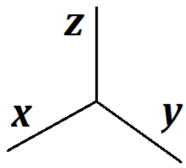
Jsou-li splněny podmínky **Věty 2.4.** [1], tedy že

- funkce $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$ definují prosté zobrazení $G(\varphi, \psi, \chi)$ a jakobián $J(u, v, w) \neq 0$, což **obě probírané transformace splňují**;
- integrovaná funkce $f(x, y, z)$ je na uzávěru $\overline{G(K)}$ oblasti $G(K)$ (oblast včetně hranic přes kterou integrujeme) **definovaná, spojitá i ohraničená**, tedy nikde na oblasti $G(K)$ ani nikde na její hranici „neutíká do nekonečna";
- uzavřenou oblast (přes kterou integrujeme) lze rozdělit na několik elementárních oblastí prvního, druhého, nebo třetího druhu

pak **platí**

$$\iiint\limits_{G(K)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{K} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w))\,|J(u, v, w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Následující obrázky jsou kresleny v kolmé axonometrii a souřadné osy (pokud nejsou zakresleny) jsou voleny takto:



Cylindrické/válcové souřadnice

Transformační rovnice jsou:

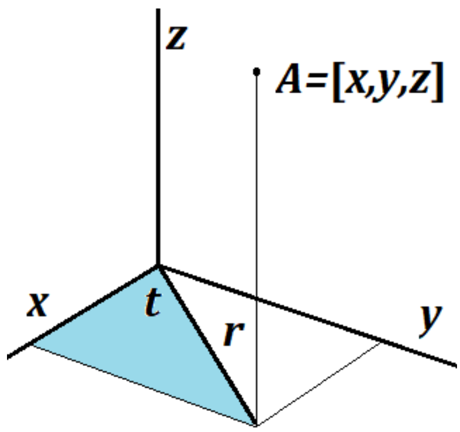
$$\begin{aligned} x &= r\cos t &&= \varphi(r, t, z) \\ y &= r\sin t &&= \psi(r, t, z) \\ z &= z &&= \chi(r, t, z) \end{aligned}$$

$$|J| = r$$

Tuto transformaci využíváme zejména, kde integrační oblast je válec nebo jeho část, nebo v případech, kdy pravoúhlým průmětem integrační oblasti do půdorysny (rovina $z = 0$) je kruh či jeho část.

Z obrázku je zřejmé,

- souřadnice r znamená vzdálenost bodu $A = [x, y, 0]$ (půdorysu bodu A) od počátku, tedy délku průvodiče bodu $[x, y, 0]$;
- souřadnice t označuje orientovaný úhel mě–řený v půdorysně od kladného směru osy x po průvodič bodu $[x, y, 0]$;
- souřadnice s je z–tová souřadnice bodu $A = [x, y, z]$;



tedy význam válcových souřadnic r, t je stejný jako v případě polárních souřadnic u dvojrozměrných integrálů. Třetí souřadnice z se nemění.

[1] Strana 40 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Dvojný a trojný integrál*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–453–2.

1. Vypočítejte trojný integrál

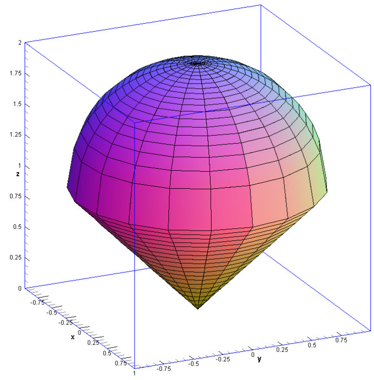
$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí: $$\sqrt{x^2+y^2} \le z \qquad x^2+y^2+z^2 \le 2z$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Určíme mezní plochy

$\sqrt{x^2+y^2} = z$ rotační kuželová plocha

$x^2+y^2+z^2 = 2z$ kulová plocha



Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$x = r\cos t \qquad y = r\sin t \qquad z = z$$

$$|J| = r$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$\sqrt{x^2+y^2} = z$$
$$\sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2} = z$$
$$\sqrt{r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)} = z$$
$$|r| = z$$
$$(0 \le r \le z)$$

$$x^2+y^2+z^2 = 2z$$
$$(r\cos t)^2+(r\sin t)^2+r^2 = 2r$$
$$r^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}+r^2 = 2r$$
$$2r^2-2r = 0$$
$$r(r-1) = 0$$
$$(r_1 = 0\,;\ r_2 = 1)$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}+z^2 \le 2z$$
$$z^2-2z \le -r^2$$
$$z^2-2z+1 \le 1-r^2$$
$$(z-1)^2 \le 1-r^2$$
$$z-1 \le \sqrt{1-r^2}$$
$$z \le 1+\sqrt{1-r^2}$$

A když to shrneme: $$0 \le r \le 1$$ $$0 \le t \le 2\pi$$ $$r \le z \le 1+\sqrt{1-r^2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} \underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r\,\big[z\big]_r^{1+\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \left\langle r\,;\ 1+\sqrt{1-r^2}\right\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r\left[\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)-(r)\right]\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \left(r-r^2\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\cdot\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t =$$

$$\left| \begin{aligned} \sqrt{1-r^2} &= s \\ 1-r^2 &= s^2 \\ -2r\,\mathrm{d}r &= 2s\,\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}r &= \tfrac{-s}{r}\,\mathrm{d}s \end{aligned} \right| = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\left[\int_{r=0}^{r=1} rs\frac{-s}{r}\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left[\frac{s^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left[\frac{\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $r \in \langle -1\,;\,1\rangle$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-0\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-0\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(0-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big[t\big]_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\big[t\big]_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\big[t\big]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= \frac{1}{2}(2\pi-0) - \frac{1}{3}(2\pi-0) + \frac{1}{3}(2\pi-0) = \underline{\underline{\pi}}$$

2. Vypočítejte trojný integrál

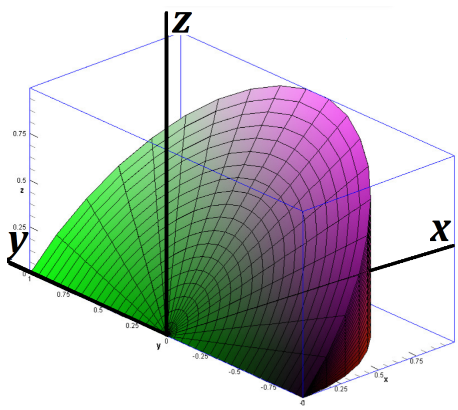
$$\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\le 9 \\ 0 &\le x \\ 0 \le z &\le 3x \end{aligned}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

Určíme mezní plochy

$0 = x$	rovina
$0 = z$	rovina
$z = 3x$	rovina
$x^2+y^2 = 9$	rotační válcová plocha (poloměr 3)



Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \\ z &= z \end{aligned}$$

$$|J| = r$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$0 = r\cos t$$
$$\Downarrow$$
$$r = 0 \vee t = -\tfrac{\pi}{2} \vee t = \tfrac{\pi}{2}$$

nebo přímo z obrázku

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 9 \\ (r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 &= 9 \\ r^2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} &= 9 \\ |r| &= 3 \\ (0 \le r &\le 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \le r &\le 3 \\ -\tfrac{\pi}{2} \le t &\le \tfrac{\pi}{2} \\ 0 \le z &\le 3r\cos t \end{aligned}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^3 \left(\int\limits_0^{3r\cos t} \underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^3 r\,\Big[z\Big]_0^{3r\cos t}\,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0\,;\, 3r\cos t\rangle$, proto

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^3 r\,[(3r\cos t) - (0)]\,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cos t \int\limits_0^3 r^2\,\mathrm{d}r \right] \mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3 \mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\, 3\rangle$, proto

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \left(\frac{3^3}{3} - 0\right) \mathrm{d}t = 27 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = 27\,\Big[\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\rangle$, proto

$$= 27 \left[\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} \right] = \underline{\underline{54}}$$

3. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:

$$x^2 + y^2 - y \le 0$$
$$x^2 + y^2 \le z$$
$$0 \le z$$

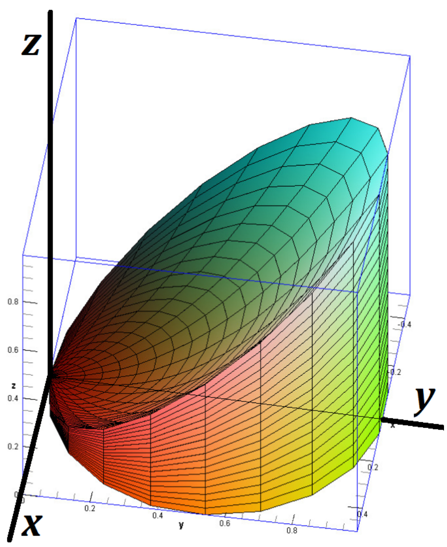
/$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{R}$/

Určíme mezní plochy

$x^2 + y^2 - y = 0$ rotační válcová plocha

$x^2 + y^2 = z$ rotační paraboloid
horní podstava válce

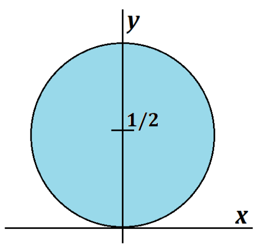
$z = 0$ rovina - dolní podstava válce



A) Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$
$$z = z$$

$$|J| = r$$



Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$x^2+y^2-y=0 \qquad\qquad x^2+y^2=z$$

$$(r\cos t)^2+(r\sin t)^2-r\sin t=0 \qquad\qquad (r\cos t)^2+(r\sin t)^2=z$$

$$r^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}-r\sin t=0 \qquad\qquad r^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}=z$$

$$r(r-\sin t)=0 \qquad\qquad r^2=z$$

$$\Downarrow$$

$$(0\le r)\ \ r=0 \vee r=\sin t$$

$$0\le r\le \sin t$$
$$0\le t\le \pi$$
$$0\le z\le r^2$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int\limits_0^{\pi}\left[\int\limits_0^{\sin t}\left(\int\limits_0^{r^2}\underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\pi}\left\{\int\limits_0^{\sin t} r\,\big[z\big]_0^{r^2}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t=$$

primitivní funkce je spojitá pro $z\in\mathbb{R}$, tedy i pro $z\in\langle 0\,;\,r^2\rangle$, proto

$$=\int\limits_0^{\pi}\left[\int\limits_0^{\sin t} r(r^2-0)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sin t}\mathrm{d}t=$$

primitivní funkce je spojitá pro $r\in\mathbb{R}$, tedy i pro $r\in\langle 0\,;\,\sin t\rangle$, proto

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin^4 t}{4}-0\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(\sin^2 t\right)^2\mathrm{d}t=$$

$$\begin{array}{|l|}\cos^2 t+\sin^2 t=1\\ \cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t \quad |\cdot(-1)\\ \hline \quad 2\sin^2 t=1-\cos 2t\end{array}\ \sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2t)^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}t-\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}2\cos\underbrace{2t}_{=s}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}\cos^2 2t\,\mathrm{d}t=$$

$$\begin{array}{|l|}\cos^2 2t+\sin^2 2t=1\\ \cos^2 2t-\sin^2 2t=\cos[2(2t)]\\ \hline \quad 2\cos^2 2t=1+\cos 4t\end{array}\quad \cos^2 2t=\frac{1+\cos 4t}{2}$$

$$=\frac{1}{16}\big[t\big]_0^{\pi}-\frac{1}{16}\int\limits_{t=0}^{t=\pi}2\cos s\cdot\frac{\mathrm{d}s}{2}+\frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{16}\big[t\big]_0^{\pi}-\frac{1}{16}\big[\sin s\big]_{t=0}^{t=\pi}+\frac{1}{32}\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}t+\frac{1}{32}\int\limits_0^{\pi}\cos\underbrace{4t}_{=u}\,\mathrm{d}t=$$

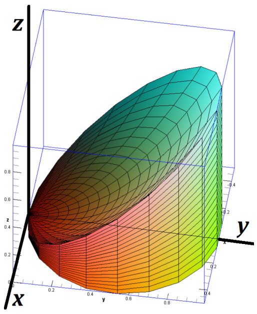
$$=\frac{1}{16}\big[t\big]_0^{\pi}-\frac{1}{16}\big[\sin 2t\big]_0^{\pi}+\frac{1}{32}\big[t\big]_0^{\pi}+\frac{1}{32}\int\limits_0^{\pi}\cos u\frac{\mathrm{d}u}{4}=\frac{3}{32}\big[t\big]_0^{\pi}-\frac{1}{16}\big[\sin 2t\big]_0^{\pi}+\frac{1}{128}\big[\sin u\big]_{t=0}^{t=\pi}=$$

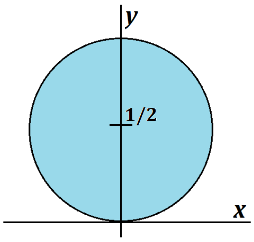
$$=\frac{3}{32}\big[t\big]_0^{\pi}-\frac{1}{16}\big[\sin 2t\big]_0^{\pi}+\frac{1}{128}\big[\sin 4t\big]_0^{\pi}$$

primitivní funkce jsou spojité pro $t\in\mathbb{R}$, tedy i pro $t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$, proto

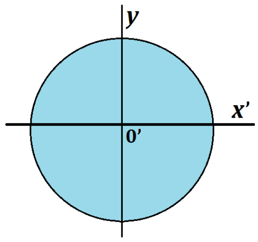
$$=\frac{3}{32}\cdot(\pi-0)-\frac{1}{16}\cdot(\underbrace{\sin 2\pi}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0})+\frac{1}{128}\cdot(\underbrace{\sin 4\pi}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0})=\underline{\underline{\frac{3\pi}{32}}}$$

B) Transformujeme do ***POSUNUTÝCH* válcových souřadnic**:





$$x = r\cos t$$
$$y = \tfrac{1}{2} + r\sin t$$
$$z = z$$
$$|J| = r$$



Nejprve určíme *jakobián*. Protože víme, že do determinantu dosazujeme parciální derivace jednotlivých proměnných a **derivace konstanty je nula**, tak ať ke kterékoliv proměnné přičteme jakékoliv číslo, na hodnotu derivace (a tím také determinantu) to nebude mít vliv.

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$x^2 + y^2 - y = 0$$
$$(r\cos t)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + r\sin t\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2} + r\sin t\right) = 0$$
$$r^2\cos^2 t + \tfrac{1}{4} + r\sin t + r^2\sin^2 r - \tfrac{1}{2} - r\sin t = 0$$
$$r^2\underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{1} - \tfrac{1}{4} = 0$$
$$r^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$\Downarrow$$

vzdálenost r $(0 \le r)$ nezávisí na úhlu t : $r = \pm\frac{1}{2}$

Tedy střed kružnice je v **POČÁTKU**

$$x^2 + y^2 = z$$
$$(r\cos t)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + r\sin t\right)^2 = z$$
$$r^2\cos^2 t + \tfrac{1}{4} + r\sin t + r^2\sin^2 r = z$$
$$r^2\underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{1} + \tfrac{1}{4} + r\sin t = z$$
$$r^2 + r\sin t + \tfrac{1}{4} = z$$

$$0 \le r \le \tfrac{1}{2}$$
$$0 \le t \le 2\pi$$
$$0 \le z \le r^2 + r\sin t + \tfrac{1}{4}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{r^2+r\sin t+\frac{1}{4}} \underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} r\left[z\right]_0^{r^2+r\sin t+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \left\langle 0\,;\, r^2 + r\sin t + \frac{1}{4}\right\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} r\left[\left(r^2 + r\sin t + \frac{1}{4}\right) - 0\right]\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[r^3 + r^2\sin t + \frac{r}{4}\right]\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} r^3\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} r^2\sin t\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{4}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sin t \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \left\langle 0\,;\, \frac{1}{2}\right\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - 0\right] \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sin t \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - 0\right] \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - 0\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{64}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{32}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \frac{3}{64}\left[t\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{24}\left[-\cos t\right]_0^{2\pi} =$$

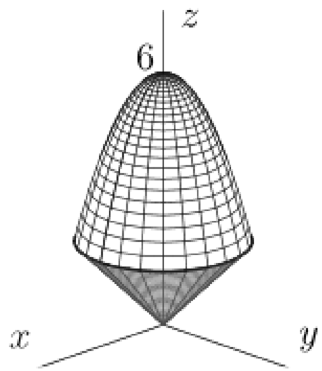
primitivní funkce jsou spojité pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\, 2\pi\rangle$, proto

$$= \frac{3}{64}(2\pi - 0) - \frac{1}{24}(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\cos 0}_{1}) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{32}}}$$

4. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \;,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$ $\qquad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2$



Určíme mezní plochy

$\sqrt{x^2 + y^2} = z \quad (z \ge 0)$ — rotační kuželová plocha (s vrcholem v počátku)

$z = 6 - x^2 - y^2$ — rotační paraboloid (se stejnou osou rotace z jako kužel) a vrcholem v bodě $[0; 0; 6]$

půdorysná kružnice:

$$\begin{aligned} z &= z \\ \sqrt{x^2+y^2} &= 6-x^2-y^2 \\ \sqrt{x^2+y^2} &= 6-(x^2+y^2) \\ z &= 6-z^2 \\ z^2+z-6 &= 0 \\ (z+3)(z-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 6-x^2-y^2 \\ x^2+y^2 &= 4 \end{aligned}$$

má poloměr 2

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$
$$z = z$$

$$|J| = r$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do mezních ploch:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= z \\ \sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2} &= z \\ \sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}} &= z \\ (0\le r)\quad |r| &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 6-x^2-y^2 \\ z &= 6-(r\cos t)^2-(r\sin t)^2 \\ z &= 6-r^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1} \\ z &= 6-r^2 \end{aligned}$$

$$0\le r\le 2$$
$$0\le t\le 2\pi$$
$$r\le z\le 6-r^2$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left(\int_r^{6-r^2}\underbrace{\sqrt{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}}_{r}\,\underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left(r^2\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^2 r^2\,\Big[z\Big]_r^{6-r^2}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z\in\mathbb{R}$, tedy i pro $z\in\langle r\,;\,6-r^2\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^2 r^2\left[(6-r^2)-(r)\right]\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 6r^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} 6\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $r\in\mathbb{R}$, tedy i pro $r\in\langle 0\,;\,2\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi} 6\left(\frac{2^3}{3}-0\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(\frac{2^5}{5}-0\right)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\left(\frac{2^4}{4}-0\right)\mathrm{d}t = 16\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t - \frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t - 4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{80-32-20}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{28}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{28}{5}\Big[t\Big]_0^{2\pi}$$

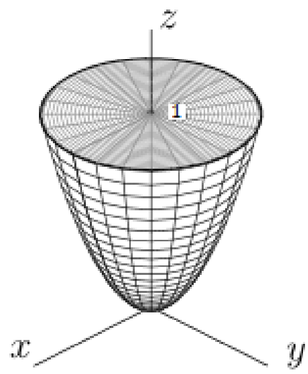
primitivní funkce je spojitá pro $t\in\mathbb{R}$, tedy i pro $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= \frac{28}{5}(2\pi-0) = \underline{\underline{\frac{56}{5}\pi}}$$

5. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí: $$x^2 + y^2 \le z$$ $$z \le 1$$

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}$/



Určíme mezní plochy

$x^2 + y^2 = z$ rotační paraboloid

$z = 1$ rovina

Transformujeme do **válcových souřadnic**:

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$
$$z = z$$

$$|J| = r$$

Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Transformační rovnice dosadíme do rotačního paraboloidu:

$$x^2 + y^2 = z$$
$$(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = z$$
$$r^2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} = z$$
$$(0 \le r)\quad |r| = \sqrt{z}$$

$$0 \le r \le \sqrt{z}$$
$$0 \le t \le 2\pi$$
$$0 \le z \le 1$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{z}}\underbrace{(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)}_{r^2}\,\underbrace{r}_{|J|}\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{z}}\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\,\sqrt{z}\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left[\frac{(\sqrt{z})^4}{4} - 0\right]\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}t =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 0\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{12}\left[t\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= \frac{1}{12}(2\pi - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

Sférické/kulové souřadnice

Transformační rovnice jsou:

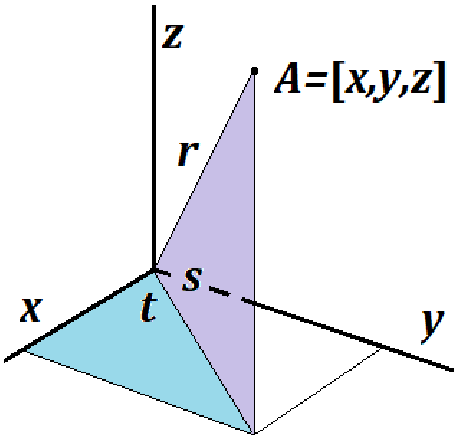
$$\begin{aligned} x &= r\cos t\cos s = \varphi(r,t,s) \\ y &= r\sin t\cos s = \psi(r,t,s) \\ z &= r\sin s \qquad\ \ = \chi(r,t,s) \end{aligned}$$

$$|J| = r^2\cos s$$

Tuto transformaci využíváme zejména, kde integrační oblast je koule nebo její část, nebo v případech, kdy pravoúhlým průmětem integrační oblasti do půdorysny (rovina $z = 0$) je kruh či jeho část.

Z obrázku je zřejmé, že:

- souřadnice r znamená vzdálenost bodu $A = [x, y, z]$ od počátku;
- souřadnice t označuje orientovaný úhel měřený v půdorysně od kladného směru osy x po průvodič bodu $[x, y, 0]$ (= půdorys A_1 bodu A);
- souřadnice s označuje orientovaný úhel měřený od půdorysny po průvodič bodu $A = [x, y, z]$.



1. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$

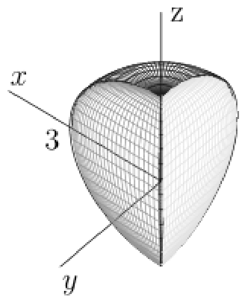
kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:

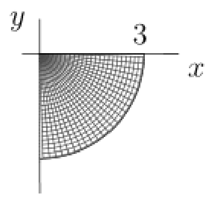
$$\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\le 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\le 9 \end{aligned}$$

/$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{R}$/

Určíme mezní plochy

$x = 0$	rovina
$y = 0$	rovina
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$	kulová plocha





Transformujeme do **sférických souřadnic**:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t\cos s \\ y &= r\sin t\cos s \\ z &= r\sin s \end{aligned}$$

$$|J| = r^2\cos s$$

Z obrázku **stanovíme meze pro jednotlivé proměnné**

$$0 \le r \le 3$$

$$\tfrac{3}{2}\pi \le t \le 2\pi$$

$$\left(-\tfrac{\pi}{2} \le t \le 0\right)$$

$$-\tfrac{\pi}{2} \le s \le \tfrac{\pi}{2}$$

Na pořadí jednotlivých proměnných při sestavování integrálu nezáleží, všechny meze jsou konstantní,

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 \sqrt{(r\cos t\cos s)^2 + (r\sin t\cos s)^2 + (r\sin s)^2} \cdot \underbrace{r^2\cos s}_{|J|}\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 \sqrt{r^2\cos^2 s\ \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} + r^2\sin^2 s} \cdot r^2\cos s\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 \sqrt{r^2\ \underbrace{(\cos^2 s + \sin^2 s)}_{1}} r^2\cos s\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 r^3\cos s\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos s \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\,3\rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos s \left(\frac{3^4}{4} - 0\right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s = \frac{81}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \frac{81}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s\ \big[t\big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\ \mathrm{d}s =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle \frac{3}{2}\pi\,;\,\pi\rangle$, proto

$$= \frac{81}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \left(2\pi - \frac{3}{2}\pi\right) \mathrm{d}s = \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s\ \mathrm{d}s = \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \big[\sin s\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $s \in \mathbb{R}$, tedy i pro $s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2} \right\rangle$, proto

$$= \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin\frac{-\pi}{2}}_{-1} \right) = \underline{\underline{\frac{81}{4}\pi}}$$

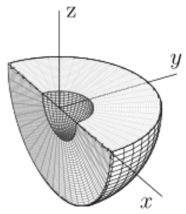
2. Vypočítejte trojný integrál

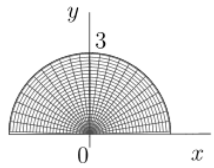
$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí:
$$y \geq 0,\quad z \leq 0,\quad 1 \leq x^2+y^2+z^2,\quad x^2+y^2+z^2 \leq 9$$

/$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{R}$/

Určíme mezní plochy

$x = 0$	rovina
$y = 0$	rovina
$1 = x^2+y^2+z^2$	kulová plocha (poloměr 1)
$x^2+y^2+z^2 = 9$	kulová plocha (poloměr 3)





Transformujeme do **sférických souřadnic**:

$$x = r\cos t\cos s$$
$$y = r\sin t\cos s$$
$$z = r\sin s$$

$$|J| = r^2\cos s$$

Z obrázku **stanovíme meze pro jednotlivé proměnné** $1 \leq r \leq 3$

$0 \leq t \leq \pi$

Na pořadí jednotlivých proměnných při sestavování integrálu nezáleží, všechny meze jsou konstantní, $-\frac{\pi}{2} \leq s \leq 0$

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left\{ \int\limits_{0}^{\pi} \left(\int\limits_{1}^{3} [(r\cos t\cos s)^2 + (r\sin t\cos s)^2] \cdot \underbrace{r^2\cos s}_{|J|}\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\int\limits_{0}^{\pi} \left(\int\limits_{1}^{3} r^2\cos^2 s\ \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} \cdot r^2\cos s\ \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\int\limits_{0}^{\pi} \left(\int\limits_{1}^{3} r^4\cos^3 s\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left\{ \int\limits_{0}^{\pi} \cos^3 s \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^3 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 1\,;\,3\rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\int_{0}^{\pi} \cos^3 s \left(\frac{3^5}{5} - \frac{1}{5} \right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s = \frac{3^5 - 1}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3 s \left(\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \frac{242}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3 s \, \big[t \big]_0^{\pi} \, \mathrm{d}s =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,\pi \rangle$, proto

$$= \frac{242}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3 s \, (\pi - 0) \, \mathrm{d}s = \frac{242\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 s \cdot \cos s \; \mathrm{d}s = \frac{242\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \sin^2 s) \cdot \cos s \; \mathrm{d}s =$$

$$\left| \begin{array}{c} \sin s = u \\ \cos s \;\, \mathrm{d}s = du \\ \mathrm{d}s = \frac{1}{\cos s} \, \mathrm{d}u \\ \begin{array}{c|c} s & u \\ \hline 0 & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & -1 \end{array} \end{array} \right| \qquad = \frac{242\pi}{5} \int_{-1}^{0} (1 - u^2) \cdot \cos s \cdot \frac{1}{\cos s} \, \mathrm{d}u = \frac{242\pi}{5} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{0} =$$

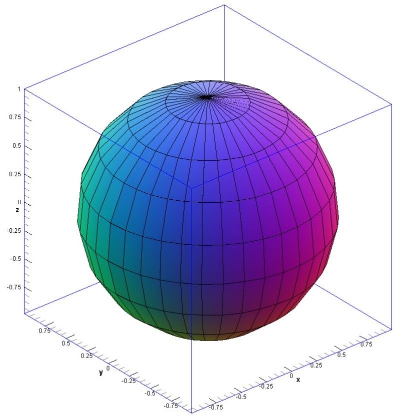
primitivní funkce je spojitá pro $u \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \langle -1\,;\,0 \rangle$, proto

$$= \frac{242\pi}{5} \left\{ (0) - \left[-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right] \right\} = \frac{242\pi}{5} \left[1 + \frac{-1}{3} \right] = \frac{242\pi}{5} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{484}{15}\,\pi}}$$

3. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti Ω platí: $x^2+y^2+z^2 \le 1$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$



Určíme mezní plochu

$x^2+y^2+z^2 = 1$ kulová plocha (poloměr 1)

vlastně počítáme objem koule $\Rightarrow\ \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$

Transformujeme do **sférických souřadnic**

$$x = r\cos t\cos s \qquad 0 \le r \le 1$$
$$y = r\sin t\cos s \qquad 0 \le t \le 2\pi$$
$$z = r\sin s$$
$$|J| = r^2\cos s \qquad -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}$$

a z obrázku **stanovíme meze pro jednotlivé proměnné**

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \underbrace{r^2\cos s}_{|J|}\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos s \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s =$$

primitivní funkce je spojitá pro $r \in \mathbb{R}$, tedy i pro $r \in \langle 0\,;\,1\rangle$, proto

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \cos s \left(\frac{1}{3} - 0\right) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}s = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s\, \big[t\big]_0^{2\pi}\, \mathrm{d}s =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, proto

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s\,(2\pi - 0)\,\mathrm{d}s = \frac{2\pi}{3} \big[\sin s\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $s \in \mathbb{R}$, tedy i pro $s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$, proto

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin\frac{-\pi}{2}}_{-1} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}}$$