A502 - Teoría de Sistemas y Señales

Transparencias

Densidad Espectral de Energía de Señales Aperiódicas

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

Algunas Definiciones

- **Señales de Potencia**

  Verifican

TD: $$0 < P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 < \infty \qquad (1)$$

TC: $$0 < P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt < \infty \qquad (2)$$

Algunas Definiciones (cont.)

- **Señales de Energía**

  Verifican

TD: $$0 < E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) \right|^2 < \infty \qquad (3)$$

TC: $$0 < E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left| x(t) \right|^2 dt < \infty \qquad (4)$$

Algunas Definiciones (cont.)

- **Señales Periódicas**

  Una señal en $x(n)$ es periódica con período N (N>0) si y sólo si verifica

$$x(n) = x(n+N) \qquad \text{para todo n} \qquad (5)$$

- **Señales Aperiódicas**

  Si no se verifica (5) para ningún N, la señal se denomina **aperiódica.**

Análisis Frecuencial de Señales en TC

- **Señales Periódicas**

Bajo ciertas hipótesis, una señal periódica x(t) con período $T_p = 1/F_0$ puede representarse con la denominada Serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j2\pi k F_0 t} \qquad (6)$$

Ecuación de Síntesis

donde c_k son los denominados Coeficientes de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \qquad (7)$$

Ecuación de Análisis

La convergencia de la Serie de Fourier a x(t) para todo valor de t, queda garantizada si se verifican las Condiciones de Dirichlet:(condiciones suficientes)

- x(t) tiene un número finito de discontinuidades en cualquier período.
- x(t) contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier período.
- x(t) es absolutamente integrable en cualquier período

$$\int_{T_p} |x(t)| \, dt < \infty \qquad (8)$$

- Puede probarse la siguiente identidad (una de las formas de la Identidad de Parseval) que permite calcular la potencia media en función de los Coeficientes de Fourier (es decir en el dominio frecuencial)

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \qquad (9)$$

Por razones obvias a los $|c_k|^2$ se los denomina Densidad Espectral de Potencia de la señal x(t).

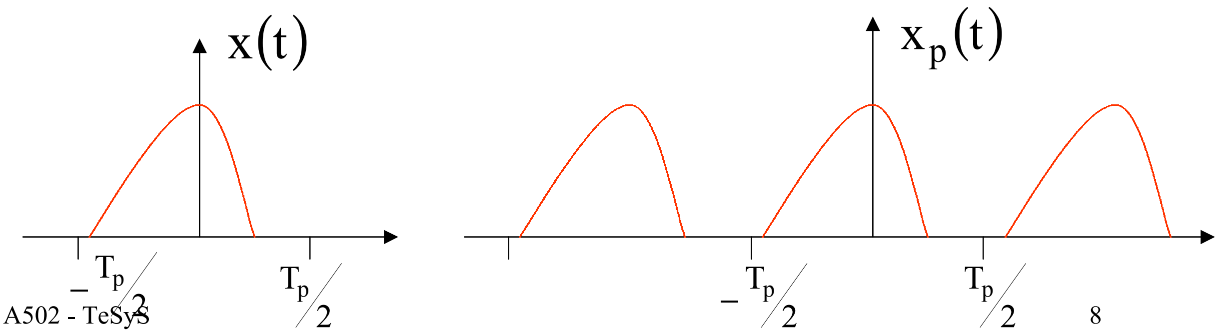
En este caso resulta un espectro discreto o de líneas.

- **Señales aperiódicas**

A partir de una señal aperiódica $x(t)$ (de duración finita) puede generarse una señal periódica $x_p(t)$, tal que

$$x_p(t) = x(t)$$

en el límite cuando $T_p \to \infty$



Como $x_p(t)$ es periódica puede representarse mediante su Serie de Fourier. En el límite cuando

$T_p \rightarrow \infty$ la serie da lugar a una integral que es la denominada Transformada Inversa de Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)\, e^{j2\pi Ft} dF \qquad \textbf{Ecuación de Síntesis} \qquad (10)$$

donde $X(F)$ es la denominada Transformada de Fourier, definida como

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi Ft} dt \qquad \textbf{Ecuación de Análisis} \qquad (11)$$

Las condiciones (suficientes) que garantizan la existencia de la Transformada de Fourier son las denominadas Condiciones de Dirichlet

- x(t) tiene un número finito de discontinuidades.
- x(t) tiene un número finito de máximos y mínimos.
- x(t) es absolutamente integrable, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \qquad (12)$$

Densidad Espectral de Energía

Sea x(t) una señal de energía con transformada de Fourier X(F). La energía de la señal viene dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)e^{-j2\pi Ft}dF\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)dF\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF$$

Es decir se estableció lo siguiente

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \qquad (13)$$

que constituye otra de las formas de la Identidad de Parseval, y que permite calcular la energía de la señal en el dominio frecuencial, usando la transformada de Fourier. Debido a que su integral sobre todas las frecuencias es la energía de la señal, a la cantidad

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2 \qquad (14)$$

se la denomina Densidad Espectral de Energía.

La energía de la señal sobre una banda de frecuencias

$$F_1 < F < F_2$$

puede calcularse como

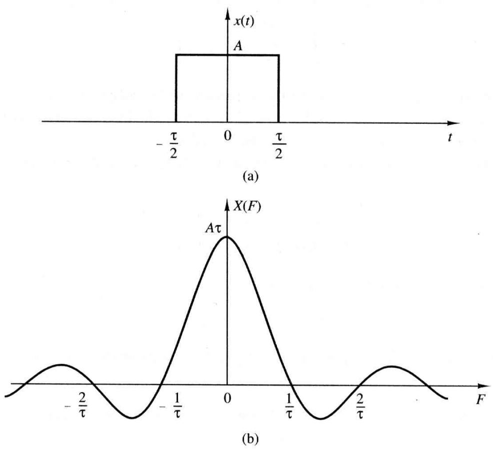
$$\int_{F_1}^{F_2} S_{xx}(F)dF \qquad (15)$$

Propiedades

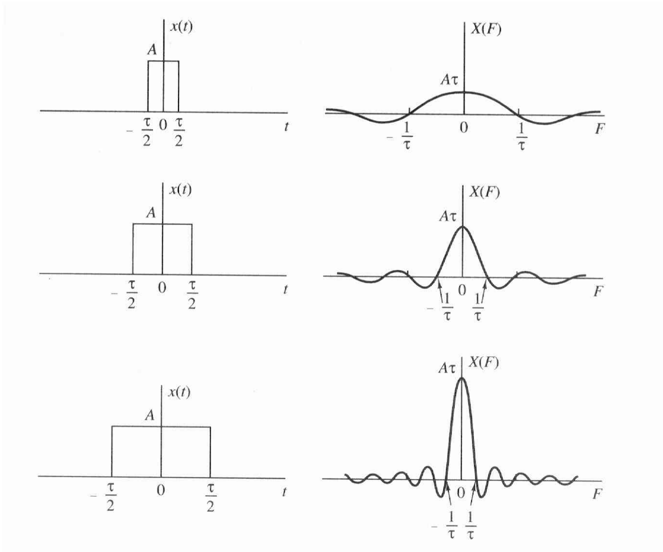
- $S_{xx}(F)$ es real y no negativo, y $S_{xx}(-F) = S_{xx}(F)$
- $S_{xx}(F)$ no contiene information de la fase por lo que la señal no puede reconstruirse a partir de la densidad espectral de energía.

Ejemplo: x(t) es un pulso rectangular de amplitud

A y duración τ .



$$X(F) = A\tau \frac{\text{sen}(\pi F\tau)}{\pi F\tau} \quad , \quad S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left(\frac{\text{sen}(\pi F\tau)}{\pi F\tau} \right)^2$$



Nota: El espectro es la envolvente del espectro de líneas correspondiente a la repetición periódica del pulso rectangular.

Análisis Frecuencial de Señales en TD

- **Señales periódicas**

Pueden expandirse en Serie de Fourier en Tiempo Discreto (DTFS) como

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \qquad \text{Ecuación de Síntesis} \qquad (16)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \qquad \text{Ecuación de Análisis} \qquad (17)$$

• A diferencia de en TC, la DTFS tiene un número finito N de términos (componentes frecuenciales) debido a la naturaleza discreta de la señal.

• Los Coeficientes de Fourier c_k resultan periódicos con período N.

• La potencia media (o la energía en un período) de la señal puede computarse en el dominio frecuencial a traves de la relación

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$ **Identidad de Parseval** (18)

• Por razones obvias a los $|c_k|^2$ se los denomina Densidad Espectral de Potencia de la señal x(n). En este caso resulta un espectro discreto o de líneas.

• **Señales aperiódicas**

Similarmente a lo realizado en TC, puede extenderse el concepto de descomposición en serie de Fourier al caso de señales aperiódicas, resultando la definición de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto Inversa (IDTFT)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$ **Ecuación de síntesis** (19)

donde $X(\omega)$ es la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) (no confundir con la Transformada Discreta de Fourier (DFT)), definida como

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \qquad \text{Ecuación de Análisis} \qquad (20)$$

- **Convergencia**

La suma finita

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x(n) e^{-j\omega n} \qquad (21)$$

converge uniformemente a $X(\omega)$ cuando $N \to \infty$ si x(n) es absolutamente sumable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \qquad \text{Condición de Dirichlet} \qquad (22)$$

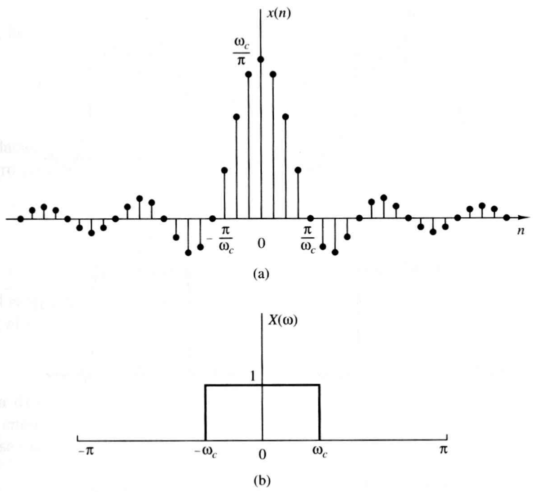
Por convergencia uniforme se entiende

$$\lim_{N \to \infty} |X(\omega) - X_N(\omega)| = 0 \qquad (23)$$

Nota: Comentar Convergencia en media cuadrática.

Ejemplo: Señal de energía finita cuyo espectro es

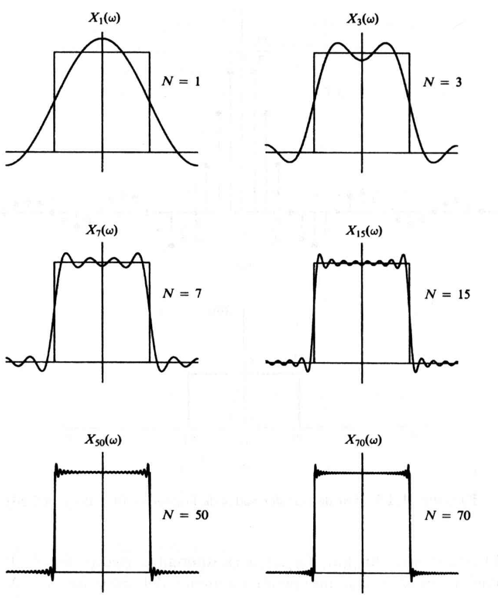
$$X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}$$



$$x(n)=\frac{\mathrm{sen}(\omega_c n)}{\pi n}$$

x(n) no es absolutamente sumable, pero si cuadrado sumable $\Rightarrow$ convergencia en media cuadrática

Definiendo la suma finita $X_N(\omega)$, la convergencia en media cuadrática provoca el denominado Fenómeno de Gibbs.



La suma finita no converge en los puntos de discontinuidad de la transformada.

Densidad Espectral de Energía

Sea x(n) una señal de energía con una DTFT X(ω). La energía de la señal viene dada por

$$
\begin{aligned}
E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

Es decir se estableció lo siguiente:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \qquad (24)$$

que constituye otra de las formas de la Igualdad de Parseval. Debido a que su integral sobre todo el rango de frecuencias es la energía de la señal, a la cantidad

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \qquad (25)$$

se la denomina Densidad Espectral de Energía.

Propiedades:

- $S_{xx}(\omega)$ es real y no negativo, y $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$
- $S_{xx}(\omega)$ no contiene information de la fase por lo que la señal no puede reconstruirse a partir de la densidad espectral de energía.

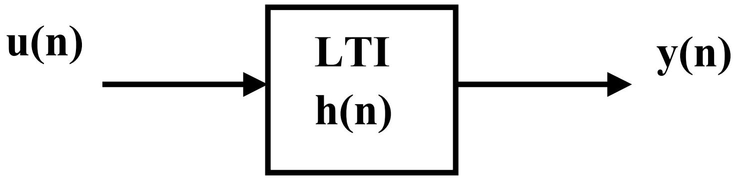
Teorema de Wiener-Khintchine

La secuencia de autocorrelación y la densidad espectral de energía de una señal de energía a valores reales son Pares Transformados de Fourier.

$$r_{xx}(\ell) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} S_{xx}(\omega) \qquad (26)$$

La secuencia de autocorrelación y la densidad espectral de energía contienen la misma información de la señal.

Respuesta de un Sistema LTI a entradas aperiódicas



$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega) \Rightarrow S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{uu}(\omega) \qquad (27)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{uu}(\omega)d\omega \qquad (28)$$