Curvas Algebraicas

Práctica 3 – Primer Cuatrimestre de 2018

Ejercicio 1. Una recta L is *bitangente* a una cuártica plana X si L es tangente a X en cada punto de la intersección. Probar que el conjunto de cuárticas planas que tienen a una recta L fija como bitangente tiene codimensión 2 en el espacio de todas las cuárticas. Probar que toda cuártica irreducible tiene una bitangente.

Ejercicio 2. Probar que el número de puntos singulares de una curva plana irreducible de grado d es a lo sumo $\binom{d-1}{2}$ (Sugerencia: si no es cierto, encontrar una curva de grado d que pase por $\binom{d-1}{2}+1$ puntos singulares, y usar Bezout).

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{C}$ una curva plana no singular, y L una recta. Supongamos que la multiplicidad de L en $x \in X$ es $r \geq 2$.

- Probar que $r-2$ (llamada la multiplicidad de inflexión en x) es igual al orden de anulación de la Hessiana de $\mathcal{C}$ en x.
- Deducir que la suma de las multiplicidades de inflexión de una curva de grado d sobre todos los puntos de inflexión es igual a $3d(d-2)$.
- Si $d=3$, deducir que el número de puntos de inflexión es exactamente 9.

Ejercicio 4. Calcular $Pic(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es la curva projectiva $zy^2 = x^3$ (Cuidado que la curva es singular).

Ejercicio 5. Probar que $Pic(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ejercicio 6. Sea $\mathcal{C}$ una curva no singular de género 1, y fijemos un punto P_0 en $\mathcal{C}$.

1. Probar que para todo par de puntos $P, Q \in \mathcal{C}$, existe un único punto $R \in \mathcal{C}$ tal que
$$(P) + (Q) \sim (R) + (P_0).$$
Notemos $R = \sigma(P, Q)$.
2. Probar que la función $\sigma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ define una estructura de grupo en $\mathcal{C}$, cuyo neutro es P_0.
3. Miremos la función $\kappa : \mathcal{C} \to Pic^0(\mathcal{C})$ dada por $P \to (P) - (P_0)$. Probar que κ es una biyección de conjuntos. Luego podemos definir una operación en $\mathcal{C}$ por
$$P + Q = \kappa^{-1}(\kappa(P) + \kappa(Q)).$$
4. Probar que las operaciones definidas en los dos puntos anteriores coinciden.

Ejercicio 7. Probar que si dos cúbicas en $\mathbb{P}^2$ se cortan en exactamente 9 puntos distintos, entonces cualquier cúbica que pase por 8 de esos nueve puntos, pasa también por el noveno.

Ejercicio 8. Una curva hiperelíptica es una curva plana en $\mathbb{P}^2$ de la forma

$$\mathcal{C} : y^2 = p(x).$$

1. Probar que si $\mathcal{C}$ es una curva hiperelíptica, y $p(x)$ tiene grado d con todas sus raíces distintas, entonces el género de $\mathcal{C}$ satisface

$$d = \begin{cases} 2g+1 & \text{si } 2 \nmid d, \\ 2g+2 & \text{si } 2 \mid d. \end{cases}$$

2. Probar que si $\mathcal{C}$ es una curva de género 2, entonces se puede dar como una curva hiperelíptica.

3. Verificar (a mano) que si $\mathcal{C}$ es una curva hiperelíptica, y ω es una diferencial meromorfa en $\mathcal{C}$ entonces $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Ejercicio 9. Veamos que dice Bezout en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Sean $D_1, \ldots D_{n+m}$ divisores en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Fijemos E un hiperplano en $\mathbb{P}^n$ y F un hiperplano en $\mathbb{P}^m$.

1. Deducir del ejercicio 5 (o su resolución), que cada $D_i \sim a_i E + b_i F$.

2. Deducir que $D_1 \cdots D_{n+m} = \prod_{i=1}^{n+m}(a_i E + b_i F) = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_r} b_{j_1} \cdots b_{j_s} E^r \cdot F^s$, donde $r + s = n + m$.

3. Probar que si $r > n$ entonces $E^r = 0$. Análogamente, si $s > m$ entonces $F^s = 0$. Deducir que sólo sobreviven los términos donde $r = n$ y $s = m$.

4. Probar que $E^n \cdot F^m = 1$, y deducir una fórmula de Bezour para $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.