulation des tenseurs s'apparente alors à celle des matrices et vecteurs.

1.2.1 Produit mixte

Soient \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} trois vecteurs de \mathbb{R}^3 . Le produit mixte $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$, noté $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, est égal au volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs (voir figure 1.2.2 : aire du parallélogramme $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ multipliée par la hauteur). Ce produit est également égal au déterminant de $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

1.2.2 Transport d'un volume

Considérons trois vecteurs $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ définis dans la configuration initiale \mathcal{D}_0 . Ces vecteurs forment un parallélépipède de volume $V = [\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}]$. Au cours du mouvement, ces trois vecteurs se transforment en $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ et le volume initial se transforme en un volume v donné par

$$\begin{aligned} v &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \\ &= [\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{U}, \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V}, \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{W}] \\ &= \det(\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{U}, \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V}, \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{W}) \\ &= \det(\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})) \\ &= (\det \underline{\underline{\mathbf{F}}}) \det(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) \end{aligned}$$

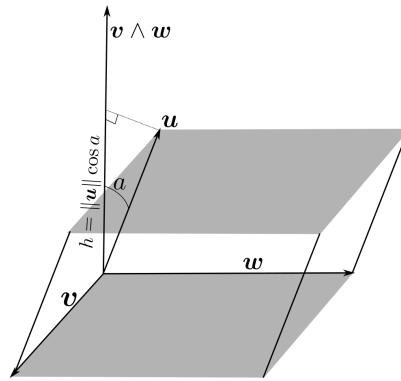


FIGURE 1.2.2 – Parallélépipède

Autrement dit,

$$v = JV \quad \text{avec } J = \det F > 0 \quad (\text{théorème}) \quad (1.2.4)$$

Une transformation est dite isochore au point \mathbf{X} si le volume est préservé autour de \mathbf{X} sous cette transformation. Si cette propriété est vérifiée en tout \mathbf{X} , la transformation est dite isochore ($J \equiv 1$).

1.2.3 Transport d'une surface orientée

Une surface se caractérise par son aire et son orientation. Soit S une surface construite à partir de deux fibres matérielles \mathbf{U} et \mathbf{V} :

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{N}A,$$

où A est l'aire de la surface S et \mathbf{N} désigne la normale unitaire à S , voir Figure 1.2.3. Nous cherchons l'expression de s en fonction de S , *i.e* nous cherchons comment est transportée S par le mouvement du milieu.

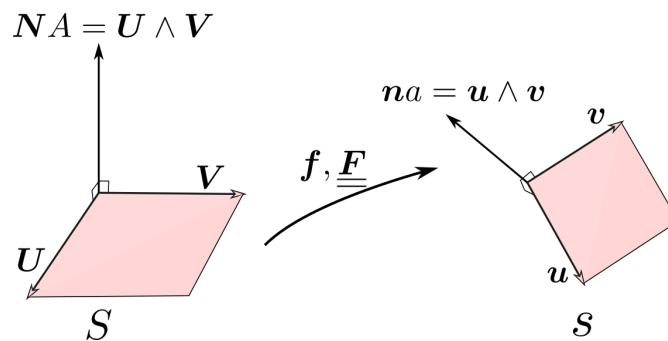


FIGURE 1.2.3 – Transport convectif d'une surface élémentaire

Soient les vecteurs transportés de \mathbf{U} et \mathbf{V} , $\mathbf{u} = \underline{\underline{F}} \cdot \mathbf{U}$ et $\mathbf{v} = \underline{\underline{F}} \cdot \mathbf{V}$. Nous voulons donc exprimer la surface s construite à partir de \mathbf{u} et \mathbf{v} . On a :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{n}a$$

où a est l'aire de s et \mathbf{n} la normale unitaire à s . Évaluons l'action de $\mathbf{n}a$ sur un vecteur \mathbf{w} quelconque :

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}a) \cdot \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \\ &= [\underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{U}, \underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{V}, \mathbf{w}] = (\det \underline{\mathbf{F}})[\mathbf{U}, \mathbf{V}, \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{w}] \\ &= J \mathbf{A} \mathbf{N} \cdot (\underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{w}) = J(\underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

car

$$\mathbf{N} \cdot (\underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{w}) = \sum_i N_i (\underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{w})_i = \sum_{i,j} N_i F_{ij}^{-1} w_j = \sum_{i,j} w_j F_{ji}^{-T} N_i = \mathbf{w} \cdot (\underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N})$$

Ainsi, par identification :

$$\mathbf{n}a = J \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} \mathbf{A}, \quad \text{ou encore } n_i a = J A (F^{-T})_{ij} N_j \quad (1.2.5)$$

NB : en coordonnées cartésiennes, le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} s'écrit : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = a^T b = b^T a$ où a et b sont les vecteurs colonnes contenant les coordonnées de \mathbf{a} et \mathbf{b} , tandis que a^T et b^T sont les vecteurs (transposés) lignes. En conséquence,

$$\mathbf{N} \cdot (\underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{w}) = (F^{-1} w)^T \mathbf{N} = w^T F^{-T} \mathbf{N} = \mathbf{w} \cdot (\underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N})$$

1.2.4 Décomposition polaire du gradient de la transformation

Le tenseur gradient de la transformation $\underline{\mathbf{F}}$ peut être décomposé de manière unique en le produit d'une déformation pure et d'une rotation. Cela se fait grâce à la décomposition polaire de $\underline{\mathbf{F}}$, introduite dans l'annexe A. Le déterminant de $\underline{\mathbf{F}}$ étant strictement positif, il existe une unique rotation $\underline{\mathbf{R}}$ et deux uniques tenseurs symétriques définis positifs, $\underline{\mathbf{U}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$, tels que

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{R}} \quad (1.2.6)$$

avec $\underline{\mathbf{U}}^2 = \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}}$ et $\underline{\mathbf{v}}^2 = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T$. Les tenseurs $\underline{\mathbf{U}}$ et $\underline{\mathbf{v}}$ sont appelés respectivement tenseur des déformations pures à droite (tenseur lagrangien), et tenseur des déformations pures à gauche (tenseur eulérien). $\underline{\mathbf{R}}$ est quant à lui le tenseur de rotation local, caractérisé par $\det \underline{\mathbf{R}} = +1$ et $\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T = \underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{I}}$. Les tenseurs des déformations à gauche et à droite sont reliés par la relation (voir figure 1.2.4) :

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T \quad (1.2.7)$$

En notation indicielle, les relations ci-dessus s'écrivent :

$$F_{ij} = \sum_k R_{ik} U_{kj} = \sum_k v_{ik} R_{kj}$$

et

$$v_{ij} = \sum_{k,l} R_{ik} U_{kl} R_{jl}$$

Les tenseurs de déformation pure jouent un rôle primordial car ils permettent d'isoler la déformation pure dans le gradient de la transformation. Cependant en pratique, ils

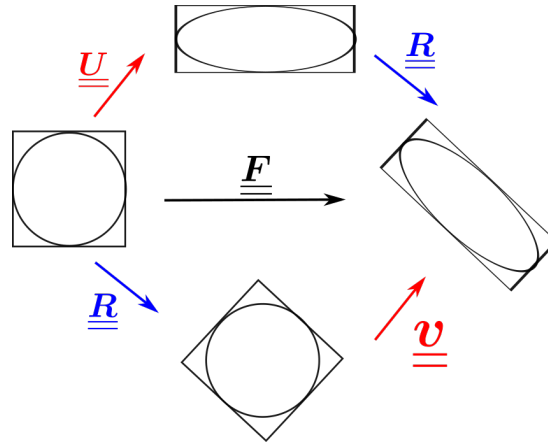


FIGURE 1.2.4 – Décomposition polaire du gradient de la transformation. Les ellipses ont pour grand et petit axes les vecteurs propres respectifs de $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{v}}$.

sont peu utilisés sous cette forme car leur extraction à partir de $\underline{\underline{F}}$ demande un nombre important d'opérations. On considérera en général leurs carrés qui sont bien plus simples à évaluer.

Soit $\delta \mathbf{x}$ une fibre matérielle dans la configuration courante, représentée par le vecteur colonne de ses coordonnées cartésiennes δx , et F la matrice représentant $\underline{\underline{F}}$. Le carré de la longueur de $\delta \mathbf{x}$ s'écrit $(\delta l)^2 = \delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} = \delta x^T \delta x$, donc

$$(\delta l)^2 = (F \delta X)^T F \delta X = \delta X^T (F^T F) \delta X = \delta X^T C \delta X \quad (1.2.8)$$

avec $\delta x = F \delta X$ et $C = F^T F$.

Remarque : cette expression peut être détaillée en notation indicielle,

$$\begin{aligned} (\delta l)^2 &= \sum_i \delta x_i \delta x_i \\ &= \sum_{i,j,k} (F_{ij} \delta X_j) (F_{ik} \delta X_k) \\ &= \sum_{i,j,k} \delta X_j \underbrace{F_{ji}^T F_{ik}}_{C_{jk}} \delta X_k \end{aligned}$$

En écriture tensorielle, nous avons, quel que soit le système de coordonnées, $(\delta l)^2 = \delta \mathbf{X} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \delta \mathbf{X}$. Le tenseur

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^2$$

est appelé tenseur des déformations de Cauchy-Green droit. Il s'agit d'un tenseur lagrangien, à savoir qu'il fait correspondre à un vecteur de la configuration de référence un autre vecteur de cette même configuration.

De la même façon, on peut exprimer le carré de la longueur d'une fibre matérielle $\delta \mathbf{X}$ dans la configuration de référence :

$$(\delta L)^2 = \delta X^T \delta X = (F^{-1} \delta x)^T (F^{-1} \delta x) = \delta x^T (F^{-T} F^{-1}) \delta x = \delta x^T b^{-1} \delta x \quad (1.2.9)$$

où $b = FF^T$. En écriture tensorielle, cette relation s'écrit $(\delta L)^2 = \delta \mathbf{x} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \delta \mathbf{x}$, quel que soit le système de coordonnées. Le tenseur

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{v}}^2$$

Ce tenseur est appelé tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche ou tenseur de Finger. Il s'agit d'un tenseur eulérien : à un vecteur de la configuration courante, il fait correspondre un vecteur de cette même configuration.

Exercice 1.2.1 On étudie la transformation faisant passer de la configuration de la figure 1.2.5a à la configuration 1.2.5b.

1. Sachant que l'allongement relatif suivant \mathbf{e}_1 est $\frac{l-l_0}{l_0} = \lambda$, écrire la transformation correspondante dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
2. En déduire les expressions des tenseurs $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{R}}$.

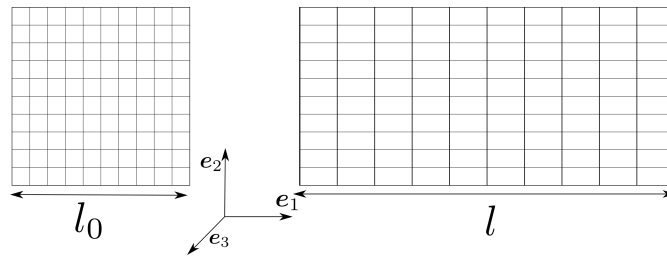


FIGURE 1.2.5 – Cinématique de l'extension simple pour un corps carré muni d'une grille : état initial (gauche) et final (droite).

Exercice 1.2.2 On étudie la transformation illustrée sur la figure 1.2.6 qui s'écrit :

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2 ; \quad x_2 = X_2 ; \quad x_3 = X_3$$

où γ est l'amplitude du glissement.

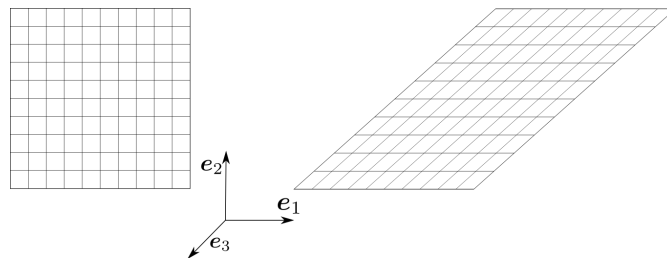


FIGURE 1.2.6 – Cinématique du glissement simple pour un corps carré muni d'une grille : état initial (gauche) et final (droite).

1. Donner l'expression de $\underline{\underline{F}}$, vérifier que la transformation est isochore.
2. En déduire l'expression du tenseur Cauchy - Green droit $\underline{\underline{C}}$.

Les valeurs propres de $\underline{\underline{C}}$ sont

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})\right)^2 ; \quad \lambda_2 = \left(\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})\right)^2 ; \quad \lambda_3 = 1$$

Les racines positives de ces valeurs propres fournissent les valeurs propres du tenseur des déformations pures $\underline{\underline{U}}$. Les vecteurs propres de $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{U}}$ sont, par construction, identiques.

3. Que signifie $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 < 1$?

4. Vérifiez que $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{R}}$ sont donnés (dans la base canonique) par :

$$[\underline{\underline{U}}] = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma/2 & 0 \\ \alpha\gamma/2 & \alpha(1 + \gamma^2/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\underline{\underline{R}}] = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma/2 & 0 \\ -\alpha\gamma/2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}$

5. À quel type de rotation $\underline{\underline{R}}$ correspond ? Donnez l'expression de $\tan \theta$, où θ est l'angle de rotation.

1.3 Mesures des déformations

Allongements - Soit $\delta \mathbf{X}$ une fibre matérielle, de longueur $|\delta \mathbf{X}|$ et dirigée selon le vecteur unitaire \mathbf{M} . Ainsi :

$$\delta \mathbf{X} = |\delta \mathbf{X}| \mathbf{M}$$

Dans la configuration courante, la longueur de la fibre devient $|\delta \mathbf{x}|$ avec :

$$|\delta \mathbf{x}|^2 = (F\delta \mathbf{X})^T (F\delta \mathbf{X}) = |\delta \mathbf{X}|^2 \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M}$$

On définit alors le rapport d'allongement dans la direction \mathbf{M} par :

$$\lambda(\mathbf{M}) = \frac{|\delta \mathbf{x}|}{|\delta \mathbf{X}|} = \sqrt{\mathbf{M}^T \cdot \underbrace{\mathbf{C}}_{F^T F = U^T U} \cdot \mathbf{M}} = |\underline{\underline{F}} \cdot \mathbf{M}| = |\underline{\underline{U}} \cdot \mathbf{M}|$$

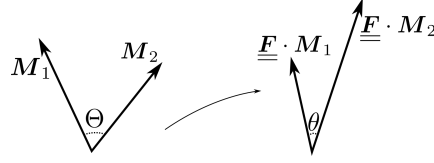
Si \mathbf{M} est choisi comme le i ème vecteur de la base canonique $\{\mathbf{E}_j\}$, $j = 1, 2, 3$, i.e $M_k = 1$ si $k = i$ et $M_k = 0$ si $k \neq i$, alors $\underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{M}$ est le vecteur formé par la i ème colonne de $\underline{\underline{C}}$, et $\mathbf{M}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{M} = C_{ii}$. D'où :

$$\lambda(\mathbf{E}_i) = \sqrt{C_{ii}} = \sqrt{F_{1i}^2 + F_{2i}^2 + F_{3i}^2} \quad (1.3.1)$$

Cette relation donne une interprétation simple des composantes diagonales du tenseur de Cauchy - Green droit $\underline{\underline{C}}$, à savoir le carré de l'allongement du vecteur de base correspondant.

Angle de glissement - Le cosinus de l'angle formé par deux vecteurs unitaires est égal au produit scalaire de ces vecteurs. En reprenant les notations précédentes (voir figure 1.3.1), dans la configuration initiale on a, pour deux directions matérielles \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 formant un angle Θ , $\cos \Theta = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$. Cet angle devient θ dans la configuration actuelle :

$$\cos \theta = \frac{(F\mathbf{M}_1)^T (F\mathbf{M}_2)}{|F\mathbf{M}_1| |F\mathbf{M}_2|} = \frac{\mathbf{M}_1^T \mathbf{C} \mathbf{M}_2}{\lambda(\mathbf{M}_1) \lambda(\mathbf{M}_2)}$$

FIGURE 1.3.1 – Angle de glissement : $\gamma = \Theta - \theta$.

On appelle $\gamma = \Theta - \theta$ l'angle de glissement des directions \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 dans le plan de glissement $(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$. Si $\mathbf{M}_1 = \mathbf{E}_i$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{E}_j$, $i \neq j$, alors $\Theta = \pi/2$ et

$$\sin \gamma = \cos(\theta) = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} \quad (1.3.2)$$

ce qui donne une interprétation des composantes extra-diagonales du tenseur de Cauchy-Green droit.

Nous avons vu que grâce à la décomposition polaire il est possible de séparer les rotations pures des élongations pures. Sous l'action de rotations pures, la distance entre deux particules reste inchangée au cours du mouvement. L'élongation pure caractérisée par $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{v}}}$ quant à elle, change la distance entre les particules matérielles. Afin de quantifier la distension, c'est-à-dire d'évaluer de combien les tenseurs $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{v}}}$ s'écartent de l'identité $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$, il est nécessaire de définir une mesure des déformations. Cependant, il faut souligner qu'ici, tout n'est qu'affaire de convention, et qu'il existe une multitude de telles mesures. Dans la pratique, la mesure choisie sera celle qui permettra de formuler de façon la plus simple la loi de comportement du matériau étudié. Toutefois, il est possible de définir une mesure de déformation comme étant un tenseur ayant les propriétés suivantes :

1. il est symétrique et sans dimension physique ;
2. il est nul pour un mouvement de corps rigide et en $\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$;
3. son développement limité autour de $\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ s'écrit

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) + o\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)$$

Les mesures de déformation les plus utilisées appartiennent aux familles suivantes (définies par Hill, 1968 et 1978) :

- une famille de tenseurs des déformations lagrangiens, définis relativement à la configuration de référence et tels que

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_m = \begin{cases} \frac{1}{m} (\underline{\underline{\mathbf{U}}}^m - \underline{\underline{\mathbf{I}}}), & m \neq 0 \\ \ln \underline{\underline{\mathbf{U}}}, & m = 0 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Pour $m = 2$ par exemple, on obtient le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \quad (1.3.4)$$

- Une famille de tenseurs des déformations eulériens qui sont définis relativement à la configuration courante et tels que :

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}}_m = \begin{cases} \frac{1}{m} (\underline{\underline{\mathbf{v}}}^m - \underline{\underline{\mathbf{I}}}), & m \neq 0 \\ \ln \underline{\underline{\mathbf{v}}}, & m = 0 \end{cases} \quad (1.3.5)$$

À titre d'exemple, considérons un essai de compression ou extension suivant la direction \mathbf{e}_1 au cours duquel on suit la distance entre deux points matériels séparés initialement par la distance l_0 qui devient l à l'instant actuel. La déformation est supposée homogène ($\underline{\mathbf{F}}$ ne dépend que de t) localement dans la zone où sont placés les deux points de mesure. Calculons les expressions des différentes mesures de déformations évoquées. Les scalaires donnés ici sont les composantes (1,1) du tenseur utilisé. Remarquons d'abord que l'information essentielle est donnée par le gradient de la transformation $F = l/l_0$. Ensuite, nous avons

$$C = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2, \quad b = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2,$$

et les déformations sont données par

$$E_1 = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad a_{-1} = \frac{l - l_0}{l},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - 1 \right), \quad a_{-2} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2 \right)$$

$$E_0 = \log \frac{l}{l_0}, \quad a_0 = \log \frac{l}{l_0}$$

La mesure de déformation uniaxiale E_1 qui se rapporte à la longueur initiale est souvent appelée déformation nominale ou déformation de l'ingénieur. La déformation logarithmique, ou déformation naturelle, E_0 est souvent utilisée. En effet, lorsqu'on a à faire à des déformations importantes, il paraît naturel de considérer la déformation totale comme la somme de petits incréments de déformations. On a alors :

$$E_0 = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \log \frac{l}{l_0}$$

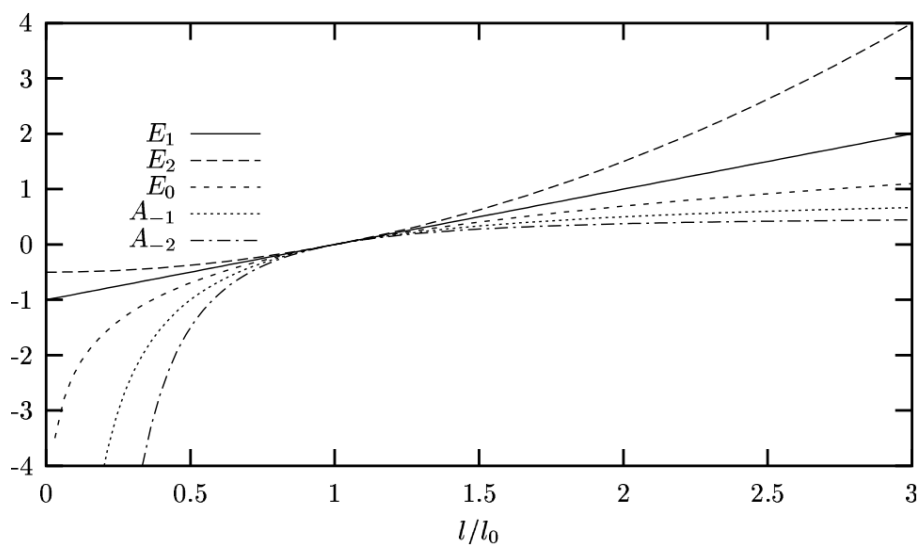


FIGURE 1.3.2 – Évolution de différentes mesures de déformation en fonction du rapport l/l_0 au cours d'une déformation pure homogène. Source : [FOREST].

Hypothèse des petites déformations - Enfin, remarquons que le tenseur de Green-Lagrange (1.3.4), peut s'exprimer en fonction du vecteur des déplacements $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}}_X \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}_X^T \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}_X^T \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}}_X \mathbf{u} \right) \quad (1.3.6)$$

Dans ce que l'on appelle la théorie géométriquement linéaire de la mécanique des solides, les déformations du corps solide sont supposées être petites. Les non-linéarités géométriques ne sont donc pas prises en compte. En négligeant donc les contributions non-linéaires de la relation (1.3.6), celle-ci se réduit à :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} \approx \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}}_X \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}_X^T \mathbf{u} \right) = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (1.3.7)$$

L'hypothèse des petites déformations ainsi faite équivaut à $\|\underline{\underline{\nabla}}_X \mathbf{u}\| \ll 1$, ou encore à $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = O(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})$. Ainsi, le troisième point de la définition d'une mesure de déformation implique que toutes les mesures de déformation sont équivalentes dans la théorie des petites déformations. Sous cette hypothèse, les différentes configurations sont également confondues.

Exercice 1.3.1 *En vous basant sur la relation (1.2.8), montrez la relation suivante reliant la longueur δL d'une fibre matérielle dans la configuration de référence \mathcal{D}_0 , à sa longueur δl dans la configuration courante \mathcal{D}_t :*

$$\frac{\delta l^2 - \delta L^2}{2\delta L^2} = \mathbf{M} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \mathbf{M} \quad (1.3.8)$$

où \mathbf{M} est le vecteur unitaire porté par la fibre matérielle dans \mathcal{D}_0

Exercice 1.3.2 *En vous basant sur la relation (1.2.9), et avec les mêmes notations que précédemment, montrez que*

$$\frac{\delta l^2 - \delta L^2}{2\delta l^2} = \mathbf{m} \cdot \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{-2} \cdot \mathbf{m} \quad (1.3.9)$$

où \mathbf{m} est le vecteur unitaire porté par la fibre matérielle dans \mathcal{D}_t . Le tenseur d'Almansi $\underline{\underline{\mathbf{a}}}_{-2}$ est, par définition, égal à $\frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{-1})$.

Exercice 1.3.3 *On considère la transformation suivante*

$$x_1 = \frac{1}{4}(18 + 4X_1 + 6X_2) ; x_2 = \frac{1}{4}(14 + 6X_2)$$

qui agit comme représenté sur la figure 1.3.3

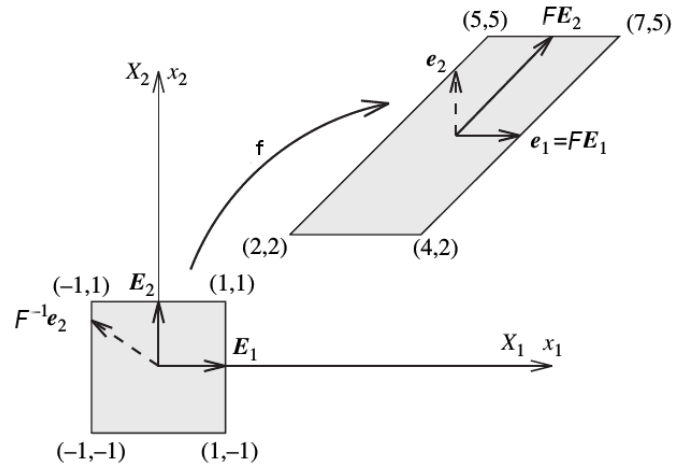


FIGURE 1.3.3

1. Calculez F et F^{-1} .
2. Calculez comment se transforment les vecteurs (matériels) de la base initiale. Calculez les vecteurs réciproques de la base courante.
3. Calculez les "tenseurs" de Cauchy-Green droit et gauche, C et b , en déduire les mesures de déformation de Green - Lagrange et d'Almansi.
4. En vous basant sur la relation (1.3.8), calculez la déformation de Green - Lagrange associée au vecteur matériel $\delta X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. En vous basant sur la relation (1.3.9), calculez la déformation d'Almansi associée à l'élément δx_2 , transformé de δX_2 .

Exercice 1.3.4 Un solide subit une déformation uni-axiale donnée par

$$x_1 = X_1(1 + \beta t)$$

où β est un paramètre arbitraire.

Calculez :

1. La matrice F du gradient de la transformation.
2. La matrice C représentant tenseur de Cauchy - Green droit.
3. La dilatation selon les axes X_1 et X_2 .
4. L'angle entre ces axes au cours de la déformation.
5. Le tenseur des déformations de Green - Lagrange.
6. La déformation selon les deux axes.
7. La matrice $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représentant le tenseur petites déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Exercice 1.3.5 On considère un mouvement défini dans la base (e_1, e_2, e_3) par :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \\ x_2 &= X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t) \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}$$

avec ω une constante positive.

1. Calculez le gradient de la transformation F , les matrices C et E du tenseur de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ et du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ au point \mathbf{X} et à l'instant t .
2. À quelle classe particulière ce mouvement appartient-il ?
3. Calculez le rapport d'allongement λ dans une direction \mathbf{M} donnée, en un point \mathbf{X} et à un instant t .
4. Calculez l'angle de glissement en \mathbf{X} et à t entre deux directions orthogonales \mathbf{M} et \mathbf{M}' .
5. On considère un milieu continu animé de ce mouvement et ayant une masse volumique ρ_0 à l'instant $t = 0$. Calculez le jacobien de la transformation ainsi que la masse volumique du milieu à un instant t .
6. Calculez le champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ et le champ d'accélération $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{X}, t)$ en coordonnées lagrangiennes.
7. En utilisant la loi du mouvement, calculez le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Calculez alors par deux méthodes différentes le champ d'accélération $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t)$ en coordonnées eulériennes.
8. On définit les coordonnées polaires lagrangiennes (R, Θ, X_3) par changement de variables

$$(X_1, X_2, X_3) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta, X_3)$$

et les coordonnées polaires eulériennes (r, θ, x_3) par

$$(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta, x_3).$$

Explicitez les fonctions X_r et X_θ définissant une nouvelle représentation lagrangienne du mouvement de la forme :

$$\begin{aligned} r &= X_r(R, \Theta, X_3, t) \\ \theta &= X_\theta(R, \Theta, X_3, t) \end{aligned}$$

9. On définit une base curviligne polaires $B' = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3)$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta \\ \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_1 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta \end{aligned}$$

Dans cette nouvelle base, le champ de vitesse est noté :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_r(r, \theta, x_3, t)\mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, x_3, t)\mathbf{e}_\theta + v_3(r, \theta, x_3, t)\mathbf{e}_3$$

Indiquez l'expression des composantes polaires v_r , v_θ et v_3 du champ de vitesse eulérien.

10. Calculez l'accélération centrifuge $\gamma_r(r, \theta, t)$ et l'accélération tangentielle $\gamma_\theta(r, \theta, t)$ du mouvement étudié.

Chapitre 2

Lois de conservation

2.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

On considère un corps continu déformable \mathcal{B} . On définit le vecteur contrainte \mathbf{t} , dans la configuration courante, par :

$$\mathbf{t} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{ds} \quad (2.1.1)$$

Il caractérise les efforts intérieurs de cohésion $d\mathbf{f}$, qui sont exercés sur une partie de \mathcal{B} à travers un élément de surface ds , de normale extérieure \mathbf{n} (voir figure 2.1.1).

D'après le théorème de Cauchy, en tout point, et à chaque instant t , le vecteur contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ dépend de la normale \mathbf{n} de façon linéaire. Il existe donc un tenseur de second ordre appelé tenseur des contraintes de Cauchy, noté $\underline{\underline{\sigma}}$, qui est tel que :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (2.1.2)$$

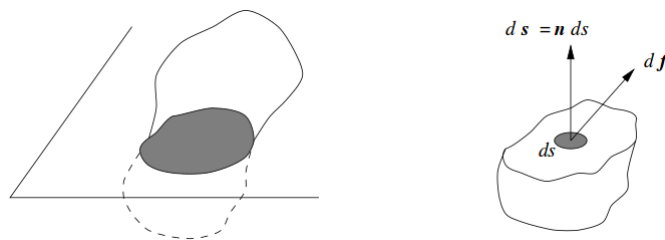


FIGURE 2.1.1 – Contraintes de Cauchy

Il peut être utile, comme nous le verrons plus tard, de décomposer le tenseur des contraintes en une partie dite déviatorique, qui, par définition, est de trace nulle et une partie dite sphérique, qui, par définition, est égale à un scalaire fois le tenseur identité. Cette décomposition est unique et s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^D - p\underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (2.1.3)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}^D$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$, et $-p\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ sa partie sphérique. p est appelée pression hydrostatique et est définie par :

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (2.1.4)$$

2.2 Lois de conservation sur la configuration courante

Cette section décrit les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement. Celles-ci sont des relations fondamentales en mécanique des milieux continus.

2.2.1 Dérivation d'une intégrale dépendant du temps

Soit $F(\mathbf{x}, t)$ une fonction de l'espace et du temps, définie sur $\omega(t)$ un domaine borné dépendant du temps. Cela signifie que sa frontière $\partial\omega$ évolue au cours du temps avec une certaine vitesse \mathbf{v} . Alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} F(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\omega(t)} F(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.2.1)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal (orthogonal) à $\partial\omega$ et pointant à l'extérieur de ω .

Ce résultat s'interprète ainsi : la variation en temps de la quantité $\int_{\omega} F dv$ (membre de gauche) est due, d'une part à la variation de F dans le domaine ω , puisque F dépend explicitement de t , et d'autre part à un flux $F\mathbf{v}$ à travers le bord $\partial\omega$ du domaine. Ce flux traduit le fait que le mouvement de $\partial\omega$ à la vitesse \mathbf{v} fait entrer ou sortir du domaine une "certaine quantité de F ".

De plus, rappelons le théorème de la divergence. Soit \mathbf{q} un champ de vecteurs défini sur ω (dépendant ou non de t). Alors :

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\omega} \nabla \cdot \mathbf{q} dv \quad (2.2.2)$$

où $\nabla \cdot \mathbf{q} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ est un scalaire appelé divergence du vecteur \mathbf{q} .

En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale surfacique de l'équation (2.2.1) avec $\mathbf{q} = F\mathbf{v}$, cette expression se réécrit en :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} F(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (F\mathbf{v}) \right) dv = \int_{\omega(t)} \left(\frac{dF}{dt} + F\nabla \cdot \mathbf{v} \right) dv \quad (2.2.3)$$

où $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F$ est la dérivée particulière de F .

2.2.2 Conservation de la masse

Ce principe exprime le fait que la masse d'un système matériel $\omega(t) \subset \mathcal{D}_t$ que l'on suit dans son mouvement reste constante. En introduisant ρ la masse volumique du milieu dans sa configuration actuelle, la conservation de la masse s'exprime par :

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \text{constante}$$

soit,

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0$$

Le domaine d'intégration dépend du temps. Nous utilisons donc la formule (2.2.3) pour intervertir opérateurs de dérivation et d'intégration. Ainsi :

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dv = 0$$

Cette relation étant vérifiée pour tout domaine matériel $\omega(t) \subset \mathcal{D}_t$, on en déduit la forme eulérienne et locale de la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.2.4)$$

L'équation (2.2.4) est aussi appelée équation de continuité, et peut directement être vue comme une équation de bilan exprimant la variation locale de la masse volumique sous le flux convectif $\rho \mathbf{v}$. Elle peut être réécrite en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.5)$$

ou encore, en introduisant la dérivée particulière de ρ , $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.6)$$

Bien que cette section soit dédiée à l'expression des lois de conservation sur la configuration courante, nous allons exprimer ici la conservation de la masse en coordonnées lagrangiennes, donc sur la configuration initiale. Nous donnons préalablement le théorème de changement de variables en intégration.

Théorème du changement de variables : soient, comme illustré sur la figure 2.2.1, deux domaines, ω_0 , muni des coordonnées (\mathbf{X}) , et ω , muni des coordonnées (\mathbf{x}) , une fonction (bijective, dérivable) $\mathbf{f} : \omega_0 \rightarrow \omega$, telle que $\mathbf{f}(\omega_0) = \omega$, et une fonction g , $g : \omega \rightarrow \mathbb{R}$.

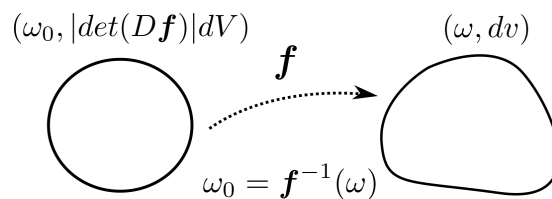


FIGURE 2.2.1 – Théorème du changement de variables (ou de la mesure inverse).

Alors :

$$\int_{\omega} g(\mathbf{x}) dv = \int_{\omega_0} g(\mathbf{f}(\mathbf{X})) |det(D\mathbf{f})| dV \quad (2.2.7)$$

où $D\mathbf{f}$ est le gradient de \mathbf{f} , $(D\mathbf{f})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}$ et $dv = dx_1 dx_2 dx_3$, $dV = dX_1 dX_2 dX_3$.

Appliquons ce théorème avec $g \equiv \rho$, et \mathbf{f} la loi du mouvement. On a alors $det(D\mathbf{f}) = det \underline{\underline{\mathbf{F}}} = J > 0$. Ainsi, pour $\omega(t) \subset \mathcal{D}_t$,

$$\int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\omega_0} \rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV$$

avec $\omega_0 = \mathbf{f}^{-1}(\omega(t))$ le domaine matériel dans la configuration initiale.

ω_0 ne dépendant pas du temps, la conservation de la masse s'écrit

$$\int_{\omega_0} \frac{d}{dt} (\rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t)) dV = 0,$$

autrement dit :

$$\rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) = \rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, 0), 0) J(\mathbf{X}, 0)$$

À $t = 0$, la loi du mouvement est l'identité. Son jacobien vaut alors 1. De plus, on note $\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, 0), 0)$ la masse volumique initiale du milieu. La forme lagrangienne du principe de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\rho(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (2.2.8)$$

2.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

Soit $\mathbf{P}(t)$ la quantité de mouvement du domaine matériel $\omega(t)$, définie par :

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} dv \quad (2.2.9)$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement postule que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à l'ensemble des forces qui s'exercent sur le volume matériel :

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{t} ds \quad (2.2.10)$$

où \mathbf{b} représente les forces volumiques, $\mathbf{t} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}$ représente les forces de contact s'exerçant sur $\partial\omega$, la surface de $\omega \subset \mathcal{D}_t$.

Développons la ième composante du membre de gauche en utilisant de théorème (2.2.3) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho v_i dv = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) \right) dv$$

Or,

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i}_{=0, \text{éq.(2.2.4)}} = \rho \frac{dv_i}{dt}$$

où $\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i$ est la dérivée particulaire de v_i . En notation tensorielle, on écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\omega(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dv = \int_{\omega(t)} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) dv$$

avec $[\nabla \mathbf{v}]_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$.

De plus, une extension du théorème de la divergence (montrez-la en utilisant la notation indicielle) dit que :

$$\int_{\partial\omega} \underbrace{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{t}} ds = \int_{\omega} \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dv$$

où la divergence du tenseur du second ordre $\underline{\underline{\sigma}}$ est un vecteur dont la i ème composante vaut :

$$[\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Ainsi, l'équation (2.2.10) se réécrit en

$$\int_{\omega(t)} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) dv = 0 \quad (2.2.11)$$

Ceci devant être vérifié pour tout volume matériel ω , on en déduit que l'intégrande doit être nulle. Ainsi, la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit sur le domaine courant :

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{b}} \quad (2.2.12)$$

2.2.4 Conservation du moment de la quantité de mouvement

On considère un point fixe \mathbf{x}_0 et le vecteur position du point \mathbf{x} , $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, est le vecteur reliant \mathbf{x}_0 à \mathbf{x} . On note \mathbb{H} le moment de la quantité de mouvement par rapport à \mathbf{r} , défini par :

$$\mathbb{H} = \int_{\omega(t)} \mathbf{r} \wedge (\rho \mathbf{v}) dv \quad (2.2.13)$$

Le principe de conservation du moment de la quantité de mouvement exprime le fait que la dérivée temporelle du moment de la quantité de mouvement relative au point fixe \mathbf{x}_0 est égale à la somme des moments agissant sur le corps. L'équation s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \int_{\omega(t)} \mathbf{r} \wedge (\rho \mathbf{b}) dv + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} ds \quad (2.2.14)$$

On peut montrer que la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement implique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (2.2.15)$$

Ce qui signifie que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. Cette condition de symétrie a une interprétation physique très simple : regardant un cube élémentaire autour du point M , la condition de stationnarité $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = -\rho \mathbf{b}$ n'est pas suffisante pour garantir l'équilibre. Il faut également s'assurer de l'absence de rotation. Si l'on regarde par exemple les composantes σ_{12} et σ_{21} sur toutes les faces verticales du cube élémentaire, nous constatons sur la figure 2.2.2 qu'elles créent deux couples antagonistes qui doivent forcément s'équilibrer pour éviter toute mise en rotation du cube autour de l'axe \mathbf{e}_3 . D'où $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ et la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$.

En effet, la contrainte exercée sur la face de normale sortante $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ est $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32})$. La composante selon \mathbf{e}_1 de ce vecteur est bien σ_{12} . Sur la face de normale sortant $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, le vecteur contrainte traduisant l'effort exercé par le milieu extérieur est $(\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31})$. La composante selon \mathbf{e}_2 de ce vecteur est bien σ_{21} .

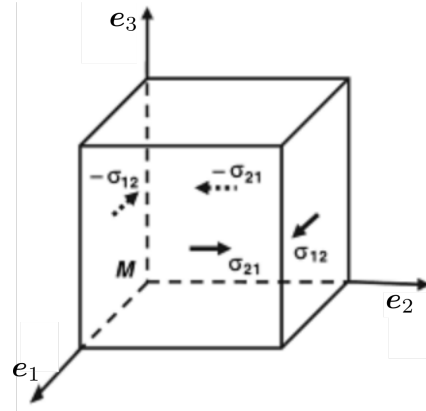


FIGURE 2.2.2 – Équilibre en rotation autour de l'axe e_3 d'un cube élémentaire sous contrainte.

2.3 Tenseurs des contraintes alternatifs

Un matériau est dit élastique si il existe un état de référence sans contrainte, et si après déformation le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations calculé par rapport à cet état de référence. Cependant, le tenseur des déformations de Green - Lagrange $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$ est défini en termes de variables de Lagrange, tandis que $\underline{\underline{\sigma}}$, le tenseur des contraintes de Cauchy est exprimé en termes de variables d'Euler. L'objectif de cette section est donc d'introduire un tenseur des contraintes en variables de Lagrange.

Soit $\omega \subset \mathcal{D}$ un domaine matériel occupant la position ω_0 à l'instant initial et la position ω_t à l'instant t . Soit $\mathbf{t}(M, t, \mathbf{n})$ la contrainte au point M à l'instant t pour la direction \mathbf{n} . La force élémentaire $d\mathbf{f}$ qui s'exerce sur un élément de surface ds , d'aire da , passant par M et de normale \mathbf{n} , est égale à :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}da = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}da$$

Nous cherchons à exprimer $d\mathbf{f}$ à l'aide de l'élément de surface dS d'aire dA de la configuration de référence. Or, d'après (1.2.5), on a :

$$\mathbf{n}da = J\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA$$

D'où

$$d\mathbf{f} = J\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N})dA$$

De plus, comme $\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N}) = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}) \cdot \mathbf{N}$, on est amené à définir le tenseur suivant :

$$\boxed{\underline{\underline{\Pi}} = J\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}} \quad (2.3.1)$$

appelé **tenseur des contraintes de Boussinesq** ou de **Piola-Lagrange**. Il vient alors :

$$d\mathbf{f} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \mathbf{N}dA$$

Les composantes de $\underline{\underline{\Pi}}$ s'écrivent :

$$\Pi_{ij} = J \sum_{p=1}^3 \sigma_{ip} \frac{\partial X_j}{\partial x_p}$$

Ce tenseur nous permet d'écrire de façon simple les équations du mouvement en variables de Lagrange. Pour ce faire, nous partons du bilan de la quantité de mouvement en description Eulérienne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{t} da + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{b} dv$$

On se ramène à des intégrales sur la configuration initiale en appliquant le théorème de changement de variables (2.2.7) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_0} \rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV \quad \text{car } \rho J = \rho_0 \\ &= \int_{\omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

De même,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dv &= \int_{\omega_0} \rho(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{b}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)) J dV \\ &= \int_{\omega_0} \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

où l'on a posé $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, t))$.

Enfin, l'intégrale surfacique peut être traitée en utilisant ce que l'on a montré plus haut : $d\mathbf{f} = \mathbf{t} da = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \mathbf{N} dA$. En conséquence on peut réécrire l'équation de bilan sur la configuration initiale :

$$\int_{\omega_0} \rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} dV = \int_{\partial\omega_0} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \mathbf{N} dA + \int_{\omega_0} \rho_0 \mathbf{B} dV$$

Par le théorème de la divergence et comme ceci est valable pour tout domaine ω_0 , on en déduit l'équation locale Lagrangienne du mouvement :

$$\boxed{\rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho_0 \mathbf{B}} \quad (2.3.4)$$

Cependant, le tenseur de Piola-Lagrange présente deux inconvénients. D'une part il n'est pas symétrique. D'autre part, on remarque, par la relation $d\mathbf{f} = \underline{\underline{\Pi}} \cdot \mathbf{N} dA$, que $\underline{\underline{\Pi}}$ appliqué à un vecteur élémentaire de surface dans la configuration initiale donne la force s'exerçant sur l'élément de surface dans la configuration actuelle. Ainsi, $\underline{\underline{\Pi}}$ ne satisfait pas pleinement l'objectif initial qui était d'exprimer les contraintes dans la configuration

initiale.

Pour aller plus loin, on introduit une force **fictive** $d\mathbf{F}$ attachée à l'élément de surface dS de la configuration initiale, définie par :

$$d\mathbf{f} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\mathbf{F} \quad \text{ou} \quad d\mathbf{F} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot d\mathbf{f}$$

Ceci signifie que $d\mathbf{f}$ se déduirait de $d\mathbf{F}$ par transport convectif. Dans la réalité, la force élémentaire $d\mathbf{f}$ n'a aucune raison de se comporter comme un vecteur transporté dans le mouvement.

Nous partons de $\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\mathbf{F} = \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} \cdot \mathbf{N}dA$. En remplaçant $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$ par son expression :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\mathbf{F} = J \underline{\underline{\mathbf{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot \mathbf{N}dA$$

D'où :

$$d\mathbf{F} = J(\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T}) \cdot \mathbf{N}dA$$

On est amené à introduire le tenseur suivant, dit **tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff** :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{S}}} = J \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T}} \quad (2.3.5)$$

Et nous avons

$$\boxed{d\mathbf{F} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \mathbf{N}dA}$$

qui est l'expression "symétrique" de

$$\boxed{d\mathbf{f} = \underline{\underline{\mathbf{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}da}$$

La différence essentielle est que $d\mathbf{F}$ n'a pas de réalité mécanique. En comparant ces deux expressions à

$$\boxed{d\mathbf{f} = \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} \cdot \mathbf{N}dA}$$

nous soulignons le caractère purement Eulérien de $\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}}$, purement Lagrangien de $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ et hybride de $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$. De plus, le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ est symétrique. Cependant $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ n'a aucune réalité physique. Son intérêt réside dans le fait qu'il est le tenseur des contraintes conjugué du tenseur des déformations de Green-Lagrange comme nous le verrons dans la section suivante. Seuls les tenseurs $\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$ possèdent un sens physique et peuvent caractériser les efforts appliqués. De plus, la composante (1,1) du tenseur de Boussinesq en traction uniaxiale dans la direction \mathbf{e}_1 , correspond à la contrainte dite ingénieur c'est à dire : $\Pi_1 = F/S_0$ où F est la force appliquée sur la section d'aire S_0 .

Remarquons aussi que puisque $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$, alors $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}$, et l'équation (2.3.4) devient :

$$\boxed{\rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}) + \rho_0 \mathbf{B}}$$

Enfin, lorsque l'hypothèse des petites déformations est faite, c'est-à-dire lorsque les termes en $O(\|\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{u}\|)$ peuvent être négligés, les tenseurs $\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ sont équivalents.

2.4 Efforts intérieurs - Théorème de l'énergie cinétique

La forme locale de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{b}$$

En multipliant cette équation par la vitesse \mathbf{v} il vient :

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \quad (2.4.1)$$

D'autre part, **Exercice** :

$$\boxed{\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \mathbf{v} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}}$$

On rappelle, que la divergence d'un tenseur du second ordre $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ est un vecteur, noté $\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$, dont la i ième composante est définie (en coordonnées cartésiennes) par

$$[\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}})]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

De plus, le produit doublement contracté entre deux tenseurs du deuxième ordre est défini par : $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \sum_{p,q} A_{pq} B_{qp} = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ (voir l'annexe B).

Le gradient des vitesses se décompose en la somme d'une partie symétrique $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$ et une partie antisymétrique $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{anti}$:

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} + \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{anti}}$$

avec

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} + (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v})^T) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{anti} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} - (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v})^T)$$

On montre de plus (**exercice**) que si $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est symétrique et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ antisymétrique, alors $\underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$. Il s'en suit, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ étant symétrique, que

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{anti} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$$

Ainsi, on a montré la relation

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \mathbf{v} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$$

et $\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$ devient :

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}$$

Considérons maintenant une partie ω d'un système matériel \mathcal{D} , et intégrons la relation précédente sur ce domaine à un instant t :

$$\int_{\omega_t} \frac{1}{2} \rho \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} dv = \int_{\omega_t} \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) dv - \int_{\omega_t} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dv + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dv$$

Le premier terme peut être réécrit (les termes supplémentaires liés à la dépendance temporelle de ω s'annulent grâce à l'équation de conservation de la masse) en :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv$$

Le deuxième terme peut être transformé en une intégrale de surface :

$$\int_{\omega_t} \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) dv = \int_{\partial\omega_t} (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv = \int_{\partial\omega_t} (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da - \int_{\omega_t} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dv + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dv$$

Exercice : Montrez que $(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}$.

En introduisant $\mathbf{t} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}$ le vecteur contrainte en M , on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da - \int_{\omega_t} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dv + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dv} \quad (2.4.2)$$

Interprétons les termes de cette équation :

- La grandeur

$$\mathcal{K} = \int_{\omega_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv$$

est l'énergie cinétique associée au domaine ω à l'instant t .

- Posons

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dv$$

On reconnaît la puissance des efforts extérieurs au domaine ω à t . Ces efforts sont décomposés en efforts de contact s'exerçant sur la surface de ω et en efforts à distance s'exerçant au sein de ω .

- Reste le terme

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\omega_t} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dv$$

qui est la **puissance des efforts intérieurs**. Le terme

$$-\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} = - \sum_{i,j} \sigma_{ij} d_{ji}^{sym} = - \sum_{i,j} \sigma_{ij} d_{ij}^{sym}$$

est donc la puissance volumique (eulérienne) des efforts intérieurs. La puissance \mathcal{P}_{int} est nulle dans tout mouvement rigidifiant, puisque on a alors $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$.

Nous venons de montrer que la dérivée particulière à l'instant t de l'énergie cinétique associée à un domaine ω est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance des efforts intérieurs. Ce que l'on peut résumer par :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}} \quad (2.4.3)$$

Remarquons que cette équation ne contient aucune loi physique nouvelle. Elle dérive directement de la conservation de la quantité de mouvement.

Dans cette section, nous avons défini la puissance des efforts intérieurs sur la configuration courante. Par la loi du mouvement, on peut se ramener sur la configuration initiale, et l'on a, pour un domaine matériel ω (on ne donne pas la démonstration) :

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}_{int} &= \int_{\omega_t} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dv = \int_{\omega_0} J \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dV \\ &= \int_{\omega_0} \underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}} dV \\ &= \int_{\omega_0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} dV \end{aligned}$$

Ceci signifie que la densité des efforts intérieurs rapportée à l'élément de volume initial peut s'exprimer en fonction de plusieurs couples de variables constitués d'un tenseur de contraintes et d'une certaine vitesse ou taux de déformation :

$$J \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}} \quad (2.4.4)$$

Pour chaque couple, la contrainte et la déformation associée sont dites conjuguées : $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ sont conjugués, ainsi que $\underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}}$ et $\underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}}$. Par contre, le gradient des déformation $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$ n'étant la dérivée d'aucune déformation, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$ sont associés, mais aucune déformation n'est conjuguée avec $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$.

2.5 Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie constitue le premier principe de la thermodynamique. Les différentes contributions à l'énergie totale du domaine ω à l'instant t sont :

- L'énergie cinétique $\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v}^2 dv$
- La puissance extérieure des efforts appliqués :

$$\mathcal{P}_{ext}(\mathbf{v}) = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\omega_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv$$

- L'énergie interne \mathcal{E} du système, représentée par une densité massique e d'énergie interne :

$$\mathcal{E} = \int_{\omega_t} \rho e(\mathbf{x}, t) dv$$

- L'apport de chaleur \mathcal{Q} au système sous la forme d'un apport surfacique $h(\mathbf{x}, t, \partial\omega)$ et d'un apport volumique $\rho r(\mathbf{x}, t)$ d'origine non mécanique (rayonnement, ...) :

$$\mathcal{Q} = \int_{\partial\omega_t} h ds + \int_{\omega_t} \rho r dv$$

Les grandeurs scalaires introduites e , h et r ne dépendent pas du référentiel d'observation. On dit alors qu'elles sont objectives. L'énergie cinétique, par contre, est liée au référentiel choisi, car elle fait intervenir la vitesse. La **première loi de la thermodynamique** stipule alors que, *dans un mouvement observé dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie interne et cinétique d'un corps matériel dans la configuration courante est due à la puissance mécanique des efforts extérieurs et à l'apport de chaleur* :

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{Q}} \quad (2.5.1)$$

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique (2.4.3), \mathcal{K} est éliminée de cette équation, et l'on fait apparaître les efforts intérieurs :

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{P}_{int}(\mathbf{v}) + \mathcal{Q} \quad (2.5.2)$$

De même que le vecteur contrainte \mathbf{t} ne dépend que de la normale \mathbf{n} à la surface, on postule ici que l'apport surfacique de chaleur $h(\mathbf{x}, t, \partial\omega)$ ne dépend de la surface que via sa normale sortante (principe de Fourier - Stokes) :

$$h(\mathbf{x}, t, \partial\omega) = h(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$$

L'existence du **flux de chaleur** \mathbf{q} est une conséquence directe de la dépendance de h à la normale \mathbf{n} . Le signe “-” est une convention : \mathbf{q} représente le flux entrant et \mathbf{n} la normale sortante. De plus, l'invariance supposée de h par changement de référentiel, implique que \mathbf{q} est un vecteur objectif.

L'équation du bilan d'énergie (2.5.2) prend ainsi la forme suivante :

$$\boxed{\int_{\omega_t} \rho \dot{e} dv = \int_{\omega_t} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} dv - \int_{\partial\omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\omega_t} \rho r dv} \quad (2.5.3)$$

2.6 Formulation locale du premier principe de la thermodynamique

Afin d'aboutir à une formulation locale de la conservation de l'énergie, on part de (2.5.3), qui est valable pour tout sous-domaine matériel ω , et l'on transforme, par le théorème de la divergence, l'intégrale de surface en une intégrale de volume :

$$\int_{\partial\omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\omega_t} \nabla \cdot \mathbf{q} dv$$

D'où :

$$\int_{\omega_t} (\rho \dot{e} - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r) dv = 0$$

Cette égalité étant valable pour tout sous-ensemble matériel ω , et sous la condition que les champs impliqués soient suffisamment réguliers (continuité), on en déduit la **forme locale du premier principe de la thermodynamique** :

$$\boxed{\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^{sym} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r} \quad (2.6.1)$$

On voit donc apparaître un apport d'énergie mécanique, via le terme $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^{sym}$. Soulignons que \dot{e} est la dérivée particulaire de l'énergie interne, que l'on peut expliciter en :

$$\rho \dot{e} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v})$$

où l'on s'est servi de l'équation de conservation de la masse (2.2.4) $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ pour obtenir la dernière expression.

Par suite, l'équation (2.6.1) se réécrit en :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} + \mathbf{q}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^{sym} + \rho r$$

2.7 Récapitulatif

Si on récapitule les formes locales des équations de bilan de la thermomécanique des milieux continus (en l'absence de discontinuité), on a :

- Conservation de la masse : $\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- Conservation de la quantité de mouvement : $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \rho \gamma$
- Conservation du moment cinétique : $\underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}$
- Conservation de l'énergie : $\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^{sym} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r$

Ce qui fait 15 inconnues (\mathbf{f} (3), $\underline{\underline{\sigma}}$ (6), ρ (1), e (1), r (1) et \mathbf{q} (3)), pour seulement 5 équations ! Il est donc nécessaire d'introduire des relations entre ces grandeurs afin de pouvoir clore le système. C'est le rôle des équations d'état et des lois de comportement que nous allons maintenant introduire.

Chapitre 3

Formulation des lois de comportement

Concentrons nous dans un premier temps sur le problème mécanique. Celui-ci comporte une équation scalaire (bilan local de la masse) et une équation vectorielle (bilan local de la quantité de mouvement), soit au total, **4 équations**. Les inconnues du problème sont la masse volumique ρ , la transformation $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, et la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ en chaque point matériel, ce qui fait **10 inconnues**. En l'état actuel le problème est donc mal posé, puisqu'il manque 6 équations. Ces équations, à trouver, permettent d'exprimer les 6 composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction des **inconnues fondamentales** du problème ρ et \mathbf{f} . Ces équations, contrairement aux lois de conservation, n'ont pas un caractère universel. Leur forme dépend de la nature et de l'état du matériau étudié. Elles sont appelées **lois de comportement**, et caractérisent les propriétés mécaniques du matériau étudié. Elles doivent donc être élaborées en forte relation avec l'expérience.

Nous allons voir cependant, que la forme de ces lois n'est pas arbitraire. Certains principes, considérés comme (quasi-) universels imposent certaines restrictions sur leur forme. De plus, nous verrons que ces lois mettent nécessairement en jeu la grandeur **température**. Nous aurons alors recours à deux autres lois universelles, les première et seconde lois de la thermodynamique, pour formuler les lois de comportement, ce qui exigera de connaître le comportement thermique et entropique de la matière.

3.1 Variété des comportements - Lois 1D

En observant la réponse mécanique des matériaux à des sollicitations diverses telles que les essais uniaxiaux (traction, compression), les essais de cisaillements plans, etc. (voir figure 3.1.1), on distingue trois grandes classes de comportements.

- **Élasticité**. Le comportement élastique linéarisé uniaxial est modélisé par le comportement d'un ressort dont l'allongement Δl est proportionnel à la charge appliquée F . Cette analogie n'est valable que dans un certain domaine de charge, dit domaine d'élasticité. Le facteur de proportionnalité est la souplesse $1/k$, où k est la raideur du ressort :

$$F = k\Delta l$$

- **Viscosité**. Le comportement visqueux uniaxial est celui d'un amortisseur ou d'un piston dont la réponse dépend de la vitesse de déformation, ici de manière linéaire pour simplifier :

$$F = \eta\Delta\dot{l}$$

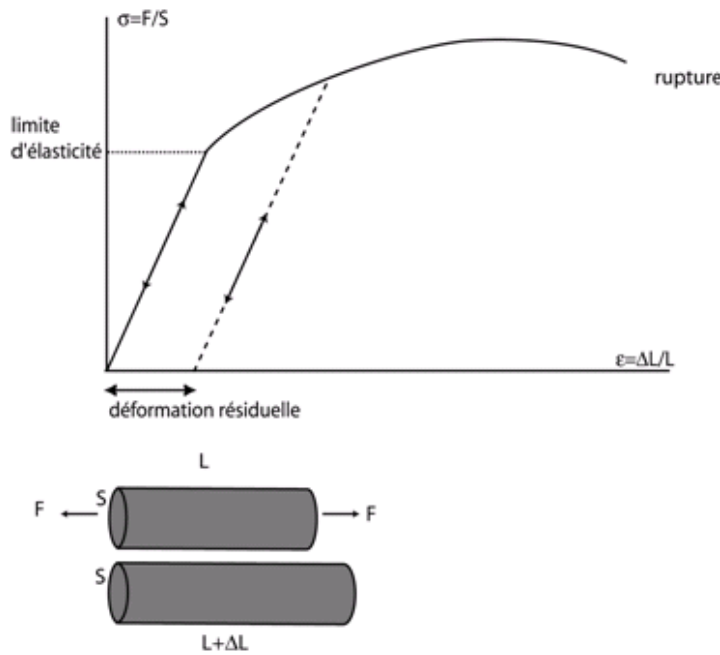


FIGURE 3.1.1 – Contrainte en fonction de la déformation dans un matériau soumis à un essai de traction

où η est le coefficient de viscosité de l'amortisseur (la viscosité d'un fluide s'exprime en $Pa.s$).

- **Plasticité.** Le comportement rigide parfaitement plastique uniaxial se caractérise par l'existence d'une contrainte seuil en-deçà de laquelle aucune déformation n'est observée et pour laquelle une déformation permanente quelconque est possible. Ce comportement est modélisé par analogie avec un patin posé sur un substrat rugueux, susceptible de se déplacer à volonté pour une charge appliquée suffisante. La description de ce comportement fait appel à une fonction critère

$$f(F) = |F| - F_0$$

et le glissement ("écoulement") du patin s'écrit

$$\Delta \dot{l} = 0 \quad \text{si } f < 0 \quad \text{ou si } (f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0)$$

$$\Delta \dot{l} \neq 0 \quad \text{si } (f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0)$$

Ces comportements élémentaires sont résumés sur la figure 3.1.2. Il est possible de combiner ces comportements entre eux, ce qui conduit à des comportements plus complexes rencontrés dans la pratique : viscoélasticité, élastoplasticité, viscoplasticité, et élastoviscoplasticité.

À titre d'exemple, on considère le modèle viscoélastique (pour les fluides) de Maxwell, représenté sur la figure 3.1.3, constitué d'un amortisseur et d'un ressort montés en série. Dans cette configuration, l'effort F se transmet d'un élément à l'autre du montage, tandis que les vitesses de déformation s'ajoutent. On a alors :

$$\Delta \dot{l}(t) = \Delta \dot{l}_{amort}(t) + \Delta \dot{l}_{ressort}(t) = \frac{F(t)}{\eta} + \frac{\dot{F}(t)}{k}$$

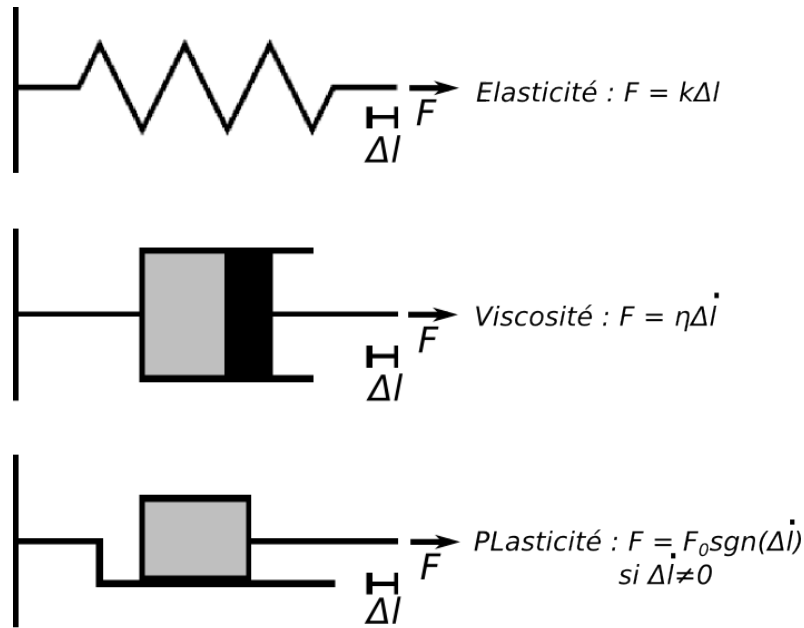


FIGURE 3.1.2 – Schématisation des trois comportements élémentaires dans le cas uniaxial.

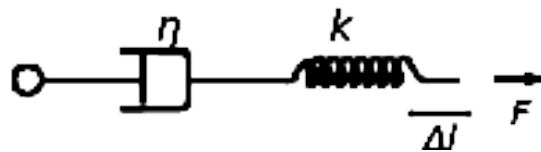


FIGURE 3.1.3 – Viscoélasticité uniaxiale : modèle de Maxwell

En intégrant cette équation différentielle, on obtient la réponse du modèle à une histoire de sollicitation $\Delta \dot{l}(s)$ allant de l'instant $s = 0$ où le système était supposé au repos à l'instant actuel $s = t$:

$$F(t) = k \int_0^t \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t-s)\right) \Delta \dot{l}(s) ds$$

Ainsi, la réponse actuelle en force dépend en général de **l'histoire** complète de déformation du matériau. La loi de comportement est donc ici une fonctionnelle de l'histoire du matériau. Remarquons toutefois que cette histoire est pondérée par le terme exponentiel qui privilégie les instants proches de l'instant présent t . Cette perte de la mémoire des sollicitations anciennes est caractéristique de la viscoélasticité.

Un deuxième modèle de comportement viscoélastique est obtenu en considérant cette fois un ressort et un amortisseur montés en parallèle comme sur la figure 3.1.4. Ce modèle est le modèle de Kelvin - Voigt décrivant le comportement visco-élastique de certains solides.

Dans un montage en parallèle, la déformation Δl est globale tandis que les contraintes s'ajoutent. Ainsi,

$$F = k\Delta l + \eta\Delta \dot{l}$$

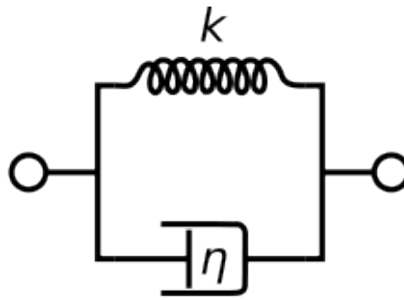


FIGURE 3.1.4 – Viscoélasticité uniaxiale : modèle de Kelvin - Voigt

Par exemple si à $t = 0$ la déformation est nulle, et qu'une force F_0 est alors appliquée au matériau, on obtient la déformation suivante en fonction du temps :

$$\Delta l(t) = l(t) = \frac{F_0}{k}(1 - e^{-\lambda t})$$

où $1/\lambda = \eta/k$ est un temps de relaxation. Ainsi, ce comportement tend vers un comportement purement élastique lorsque $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$. Si à présent la contrainte exercée sur le matériau est annulée au temps t_1 , alors le matériau se décharge et tend à recouvrer son état initial à déformation nulle, suivant la loi (voir figure 3.1.5)

$$l(t > t_1) = l(t_1)e^{-\lambda(t-t_1)}$$

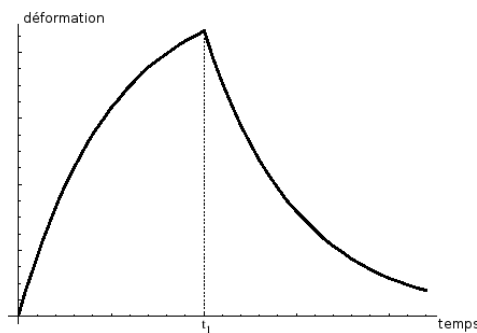


FIGURE 3.1.5 – Chargement - déchargement d'un matériau de type Kelvin - Voigt

3.2 Le principe d'indifférence matérielle ou d'objectivité

Les lois physiques sont soumises à un certain nombre de principes d'invariance lors d'un changement de repère ou de référentiel. Ainsi, une loi issue de la mécanique classique doit être invariante vis-à-vis d'une transformation galiléenne (translation rectiligne uniforme à vitesse constante), ou encore, les équations de l'électromagnétisme et de la mécanique relativiste sont invariantes par transformation de Lorentz.

Il en va de même pour les lois constitutives de la mécanique des milieux continus (MMC). Celles-ci doivent être indépendantes, non seulement du choix du système de coordonnées (ce qui est assuré par une écriture tensorielle), mais aussi du mouvement du système de référence utilisé (*i.e.* du mouvement de l'observateur ou encore du référentiel). Cette dernière indépendance est équivalente à l'**invariance des lois constitutives par superposition d'un mouvement de corps rigide (translation et rotation) au mouvement du matériau**. On dit alors que ces lois doivent obéir au **principe d'objectivité**.

Pour obéir à ce principe et être donc invariantes par changement de référentiel, les équations constitutives de la MMC doivent être écrites en termes de quantités indépendantes de l'observateur et de son mouvement. De telles quantités sont dites **objectives**. À titre d'exemples, la position d'un point dépend de l'observateur et n'est donc pas une grandeur objective. Il en va de même pour la vitesse qui dépend du mouvement de l'observateur. Par contre, les distances et les angles sont des grandeurs objectives.

3.2.1 Définitions : repère et référentiel

Afin d'effectuer des observations d'un phénomène physique, il est nécessaire de disposer d'un **référentiel** que l'on appellera également **observateur**. Le référentiel est analogue à un corps rigide muni d'une horloge. Dans ce référentiel, l'origine des temps, ainsi qu'un système de coordonnées, encore appelé **repère**, sont choisis librement. Ce repère, généralement choisi orthonormé, matérialise le référentiel et permet d'identifier une particule P à un instant t à l'aide de ses coordonnées. Il faut donc bien faire la distinction entre un **changement de repère**, lié à un changement de système de coordonnées, qui engendre une description mathématique différente du phénomène étudié ; et un **changement de référentiel**, lié à un changement d'observateur, qui engendre une vision différente du phénomène étudié.

Nous cherchons la transformation la plus générale permettant de passer d'un référentiel à un autre. Cette relation doit conserver les angles et les distances (mouvement de corps rigide, voir annexe A) et s'exprime donc comme la composition à chaque instant, d'une translation et d'une rotation. Ceci signifie que si un point matériel P est repéré par ses coordonnées x à un instant t dans un certain référentiel, alors ce même point P est repéré par ses coordonnées x^* à un instant t^* dans un second référentiel, et la relation entre x et x^* , t et t^* s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} x^*(P, t^*) &= q(t)x(P, t) + c(t) \\ t^* &= t - \tau \end{aligned}} \tag{3.2.1}$$

où $q(t)$ est la matrice de rotation caractérisée par

$$q^T(t)q(t) = q(t)q^T(t) = Id, \quad \text{et} \quad \det q(t) = 1$$

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, une rotation d'angle $\theta(t)$ autour de l'axe e_3 s'exprime par la matrice

$$q(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si les horloges des deux référentiels sont synchronisées, ce que l'on supposera dans la suite, alors $\tau = 0$, donc $t = t^*$. Notons également que dans (3.2.1), nous avons supposé que les deux référentiels utilisent le même système de coordonnées (cartésiennes, polaires, etc).

3.2.2 Loi de transformation des tenseurs

Examinons comment se transforment les grandeurs tensorielles **eulériennes** sous l'effet du changement de référentiel (3.2.1).

Un **scalaire** a qui représente une quantité physique intrinsèque (masse, énergie interne, température, ...) est invariant par la transformation définie en (3.2.1) :

$$\boxed{a^* = a} \quad (3.2.2)$$

Remarquons que la norme de la vitesse n'est pas un scalaire au sens précédent.

Soit un **vecteur matériel** \mathbf{b} , *i.e* un vecteur défini par deux points matériels. Dans le premier référentiel, les coordonnées de ces points sont notées x_1 et x_2 , et les composantes du vecteur valent $b = x_2 - x_1$. Dans un second référentiel, ces coordonnées deviennent x_1^* et x_2^* , et les composantes du vecteur deviennent $b^* = x_2^* - x_1^*$. La relation entre b et b^* s'écrit :

$$\boxed{b^* = q(t)b} \quad (3.2.3)$$

En effet,

$$b^* = x_2^* - x_1^* = (qx_2 + c) - (qx_1 + c) = q(x_2 - x_1) = q(t)b$$

Si nous considérons un **tenseur du second ordre** $\underline{\underline{c}}$, la matrice le représentant devient par la transformation (3.2.1) :

$$\boxed{c^* = q(t)cq(t)^T \quad \text{soit} \quad c_{ij}^* = \sum_{a,b} q_{ia}q_{jb}c_{ab}} \quad (3.2.4)$$

En effet, considérons deux vecteurs matériels \mathbf{u} et \mathbf{v} reliés par $\mathbf{u} = \underline{\underline{c}} \cdot \mathbf{v}$. Lors du changement de référentiel, nous avons que

$$u^* = q(t)u \quad \text{et} \quad v^* = q(t)v$$

La relation entre les fibres matérielles représentées par \mathbf{u} et \mathbf{v} doit rester satisfaite dans le second référentiel. On doit donc avoir

$$u^* = c^*v^*$$

soit

$$q(t)u = c^*(q(t)v)$$

ou encore

$$u = (q^T(t)c^*q(t))v = cv$$

d'où l'on déduit

$$c^* = q(t)cq^T(t)$$

Ceci peut se généraliser à des **tenseurs d'ordre** n , pour lesquels on trouve

$$c_{ijk\dots}^* = \sum_{a,b,c,\dots} q_{ia}q_{jb}q_{kc}\dots c_{abc\dots} \quad (3.2.5)$$

Les relations (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) décrivent la transformation d'un scalaire, d'un vecteur reliant deux points matériels, et d'un tenseur reliant deux vecteur matériels, sous le changement de référentiel (3.2.1).

3.2.3 Invariance des lois de la MMC vis-à-vis d'un changement de référentiel

Les équations constitutives doivent être formulées de telle sorte que l'expression de la réponse du matériau soit indépendante de l'observateur et de son mouvement, ou, de manière équivalente, indépendante d'un changement de référentiel (3.2.1) pour la **configuration courante**. Pour la configuration de référence, les deux référentiels entre lesquels on fait le changement, sont supposés se correspondre. Cette condition d'indifférence matérielle est appelée **principe d'objectivité**.

Le principe d'objectivité conduit à n'introduire dans les équations de comportement que des **grandeurs objectives**, *i.e.* se transformant comme les coordonnées lors d'un changement de référentiel (3.2.1), et donc ayant une signification physique intrinsèque indépendante du mouvement du référentiel.

En résumé, si les fonctions constitutives scalaires f , vectorielles $\underline{\mathbf{g}}$ et tensorielles $\underline{\underline{\mathbf{h}}}$, dépendant par exemple des grandeurs objectives a , $\underline{\mathbf{b}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$, vérifient

$$\begin{aligned} f^*(a^*, \underline{\mathbf{b}}^*, \underline{\underline{\mathbf{c}}}^*) &= f^*(a, \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T) = f(a, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\underline{\mathbf{c}}}) \\ \underline{\mathbf{g}}^*(a^*, \underline{\mathbf{b}}^*, \underline{\underline{\mathbf{c}}}^*) &= \underline{\mathbf{g}}^*(a, \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T) = \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{g}}(a, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\underline{\mathbf{c}}}) \\ \underline{\underline{\mathbf{h}}}^*(a^*, \underline{\mathbf{b}}^*, \underline{\underline{\mathbf{c}}}^*) &= \underline{\underline{\mathbf{h}}}^*(a, \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T) = \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{h}}}(a, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\underline{\mathbf{c}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^T \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

alors, l'équation constitutive correspondante respectera le principe d'objectivité :

$$F(f, g_i, h_{ij}, \dots) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(f^*, g_i^*, h_{ij}^*, \dots) = 0 \quad (3.2.7)$$

pour tout changement de référentiel.

Quelques remarques :

- Le principe d'objectivité n'est pas une conséquence du principe d'invariance de Galilée de la mécanique classique (ou l'on ne considère que le cas des transformations par translation rectiligne uniforme pour passer d'un référentiel Galiléen (ou inertiel) à un autre).

- Seules les équations constitutives de la MMC doivent vérifier le principe d'objectivité. Les équations de conservation ne doivent pas nécessairement y obéir. Par contre, leur écriture dans un référentiel non Galiléen doit être correctement posée (composition des vitesses et des accélérations : force de Coriolis, etc.)

Enfin, comme mentionné ci-dessus, la configuration de référence est supposée être la même pour tout observateur. Ainsi, un scalaire A , un vecteur \mathbf{B} et un tenseur $\underline{\underline{C}}$, définis sur la configuration de référence, sont objectifs si, sous le changement de référentiel (3.2.1) (sur la configuration courante), ils se transforment en :

$$\boxed{A^* = A, \quad B^* = B, \quad C^* = C} \quad (3.2.8)$$

3.2.4 Caractère intrinsèque de certaines variables en MMC

Il est **admis** que les grandeurs suivantes ont un caractère intrinsèque et sont donc objectives.

- la masse volumique, l'énergie interne, l'énergie libre, l'entropie, la température, l'enthalpie, la production de chaleur par unité de volume et de temps, se comportent comme des scalaires objectifs.
- Les forces de volume, les forces de contact et le vecteur flux de chaleur, se comportent comme des vecteurs objectifs.

3.2.5 Résultats d'opérateurs sur les grandeurs objectives

1. Les **combinaisons linéaires** de grandeurs objectives sont objectives.
2. Le produit de deux grandeurs objectives est objectif.
3. La puissance entière d'une grandeur objective est objective.
4. Le double produit contracté de deux grandeurs objectives est objectif :

$$\underline{\underline{\mathbf{g}^*}} : \underline{\underline{\mathbf{h}^*}} = \text{tr}((qgq^T)(qhq^T)) = \text{tr}(q(gh)q^T) = \text{tr}(gh) = \underline{\underline{\mathbf{g}}} : \underline{\underline{\mathbf{h}}}$$

5. **Si a est un scalaire objectif ($a^* = a$) alors son gradient ∇a est objectif.**
En effet

$$\frac{\partial a^*}{\partial x_i^*} = \sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i^*} = \sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial [q^T x^*]_j}{\partial x_i^*} = \sum_j q_{ij} \frac{\partial a}{\partial x_j}$$

Les dérivées temporelles de grandeurs spatiales objectives ne sont pas nécessairement des grandeurs objectives. Ainsi,

1. La dérivée temporelle d'un vecteur objectif défini sur la configuration courante $b^* = q(t)b$ n'est pas objectif puisque l'on a

$$\dot{b}^* = \dot{q}(t)b + q(t)\dot{b} \neq q(t)\dot{b}$$

2. De même, la dérivée temporelle d'un tenseur spatial objectif défini sur la configuration courante $c^* = q(t)cq^T(t)$ n'est pas objective puisque

$$\dot{c}^* = \dot{q}cq^T + qc\dot{q}^T + qc\dot{q}^T \neq qc\dot{q}^T$$

Cependant, la variation en temps du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ apparaît dans de nombreuses lois de comportement. On doit alors “fabriquer” une dérivée temporelle objective (voir exercice 3.2.2) afin de formuler la loi de comportement.

Grandeurs géométriques

1. Le **temps** n'est pas une grandeur objective. En effet, $t^* = t - \tau \neq t$. Le temps ne peut donc pas intervenir explicitement dans l'écriture d'une loi de comportement.
2. On vérifie aisément que le vecteur position $\mathbf{x} - \mathbf{0}$, la vitesse \mathbf{v} , ou encore l'accélération ne sont pas des vecteurs objectifs.
3. Un vecteur reliant deux points est objectif. On en déduit, à l'aide du produit scalaire, que la distance entre deux points et l'angle entre deux vecteurs sont des scalaires objectifs. De même, la normale à une surface est un vecteur objectif.

Exercice 3.2.1 Exemples de grandeurs objectives et non-objectives

Grandeurs cinématiques

1. On appelle tenseur hybride du second ordre un tenseur $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ qui, à un vecteur \mathbf{B} de la configuration de référence, fait correspondre un vecteur \mathbf{b} de la configuration actuelle : $\mathbf{b} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{B}$. Montrez que si \mathbf{B} et \mathbf{b} sont des vecteurs objectifs, alors $T^* = qT$. Un tenseur hybride se transformant de la sorte est dit objectif.

On remarque ici que l'objectivité de $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ ne s'exprime pas comme dans l'expression (3.2.4). Ceci provient du caractère hybride de $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ qui est composé d'une partie eulérienne (définie sur la configuration courante) et d'une partie lagrangienne (définie sur la configuration de référence et donc non affectée par le changement de référentiel). Les relations (3.2.4) et (3.2.5) ne sont vraies que pour des tenseurs entièrement définis sur la configuration courante.

2. Montrez que le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ est objectif.
3. En déduire l'objectivité du jacobien J .

Il en va de même pour la mesure de la surface matérielle $d\mathbf{S}$. Ainsi, outre les angles et les longueurs, les mesures de volumes et de surfaces sont préservées par changement de référentiel.

4. On définit le tenseur gradient de vitesse (eulérien) par : $\underline{\underline{\mathbf{l}}} = \nabla \mathbf{v}$. Montrez d'abord que ce tenseur peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\underline{\mathbf{l}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1}$$

puis que l'on a

$$l^* = qlq^T + \dot{q}q^T$$

d'où la non objectivité de ce tenseur.

5. Montrer que le tenseur des vitesses de déformation $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$, partie symétrique de $\underline{\underline{\mathbf{l}}}$ est objectif.

Ceci montre que la combinaison linéaire de grandeurs non objectives peut conduire à une grandeur objective. En revanche, la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\mathbf{l}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{anti}$, n'est pas objective.

Déformations

1. Montrez que le tenseur de Cauchy - Green droit $\underline{\underline{C}}$ est objectif, ainsi que le tenseur de Green - Lagrange $\underline{\underline{E}}$.
2. Montrez que le tenseur de Cauchy - Green gauche $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ et le tenseur d'Almansi $\underline{\underline{a}}_{-2} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1})$ sont objectifs. Montrez que ceci implique que $\underline{\underline{a}}_{-2}$ et $\underline{\underline{a}}_{-2}^*$ expriment le même changement intrinsèque de longueur.

Contraintes

1. En partant de la définition du tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, montrez que celui-ci est objectif, à savoir :

$$\sigma^* = q\sigma q^T$$

2. En déduire que le tenseur des contraintes de Piola - Lagrange $\underline{\underline{\Pi}}$ et le tenseur des contraintes de Piola - Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ sont objectifs.

Exercice 3.2.2 Dérivée temporelle de la contrainte de Cauchy

Un matériau *hypoélastique* est un matériau pour lequel l'évolution des contraintes de Cauchy est décrite par :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = f(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{d}}^{sym}$$

où $\underline{\underline{d}}^{sym}$ est le tenseur des vitesses de déformation. Dans l'hypothèse de petits déplacements, l'expression ci-dessus est viable, puisque les rotations sont négligées. Nous allons voir qu'en grandes transformations, la non-objectivité de $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ conduit à des aberrations.

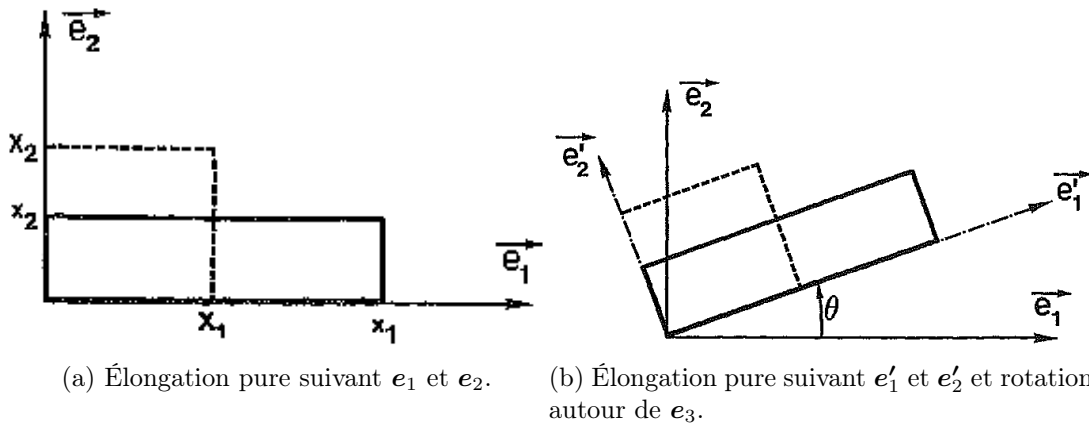


FIGURE 3.2.1 – Déformation plane d'une fibre décrite dans deux référentiels différents. Source : [PONTHOT].

1. Rappelez pourquoi $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ n'est pas objectif.

On considère la structure représentée sur la figure 3.2.1a. Celle-ci est soumise à une déformation plane. Les positions courantes x_i sont données en fonction des positions initiales X_i par

$$x_1 = h_1(t)X_1, \quad x_2 = h_2(t)X_2, \quad x_3 = X_3$$

où les facteurs h_i sont indépendants des coordonnées. La déformation est donc homogène et h_i représente le rapport entre la longueur courante et la longueur initiale d'une fibre matérielle alignée avec l'axe e_i .

2. Calculez le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$. En déduire le tenseur gradient des vitesses de déformation $\underline{\underline{\mathbf{l}}}$, puis les tenseurs des taux de déformation $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$ et des taux de rotation $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{anti}$.

Nous considérons maintenant la même structure, mais soumise à un mouvement de rotation autour de \mathbf{e}_3 , d'une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. L'analyse faite ci-dessus est celle d'un observateur lié au référentiel de la fibre.

3. Écrire maintenant dans le référentiel du laboratoire (voir Figure 3.2.1b) les positions courantes x_1 et x_2 en fonction de X_1 et X_2 . Vous vous aiderez de la matrice q , matrice de rotation des axes d'une fibre matérielle entre l'instant initial et l'instant actuel.
4. En déduire $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_L$, le gradient de la transformation dans le référentiel du laboratoire.
5. Montrez que $l_L = qlq^T + \omega$. Vous explicitez ω en fonction de $\dot{\theta}$.
6. En déduire la forme de $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_L^{sym}$ et $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_L^{anti}$.

Avec la convention choisie pour q , on a $\sigma = q^T \sigma_L q$, et $\sigma_L = q \sigma q^T$.

7. Montrez que : $\dot{\sigma}_L = q \dot{\sigma} q^T + \omega \sigma_L - \sigma_L \omega$

Supposons maintenant que la structure soit précontrainte ($\underline{\underline{\sigma}} \neq 0$ à $t = 0$) et tourne sans se déformer ($h_1 = h_2 = 1$ et $\dot{\theta} \neq 0$). Cette précontrainte peut être induite par une force appliquée sur la barre et qui tourne avec celle-ci. De manière évidente on a :

$$\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} = \underline{\underline{\mathbf{d}}}_L^{sym} = 0$$

La loi hypoélastique donne

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = f(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} = 0, \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}}_L = f(\underline{\underline{\sigma}}_L) \underline{\underline{\mathbf{d}}}_L^{sym} = 0$$

8. Montrez que ceci entre en contradiction avec l'expression trouvée à la question précédente.

Conclusions de l'exercice : le terme parasite $\underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_L - \underline{\underline{\sigma}}_L \cdot \underline{\underline{\omega}}$ représente un accroissement fictif et donc indésirable de contraintes dû à la rotation relative des deux référentiels. Il est donc impératif, dans la loi hypoélastique, de n'utiliser que des grandeurs objectives. Nous avons utilisé le tenseur des vitesses de déformation $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$ au lieu du tenseur du gradient des vitesses $\underline{\underline{\mathbf{l}}}$. Nous devons également substituer à la dérivée temporelle $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ une dérivée temporelle objective notée $\underline{\underline{\nabla \sigma}}$. Les lois hypoélastiques sont donc reformulées en

$$\underline{\underline{\nabla \sigma}} = f(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$$

Soulignons encore une fois que dans le cadre de petits déplacements, les rotations sont négligeables, donc $q \equiv Id$ et $\dot{q} = 0$. Dans ce cas, $\underline{\underline{\omega}} = 0$ et l'inconsistance est levée. Dans le cas général, il faut définir une dérivée objective. Un moyen simple est de poser :

$$\underline{\underline{\nabla \sigma}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}$$

où $\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$ est le taux de rotation, où $\underline{\underline{R}}$ est la rotation issue de la décomposition $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$.

Cette dérivée est dite **dérivée de Jaumann**, car introduite par Jaumann en 1903. On peut montrer qu'elle est objective. Il est important de noter que ce n'est pas la seule dérivée temporelle de tenseur objective qui existe. L'addition à cette dérivée de produits de tenseurs objectifs ($\underline{\underline{d}}^{sym}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$) fournit une dérivée objective.

3.3 Les principes de la théorie du comportement mécanique des matériaux

3.3.1 Déterminisme et fonctionnelle mémoire

On cherche à déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ en un point matériel $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ d'un domaine Ω dans sa configuration courante à l'instant t . Le principe du déterminisme dit que la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est déterminée par l'histoire présente et passée du corps matériel, i.e., l'histoire de sa déformation entre l'instant d'origine $s = 0$ et l'instant actuel $s = t$. Nous avons vu que l'expression de la loi de comportement devait, pour respecter le principe d'objectivité, ne faire intervenir que des grandeurs objectives, ce qui exclut une dépendance directe à \mathbf{f} , t ou encore \mathbf{v} . On suppose alors l'existence d'une **fonctionnelle mémoire** \mathcal{F} telle que :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \underset{0 \leq s \leq t, n > 0}{\mathcal{F}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, s), \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^2}(\mathbf{X}, s), \dots, \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^n}(\mathbf{X}, s) \right) \quad (3.3.1)$$

avec $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$. Remarquons que cette expression réduit la dépendance spatiale de la contrainte à un voisinage arbitrairement petit autour du point matériel \mathbf{X} étudié.

Dans la pratique, on vérifie en général qu'il est suffisant de se limiter au cas $n = 1$. On parle alors de **théorie du premier gradient** et le milieu continu ainsi modélisé est qualifié de **matériellement simple**. On rappelle que l'on a déjà introduit le premier gradient de \mathbf{f} , noté $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}}$. D'où :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \underset{0 \leq s \leq t}{\mathcal{F}} (\underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, s))} \quad (3.3.2)$$

L'objectivité du tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{q}}^T$, se traduit par la condition suivante sur la fonctionnelle mémoire :

$$\underset{0 \leq s \leq t}{\mathcal{F}^*} \left(\underline{\underline{q}}(s) \cdot \underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, s) \right) = \underline{\underline{q}}(t) \cdot \underset{0 \leq s \leq t}{\mathcal{F}} (\underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, s)) \cdot \underline{\underline{q}}^T(t)$$

pour tout tenseur $\underline{\underline{q}}$ tel que $\underline{\underline{q}}^{-1} = \underline{\underline{q}}^T$.

Classiquement, le principe d'invariance de forme est utilisé, stipulant que la forme de la loi de comportement est invariante par changement de référentiel : $\mathcal{F}^*(\cdot) = \mathcal{F}(\cdot)$. Ceci entraîne

$$\boxed{\underset{0 \leq s \leq t}{\mathcal{F}} \left(\underline{\underline{q}}(s) \cdot \underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, s) \right) = \underline{\underline{q}}(t) \cdot \underset{0 \leq s \leq t}{\mathcal{F}} (\underline{\underline{F}}(\mathbf{X}, s)) \cdot \underline{\underline{q}}^T(t)} \quad (3.3.3)$$

Remarquons que le principe d'invariance de forme implique en fait que \mathcal{F} ne doit dépendre directement que de grandeurs objectives. Par exemple, si nous considérons un scalaire a non objectif, alors $a^* = \alpha + a$ avec $\alpha \neq 0$ un réel. D'où, nous devrions avoir :

$$\mathcal{F}_{0 \leq s \leq t}(\underline{\mathbf{q}}(s) \cdot \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, s), \alpha + a) = \underline{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{F}_{0 \leq s \leq t}(\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, s), a) \cdot \underline{\mathbf{q}}^T$$

En dérivant l'expression ci-dessus par rapport à α , nous en déduisons que $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = 0$.

Enfin, notons qu'en plus de la condition (3.3.3), l'expression d'une loi de comportement doit également respecter les symétries matérielles du milieu considéré. Ceci se traduit par l'invariance de \mathcal{F} sous certaines transformations dépendant du matériau étudié.

3.3.2 Matériaux élastiques

Un matériau élastique est un matériau sans mémoire. Ainsi, sa loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)) \quad (3.3.4)$$

Le principe d'objectivité donne donc :

$$\mathcal{F}(\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{F}}) = \underline{\mathbf{q}} \cdot \mathcal{F}(\underline{\mathbf{F}}) \cdot \underline{\mathbf{q}}^T$$

Ceci implique, puisque $\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{q}}^T = \underline{\mathbf{q}}^T \cdot \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{I}}$,

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{F}}) = \underline{\mathbf{q}}^T \cdot \mathcal{F}(\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{F}}) \cdot \underline{\mathbf{q}}$$

Choisissons $\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{R}}^T$, où $\underline{\mathbf{R}}$ est la rotation venant de la décomposition polaire de $\underline{\mathbf{F}}$: $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}}$. Ainsi,

$$\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}$$

D'où

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\mathbf{q}}^T \cdot \mathcal{F}(\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{F}}) \cdot \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \mathcal{F}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{R}}^T$$

Reprenons l'expression du tenseur de Piola Kirchhoff (2.3.5) en fonction de celui de Cauchy :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{S}}} &= J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} \\ &= J \underline{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \mathcal{F}(\underline{\mathbf{U}}) \cdot \underline{\mathbf{U}}^{-1}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\underline{\mathbf{F}}^{-1} = \underline{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{-1}$, et $\underline{\mathbf{F}}^{-T} = \underline{\mathbf{R}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{U}}^{-T} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}}^{-1}$ puisque $\underline{\mathbf{U}}$ est symétrique et que $\underline{\mathbf{R}}^T = \underline{\mathbf{R}}^{-1}$.

De plus, le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\mathbf{E}}$ permet d'écrire :

$$2\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} = (\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}})^T \cdot (\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}}) = \underline{\mathbf{U}}^2$$

Ainsi, $\underline{\mathbf{U}} = (2\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{I}})^{1/2}$, et le tenseur $\underline{\mathbf{U}}$ peut être considéré comme fonction du tenseur des déformations $\underline{\mathbf{E}}$. Il en va de même pour $\underline{\mathbf{S}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{E}}) \quad (3.3.5)$$

Inversement, la loi de comportement $\underline{\underline{\mathbf{S}}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{E}})$ est objective car $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ et $\underline{\mathbf{E}}$ sont des tenseurs lagrangiens objectifs. La loi (3.3.5) définit donc une forme lagrangienne objective des lois de comportement des matériaux élastiques.

3.4 Isotropie et anisotropie

3.4.1 Symétries matériaux et matériaux isotropes

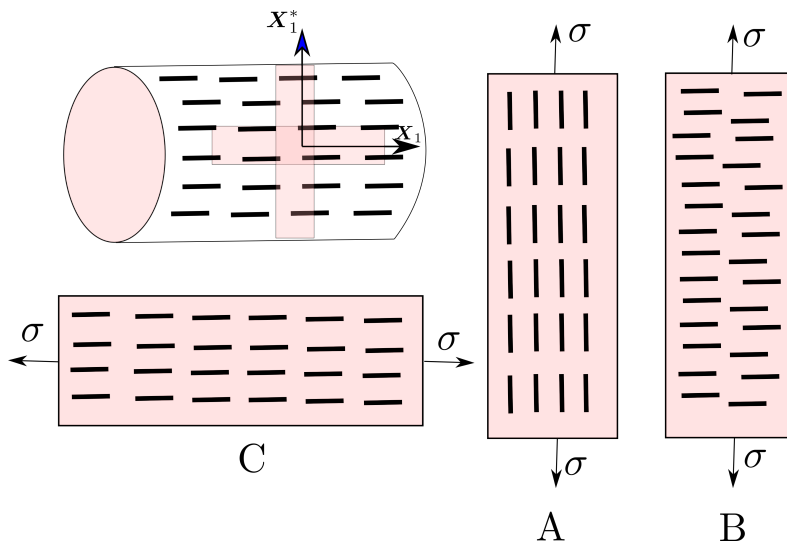
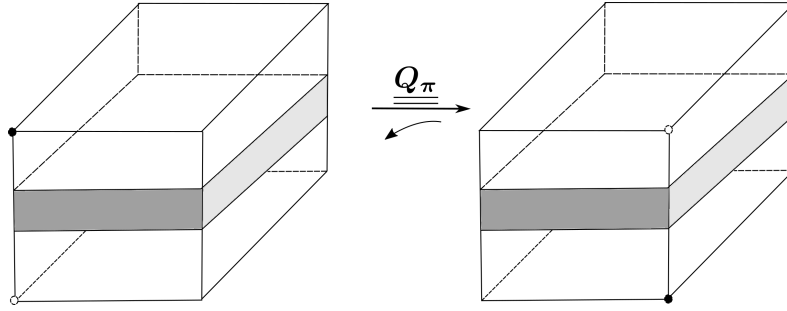
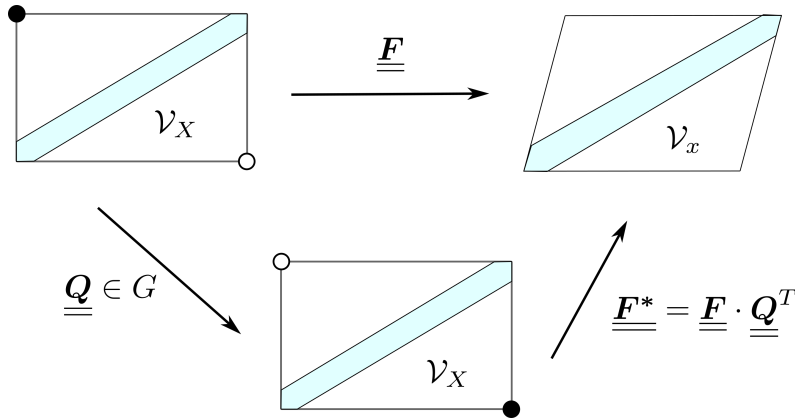


FIGURE 3.4.1 – Objectivité et symétrie matérielle.

Il faut tout d'abord se garder de confondre objectivité et isotropie. L'objectivité traduit le fait que les équations d'état ou de comportement expriment la même réalité physique, indépendamment de l'observateur qui fait les mesures. Ainsi, les tractions A et C de la figure 3.4.1 sont équivalentes : il s'agit toujours d'un essai de traction uniaxiale dans la direction matérielle X_1 . Par contre, les symétries matérielles correspondent à la comparaison des essais de traction A et B faits selon deux directions matérielles différentes, X_1 pour A et $X_1^* = X_2$ pour B .

Plus précisément, une **symétrie matérielle** est une rotation locale (*i.e.* au voisinage d'un point) de la configuration de référence (donc un élément de $SO(3)$, voir annexe A), sous laquelle la microstructure du matériau au voisinage du point considéré est invariante. En conséquence, la loi de comportement doit être invariante par cette rotation. Si cette invariance est vérifiée pour toute rotation de la configuration de référence, le matériau est dit **isotrope**. Autrement dit, sa microstructure ne dépend alors pas d'une direction donnée, ou encore toutes les directions matérielles sont équivalentes. L'ensemble des rotations symétries du matériau forment un sous-groupe du groupe spécial orthogonal $SO(3)$, appelé groupe de symétrie du matériau. La figure 3.4.2 montre un exemple de symétrie.

Notons G le groupe de symétrie du matériau étudié, et considérons la situation de la figure 3.4.3. Le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ fait correspondre à toute fibre matérielle au voisinage \mathcal{V}_X d'un point \mathbf{X} de la configuration de référence, la fibre "déformée" dans la configuration courante, au voisinage \mathcal{V}_x du point \mathbf{x} (avec $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$). Si on applique à \mathcal{V}_X une rotation $\underline{\underline{Q}}$ appartenant au groupe de symétrie, alors le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}^*$, fait correspondre à une fibre matérielle de cette nouvelle configuration de référence, la même fibre déformée dans la même configuration courante que précédemment.


 FIGURE 3.4.2 – Matériau ayant pour symétrie la rotation d'angle π , $\underline{\underline{Q}}_\pi$.

 FIGURE 3.4.3 – Rotation de la configuration de référence au voisinage d'un point X appartenant au groupe de symétrie G du matériau.

Les tenseurs $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{F}}^*$ sont alors liés par la relation :

$$\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T, \forall \underline{\underline{Q}} \in G$$

On en déduit que :

$$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{F}}^{*T} \cdot \underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T, \forall \underline{\underline{Q}} \in G$$

Nous verrons prochainement que la loi de comportement de certains matériaux (dits hyperélastiques) dérive d'un potentiel thermodynamique, *i.e* d'une fonction scalaire Ψ représentant l'énergie libre du matériau et dépendant, selon le contexte, de $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{C}}$ ou $\underline{\underline{E}}$. Il découle des considérations précédente que :

$$\Psi(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T) = \Psi(\underline{\underline{C}}), \forall \underline{\underline{Q}} \in G \subset SO(3) \quad (3.4.1)$$

Si le matériau est isotrope, cette relation doit être vérifiée pour toute rotation $\underline{\underline{Q}}$ ($G \equiv SO(3)$). La fonction scalaire Ψ est alors dite fonction **mathématiquement isotrope** du tenseur $\underline{\underline{C}}$.

Revenons à la figure 3.4.3 : puisque $\underline{\underline{Q}}$ est une symétrie du matériau, le tenseur des contraintes de Cauchy dans \mathcal{V}_x est indépendant de cette rotation : $\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}$. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ est relié à $\underline{\underline{\sigma}}$ par $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{j} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$. On en déduit que

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{C}}^*) \cdot \underline{\underline{F}}^{*T} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

ou encore

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T$$

Ainsi, nous en déduisons la propriété suivante du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T) = \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T, \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \in G \subset SO(3) \quad (3.4.2)$$

Si le matériau est isotrope, cette relation est vérifiée pour toute rotation $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ est alors qualifiée de fonction (tensorielle) isotrope (ou mathématiquement isotrope) du tenseur $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, ou encore de fonction invariante par rotation.

Remarquons que de manière équivalente, on peut écrire

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T), \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \in G$$

À titre d'exemple, la loi de comportement

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 2\mu \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

définit une fonction $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ tensorielle isotrope de $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$, et modélise donc un comportement isotrope. En effet :

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = 2\mu(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T) + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T)$$

puisque $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T$ sont reliés par similarité et ont ainsi les mêmes valeurs propres, donc la même trace¹.

3.4.2 Solides anisotropes

La loi de comportement d'un matériau anisotrope n'est plus invariante pour toute rotation, mais seulement pour certaines de ces rotations. Pour une telle rotation $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ on a :

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T) \quad (3.4.3)$$

Comme nous l'avons dit à la section précédente, L'ensemble des transformations $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ pour lesquelles la relation (3.4.3) est vérifiée, forme un sous-groupe du groupe orthogonal. Il s'agit du groupe d'isotropie du matériau, constitué des rotations qui préservent les symétries du matériau.

Le cas le plus simple d'anisotropie est celui d'un matériau possédant une direction privilégiée $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ comme montré sur la figure 3.4.4. Un tel matériau est dit isotrope transverse. Un exemple est un matériau composite renforcé par des fibres unidirectionnelles. Les transformations $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ vérifiant la relation (3.4.3) laissent invariante la direction $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$: $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \pm \underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Le groupe d'isotropie est donc constitué de l'ensemble des rotations autour de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ et des symétries par rapport aux droites portées par le vecteur $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ orthogonal à $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, qui sont un cas particulier de rotations axiales.

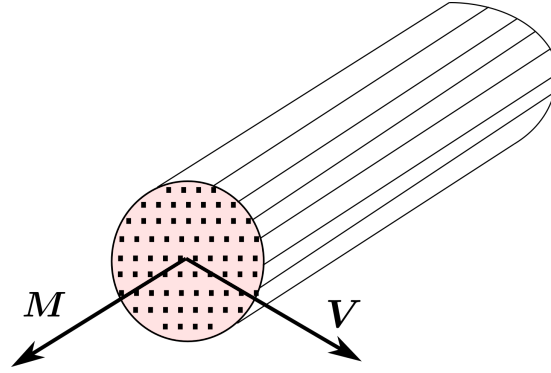


FIGURE 3.4.4 – Milieu isotrope transverse

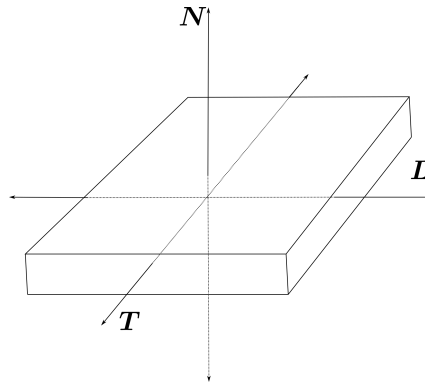


FIGURE 3.4.5 – Matériau orthotrope

Un second type fréquent d'anisotropie est l'orthotropie : le matériau possède trois directions privilégiées, \mathbf{L} , \mathbf{T} et \mathbf{N} (voir figure 3.4.5). Le groupe d'isotropie du matériau est formé des symétries par rapport à ces trois directions et de l'identité. Un exemple de matériau orthotrope peut être donné par des matériaux composites structuraux à base de renforts tissés, ou encore par une tôle laminée.

3.5 Fonctions isotropes de tenseurs

Dans cette section, nous nous intéressons aux fonctions scalaires, vectorielles ou tensorielles, ayant comme arguments des tenseurs, et dites isotropes, *i.e* invariantes par rotation. Selon le caractère scalaire, vectoriel ou tensoriel de la fonction, son isotropie est mathématiquement définie comme suit :

- Une fonction scalaire $f(\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{A}})$ est dite isotrope vis-à-vis du groupe des rotations $SO(3)$ si la relation

$$f(\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{A}}) = f(\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T)$$

est vérifiée pour toute rotation $\underline{\mathbf{Q}} \in SO(3)$.

1. Si \mathbf{V} est un vecteur propre de $\underline{\mathbf{E}}$ de valeur propre associée λ , $\underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{V} = \lambda \mathbf{V}$, alors $(\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T) \cdot (\underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{V}) = \lambda \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{V}$, signifiant que λ est également valeur propre de $\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T$ avec $\underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{V}$ pour vecteur propre associé.

- Une fonction vectorielle $\underline{g}(\underline{b}, \underline{A})$ est dite isotrope vis-à-vis du groupe des rotations $SO(3)$ si la relation

$$\underline{Q} \cdot \underline{g}(\underline{b}, \underline{A}) = \underline{g}(\underline{Q} \cdot \underline{b}, \underline{Q} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}^T)$$

est vérifiée pour toute rotation $\underline{Q} \in SO(3)$.

- Une fonction tensorielle $\underline{H}(\underline{b}, \underline{A})$ est dite isotrope vis-à-vis du groupe des rotations $SO(3)$ si la relation

$$\underline{Q} \cdot \underline{H}(\underline{b}, \underline{A}) \cdot \underline{Q}^T = \underline{H}(\underline{Q} \cdot \underline{b}, \underline{Q} \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}^T)$$

est vérifiée pour toute rotation $\underline{Q} \in SO(3)$.

3.5.1 Invariants d'un tenseur

Une fonction scalaire isotrope d'un seul tenseur \underline{A} est appelée un **invariant** de \underline{A} . La trace et le déterminant d'un tenseur sont des invariants de ce tenseur. Une classe importante d'invariants d'un tenseur \underline{A} sont les **invariants principaux**, notés en général $I_k(\underline{A})$, avec $k = 1, \dots, n$ (n étant la dimension de l'espace), et définis comme les coefficients du polynôme

$$\det(\underline{A} + \theta \underline{I}) = \theta^n + I_1(\underline{A})\theta^{n-1} + \dots + I_{n-1}(\underline{A})\theta + I_n(\underline{A})$$

avec en particulier

$$I_1(\underline{A}) = \text{tr } \underline{A} \quad \text{et} \quad I_n(\underline{A}) = \det(\underline{A}) \quad (3.5.1)$$

D'autres invariants importants sont les **moments du tenseur** \underline{A} , définis par

$$\bar{I}_k = \text{tr } \underline{A}^k, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.5.2)$$

On montre qu'il est possible d'exprimer les invariants principaux en fonction des moments et inversement.

3.5.2 Théorème de Cayley - Hamilton

Soient \underline{A} un tenseur de dimension n et d'invariants I_k , $k = 1, \dots, n$, et $P(\lambda)$ son polynôme caractéristique donné par

$$P(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} I_1 \lambda^{n-1} + \dots + I_n \quad (3.5.3)$$

Alors, le tenseur \underline{A} satisfait à son polynôme caractéristique dans le sens où,

$$(-1)^n \underline{A}^n + (-1)^{n-1} I_1 \underline{A}^{n-1} + \dots + I_n \underline{I} = 0 \quad (3.5.4)$$

De plus, les valeurs propres de \underline{A} sont les racines de (3.5.3).

3.5.3 Théorèmes de représentation

Dans la suite $\underline{\underline{A}}$ désigne un tenseur symétrique tel que $\det \underline{\underline{A}} > 0$. On peut alors démontrer les théorèmes suivants :

1. **Fonction scalaire d'une variable tensorielle** : toute fonction scalaire d'un seul tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}$ est isotrope si et seulement si elle peut s'exprimer de manière unique en fonction des n invariants principaux (ou alternativement des moments) de $\underline{\underline{A}}$:

$$f(\underline{\underline{A}}) = \tilde{f}(I_1, \dots, I_n) = \bar{f}(\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n)$$

2. **Fonction tensorielle d'une variable tensorielle** : toute fonction tensorielle symétrique d'un seul tenseur symétrique est isotrope si et seulement si elle peut s'écrire

$$\underline{\underline{H}}(\underline{\underline{A}}) = \phi_0 \underline{\underline{I}} + \phi_1 \underline{\underline{A}} + \phi_2 \underline{\underline{A}}^2 + \dots + \phi_{n-1} \underline{\underline{A}}^{n-1}$$

où les ϕ_i sont des fonctions scalaires des invariants de $\underline{\underline{A}}$: $\phi_i \equiv \phi_i(I_1, \dots, I_n)$.

3. **Fonction vectorielle d'un tenseur et d'un vecteur** : toute fonction vectorielle $\underline{\underline{g}}(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{A}})$ d'un vecteur $\underline{\underline{b}}$ et d'un tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}$, est isotrope si et seulement si elle peut s'exprimer de manière unique sous la forme

$$\underline{\underline{g}}(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{A}}) = (\phi_0 \underline{\underline{I}} + \phi_1 \underline{\underline{A}} + \dots + \phi_{n-1} \underline{\underline{A}}^{n-1}) \underline{\underline{b}}$$

où les ϕ_i sont des fonctions scalaires, non seulement des invariants de $\underline{\underline{A}}$, mais aussi de $\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{b}} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{b}})$, ..., $\underline{\underline{b}} \cdot (\underline{\underline{A}}^{n-1} \cdot \underline{\underline{b}})$.

Ces théorèmes peuvent se généraliser (pour $n \leq 3$) à des fonctions de plusieurs tenseurs. Ainsi, pour qu'une fonction scalaire dépendant de deux tenseurs symétriques soit isotrope, il faut et il suffit qu'elle s'écrive de manière unique en fonction des invariants de ces deux tenseurs, mais aussi des invariants de leurs produits :

$$f(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) = f(\text{tr } \underline{\underline{A}}, \dots, \text{tr } \underline{\underline{B}}, \dots, \text{tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}), \text{tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^2), \text{tr}(\underline{\underline{A}}^2 \cdot \underline{\underline{B}}), \text{tr}(\underline{\underline{A}}^2 \cdot \underline{\underline{B}}^2))$$

3.5.4 Cas de \mathbb{R}^3

Toute matrice A , carrée symétrique réelle de dimension 3, possède trois valeurs propres réelles, λ_1 , λ_2 et λ_3 , racines du polynôme caractéristique

$$P(\theta) = \det(A - \theta I) = -\theta^3 + I_1 \theta^2 - I_2 \theta + I_3$$

Les invariants de A s'écrivent en fonction de ses valeurs propres :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } A = A : I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \det A (\text{tr } A^{-1}) = \frac{1}{2} ((\text{tr } A)^2 - \text{tr}(A^2)) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \\ I_3 &= \det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

On peut également calculer la dérivée des invariants par rapport à A . On obtient ainsi :

$$\frac{dI_1}{dA} = I \tag{3.5.6}$$

$$\frac{dI_2}{dA} = 2I_1I \quad (3.5.7)$$

$$\frac{dI_3}{dA} = I_3A^{-1} \quad (3.5.8)$$

Le théorème de Cayley - Hamilton s'écrit

$$A^3 - I_1A^2 + I_2A - I_3I = 0$$

et permet de calculer cette dernière relation.

Reprenons l'exemple le plus simple ci-dessus, dI_1/dA . La manière pragmatique de calculer cette dérivée est de l'écrire en notation indicielle :

$$\left(\frac{dI_1}{dA}\right)_{ij} = \frac{d \operatorname{tr} A}{dA_{ij}} = \frac{d}{dA_{ij}}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) = \delta_{ij}$$

De manière plus mathématique, la dérivée de I_1 par rapport à A s'exprime comme :

$$\frac{dI_1}{dA}(A; M) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_1(A + hM) - I_1(A)}{h} = \operatorname{tr}(M) = I : M$$

De ce point de vue, dI_1/dA est une forme linéaire, s'appliquant sur une matrice M (ici quelconque) pour donner un scalaire. D'où $\frac{dI_1}{dA} \equiv I$, l'opérateur entre deux matrices (ou tenseurs) qui donne un scalaire étant la double contraction “:”.

3.5.5 Matériau élastique isotrope

Nous avons vu que la loi de comportement d'un matériau élastique s'écrit $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{E}})$. Lorsque ce matériau est de plus supposé isotrope, on a la relation (3.4.2)

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T)$$

valable pour toute rotation $\underline{\underline{Q}}$. Il s'en suit que $\underline{\underline{S}}$ est une fonction isotrope de $\underline{\underline{E}}$. D'après le théorème de représentation énoncé précédemment, $\underline{\underline{S}}$ s'écrit

$$\underline{\underline{S}} = \alpha_0^E \underline{\underline{I}} + \alpha_1^E \underline{\underline{E}} + \alpha_2^E \underline{\underline{E}}^2 \quad (3.5.9)$$

ou alternativement,

$$\underline{\underline{S}} = \alpha_0^C \underline{\underline{I}} + \alpha_1^C \underline{\underline{C}} + \alpha_2^C \underline{\underline{C}}^2 \quad (3.5.10)$$

où les scalaires α_i^E et α_i^C sont fonctions de trois invariants de $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{C}}$ respectivement.

Le tenseur de Cauchy peut s'exprimer en fonction de celui de Kirchhoff : $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$. En multipliant (3.5.10) par $\underline{\underline{F}}$ à gauche et $\underline{\underline{F}}^T$ à droite, puis en divisant le tout par J , on obtient une version eulérienne de la loi de comportement des matériaux élastiques isotropes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha_0 \underline{\underline{b}} + \alpha_1 \underline{\underline{b}}^2 + \alpha_2 \underline{\underline{b}}^3 \quad (3.5.11)$$

où $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ est le tenseur de Cauchy-Green gauche. Dans le membre de droite, la division par J est prise en compte dans les fonctions α_i , lesquelles dépendent des invariants

principaux (par exemple) de $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$, I_{b_1} , I_{b_2} et I_{b_3} . En effet, les valeurs propres de $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ sont identiques et ces deux tenseurs possèdent donc les mêmes invariants².

De plus, d'après théorème de Cayley-Hamilton (3.5.4), $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$ satisfait à son polynôme caractéristique : $-\underline{\underline{\mathbf{b}}}^3 + I_{b_1}\underline{\underline{\mathbf{b}}}^2 - I_{b_2}\underline{\underline{\mathbf{b}}} + I_{b_3}\underline{\underline{\mathbf{I}}} = 0$. La loi de comportement (3.5.11) se réécrit alors

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \tilde{\alpha}_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \tilde{\alpha}_1 \underline{\underline{\mathbf{b}}} + \tilde{\alpha}_2 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^2 \quad (3.5.12)$$

où les $\tilde{\alpha}_i$ sont fonctions des invariants I_{b_1} , I_{b_2} et I_{b_3} .

Pour un matériau incompressible, $\det \underline{\underline{\mathbf{F}}} = 1$, donc $I_{b_3} = \det \underline{\underline{\mathbf{b}}} = 1$. En prenant en compte cette contrainte, la relation (3.5.12) devient :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \tilde{\alpha}_1 \underline{\underline{\mathbf{b}}} + \tilde{\alpha}_2 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^2$$

où $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ sont fonctions de I_{b_1} et I_{b_2} , tandis que p est une pression hydrostatique à déterminer par les conditions aux limites. Un exemple d'une telle loi est la loi de Mooney Rivlin, décrivant le comportement d'un caoutchouc :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + G \left(\left(\frac{1}{2} + \beta \right) \underline{\underline{\mathbf{b}}} - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{-1} \right)$$

avec G et β deux paramètres matériaux. Le théorème de Cayley-Hamilton a encore été utilisé pour exprimer $\underline{\underline{\mathbf{b}}}^2$ en fonction de $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{b}}}^{-1}$.

2. Soient \mathbf{V} un vecteur propre de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ et λ la valeur propre associée :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{V} = \lambda \mathbf{V} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V} = \lambda \mathbf{V}$$

En multipliant à gauche cette expression par $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$:

$$(\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T) \cdot (\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V}) = \lambda (\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{b}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V}) = \lambda (\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V})$$

Ainsi, λ est également valeur propre de $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$ associée au vecteur propre $\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{V}$. \square

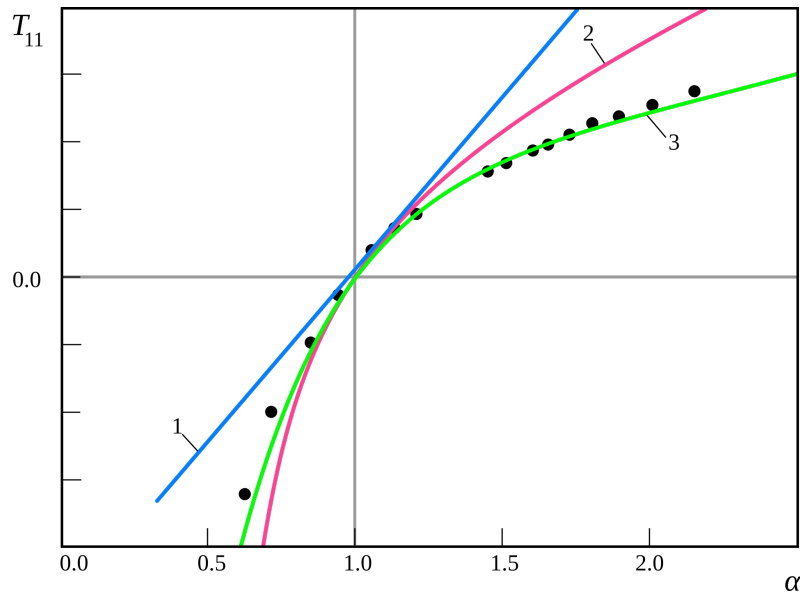


FIGURE 3.5.1 – Courbes contrainte / déformation en traction uniaxiale : en bleu élasticité linéaire (loi de Hooke), en rouge : solide néo-hookéen, en vert : loi de Mooney-Rivlin). Source : Wikipédia.

3.6 Thermodynamique des milieux continus

La température intervient à divers titres dans le comportement thermomécanique des milieux continus : introduction de contraintes d'origine thermique, dépendance des paramètres matériaux à la température.

Le bilan d'énergie introduit 5 nouvelles variables : la température θ (Θ sur la configuration lagrangienne), le flux de chaleur \mathbf{q} et l'énergie interne e . Nous devons donc établir des lois de comportement thermiques afin de clore le système. Ces lois dépendent du matériau. Au final, le problème thermomécanique est constitué de 5 équations de conservation, 10 équations de comportement, et 15 inconnues à trouver.

Suivant la démarche précédente, on pose :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{0 \leq s \leq t}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, s), \Theta(\mathbf{X}, s), \mathbf{G}(\mathbf{X}, s))$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}_{0 \leq s \leq t}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, s), \Theta(\mathbf{X}, s), \mathbf{G}(\mathbf{X}, s))$$

$$e(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H}_{0 \leq s \leq t}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, s), \Theta(\mathbf{X}, s), \mathbf{G}(\mathbf{X}, s))$$

avec

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t)$$

le gradient de la température.

3.6.1 Second principe de la thermodynamique des milieux continus

L'entropie \mathcal{S} ($[\mathcal{S}] = \text{J/K}$) d'un ensemble matériel ω est définie à partir d'une densité massique d'entropie $s(\mathbf{x}, t)$

$$\mathcal{S}(\omega_t) = \int_{\omega_t} \rho s \, dv$$

La variation d'entropie dans ω est due à des apports surfaciques et volumiques

$$\Phi(\omega_t) = - \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\omega_t} \rho r_s \, dv$$

où $\boldsymbol{\phi}$ est le vecteur flux d'entropie, et r_s une densité de production locale d'entropie. La production interne d'entropie est alors la différence

$$\Sigma(\omega_t) = \dot{\mathcal{S}}(\omega_t) - \Phi(\omega_t)$$

Le **second principe de la thermodynamique** stipule que cette production est positive ou nulle :

$$\boxed{\Sigma(\omega_t) \geq 0}$$

soit, de manière explicite :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho s \, dv + \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\omega_t} \rho r_s \, dv \geq 0$$

Par application du théorème de la divergence pour convertir l'intégrale surfacique en intégrale volumique, et par utilisation de l'équation de conservation de la masse (2.2.4) pour permuter les opérateurs de dérivation en temps et d'intégration en espace, on aboutit à la forme locale de l'inégalité d'entropie :

$$\boxed{\rho \dot{s} + \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} - \rho r_s \geq 0} \quad (3.6.1)$$

Le flux d'entropie est généralement relié au flux de chaleur et à la température par :

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\mathbf{q}}{\theta},$$

tandis que la production locale d'entropie vaut

$$r_s = \frac{r}{\theta}$$

où r est la production de chaleur. Ce qui mène à :

$$\rho \dot{s} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0 \quad (3.6.2)$$

On introduit à présent l'énergie libre Ψ de densité massique ψ . On définit

$$\boxed{\psi = e - \theta s}$$

et

$$\Psi(\omega_t) = \int_{\omega_t} \rho \psi dv$$

On peut alors exprimer la dérivée temporelle de l'entropie comme $\dot{s} = \frac{1}{\theta}(\dot{e} - \dot{\theta}s - \dot{\psi})$.

On calcule ensuite la dissipation volumique d ($[d] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$\begin{aligned} d &= \rho \theta \dot{s} + \theta \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho r \\ &= \rho(\dot{e} - \dot{\theta}s - \dot{\psi}) + \theta \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho r \\ &= \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho(\dot{\theta}s + \dot{\psi}) + \theta \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le bilan d'énergie (2.6.1) $\rho \dot{e} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r$. En remarquant que

$$\theta \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} = \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta},$$

la dissipation se réduit finalement à :

$$d = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} - \rho(\dot{\theta}s + \dot{\psi}) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta}$$

On obtient ainsi **l'inégalité de Clausius-Duhem** qui constitue une condition d'admissibilité thermodynamique des lois de comportement thermomécanique :

$$\boxed{d = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} - \rho(\dot{\theta}s + \dot{\psi}) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta} \geq 0} \quad (3.6.3)$$

On distingue deux contributions à la dissipation :

- La dissipation intrinsèque $d_{int} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym} - \rho(\dot{\theta}s + \dot{\psi})$
- La dissipation thermique $d_{th} = -\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta}$

De sorte que

$$d = d_{int} + d_{th} \geq 0$$

Comme généralement les lois donnant la contrainte, l'énergie libre et l'entropie ne dépendent pas explicitement de la température, la condition d'admissibilité devient :

$$d_{int} \geq 0 \quad \text{et} \quad d_{th} \geq 0$$

3.6.2 Loi de Fourier

Remarquons que l'inégalité $d_{th} \geq 0$ signifie que le flux de chaleur est opposé au gradient de température. La chaleur va donc toujours du chaud vers le froid. Si l'on pose la loi de Fourier $\mathbf{q} = -k \nabla \theta$, alors on doit avoir la conductivité thermique $k \geq 0$.

Chapitre 4

Hyperélasticité

4.1 Définition

Un milieu (matériellement simple) est dit **élastique** si l'état de contrainte actuel est entièrement déterminé par le gradient de la transformation à l'instant actuel et non par son histoire passée :

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\mathcal{D}_0}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t)) \quad (4.1.1)$$

En particulier, le comportement ne dépend pas de la vitesse de sollicitation $\underline{\underline{\mathbf{d}}}^{sym}$. La forme de la loi dépend *a priori* de la configuration de référence choisie \mathcal{D}_0 .

Considérons un jeu de variables pour représenter les matériaux (solides) élastiques : $\{\underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{X}, t), \Theta(\mathbf{X}, t), \mathbf{G}(\mathbf{X}, t)\}$ où $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}})$ est la mesure de déformation de Green-Lagrange, et $\mathbf{G} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{X}}$ est le gradient de température par rapport à la configuration de référence. L'énergie libre est aussi fonction de ces variables :

$$\psi_0(\underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{X}, t), \Theta(\mathbf{X}, t), \mathbf{G}(\mathbf{X}, t))$$

On exprime alors le second principe de la thermodynamique sous forme locale en formulation lagrangienne. Pour un domaine matériel ω_t , on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho s(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial \omega_t} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} da - \int_{\omega_t} \rho \frac{r}{\theta} dv \geq 0$$

En utilisant le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, on se ramène à des intégrales définies sur le domaine de référence :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_0} \rho_0 s_0(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial \omega_0} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \cdot \mathbf{N} dA - \int_{\omega_0} \rho_0 \frac{r_0}{\Theta} dV \geq 0$$

avec $s_0(\mathbf{X}, t) = s(\mathbf{x}, t)$ et $r_0(\mathbf{X}, t) = r(\mathbf{x}, t)$, $\omega_0 = \mathbf{f}^{-1}(\omega_t)$, $dv = JdV$ et $\rho J = \rho_0$. Le flux de chaleur \mathbf{Q} est donné par :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dA \Rightarrow \mathbf{Q} = J \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \mathbf{q}$$

On en déduit, après utilisation du théorème de la divergence sur le terme surfacique, l'inégalité locale suivante :

$$\rho_0 \dot{s}_0 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} - \rho_0 \frac{r_0}{\Theta} \geq 0$$

En suivant la même démarche qu'à la fin du chapitre précédent, on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem en description lagrangienne :

$$\boxed{D = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} - \rho_0(\dot{\Theta}s_0 + \dot{\psi}_0) - \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{G}}{\Theta} \geq 0} \quad (4.1.2)$$

La dérivée totale en temps de l'énergie libre se décompose en :

$$\dot{\psi}_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{G}}$$

En substituant ce développement dans (4.1.2) on trouve :

$$D = (\underline{\underline{\mathbf{S}}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}}) : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} - \rho_0 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \Theta} + s_0 \right) \dot{\Theta} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{G}} - \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{G}}{\Theta} \geq 0$$

Ceci étant valable pour toute évolution $\{\underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}, \dot{\mathbf{G}}, \dot{\Theta}\}$, les quantités qui multiplient ces dérivées doivent s'annuler afin d'avoir une dissipation D non négative. On en déduit alors les relations constitutives suivantes :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}}} ; \quad \boxed{s_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial \Theta}} ; \quad \boxed{\frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{G}} = 0} \quad (4.1.3)$$

Ces relations sont des lois de comportement dites hyperélastiques pour les contraintes et l'entropie. Elles montrent que l'énergie libre est un potentiel d'élasticité dont découlent les relations contrainte - déformation et entropie - température. L'énergie libre ne peut dépendre du gradient de température \mathbf{G} .

4.2 Réversibilité des lois hyperélastiques

Une loi hyperélastique est une loi d'élasticité au sens (4.1.1), particulière puisqu'il existe un potentiel élastique tel que nous l'avons défini. Cependant, toutes les lois ne sont pas hyperélastiques : il existe des lois élastiques ne dérivant pas d'un potentiel (voir exercice 4.3.4). La caractéristique principale d'une loi hyperélastique est qu'avec une telle loi, le travail élastique fourni ne dépend pas du chemin de déformation suivi. Ceci n'est pas le cas en toute généralité pour les lois élastiques (4.1.1).

Considérons un chemin de déformation imposé allant d'un état initial de déformation $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_A$ à un état final $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_B$ à température constante. On calcule la densité de travail mécanique fournie en un point matériel lors de cette transformation en intégrant le long du chemin la densité de puissance :

$$\begin{aligned} W(\underline{\underline{\mathbf{E}}}_A \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{E}}}_B) &= \int_{t_A}^{t_B} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} dt = \int_{t_A}^{t_B} \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}} dt \\ &= \rho_0 \psi_0(\underline{\underline{\mathbf{E}}}_B, \Theta) - \rho_0 \psi_0(\underline{\underline{\mathbf{E}}}_A, \Theta) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Ainsi, le travail W ne dépend que des valeurs initiales et finales des variables d'état et non du chemin suivi entre ces deux extrémités. Si ce chemin est un cycle, *i.e.* si $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_A = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_B$, alors le travail fourni sur l'ensemble du cycle est nul : l'énergie élastique stockée au cours d'une partie du trajet, est intégralement restituée durant le trajet retour, même si celui-ci s'effectue par un autre chemin. C'est le caractère réversible du comportement hyperélastique.

4.3 Hyperélasticité isotrope

4.3.1 Description matérielle (\mathbf{S} , \mathbf{C})

Nous définissons W le potentiel hyperélastique, dépendant (sans changement de notation) des tenseurs $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ ou $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$:

$$\rho_0 \psi_0 = W(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = W(\underline{\underline{\mathbf{C}}})$$

Si le matériau est de plus isotrope, ce potentiel scalaire doit être invariant par rotation de la configuration de référence, *i.e.* vérifier la relation (3.4.1)

$$W(\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T) = W(\underline{\underline{\mathbf{E}}})$$

pour toute rotation $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$. W est donc une fonction scalaire isotrope de son argument tensoriel, $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ ou $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$. Le théorème de représentation d'une fonction scalaire isotrope dépendant d'une variable tensorielle, vu à la section 3.5.3, permet d'écrire W comme une fonction de trois invariants de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$:

$$W(\underline{\underline{\mathbf{C}}}) = W(I_1, I_2, I_3)$$

Exercice 4.3.1 Montrez que :

$$\frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}}$$

On a donc, pour un tel matériau :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} \right)$$

où les invariants de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ choisis sont les invariants principaux

$$I_1 = \text{tr } \underline{\underline{\mathbf{C}}},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } \underline{\underline{\mathbf{C}}})^2 - \text{tr } \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2)$$

et

$$I_3 = \det \underline{\underline{\mathbf{C}}} = J^2$$

La relation contraintes-déformations est donc obtenue en calculant les dérivées des invariants par rapport à $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$.

- **Calcul de $\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}}$:**

La dérivée d'un scalaire par rapport à un tenseur est un tenseur. Dans le cas présent, l'entrée (i, j) de ce tenseur est donnée par :

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \delta_{ij}$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = \frac{d \text{tr } \underline{\underline{\mathbf{C}}}}{d \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}} \quad (4.3.1)$$

- Calcul de $\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}}$:

Exercice 4.3.2 Montrez que

$$\frac{d \operatorname{tr}^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}}{d \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = 2I_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

Ensuite,

$$\frac{\partial \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}^2}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \sum_{k,l} C_{kl} C_{lk} = 2C_{ji} = 2C_{ij}$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = I_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}} \quad (4.3.2)$$

- Calcul de $\frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}}$:

Le théorème de Cayley-Hamilton (3.5.4) s'écrit

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^3 - I_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 + I_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}} - I_3 \underline{\underline{\mathbf{I}}} = 0$$

D'où l'on déduit par contraction à gauche et à droite avec $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$

$$3I_3 = \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^3 - I_1 \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 + I_2 \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} &= \frac{\partial \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^3}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} - \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} - I_1 \frac{\partial \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} + (I_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}) \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}} + I_2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ &= 3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 - \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2I_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}} + (\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{C}}})^2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} I_1 + I_2 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ &= 3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}^3 - I_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^2 + I_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}) = 3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} I_3 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

En définitive,

$$\boxed{\frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = \frac{d \det \underline{\underline{\mathbf{C}}}}{d \underline{\underline{\mathbf{C}}}} = I_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1}} \quad (4.3.4)$$

Les relations que nous venons d'établir conduisent à :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = 2 \left((W_1 + I_1 W_2) \underline{\underline{\mathbf{I}}} - W_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}} + I_3 W_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \right) \quad (4.3.5)$$

où l'on a posé

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$$

4.3.2 Descriptions matérielles alternatives

Il est possible de choisir d'autres invariants de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$. Par exemple, en considérant

$$W = W(I_C, II_C, III_C),$$

avec

$$I_C = \text{tr} \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{I}} \quad (4.3.6)$$

$$II_C = \text{tr} \underline{\underline{C}}^2 / 2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}} \quad (4.3.7)$$

$$III_C = \text{tr} \underline{\underline{C}}^3 / 3 \quad (4.3.8)$$

on obtient

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} \underline{\underline{I}} + \frac{\partial W}{\partial II_C} \underline{\underline{C}} + \frac{\partial W}{\partial III_C} \underline{\underline{C}}^2 \right) \quad (4.3.9)$$

De plus, si l'on choisit maintenant W comme étant une fonction des invariants du tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$,

$$W = W(I_E, II_E, III_E),$$

alors

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial W}{\partial I_E} \underline{\underline{I}} + \frac{\partial W}{\partial II_E} \underline{\underline{E}} + \frac{\partial W}{\partial III_E} \underline{\underline{E}}^2 \quad (4.3.10)$$

En comparant cette expression à la loi de comportement générale d'un corps élastique isotrope établie au paragraphe 3.5.5,

$$\underline{\underline{S}} = \alpha_0 \underline{\underline{I}} + \alpha_1 \underline{\underline{E}} + \alpha_2 \underline{\underline{E}}^2$$

où les α_i sont fonctions des invariants de $\underline{\underline{E}}$, nous constatons qu'un solide élastique est hyperélastique si il existe un potentiel W tel que :

$$\alpha_0 = \frac{\partial W}{\partial I_E}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial W}{\partial II_E}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial W}{\partial III_E}$$

Un tel potentiel existe si les fonctions α_i vérifient les conditions :

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial III_E} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_E}, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial III_E} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial II_E}, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial I_E} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial III_E}$$

4.3.3 Matériau de type Saint Venant-Kirchhoff

La loi hyperélastique la plus simple est celle dite de Saint Venant - Kirchhoff, qui est une extension de la loi élastique linéaire, et n'est donc valable qu'en petites déformations. L'énergie libre d'un tel modèle hyperélastique s'écrit :

$$W(\underline{\underline{E}}) = \mu \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}} + \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \underline{\underline{E}})^2 = 2\mu II_E + \frac{\lambda}{2} I_E^2 \quad (4.3.11)$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé. On obtient ainsi :

$$\underline{\underline{S}} = 2\mu \underline{\underline{E}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \quad (4.3.12)$$

Exercice 4.3.3 Montrez ce résultant.

4.3.4 Description spatiale

La seule contrainte ayant une signification physique est la contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, définie dans la configuration courante (ou spatiale). Rappelons que l'on passe de $\underline{\underline{S}}$ à $\underline{\underline{\sigma}}$ par la formule

$$\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

Ainsi, via (4.3.9), et en utilisant le tenseur de Cauchy - Green gauche $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= 2J^{-1} \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \frac{\partial W}{\partial II_C} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \frac{\partial W}{\partial III_C} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^T \right) \\ &= 2J^{-1} \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} \underline{\underline{b}} + \frac{\partial W}{\partial II_C} \underline{\underline{b}}^2 + \frac{\partial W}{\partial III_C} \underline{\underline{b}}^3 \right) \end{aligned}$$

Cette expression fait toujours intervenir les dérivées partielles de W par rapport aux invariants du tenseur lagrangien $\underline{\underline{C}}$. Cependant, on a montré au chapitre précédent que $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{b}}$ ont les mêmes valeurs propres, et donc les mêmes invariants. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{2}{\sqrt{\det \underline{\underline{b}}}} \left(\frac{\partial w}{\partial I_b} \underline{\underline{I}} + \frac{\partial w}{\partial II_b} \underline{\underline{b}} + \frac{\partial w}{\partial III_b} \underline{\underline{b}}^2 \right) \cdot \underline{\underline{b}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\det \underline{\underline{b}}}} \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{b}} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Dans le cas isotrope, il est donc possible de définir un potentiel élastique $w(\underline{\underline{b}}, \theta) = \rho\psi(\underline{\underline{b}}, \theta) = \rho_0\psi_0(\underline{\underline{E}}, \Theta) = W(\underline{\underline{E}}, \Theta)$ dont dérive le tenseur des contraintes. Remarquons cependant qu'en toute généralité, il n'est pas possible de travailler dans la configuration courante avec un couple de variables contraintes de Cauchy - déformations, puisque aucune déformation n'est conjuguée avec $\underline{\underline{\sigma}}$. On ne peut pas, alors, exprimer directement un potentiel $w(\underline{\underline{b}})$.

Exercice 4.3.4 Exemple d'une loi élastique non hyperélastique. On considère la loi élastique isotrope suivante :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\alpha}{2} (\text{tr } \underline{\underline{E}}^2) \underline{\underline{I}}$$

1. Montrez que cette loi n'est pas hyperélastique.
2. On considère deux chemins de déformation paramétrés par le réel λ , $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$[\underline{\underline{E}}_1(\lambda)] = \text{diag}(\lambda, \lambda, 0) \quad \text{et} \quad [\underline{\underline{E}}_2(\lambda)] = \text{diag}(\lambda, \lambda^2, 0)$$

exprimés dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Ces deux chemins partent du même état de déformation nulle $\underline{\underline{E}}_A = \underline{\underline{E}}_1(\lambda = 0) = \underline{\underline{E}}_2(\lambda = 0) = \underline{\underline{0}}$, pour arriver au même état final $\underline{\underline{E}}_B = \underline{\underline{E}}_1(\lambda = 1) = \underline{\underline{E}}_2(\lambda = 1)$ représenté par $\text{diag}(1, 1, 0)$, mais en passant par des états transitoires différents.

Calculez le travail élastique W_1 effectué le long du chemin 1, et W_2 effectué le long du chemin 2. Conclure.

4.4 Hyperélasticité anisotrope

Nous envisageons ici uniquement le cas d'un solide isotrope transverse de la section 3.4.2. Le matériau possède une direction privilégiée donnée par le vecteur unitaire $\underline{\underline{M}}$. On postule alors que son potentiel élastique W est une fonction isotrope de $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{M}}$, avec $\underline{\underline{M}}$ un tenseur d'ordre 2 défini par $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}}$. Le théorème de représentation correspondant indique que W ne dépend que des invariants de $\underline{\underline{C}}$, de $\underline{\underline{M}}$ et de la combinaison des deux. Cependant, $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^2$, $\text{tr } \underline{\underline{M}} = 1$ et $\det \underline{\underline{M}} = 0$. En conséquence, on pose

$$W \equiv W(I_1, I_2, I_3, D_1, D_2)$$

avec I_1, I_2 et I_3 les trois invariants principaux de $\underline{\underline{C}}$ et

$$D_1 = \text{tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}) = \sum_{i,j} C_{ij} M_{ji} = \sum_{i,j} C_{ij} M_i M_j = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}$$

$$D_2 = \text{tr}(\underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{M}}) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{M}}$$

En reprenant le raisonnement de la section (4.3.1), nous arrivons à la loi de comportement suivante :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left((W_1 + I_1 W_2) \underline{\underline{I}} - W_2 \underline{\underline{C}} + I_3 W_3 \underline{\underline{C}}^{-1} + W_4 \underline{\underline{M}} + W_5 (\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}) \right) \quad (4.4.1)$$

avec

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } W_4 = \frac{\partial W}{\partial D_1}, W_5 = \frac{\partial W}{\partial D_2}$$

Si $\underline{\underline{M}}$ est une direction propre de $\underline{\underline{C}}$, alors $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{C}}$ ont les mêmes directions propres. Dans le cas contraire, les contraintes $\underline{\underline{S}}$ et les déformations $\underline{\underline{C}}$ n'ont pas les mêmes directions principales, témoignant d'une anisotropie du matériau.

4.5 Matériaux Néo-hookéens

Nous considérons ici une loi simple, celle des matériaux néo-hookéens compressibles. Le potentiel élastique est donné par :

$$W = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \log J + \frac{\lambda}{2}(\log J)^2 \quad (4.5.1)$$

où λ et μ sont des paramètres du matériau, $I_C = \text{tr } \underline{\underline{C}}$ et $J = \det \underline{\underline{F}}$. L'énergie stockée s'annule bien en l'absence de déformation, *i.e.* pour $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$. Dans l'expression de cette loi, un choix naturel d'invariants est donc I_1 et $I_3 = J^2$. D'où, l'expression (4.3.5) donne :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(W_1 \underline{\underline{I}} + J^2 W_3 \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \quad (4.5.2)$$

Le modèle néo-hookéen est simple et rend compte du comportement d'un élastomère pour des déformations allant jusqu'à 100%.

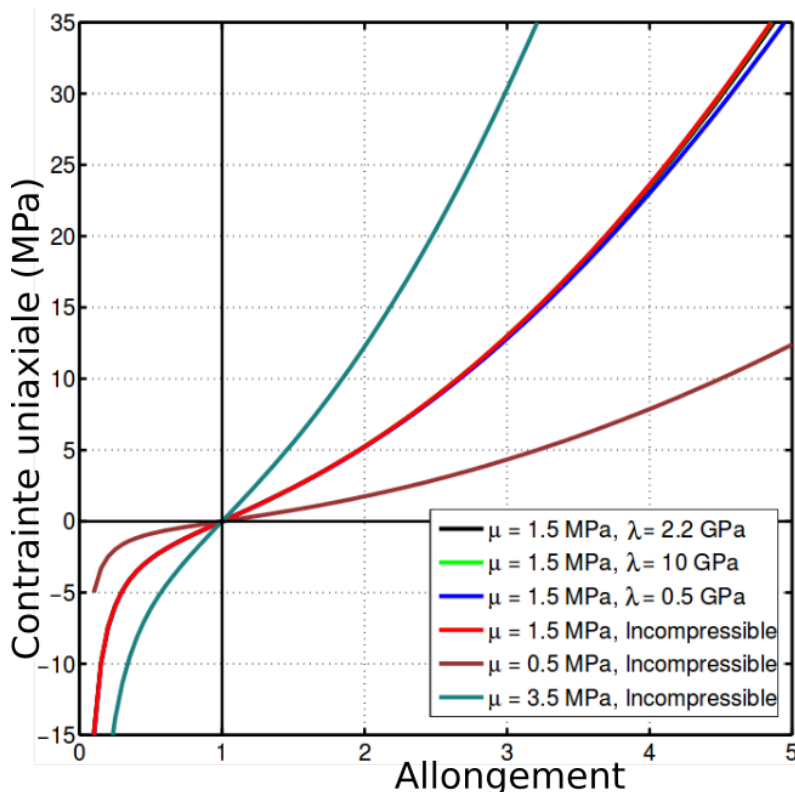


FIGURE 4.5.1 – Contrainte réelle σ_{11} lors d’essais de compression / traction uniaxiale. Source : Wikipédia. Voir aussi : L R G Treloar (1944). “Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation”. Trans. Faraday Soc. 40 : 59–70.

Exercice 4.5.1 Montrez que

$$\underline{\underline{S}} = \mu(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}^{-1}) + \lambda(\log J)\underline{\underline{C}}^{-1}$$

et que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu}{J}(\underline{\underline{b}} - \underline{\underline{I}}) + \frac{\lambda}{J}(\log J)\underline{\underline{I}}$$

Que deviennent $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ pour un matériau incompressible ?

Dans l’approximation des petites déformations, on définit le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$. On a alors $J \approx 1 + \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \approx 1$ ¹, $\log J \approx \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$, et $\underline{\underline{b}} \approx 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{I}}$ ². D’où, sous cette hypothèse :

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr} \varepsilon \underline{\underline{I}}$$

ce qui permet d’identifier les coefficients μ et λ comme étant les coefficients de Lamé en petites déformations.

1. $J = \det \underline{\underline{F}} = \det(\underline{\underline{I}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{X}}}) \approx \det(\underline{\underline{I}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{x}}})$ car configurations initiale et courante sont confondues. Par un développement à l’ordre 1, $J \approx \det \underline{\underline{I}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{x}}} : \underline{\underline{I}}^{-1}$ (voir (3.5.8)). Ainsi, puisque $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{x}}} : \underline{\underline{I}} = \text{tr} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{x}}} = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})$, $J \approx 1 + \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})$ en petites déformations.

2. De même, $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = (\underline{\underline{I}}_d + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{X}}}) \cdot (\underline{\underline{I}}_d + (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{X}}})^T) \approx \underline{\underline{I}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{x}}} + (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underline{\underline{x}}})^T = \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})$

Exercice 4.5.2 *Dilatation pure* - On considère une dilatation pure, caractérisée par $x_i = \Lambda X_i$. Montrez que le tenseur de Cauchy représente alors un état de contrainte hydrostatique (tenseur sphérique) avec une pression donnée par

$$p = -\frac{\mu}{J}(J^{2/3} - 1) - \frac{\lambda}{J} \log J$$

Exercice 4.5.3 *Cisaillement simple* - On considère la transformation (cisaillement simple) de la figure 4.5.2 pour un matériau néo-hookéen. Calculez le tenseur des contraintes de

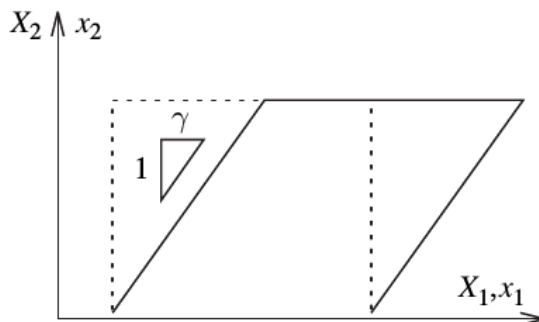


FIGURE 4.5.2 – Cisaillement simple

Cauchy. Montrez que la pression est non nulle même si la transformation est isochore ($J = 1$).

Exercice 4.5.4 *Traction biaxiale sur un élastomère*. On considère une plaque d'un élastomère, de 200 mm de côté dans le plan (X_1, X_2) et d'épaisseur 10 mm, comme indiqué sur la figure 4.5.3. Le matériau est supposé incompressible sous les sollicitations envisagées, et présente un module néo-Hooke de $\mu = 0,75 \text{ MPa}$. Quelles forces F_1 et F_2 doit-on appliquer dans les directions X_1 et X_2 respectivement pour étirer de manière homogène la plaque, jusqu'à atteindre 400 mm selon X_1 et 300 mm selon X_2 ? (Indication : quel tenseur des contraintes choisir ?).

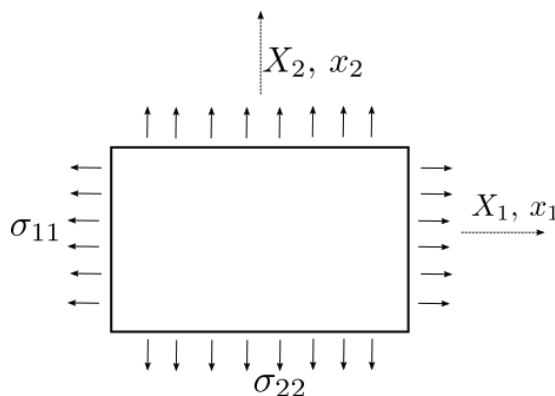


FIGURE 4.5.3 – Traction bi-axiale.

Annexe A

Rappels d'algèbre

A.1 Applications linéaires

Soit E un K -espace vectoriel (K est un corps, typiquement $E \equiv \mathbb{R}^3$ et $K \equiv \mathbb{R}$). L'application $l : E \rightarrow E$ est dite linéaire ssi :

- $l(\alpha \mathbf{v}) = \alpha l(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in E, \alpha \in K$
- $l(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = l(\mathbf{v}) + l(\mathbf{w}), \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E \times E$

Ces propriétés sont équivalentes à $l(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha l(\mathbf{v}) + \beta l(\mathbf{w}), \forall (\alpha, \beta) \in K \times K, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E \times E$.

On considère une base de E (de dimension n finie), $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, de sorte que tout élément \mathbf{v} de E peut s'écrire :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i^b \mathbf{e}_i \text{ avec } v_i^b \in K$$

En conséquence,

$$l(\mathbf{v}) = l\left(\sum_{i=1}^n v_i^b \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i^b l(\mathbf{e}_i)$$

Soit,

$$l(\mathbf{v}) = [l(\mathbf{e}_1), \dots, l(\mathbf{e}_n)] \begin{pmatrix} v_1^b \\ \vdots \\ v_n^b \end{pmatrix}$$

Si on se place dans \mathbb{R}^3 , on prend \mathcal{B} comme étant la base canonique, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et \mathbf{e}_3 sont assimilés à leurs coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $M \equiv [l(\mathbf{e}_1), l(\mathbf{e}_2), l(\mathbf{e}_3)]$ est alors le tableau dont la i ème colonne est formée des coordonnées de $l(\mathbf{e}_i)$.

A.2 Rotations

A.2.1 Rotations 2D

Construisons la matrice R associée à une rotation $\underline{\underline{R}}$ (l'application linéaire) dans le plan (x, y) , en coordonnées cartésiennes. La rotation se fait autour de l'origine (c'est bien

une application linéaire), d'un angle θ par rapport à \mathbf{e}_1 . Par convention, θ est positif si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique, et négatif sinon.

En se basant sur la figure A.2.1, nous avons :

$$R(\mathbf{e}_1) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$$

$$R(\mathbf{e}_2) = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

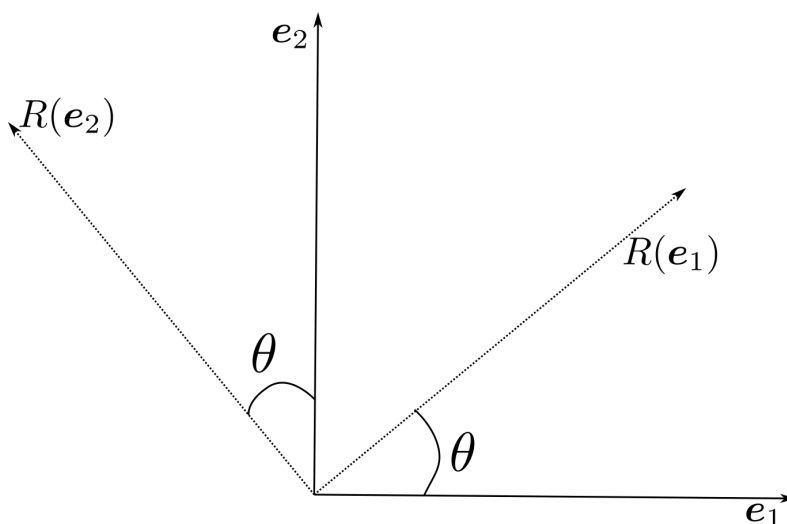


FIGURE A.2.1 – Rotation plane d'angle θ

D'où la matrice de rotation correspondante :

$$R = [l(\mathbf{e}_1), l(\mathbf{e}_2)] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le déterminant de R est égal à $+1$. La rotation inverse de R est, par définition, R^{-1} , de sorte que $RR^{-1} = R^{-1}R = Id$. De plus, géométriquement, cette rotation inverse est la rotation d'angle $-\theta$. Ainsi, puisque $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, on constate que $R^{-1} = R^T$.

À propos des transposées :

- Si A et B sont deux matrices, $(AB)^T = B^T A^T$.

- Dans \mathbb{R}^3 : si \mathbf{a} est un vecteur colonne, identifié à ses coordonnées $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,

alors \mathbf{a}^T est identifié au vecteur ligne (une forme linéaire) $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$.

- Dans \mathbb{R}^3 , si A est une matrice et \mathbf{a} un vecteur identifié à ses coordonnées,

$$(\mathbf{a}A)^T = \mathbf{a}^T A^T = (a_1, a_2, a_3)A^T = \left(\sum_i a_i A_{i1}^T, \sum_i a_i A_{i2}^T, \sum_i a_i A_{i3}^T \right)$$

A.2.2 Rotations 3D

En 3D, une rotation s'effectue autour d'un axe, ce dernier étant orienté. Si l'axe passe par l'origine, la rotation est une application linéaire, et peut se décomposer en un produit

de rotations élémentaires autour de e_1 , e_2 et e_3 , notées R_1 , R_2 , R_3 , avec

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquez le “changement de signe” dans R_2 , dû à la rotation dans le sens trigonométrique autour de l’axe orienté par e_2 (voir figure A.2.2).

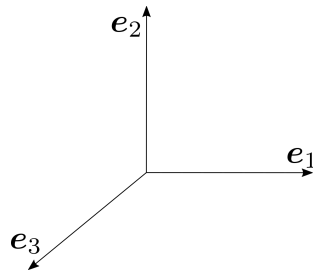


FIGURE A.2.2 – Les 3 axes des rotations élémentaires R_1 , R_2 et R_3 .

Le déterminant de ces matrices est égal à $+1$. Ainsi, le déterminant d’une rotation vaut également $+1$. De plus, on a toujours $R_i^{-1} = R_i^T$. Pour une rotation R quelconque autour d’un axe passant par l’origine, $R = R_1 R_2 R_3$ (avec des angles différents), et

$$R^{-1} = (R_1 R_2 R_3)^{-1} = R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} = R_3^T R_2^T R_1^T = (R_1 R_2 R_3)^T = R^T$$

Ainsi $R^{-1} = R^T$.

A.3 Transformations de corps rigide

Une transformation de corps rigide est, par définition, une transformation qui préserve les distances (une isométrie). On distingue les translations, les rotations et les réflexions ou symétries axiales. Une translation n’est pas linéaire, tandis que rotations et symétries le sont uniquement si elles s’opèrent par rapport à un axe passant par l’origine. Nous nous intéressons ici aux transformations de corps rigide linéaires et voulons caractériser leurs matrices en coordonnées cartésiennes.

A.3.1 Matrices orthogonales : définition

Soient v un vecteur, représenté par ses coordonnées cartésiennes v , \underline{Q} une application linéaire, représentée en coordonnées cartésiennes par sa matrice Q , et \overline{Qv} l’image de v par Q . Nous avons

$$\|v\|^2 = v^T v, \quad \text{et} \quad \|Qv\|^2 = (Qv)^T Qv.$$

Si Q conserve les longueurs, alors

$$v^T v = (Qv)^T Qv = v^T Q^T Qv$$

Cette relation étant valable pour tout vecteur v , on en déduit que $Q^T Q = I_d$, autrement dit $Q^T = Q^{-1}$. L’inverse à gauche étant égal à l’inverse à droite, on a aussi $Q Q^T = I_d$.

En résumé, la matrice Q d'une application linéaire \underline{Q} préservant les longueurs, vérifie, en coordonnées cartésiennes,

$$Q^T Q = Q Q^T = I_d, \text{ ou encore } Q^T = Q^{-1} \quad (\text{A.3.1})$$

Les matrices vérifiant cette propriété sont dites **orthogonales**. Elles forment un groupe dit groupe orthogonal, noté $O(n)$, n étant la dimension de l'espace (euclidien ici). La relation $Q^T Q = I_d$, qui caractérise une propriété géométrique (conservation des longueurs) peut également s'interpréter matriciellement : les lignes de Q^T étant les colonnes de Q , une matrice est orthogonale ssi ses colonnes sont orthonormées deux-à-deux, ou, de manière équivalente, ses lignes sont orthonormées deux-à-deux.

La propriété d'orthogonalité implique que $\det(Q)^2 = 1$. En conséquence, **le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à +1 ou -1**. D'après ce que nous avons vu, une matrice de rotation est orthogonale, de déterminant +1. Les matrices orthogonales de déterminant +1 forment un sous-groupe de $O(n)$, noté $SO(n)$ et appelé groupe spécial orthogonal (ou groupe des rotations). Les réflexions par rapport à un axe sont des isométries de déterminant -1 (exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, symétrie par rapport à la 1ère bissectrice).

A.3.2 Matrices orthogonales et rotations

Plaçons-nous en 2D. Soit Q une matrice orthogonale quelconque. Alors

$$Q^T Q = Id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

soit,

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0$$

De la première relation, on en conclut qu'il existe un angle θ tel que $a = \cos \theta$ et $c = \sin \theta$ (choix du signe arbitraire mais qui fixe l'origine de l'angle θ). La 3ème relation exprime l'orthogonalité entre (a, c) et (b, d) , de sorte que nécessairement, $b = -c$, $d = a$ ou $b = c$ et $d = -a$. La seconde propriété ((b, d) unitaire) est bien vérifiée par ces choix. Ainsi, les matrices orthogonales 2D s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

La 1ère matrice est une matrice de rotation, de déterminant +1, contrairement à la seconde matrice (réflexion) de déterminant -1. Dans le cas général (3D), **les matrices orthogonales de déterminant +1 sont les matrices de rotations**.

A.4 Décomposition polaire

Théorème (décomposition polaire) : toute matrice M s'écrit de manière **unique** $M = QS$, où Q est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive. Si de plus M est inversible, S est symétrique définie positive.

Géométriquement, ce résultat s'interprète comme le fait qu'une transformation linéaire est la composition d'une transformation dilatant ou contractant l'espace selon des directions orthogonales entre elles (les vecteurs propres de S sont orthogonaux deux-à-deux), et d'une rotation (pouvant être combinée à une réflexion).

Preuve : partant de la décomposition, nous allons explicitement construire S et Q . Évaluons le produit $M^T M$:

$$M^T M = (QS)^T QS = S^T Q^T QS = S^T S = S^2$$

La matrice $M^T M$ est symétrique, et ses valeurs propres sont positives ou nulles¹. On peut donc prendre sa racine carrée, qui, par définition, est la matrice ayant les mêmes vecteurs propres qu'elle, mais dont les valeurs propres sont les racines carrées des siennes. On pose donc $S = \sqrt{M^T M}$. S est ainsi définie de façon unique puisque le théorème demande que ses valeurs propres ne soient pas négatives.

On ne considérera ici que le cas où S est inversible. Alors nécessairement $Q = MS^{-1}$. Vérifions que Q ainsi définie est une matrice orthogonale :

$$Q^T Q = (MS^{-1})^T MS^{-1} = S^{-1} M^T MS^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_d$$

Inversement, il existe une unique matrice orthogonale Q_2 et une unique matrice symétrique S_2 telles que $M = S_2 Q_2$:

$$MM^T = S_2 Q_2 Q_2^T S_2 = S_2^2, \text{ et } Q_2 = S_2^{-1} M$$

De plus, les matrices Q et Q_2 sont **identiques**.

Preuve : considérons la décomposition $M = QS$. S est symétrique, elle possède donc n vecteurs propres que l'on peut choisir orthonormaux, et l'on peut écrire $S = X \Sigma X^T$, où Σ est la matrice diagonale des valeurs propres (positives ou nulles) de S , et X la matrice orthogonale dont les colonnes sont formées des vecteurs propres de S . Ainsi,

$$M = QX \Sigma X^T$$

Puisque Q et X sont deux matrices orthogonales, QX est également orthogonale, et

$$M = (QX) \Sigma (QX)^T QX X^T = ((QX) \Sigma (QX)^T) Q = S_2 Q_2$$

La décomposition polaire étant unique, on en conclut que $Q_2 = Q$ ².

En résumé, pour toute matrice M , il existe une unique matrice orthogonale Q , et deux uniques matrices symétriques S_1 et S_2 à valeurs propres positives ou nulles, telles que

$$M = QS_1 = S_2 Q$$

avec $S_1^2 = M^T M$ et $S_2^2 = MM^T$.

1. Si $(M^T M)v = \lambda v$, alors $v^T (M^T M)v = \lambda \|v\|^2$, i.e. $\|Mv\|^2 = \lambda \|v\|^2$. La valeur propre λ est donc positive ou nulle.

2. ainsi que $S_2 = (QX) \Sigma (QX)^T$, donc S et S_2 ont les mêmes valeurs propres

Annexe B

Calcul tensoriel

Les longueurs et les angles que l'on mesure en physique et en mécanique sont des quantités que l'on peut qualifier de "géométriques", par opposition à "analytiques". Ceci exprime le fait que ces quantités ont une signification physique intrinsèque, et qu'elles peuvent être exprimées sans avoir recours à un système de coordonnées. Tout objet mathématique répondant à ce critère peut être qualifié de géométrique. C'est le cas par exemple du gradient d'une fonction : ce vecteur, caractérisé par une longueur et une direction, peut être calculé, au moins formellement, en dehors de tout système de coordonnées. Cependant, l'introduction d'un système de coordonnées est indispensable si l'on veut résoudre des problèmes plus complexes. La forme des équations que l'on manipule ainsi que certaines de leurs propriétés dépendent alors du système de coordonnées choisi, ce qui rend éventuellement compliquée l'interprétation physique ou géométrique du résultat obtenu. L'introduction des tenseurs, et plus généralement le calcul tensoriel, permet de construire et de manipuler des expressions valides dans tout système de coordonnées. De plus, si une telle expression conduit au même résultat indépendamment du système dans lequel elle est évaluée, alors elle possède une signification géométrique.

Un tenseur d'ordre n , est un objet \mathbf{T} défini par des entrées (des expressions), lesquelles sont identifiées par n indices variant de 1 à la dimension spatiale d . De plus, lors d'un changement de système de coordonnées, l'expression de ces entrées change selon des règles préservant la signification géométrique des propriétés de \mathbf{T} . Nous allons à présent établir ces règles, d'abord pour des tenseurs d'ordre 0, 1 et 2, avant d'en déduire le cas général.

B.1 Coordonnées

Considérons, dans \mathbb{R}^d , un système de coordonnées que nous notons $z : z^1, z^2, \dots, z^d$. Ce système peut être représenté graphiquement par ses lignes de coordonnées. Il y a d familles de lignes de coordonnées, la i ème famille étant composée par l'ensemble des courbes caractérisées par z^i constant. La figure B.1.1 montre les lignes de coordonnées de systèmes cartésien, affine et polaire.

On associe à chaque point de coordonnées z , un vecteur position $\mathbf{R}(z)$, reliant une origine choisie du système à ce point. Nous définissons alors d vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d$ par

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z^i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(z^1, \dots, z^{i-1}, z^i + h, z^{i+1}, \dots, z^d) - \mathbf{R}(z)}{h} \quad (\text{B.1.1})$$

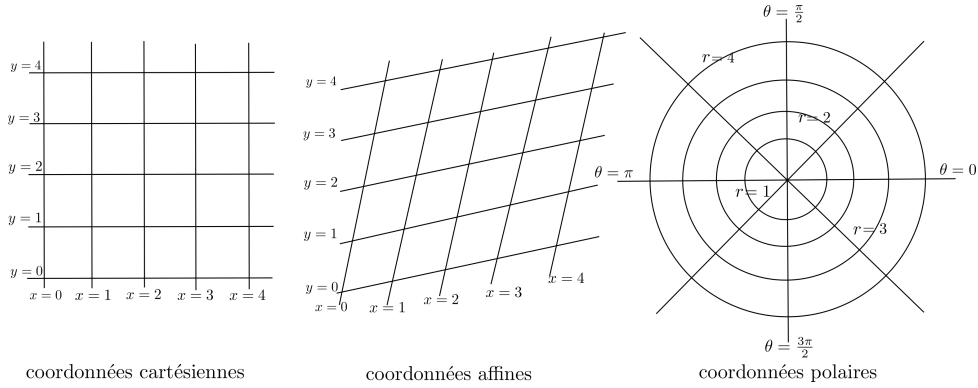


FIGURE B.1.1 – Lignes de coordonnées 2D pour trois systèmes de coordonnées.

et formant, au point considéré, une base locale de l'espace, appelée base covariante. La figure B.1.2 indique pour les trois systèmes de coordonnées considérés les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2

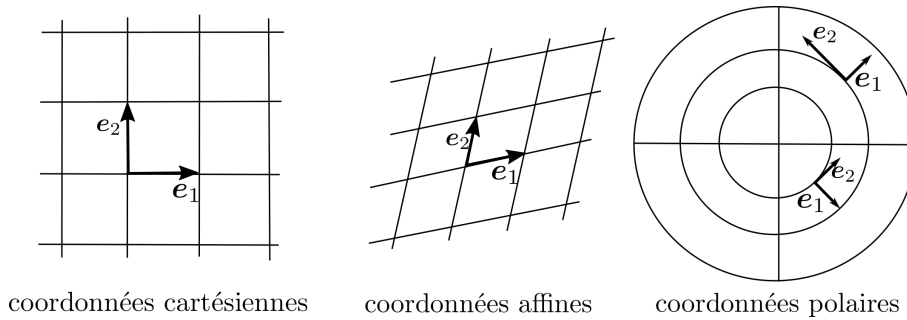


FIGURE B.1.2 – Base covariante pour trois systèmes de coordonnées.

de la base covariante. Pour les systèmes cartésien et affine, \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont les mêmes en tout point de l'espace. Il s'agit des vecteurs de base usuels. Pour le système de coordonnées polaires, \mathbf{e}_1 est radial et unitaire, tandis que \mathbf{e}_2 est orthogonal à \mathbf{e}_1 , de norme r , la distance à l'origine.

Considérons l'ensemble des d vecteurs \mathbf{e}^i définis par :

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.1.2})$$

Ces vecteurs forment une base de l'espace, appelée base duale, ou encore base contravariante. Dans le cas cartésien, les \mathbf{e}_i forment une base orthonormée, et sont donc identiques aux \mathbf{e}^i .

Les coordonnées dans la base covariante d'un vecteur \mathbf{V} sont notées V^i , et l'on a :

$$\mathbf{V} = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3 = V^i \mathbf{e}_i$$

De même les coordonnées de \mathbf{V} dans la base contravariante sont notées V_i et :

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}^1 + V_2 \mathbf{e}^2 + V_3 \mathbf{e}^3 = V_i \mathbf{e}^i$$

où l'on a adopté la convention des indices répétés (ou convention d'Einstein) : tout indice répété deux fois dans une même expression, une fois en position haute, une fois en position basse, est sommé implicitement de 1 à d .

B.2 Changement de coordonnées

Considérons deux jeux de coordonnées, z et z' , par exemple les coordonnées cartésiennes et polaires. Nous avons donc une base covariante \mathbf{e}_i obtenue avec z et une base $\mathbf{e}_{i'}$ obtenue avec z' . Nous voulons déterminer la relation permettant de passer d'une base à l'autre.

Nous partons de l'identité

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}(z')$$

et considérons par exemple que chaque coordonnées z' s'exprime en fonction des coordonnées z : $z' \equiv z'(z)$. D'où, en dérivant l'identité par rapport à z^i :

$$\frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z^i} = \frac{\partial \mathbf{R}(z'(z))}{\partial z^i} = \sum_{i'} \frac{\partial \mathbf{R}(z')}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}$$

Et ainsi,

$$\mathbf{e}_i = \sum_{i'} J_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} \quad (\text{B.2.1})$$

avec les entrées (i', i) de la matrice jacobienne J , notées $J_i^{i'}$ et définies par

$$J_i^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}. \quad (\text{B.2.2})$$

Ce sont les composantes de \mathbf{e}_i dans la base $\mathbf{e}_{i'}$.

Inversement, en prenant $z \equiv z(z')$ et en dérivant $\mathbf{R}(z') = \mathbf{R}(z(z'))$ par rapport à $z^{i'}$, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathbf{R}(z')}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{R}(z(z'))}{\partial z^{i'}} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{R}(z)}{\partial z^i} \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}$$

Et ainsi,

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_i J_{i'}^i \mathbf{e}_i \quad (\text{B.2.3})$$

avec les entrées (i, i') de la matrice jacobienne "inverse" J' , notées $J_{i'}^i$, et définies par

$$J_{i'}^i = \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}. \quad (\text{B.2.4})$$

Ce sont les composantes de $\mathbf{e}_{i'}$ dans la base \mathbf{e}_i .

On montre de plus (laissé en exercice) que J et J' sont l'inverse l'une de l'autre : leur produit est égale à l'identité, à savoir $J_j^{i'} J_{i'}^j = \delta_j^{i'}$ et $J_{i'}^i J_j^{i'} = \delta_j^i$.

À titre d'exemple, choisissons $z \equiv (x, y)$ comme étant les coordonnées cartésiennes et $z' \equiv (r, \theta)$ les coordonnées polaires dans le plan. Nous pouvons alors exprimer z en fonction de z' ,

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad (\text{B.2.5})$$

$$y(r, \theta) = r \sin \theta \quad (\text{B.2.6})$$

et par relation inverse, z' en fonction de z

$$r(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (\text{B.2.7})$$

$$\theta(x, y) = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{B.2.8})$$

La matrice jacobienne $J(x, y)$, également notée $\partial(r, \theta)/\partial(x, y)$ est composée des dérivées partielles de $r(x, y)$ et $\theta(x, y)$ par rapport à x et y :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial r(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} & \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} & \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \end{pmatrix}$$

De même, la jacobienne $J'(r, \theta)$ de la relation inverse est donnée par

$$J'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

De plus,

$$JJ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B.3 Tenseurs

B.3.1 Tenseurs d'ordre 0

En premier lieu, un objet T est tenseur d'ordre 0, si il est sans indice et est invariant par changement de coordonnées :

$$T(z) = T(z'), \text{ encore noté } T = T' \quad (\text{B.3.1})$$

Par exemple, si T est la température en un point donné, T est un invariant scalaire : sa valeur dépend uniquement du point où est effectuée la mesure de la température, mais ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel sont exprimées les coordonnées de ce point. Au contraire, si $T(z^1, z^2) = z^1 + z^2$, la valeur de T n'est pas invariante par changement de coordonnées et T n'est pas un tenseur (d'ordre zéro).

B.3.2 Tenseurs d'ordre 1

Un vecteur \mathbf{V} est un objet caractérisé par une longueur et une orientation indépendantes du système de coordonnées choisi. En ce sens, un vecteur, ou invariant vectoriel est également un tenseur d'ordre 0. Dans un système générique de coordonnées $z \equiv (z^i)$, les composantes du vecteur \mathbf{V} sont notées V^i . On a donc :

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_i V^i$$

où les \mathbf{e}_i sont les "vecteurs" de la base covariante. Considérons un second système de coordonnées, $z' \equiv (z^{i'})$. Les coordonnées de \mathbf{V} exprimées dans ce système, $V^{i'}$, doivent donc vérifier :

$$\mathbf{e}_{i'} V^{i'} = \mathbf{e}_i V^i$$

En utilisant la relation (B.2.1), cette égalité peut se réécrire en

$$\mathbf{e}_{i'} V^{i'} = \mathbf{e}_{j'} J_i^{j'} V^i$$

Choisissons, pour un indice k' donné, un vecteur $\mathbf{e}^{k'}$ de la base duale, autrement dit un vecteur tel que $\mathbf{e}^{k'} \cdot \mathbf{e}_{i'} = \delta_{i'}^{k'}$. Si on multiplie l'expression précédente par $\mathbf{e}^{k'}$, alors

$$\delta_{i'}^{k'} V^{i'} = \delta_{j'}^{k'} J_i^{j'} V^i$$

soit, en renommant l'indice k' par i' :

$$V^{i'} = J_i^{i'} V^i \quad (\text{B.3.2})$$

Cette transformation est la condition nécessaire est suffisante pour que $\mathbf{V} = \mathbf{e}_i V^i$ soit un invariant vectoriel. Une collection d'objets V^i satisfaisant à cette règle lors d'un changement de coordonnées forme un tenseur du premier ordre contravariant. Ainsi, les composantes V^i d'un invariant vectoriel forment un tenseur du premier ordre. De même, les vecteurs de la base contravariante \mathbf{e}^i forment un tenseur du premier ordre contravariant (à composantes vectorielles).

Le raisonnement ci-dessus peut être tenu en développant le vecteur \mathbf{V} sur la base duale : $\mathbf{V} = V_i \mathbf{e}^i$. Les composantes V_i sont dites covariantes et vérifient

$$V_{i'} = J_{i'}^i V_i \quad (\text{B.3.3})$$

Plus généralement, une collection d'objets V_i satisfaisant à cette règle lors d'un changement de coordonnées forme un tenseur du premier ordre covariant. Ainsi, les composantes V_i d'un invariant vectoriel forment un tenseur du premier ordre. De même, les vecteurs de la base covariante \mathbf{e}_i forment un tenseur du premier ordre covariant (à composantes vectorielles).

Exemple 1. : L'ensemble des dérivées partielles $\frac{\partial F(z)}{\partial z^i}$ d'un champ d'invariants scalaires F , forment un tenseur covariant d'ordre 1. En effet, considérons deux systèmes de coordonnées, z et z' , de sorte que $F(z') = F(z(z'))$. Nous avons :

$$\frac{\partial F(z')}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} J_{i'}^i$$

Exemple 2. : Considérons deux tenseurs d'ordre 1, l'un co-, l'autre contra-variant, U_i et V^i . Alors le scalaire S défini par $S = U_i V^i$ est un invariant. De plus, $S = U_i V^i = U^i V_i$. Choisissons en effet un second système z' et calculons $S' = U_{i'} V^{i'}$:

$$S' = U_{i'} V^{i'} = U_i J_{i'}^i J_k^{i'} V^k = U_i \delta_k^i V^k = U_i V^i = S$$

B.3.3 Tenseurs d'ordre 2

Considérons deux tenseurs d'ordre 1, U_i et V^i , relié dans un certain système de coordonnées z par la relation

$$U_i = T_{ij} V^j$$

Pour que cette relation ait une signification “intrinsèque”, il faut que dans un système z' nous ayons :

$$U_{i'} = T_{i'j'} V^{j'}$$

où $T_{i'j'}$ sont les coefficients exprimés dans z' . U_i et V^i étant des tenseurs d'ordre 1, cette relation équivaut à :

$$U_i J_{i'}^i = T_{i'j'} J_k^{j'} V^k$$

soit, en multipliant à gauche et à droite par $J_l^{i'}$,

$$U_l = T_{i'j'} J_l^{i'} J_k^{j'} V^k$$

car $J_l^{i'} J_{i'}^i = \delta_l^i$. Or, puisque $U_i = T_{ij} V^j$, ceci équivaut à (en renommant l par i et k par j) :

$$U_i = T_{i'j'} J_i^{i'} J_j^{j'} V^j = T_{ij} V^j$$

Ceci étant valable pour tout V^j , nous en déduisons la règle de transformation des coefficients T_{ij} ,

$$T_{i'j'} J_i^{i'} J_j^{j'} = T_{ij}$$

soit, en inversant cette relation,

$$T_{i'j'} = J_{i'}^i J_{j'}^j T_{ij} \quad (\text{B.3.4})$$

Par extension, tout objet T_{ij} se transformant par la règle (B.3.4) est appelé tenseur d'ordre 2, deux fois covariant. On définit par une démarche similaire les tenseurs d'ordre 2 deux fois contravariants, *i.e* les T^{ij} se transformant suivant la règle

$$T^{i'j'} = J_i^{i'} J_j^{j'} T^{ij} \quad (\text{B.3.5})$$

Enfin, un tenseur d'ordre 2, une fois covariant et 1 fois contravariant, T_j^i , se transforme comme :

$$T_{j'}^{i'} = J_i^{i'} J_{j'}^j T_j^i \quad (\text{B.3.6})$$

Exemple 3. : La trace d'un tenseur d'ordre deux, obtenue par la contraction de ses deux indices, *i.e* $\text{tr} = T_i^i$, est un invariant. En effet :

$$T_{j'}^{i'} = J_i^{i'} J_{j'}^j T_j^i$$

d'où,

$$\text{tr}' = T_{i'}^{i'} = J_i^{i'} J_{i'}^i T_j^i = \delta_i^i T_j^i = T_j^i = \text{tr}$$

On généralise ces définitions à des tenseurs d'ordre n . En particulier, si par exemple T_j^i et U_{kl} sont deux tenseurs d'ordre 2, alors $V_{jkl}^i = T_j^i U_{kl}$ est un tenseur d'ordre 4. Cette opération s'appelle produit tensoriel. La contraction d'un indice covariant d'un tenseur d'ordre n avec un indice contravariant, fournit un tenseur d'ordre $n - 2$. Enfin, notons que si un tenseur est nul dans un système de coordonnées donné, alors ce tenseur est nul dans tout système de coordonnées. Ainsi, une expression tensorielle vérifiée dans un système de coordonnées, est vérifiée dans tout système de coordonnées.

B.4 Produit tensoriel

Dans ce cours, un scalaire est dénoté par une lettre, par exemple T ; un vecteur (invariant vectoriel) est représenté par une lettre en gras, telle que \mathbf{T} ; un tenseur d'ordre 2 par une lettre en gras avec deux traits, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$.

Le produit dyadique (ou tensoriel), noté par le symbole \otimes , opère comme suit. Soient deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{e} . L'objet $\mathbf{a} \otimes \mathbf{e}$ désigne le tenseur d'ordre 2 défini par

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{e})_{ij} = a_i b_j, \quad \text{ou encore } (\mathbf{a} \otimes \mathbf{e})_j^i = a^i e_j$$

par exemple.

Le produit tensoriel permet d'écrire un tenseur $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ en fonction de ses entrées. Par exemple :

$$\mathbf{T} = T_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (\text{B.4.1})$$

avec la convention de sommation des indices répétés.

Ainsi, le tenseur identité $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i \quad (\text{B.4.2})$$

Soulignons ici que la place haut/bas des indices est donnée par la règle de transformation des entrées sous changement de système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes, bases co- et contra-variantes étant confondues, il n'y a plus de distinction de nature entre les indices hauts et bas. De plus, bien que ce point ne soit pas détaillé ici, il ne faut pas voir les formes covariante, contravariante ou mixte d'un tenseur comme des objets séparés, mais plutôt comme différentes expressions d'un même objet. On passe d'ailleurs d'une forme à l'autre grâce à un tenseur appelé tenseur métrique.

B.5 Contraction

On appelle contraction l'opération consistant, dans une expression tensorielle, à évaluer deux indices (haut et bas) puis à y effectuer une sommation. Ainsi, si l'expression contient initialement n indices, elle en contiendra $n - 2$ après contraction. L'expression obtenue sera toujours tensorielle.

Exemple 1. Soit T_j^i les entrées d'un tenseur du second ordre. La contraction des indices de ce tenseur donne le scalaire $\alpha = T_i^i = \sum_{i=1}^d T_i^i$. Ce scalaire, appelé trace de \mathbf{T} , est invariant par changement de système de coordonnées.

Exemple 2. Soient un tenseur d'ordre 2, d'entrées T_j^i et un tenseur d'ordre 1, d'entrées a^k . On peut former, par produit tensoriel entre ces 2 tenseurs, un tenseur d'ordre 3 d'entrées $T_j^i a^k$. La contraction des indices j et k produit un tenseur d'ordre 1 d'entrée $b^i = T_j^i a^j = \sum_{j=1}^d T_j^i a^j$. On peut noter cette relation $\mathbf{e} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{a}$ où “.” est l'opérateur de contraction simple entre deux tenseurs. Si ces tenseurs sont, respectivement, d'ordre n et m , le tenseur résultant sera d'ordre $n + m - 2$.

Si l'on considère à présent deux tenseurs d'ordre 2, d'entrées T^{ij} et U_{kl} par exemple, le produit tensoriel entre ces deux tenseurs fournit un tenseur d'ordre 4, d'entrées $T^{ij} U_{kl}$. La

contraction entre deux indices haut et bas, par exemple j et k produit un tenseur d'ordre 2 d'entrées $V_l^i = T^{ij}U_{jl}$. On note aussi $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{U}}$.

Exemple 3. Soient deux tenseurs d'ordre deux, $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{U}}$, d'entrées respectives T^{ij} et U_{kl} . Le produit tensoriel entre ces deux tenseurs fournit un tenseur d'ordre 4, d'entrées $T^{ij}U_{kl}$. Une première contraction sur les indices j et k donne le tenseur d'ordre 2 d'entrées $\sum_j T^{ij}U_{jl}$. Une deuxième contraction sur les indices i et l produit un scalaire s égale à $s = \sum_{i,j} T^{ij}U_{ji} = T^{ij}U_{ji}$. Ce scalaire est invariant par changement de coordonnées, et se note également $s = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{U}}$ où “:” désigne l'opérateur de double contraction. Le scalaire obtenu est la somme du produit terme à terme des entrées de $\underline{\underline{T}}$ et de $\underline{\underline{U}}^T$ (le transposé de $\underline{\underline{U}}$).

Bibliographie

- [BRUNET] Brunet, M. Mécanique des matériaux et des structures. INSA Lyon, 2011.
- [COIRIER] Coirier, J. Mécanique des milieux continus - 4e édition : Cours et exercices corrigés. Dunod, 2013.
- [FOREST] Forest, S. et al. Mécanique des Milieux continus. École des Mines de Paris. Cours disponible sur internet.
- [FORTIN] Fortin A. et Garon A. Les éléments finis : de la théorie à la pratique. Cours disponible sur internet.
- [GERMAIN] Germain, P. Cours de Mécanique des Milieux Continus. Masson, 1973.
- [LE MAÎTRE] Le Maître, J. et Chaboche, J.-L. Mécanique des matériaux solides. Dunod, 2009.
- [PONTHOT] Ponthot J.-P. Cours de Mécanique des Milieux Continus, Université de Liège.
- [SALENÇON] Salençon, J. Mécanique des milieux continus, Tome I, II, III. Les éditions de l'École Polytechnique, 2016.
- [VIEILLE] Vieille, B. Mécanique des milieux continus. Conservatoire National des Arts et Métiers. Cours disponible sur internet.