BIENVENUE - Présentation du cours

Intervenants : **Eric DAVALLE**, Dr Ingénieur civil EPFL

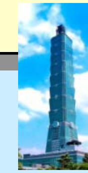
Chef du Service de l'électricité de la Ville de Lausanne

avec les assistants du LSMS

Mécanique des structures I

Présentation du cours

TABLE DES MATIERES



Document à découvrir sur l'intranet

Semaines N°	Jour	Chapitres	Titres	Exercices En classe	En dehors(*)
1	Mardi	7.10 et suivants 14.1 - 14.3	Propriétés mécaniques des matériaux Traction plastique	4.10.7 cadres poutres	
	Jeudi	15,4 15.5 - 15.9	Flexion plastique plane Flexion plastique plane		5.8.13, 6.5.8, 7.11.6 7.11.7, 7.11.8 et 7.11.9
2	Mardi	8.1 - 8.7	Torsion uniforme	14.4.1, 14.4.2, 14.4.3 et 15.9.5	
	Jeudi	8.8 - 8.10 9.1 - 9.3	Torsion uniforme Contraintes dues à l'effort tranchant		15.9.3, 15.9.4, 8.11.3, 8.11.4, 8.11.14 et 8.11.15
3	Mardi	9.4 - 9.8	Contraintes dues à l'effort tranchant	8.11.6, 8.11.13, 8.11.7 et 8.11.17	
	Jeudi	9.9 - 9.12 MS (V3) 7.1 - 7.10	Contraintes dues à l'effort tranchant Formes intégrales d'équilibre et cinématique - Travaux virtuels		8.11.5, 8.11.8, 8.11.10 8.11.11 et 8.11.12
4	Mardi	13.1 - 13.6 10.1 - 10.2	Énergie (forces et déformations associées) Déformation des poutres soumises à la flexion simple	9.13.1, 9.13.2, 9.13.5 et 9.13.6	
	Jeudi	10.3	Déformation des poutres soumises à la flexion simple		9.13.3, 9.13.4, 9.13.8, 9.13.10, 9.13.12, 10.4.1 et 13.7.1
5	Mardi	11,1 12.1 - 12.5 et 12.7	Sollicitations composées Principe des travaux virtuels et calcul des déplacements	10.4.3, 10.4.5, 10.4.6 et 10.4.7	
	Jeudi	12.6 , 12.8 - 12.9	Principe des travaux virtuels et calcul des déplacements		11.5.1, 11.5.17,12.10.1, 12.10.6, 12.10.7, 12.10.8 et 12.10.9
6	Mardi	16.1 - 16.7 17.1 -17.5	Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite	12.10.3, 12.10.6, 12.10.21 et 12.10.22	
	Jeudi	17.6 -17.10	Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite		12.10.16, 12.10.18, 12.6.20,16.8.2 et 16.8.5
7	Mardi	20.1 - 20.3	Flambement des poutres	16.8.1, 17.11.1, 17.11.2 et 17.11.3	
	Jeudi	20.4 - 20.5	Flambement des poutres		16.8.4, 17.11.7, 20.6.1, 20.6.2 et 20.6.3
8	Mardi	20,8	Flambement des poutres	20.6.4, 20.6.5, 20.6.6 et 20.6.12	
	Jeudi	compléments / révisions			20.6.7, 20.6.8, 20.6.11 et 20.6.14

Ouvrages de référence : Mécanique des structures, Volume 2, par François FREY et Mécanique du solide, Volume 3, MS (V3) par François FREY

(*) questions aux assistants LSMS

Programme des semaines 1 à 4

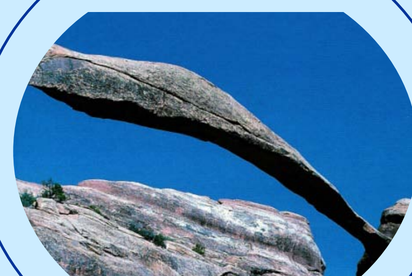
Semaines N°	Jour	Chapitres	Titres
1	Mardi	7.10 et suivants 14.1 - 14.3	Propriétés mécaniques des matériaux Traction plastique
	Jeudi	15,4 15.5 - 15.9	Flexion plastique plane Flexion plastique plane
2	Mardi	8.1 - 8.7	Torsion uniforme
	Jeudi	8.8 - 8.10 9.1 - 9.3	Torsion uniforme Contraintes dues à l'effort tranchant
3	Mardi	9.4 - 9.8	Contraintes dues à l'effort tranchant
	Jeudi	9.9 - 9.12 MS (V3) 7.1 - 7.10	Contraintes dues à l'effort tranchant Formes intégrales d'équilibre et cinématique - Travaux virtuels
4	Mardi	13.1 - 13.6 10.1 - 10.2	Énergie (forces et déformations associées) Déformation des poutres soumises à la flexion simple
	Jeudi	10.3	Déformation des poutres soumises à la flexion simple

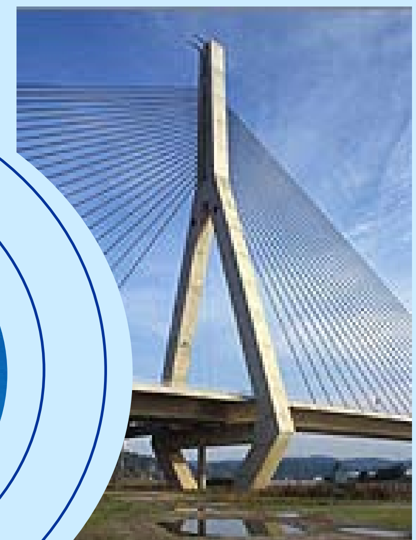
Programme des semaines 5 à 8

5	Mardi	11,1 12.1 - 12.5 et 12.7	Sollicitations composées Principe des travaux virtuels et calcul des déplacements
	Jeudi	12.6 , 12.8 - 12.9	Principe des travaux virtuels et calcul des déplacements
6	Mardi	16.1 - 16.7 17.1 -17.5	Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite
	Jeudi	17.6 -17.10	Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite
7	Mardi	20.1 - 20.3	Flambement des poutres
	Jeudi	20.4 - 20.5	Flambement des poutres
8	Mardi	20,8	Flambement des poutres
	Jeudi	compléments / révisions	

Ouvrages de référence : Mécanique des structures, Volume 2, par François FREY et Mécanique du solide, Volume 3, MS (V3) par François FREY

Tour d'horizon sur les notions de RÉSISTANCE et de DÉFORMÉE/ DÉPLACEMENTS





RÉSISTANCE

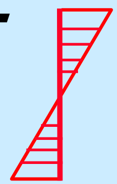
ÉLASTICITÉ

PLASTICITÉ

1ère année

- Traction et compression
- Flexion plane
- Flexion oblique et composée

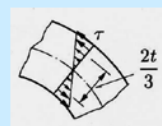
Loi linéaire élastique (Hooke) σ

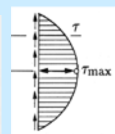


2ème année

- Torsion uniforme (**Chap. 8**)
- Contraintes dues à l'effort tranchant (**Chap. 9**)

τ





Critères rhéologiques : (**Chap. 7**)

critères de plastification : von Mises, …

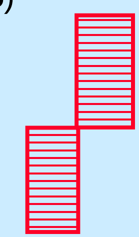
critères de rupture : courbe intrinsèque, …

$$\sigma^* \leq \sigma_e$$

- Sollicitation composée (**Chap. 11**)

- Traction plastique (**Chap. 14**)
- Flexion plastique plane (**Chap. 15**)

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{Z}{W}$$



Notion de rotule plastique

ÉLASTICITÉ

PLASTICITÉ

RÉSISTANCE

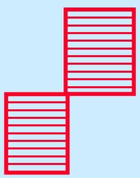
2ème année

- Principe des déplacements virtuels (**TGC 3**, **Chap. 7**)

ETATS PLASTIQUES

(dans une section)

distribution des σ à caractère isostatique



- Traction plastique (**Chap. 14**)
- Flexion plastique plane (**Chap. 15**)

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{Z}{W}$$

Notion de rotule plastique

HYPERSTATICITÉ

(d'une structure)

- Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques (**Chap. 16**)

Gain : $\dfrac{Q_{\lim}}{Q_e} = \dfrac{16}{12}\dfrac{M_{pl}}{M_e} = 1{,}33\,\alpha$

- Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite (**Chap. 17**)

Théorème statique

Théorème cinématique

Théorème combiné

$$\lambda^- \leq \lambda_{\lim} \leq \lambda^+$$

$$-M_{pl} \leq M \leq M_{pl} \qquad M_{pl}\theta > 0$$

DÉFORMÉE / DÉPLACEMENTS

2ème année

ÉLASTICITÉ

- Déformée des poutres soumises à flexion simple (**Chap. 10**)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \quad \Rightarrow \quad v(x) \ \text{par intégration}$$

- Forme intégrale de l'équilibre et de la cinématique (**TGC 3, Chap. 7**)
- Principes des travaux virtuels appliqués aux poutres et calcul des déplacements (**Chap. 12**)

$$1u_{\mathrm{A}} = \int_L N_1 \frac{N\,dx}{E\,A} + \int_L V_1 \frac{V\,dx}{G\,B} + \int_L M_1 \frac{M\,dx}{E\,I} - \sum R_1\, u_R$$

Théorème de la force unité

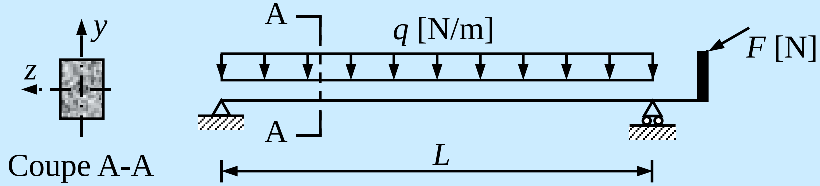
- Energie (**Chap. 13**)

$$\sum F\,u' = \sum F'\,u$$

Théorème de réciprocité de Betti

Etapes d'analyse d'un problème de résistance

type de { section / matériau }



sécurité (γ) — méthodes de calcul (modèles), matériau, charges

méthode des σ admissibles
méthode semi-probabiliste

THEORIE

3 piliers

- **Equilibre**
  (principe d'équivalence, liant efforts intérieurs et les contraintes)
- **Cinématique** (sections planes restent planes Bernoulli)
- **Loi constitutive**
  - élastique (Hooke)
  - plastique

(pour les matériaux ductiles, un bon compromis : comportement élastique-parfaitement plastique)

ETAPES DE RESOLUTION

Etape 1: (statique) **Réduire** les charges extérieures appliquées en efforts intérieurs dans les sections (N, V, M, T)

Etape 2 : (3 piliers) **Résoudre** les inconnues en terme de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$

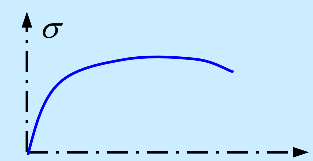
Etape 3 : (modèle de matériau) **Calculer** σ^* (σ^* au point le plus sollicité de la section la plus sollicitée!)

Etape 4 : **Vérifier**

- la résistance $\boxed{\sigma^* \leq \sigma_e}$ (ici , l'acier, en méthode semi-probabiliste)
- les déplacements (flèches max.)

ESSAIS

- traction
- compression

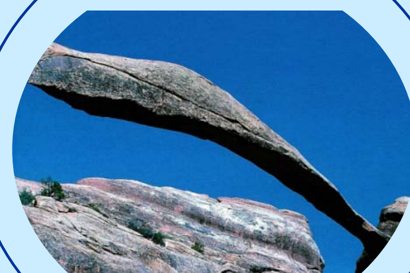
⇒ 

⇒ Caractéristiques des matériaux (E, G, …)

⇒ Résistance σ_e (ici, l'acier)

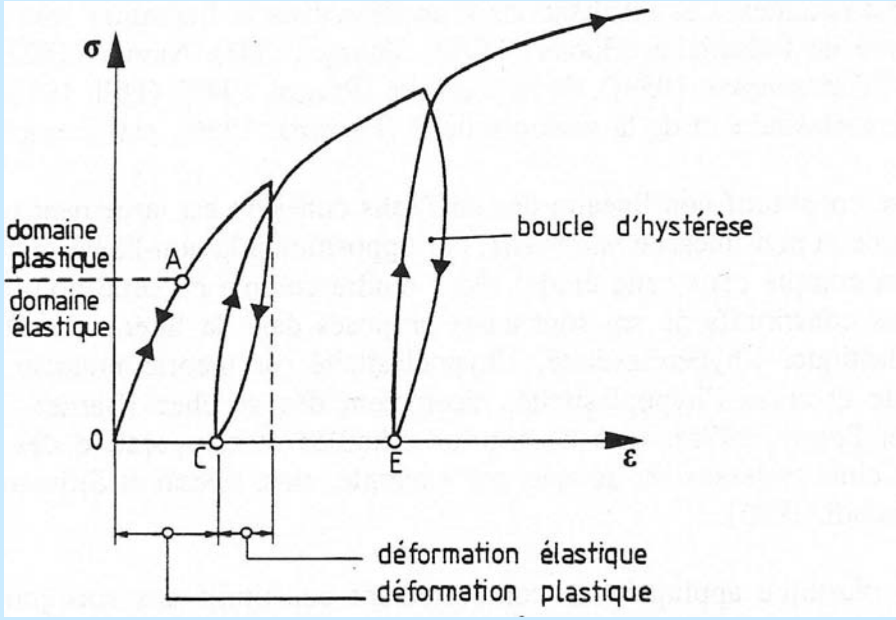
⇒ Modèles de comportement à la ruine (plasticité, rupture)
- von Mises
- Courbe intrinsèque (Mohr-Coulomb)

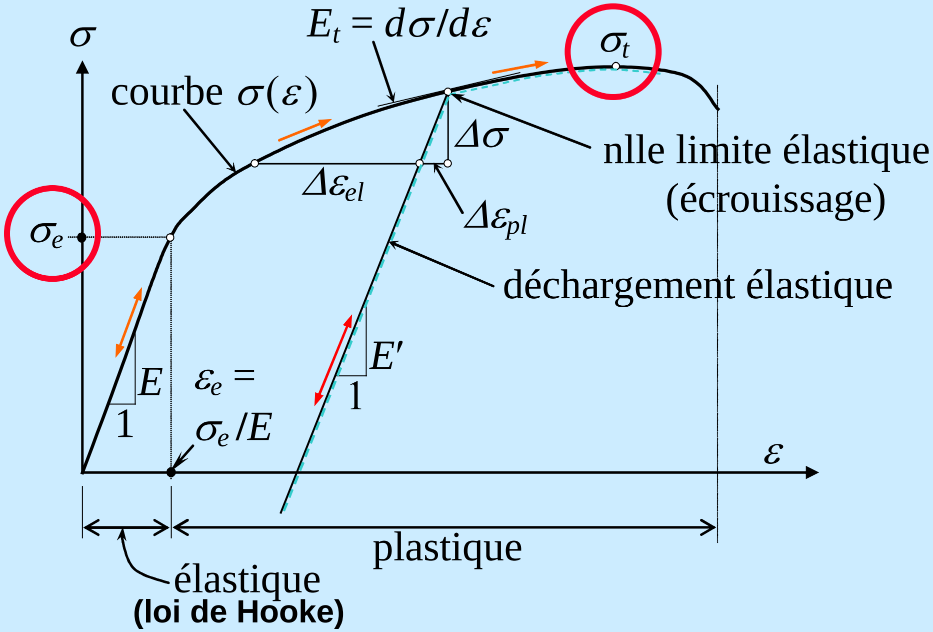
7. Propriétés élasto-plastiques des matériaux



Comportement constitutif des matériaux

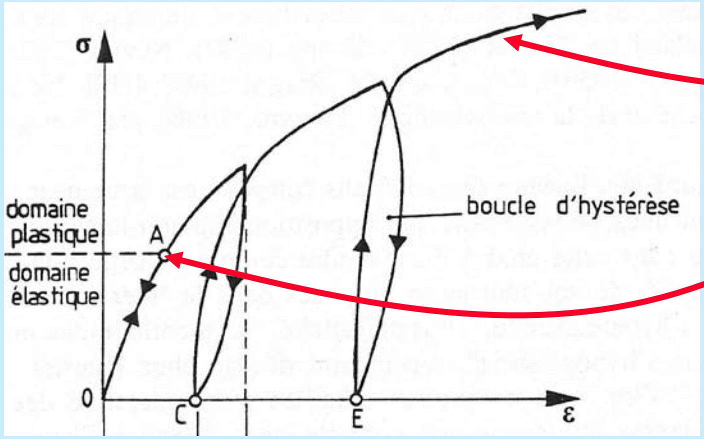
Essai uniaxial ***en traction*** sur un matériau polycristallin





Critères de plasticité et rupture
1. Introduction
Propriétés

En 1D, la transition du comportement est bien visible : σ_t ! σ_e !



Mais en 2D et 3D quel jeu de σ_{ij} ? $\Rightarrow$

entrée en ***plasticité*** ou apparition de la ***rupture*** ?

Rappel sur les tenseurs déviateur et sphérique

Soit $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ le **tenseur contrainte** caractérisant l'état de contrainte en un point O d'un solide

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

ou encore, matriciellement,

$$\sigma = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix}}_{}$$

***Tenseur** volumétrique*
*ou **contrainte sphérique***

***Tenseur** déviatorique*
*ou **déviateur des contraintes***

Propriétés

En plasticité, on définit des **hypothèses restrictives** d’application :

- ❑ une distribution des contraintes homogène et uniforme (St Venant)
- ❑ on ne tient pas compte du facteur temps (sans viscosité, …)
- ❑ on est dans un stade de faibles déformations (bien avant la rupture)

La plasticité décrit **deux étapes de comportement** :

a) La condition (ou critère) d’atteinte de l’état plastique
b) Le comportement d’*écrouissage* une fois cette état plastique est atteint :
   - le durcissement ("hardening") plastique du matériau
   - l’adoucissement ("softening") plastique du matériau

Propriétés

a) Condition ou critère de plasticité

$$\begin{cases} F(\sigma_{\mathrm{ij}}, \varepsilon_{ij}^{pl}) = 0 \\ \varepsilon_{ij}^{pl} \quad \text{est le tenseur des déformations plastiques} \\ \sigma_{ij} \quad \text{est le tenseur des contraintes} \end{cases}$$

La formule $F(\sigma_{ij}, C, \ldots) = 0$ s'appelle un :

critère de plasticité (ou *de rupture)*

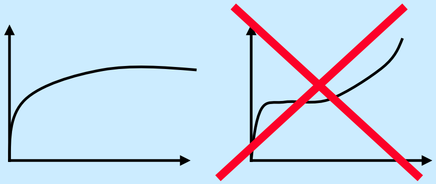
avec, C propriétés mécaniques typiques du matériau (σ_e, k …)

$$F_{\mathrm{Tresca}} = (\sigma_1 - \sigma_2) - 2k = 0$$

Propriétés

a) Condition ou critère de plastification

Tout critère défini par une fonction doit être **convexe** et :



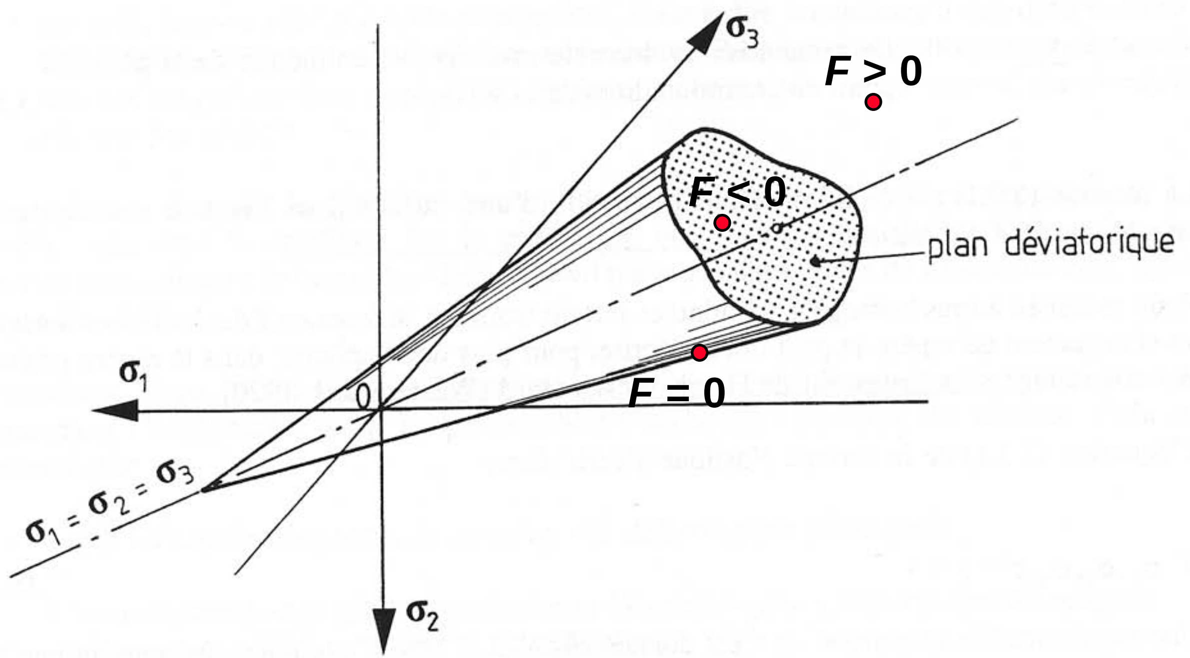
Si ***F* < 0**, on est ‘dans’ le critère $\Rightarrow$ ni plasticité ni rupture

Si ***F* = 0**, on est ‘sur’ le critère $\Rightarrow$ **plasticité** (ou rupture)

Si ***F* > 0**, hors critère, est impossible.

a) Condition ou critère de plastification

F est aussi appelée **la surface plastique**



Exemple de surface plastique dans l'espace des contraintes principales

Propriétés

b) Comportement après plastification

La différence fondamentale entre les déformations élastiques et plastiques vient du fait que <u>les déformations plastiques</u> sont fonctions du chemin ou de l'histoire des contraintes lors de l'application des sollicitations

⇨ **Formulation incrémentale des déformations**

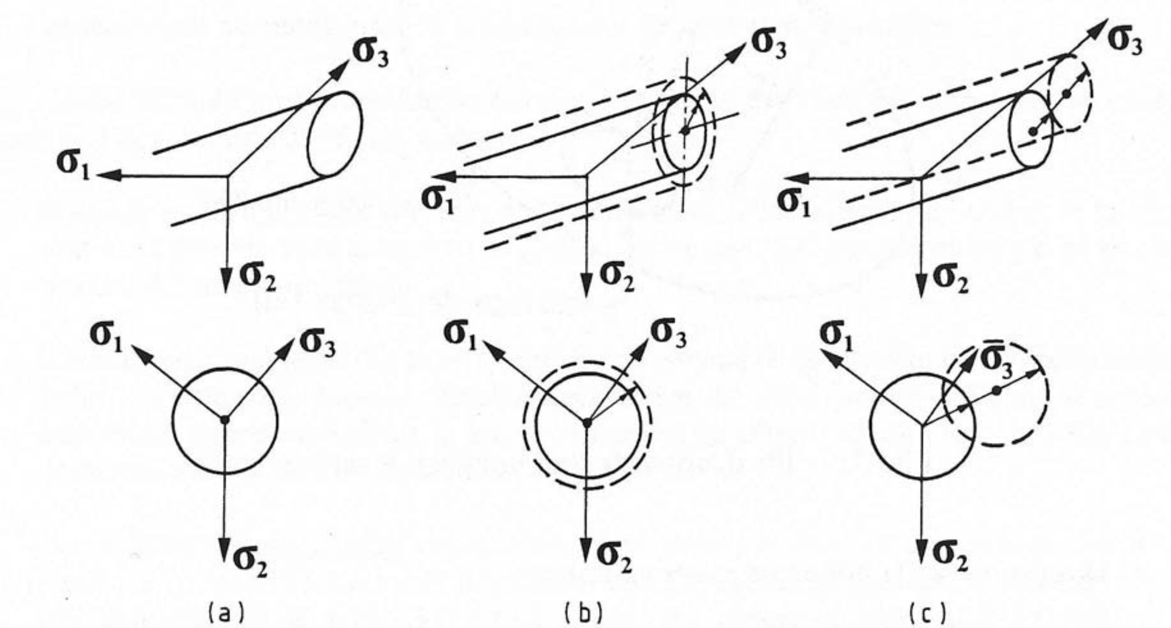
Selon Hill, 1950, $dW_{pl} = dW - dW_e = \sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{e}) = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^{pl}$

Ainsi, l'accroissement (incrément) des <u>déformations plastiques</u> est régi par une loi d'écoulement et on parle **d'écoulement plastique**

Propriétés

b) Comportement après plastification

Pendant l'écoulement plastique, le seuil de plasticité "***F*** " peut évoluer. On parle de **loi d'écrouissage**



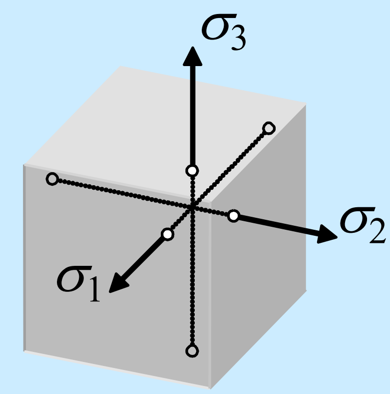
Surface plastique de type *von Mises*, (a) sans écrouissage, (b) avec écrouissage isotrope et (c) avec écrouissage cinématique

Critères de plasticité et rupture
2. Premières idées

Critère de la contrainte max (Rankine)

Plasticité ou rupture sous la contrainte principale maximale $\Rightarrow$

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_e \;\text{ ou }\; \sigma_t$$
$$|\sigma_{\mathrm{III}}| = \sigma_e \;\text{ ou }\; \sigma_c$$



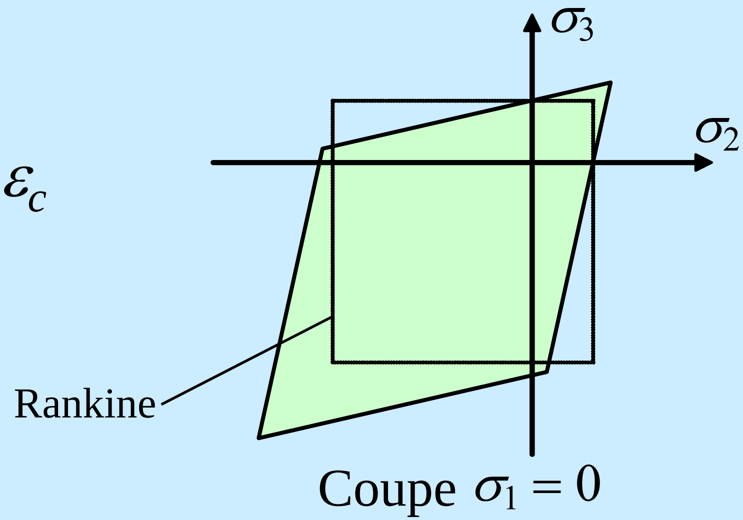
Critère *cubique*

Limite beaucoup trop la compression triaxiale

Critère de la déformation max (Saint-Venant)

Plasticité ou rupture sous la déformation principale maximale $\Rightarrow$

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_e \;\text{ ou }\; \varepsilon_t$$
$$\left|\varepsilon_{\mathrm{III}}\right| = \varepsilon_e \;\text{ ou }\; \varepsilon_c$$

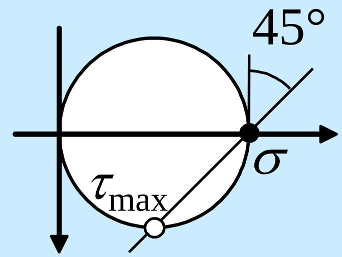


Ces deux critères, quasi 1D, sont trop simplistes

Critères de plasticité et rupture
3. Plasticité des métaux

1) *Tresca* (1864)-***Guest*** (1900), ou **‘*τ max*’**

Plasticité ⇒ lignes de Lüders à 45° ⇒ τ_{max} est déterminant !



Généralisation :

$\tau_{\mathrm{max,\,3D}}$ est déterminant !!! ⇒

$$\frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} = C$$

Critère à 1 paramètre, C, typique du matériau.

Trouver C ? Essai de traction pure $\Rightarrow$

$\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_e$ et $\sigma_{\mathrm{III}} = 0 \Rightarrow C = \sigma_e/2 \Rightarrow$

Critère de Tresca-Guest-τ max

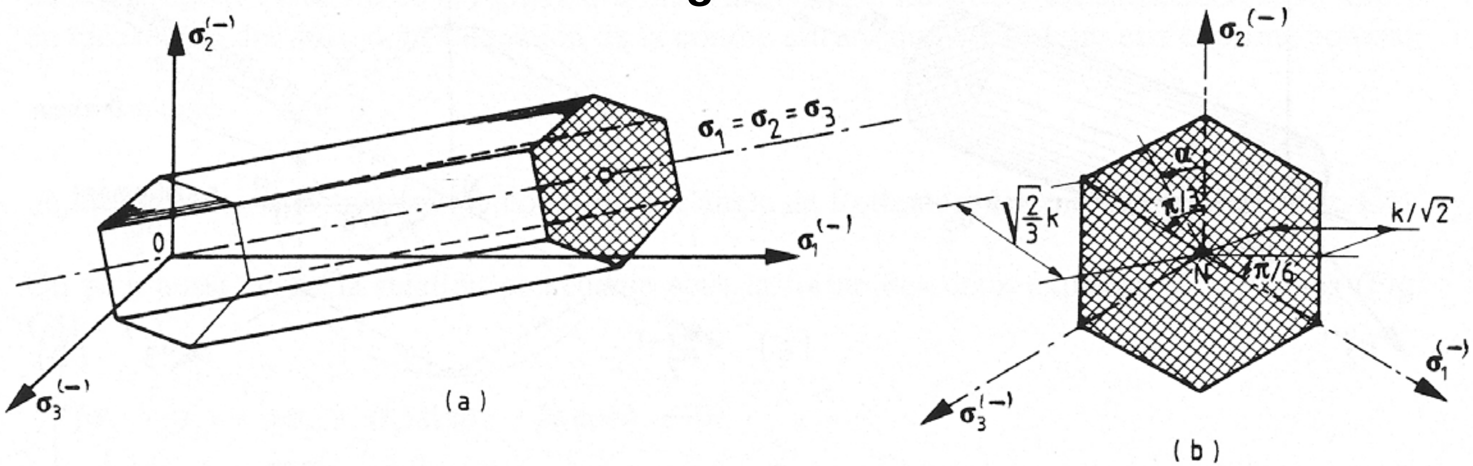
$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \sigma_e \qquad (1)$$

Linéaire

Pas d'effet de σ_{II} …

$$F_{\text{Tresca}} = (\sigma_1 - \sigma_2) - 2k = 0$$

Prisme hexagonal de Tresca



Représentation du critère plastique de Tresca
(a) en perspective , (b) dans le plan déviatorique

Critères de plasticité et rupture
3. Plasticité des métaux

2) *von Mises* (1913)-*Huber* (1904)

Cylindre circonscrit au prisme $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2}=\sigma_e}$$

Une seule équation (par commodité...)
Quadratique
Pas d'arêtes (peu 'naturelles')
Toutes les contraintes principales (σ_{II} !)
Meilleur vis-à-vis des essais (hasard !)

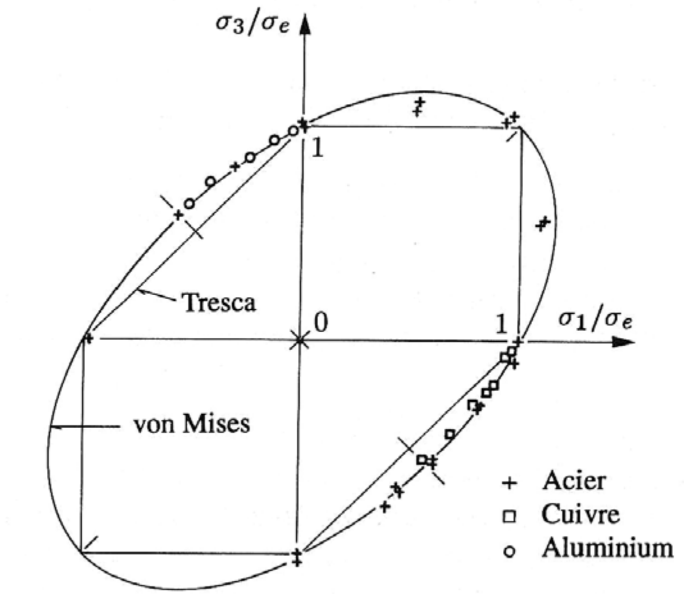
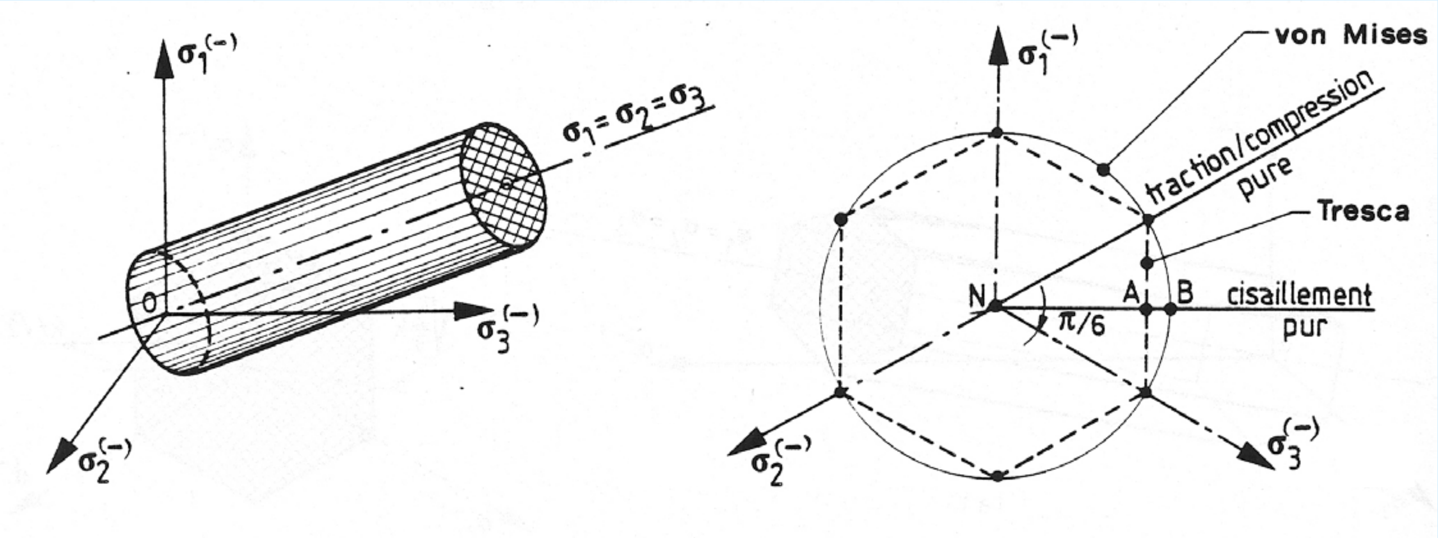


Fig. 7.35 Confrontation expérimentale.

$$F_{\text{von Mises}} = \sqrt{J_2} - k = 0$$

$$J_2 = -II_s = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$ 2ème invariant du tenseur déviateur des contraintes

$$J_2 = ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)/6$$

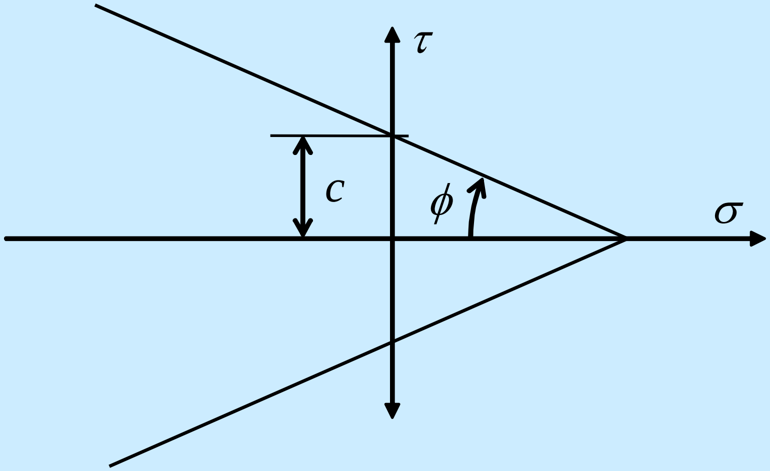


Critères de plasticité et rupture
4. Critère de géotechnique

1) ***Mohr*** (1900)-***Coulomb*** (1773)

Coulomb observe et admet une loi de rupture
$F(\sigma, \tau, C,\ldots) = 0$ *linéaire*

$$\boxed{|\tau| = c - \sigma\,\mathrm{tg}\phi}$$



Critère à deux paramètres:

c *cohésion*

ϕ *angle de frottement interne*

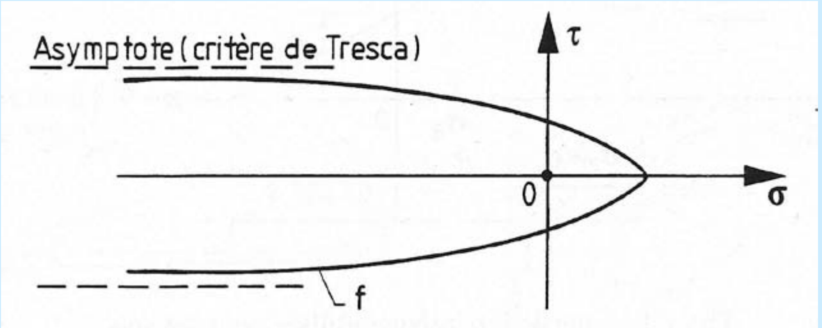
La *courbe intrinsèque* est linéaire

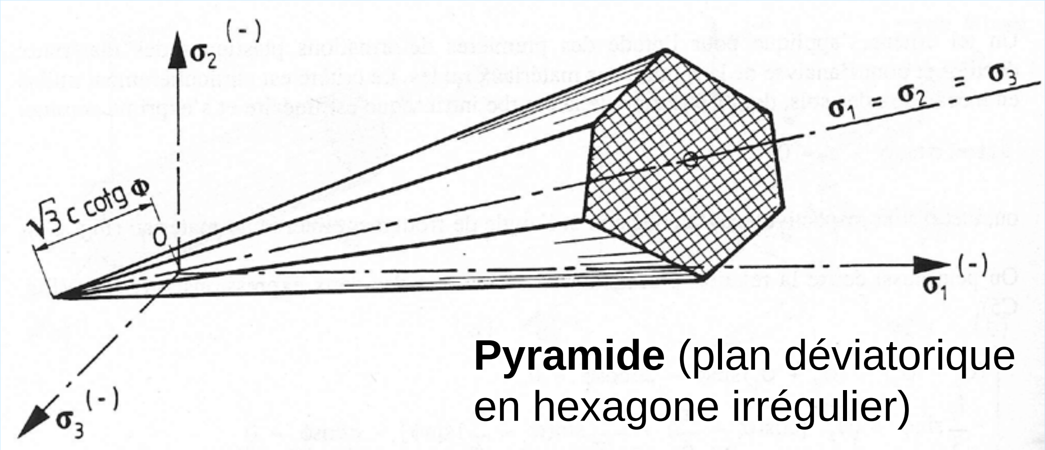
Applications : sols cohérents (argiles, limons), certaines roches (grès, calcaires…), voire le béton, la brique et la fonte

Mécanique des structures I

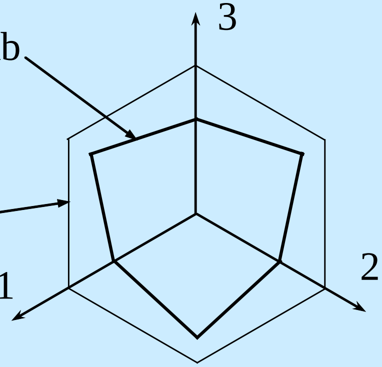
$$F_{\text{Mohr - Coulomb}} = (\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_1)\sin\phi - 2c\cos\phi = 0$$

$$F_{\text{Mohr - Coulomb}} = |\tau| - \sigma \,\mathrm{tg}\phi - c = 0$$



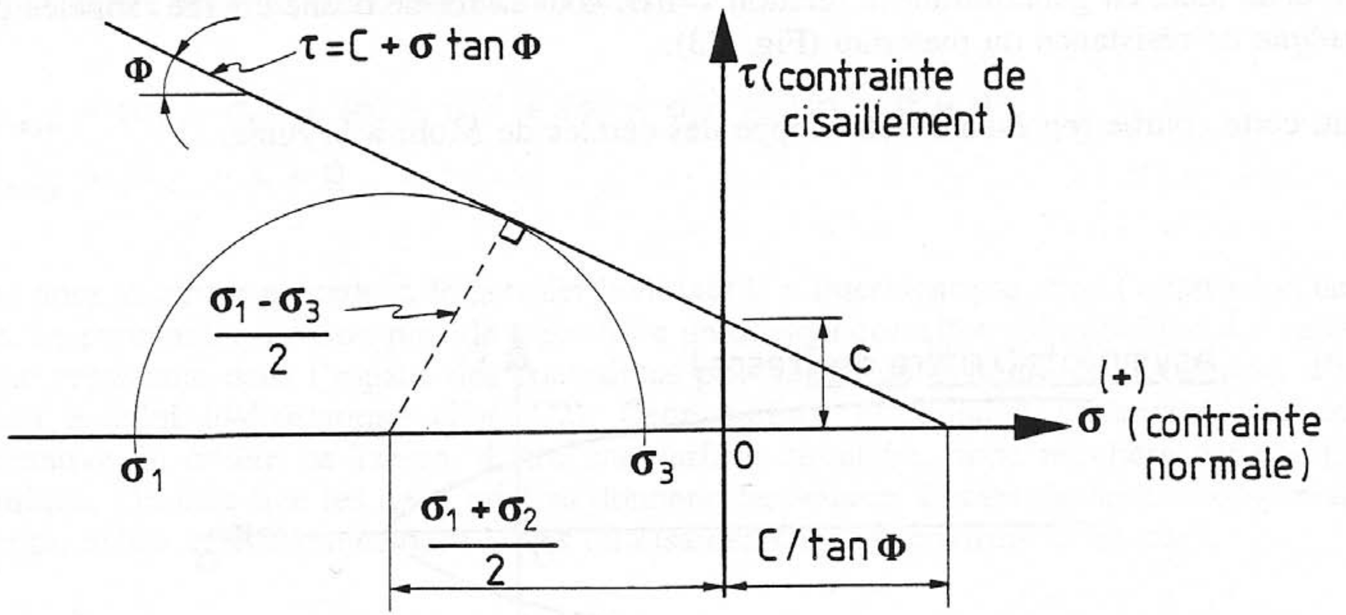


Pyramide (plan déviatorique en hexagone irrégulier)

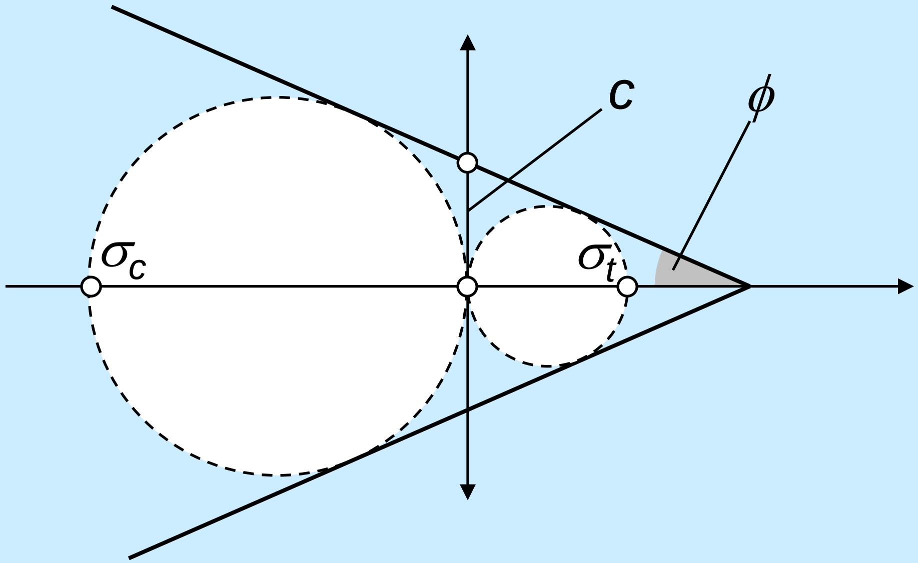


$$F_{\text{Mohr - Coulomb}} = (\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_1)\,\sin\phi - 2\mathrm{c}\cos\phi = 0$$

$$F_{\text{Mohr - Coulomb}} = |\tau| - \sigma\,\mathrm{tg}\phi - \mathrm{c} = 0$$



Courbe intrinsèque utilisée pour les sols



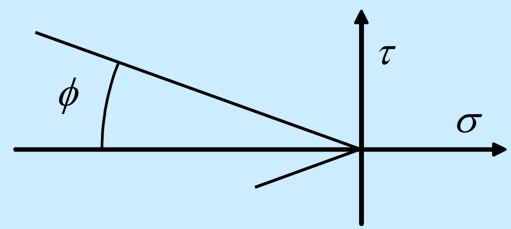
Liaison avec les resistances à la traction σ_t et à la compression σ_c :

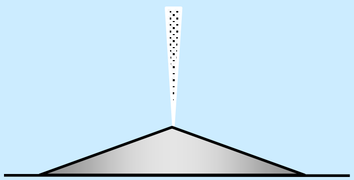
$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_c \, \sigma_t} \qquad \sin\phi = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}$$

Matériau pulvérulent (sables…)

Matériau sans cohésion : $c = 0$ et $\sigma_t = \sigma_c = 0$

$\Rightarrow$ ϕ seul paramètre (angle de talus naturel)





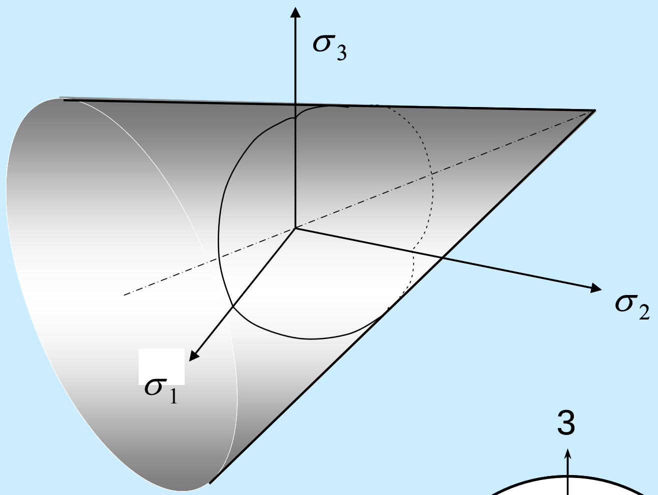
Critères de plasticité et rupture
4. Critère de géotechnique

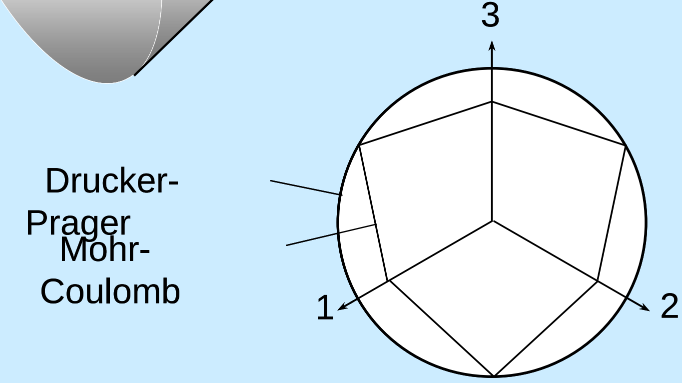
2) ***Drucker-Prager*** (1952)

Cône enveloppant le critère de Mohr-Coulomb
$\Rightarrow$ une seule équation et pas d'arêtes.
Equation :

$$\sqrt{J_2} + A I_\sigma - B = 0$$

Critère à deux paramètres.
Si $A \to 0$, Drucker-Prager $\to$ von Mises

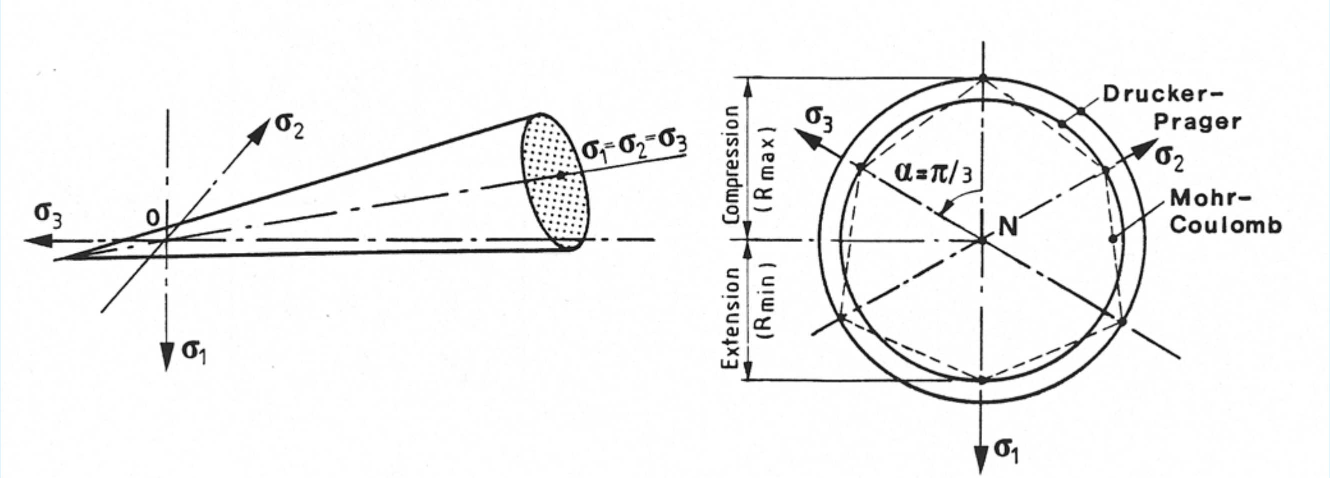




$$F_{\text{Drucker-Prager}} = a\,I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$$

$I_1 = \sigma_{ii}$ 1er invariant du tenseur des contraintes

$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ et $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3}\delta_{ij}$ 2ème invariant du tenseur déviateur des contraintes

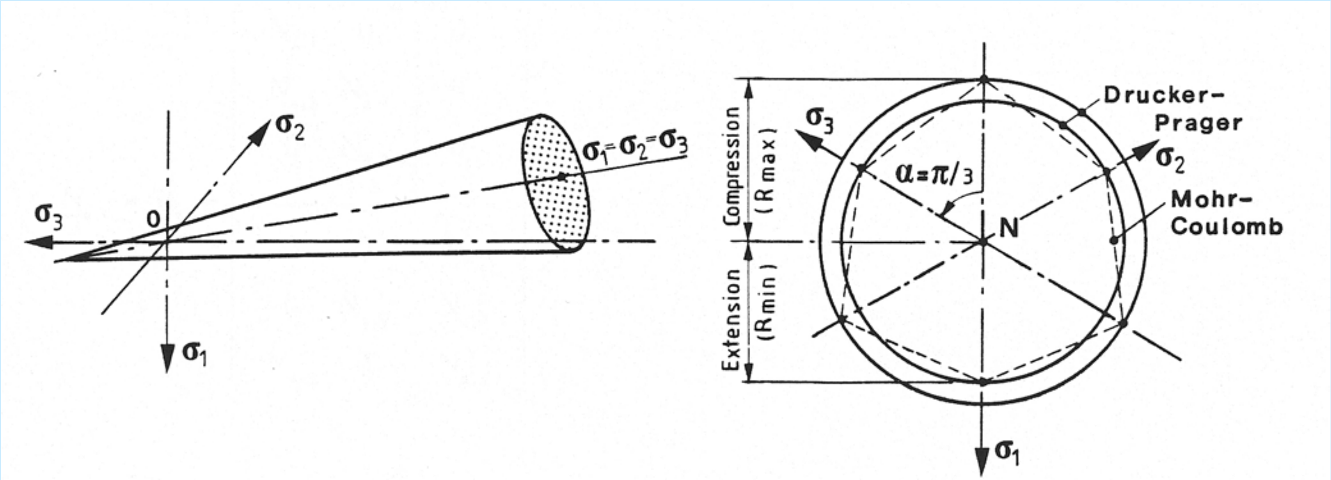


Relations entre les paramètres de Drucker-Prager et ceux de Mohr-Coulomb

$$F_{\text{Drucker-Prager}} = a\, I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$$

En compression axiale : $a = \dfrac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$ $\qquad k = \dfrac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$

En extension axiale : $a = \dfrac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$ $\qquad k = \dfrac{6C\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$



Propriétés élasto-plastiques des matériaux

Mots-clés à retenir impérativement

- tenseur des contraintes est la somme d'une partie **volumétrique** et d'une partie **déviatorique**

- la plasticité est décrite par deux étapes :
  - le **critère de plasticité** (passage d'un état élastique à un état plastique) avec la notion de l'existence d'une surface plastique (3D)
  - le comportement après plastification **(écrouissage)**

- développement de **modèles de comportement plastique**
  - modèle de von Mises (acier)
  - modèle de Mohr-Coulomb (sol)