

# Teoría de Sistemas y Señales

## MODULACIÓN DE ONDA CONTINUA

**NB:** El contenido de este apunte es una traducción al Castellano de parte del Capítulo 3 de *Communication Systems* by Simon Haykin, 3rd. Edition, Wiley & Sons, New York, 1994.

### 1 INTRODUCCIÓN

El propósito de un sistema de comunicación es transmitir señales portadoras de información o señales de banda base a través de un canal de comunicación que separa el transmisor del receptor. El término banda base es utilizado para designar la banda de frecuencias que representa la señal original tal cual fue entregada por una fuente de información. La propia utilización del canal de comunicación requiere un desplazamiento desde el rango de frecuencias de banda base hacia otro rango de frecuencias conveniente para la transmisión, y un correspondiente desplazamiento inverso hacia el rango original de frecuencias luego de la recepción. Por ejemplo, un sistema de radio debe operar con frecuencias de 30 kHz hacia arriba, mientras que la señal en banda base generalmente contiene frecuencias en el rango de frecuencias de audio, y por lo tanto algún tipo de desplazamiento de banda de frecuencia debe ser utilizado para que el sistema opere satisfactoriamente. Un desplazamiento del rango de frecuencias en una señal es alcanzado mediante el uso de la modulación, la cual está definida como el proceso por el cual alguna característica de una portadora es variada de acuerdo con una onda moduladora (señal). Una forma común de la portadora es una onda senoidal, en cuyo caso hablamos de un proceso de modulación de onda continua. La señal en banda base es conocida como la onda moduladora, y el resultado del proceso de modulación es conocido como la onda modulada. La modulación es llevada a cabo en el extremo transmisor del sistema de comunicación. En el extremo receptor del sistema, normalmente se requiere que la señal original en banda base sea restaurada. Esto es logrado a través de un proceso conocido como demodulación, el cual es el proceso inverso de la modulación.

En este capítulo estudiamos dos familias ampliamente conocidas de sistemas de modulación de onda continua, a saber, modulación de amplitud y modulación de fase. En modulación de amplitud, la amplitud de la onda portadora sinusoidal es variada de acuerdo con la señal en banda base. En modulación de fase, el ángulo de la onda portadora sinusoidal es variado de acuerdo con la señal en banda base. Las secciones 3.2 hasta la 3.7 están dedicadas a la forma estándar de modulación de amplitud y sus variantes. En la sección 3.9 discutimos la idea de multiplexado por división de frecuencia para compartir un canal común entre una multitud de diferentes usuarios. Las cuatro secciones subsecuentes están dedicadas a modulación de fase y cuestiones relacionadas.

### 2 MODULACIÓN DE AMPLITUD

Consideremos una onda portadora sinusoidal  $c(t)$  definida por

$$c(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (1)$$

donde  $A_c$  es la amplitud de la portadora y  $f_c$  es la frecuencia de la portadora. Para simplificar la exposición sin afectar los resultados obtenidos y las conclusiones alcanzadas, hemos asumido que la fase de

la onda portadora es cero en la Ec. 1. Denotemos con  $m(t)$  a la señal en banda base que transporta la especificación del mensaje. La fuente de onda portadora  $c(t)$  es físicamente independiente de la fuente responsable de la generación de  $m(t)$ . La modulación de amplitud (AM) está definida como un proceso en el cual la amplitud de la portadora  $c(t)$  es variada respecto de un valor medio, linealmente con la señal en banda base  $m(t)$ . Una onda de amplitud modulada (AM) puede por consiguiente ser descripta, en su forma más general, como una función del tiempo como sigue:

$$s(t) = A_c [1 + k_a \cdot m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (2)$$

donde  $k_a$  es una constante llamada sensibilidad de amplitud de la moduladora responsable de la generación de la señal modulada  $s(t)$ . Típicamente, la amplitud de la portadora  $A_c$  y la señal-mensaje  $m(t)$  están medidas en Volts, en cuyo caso la sensibilidad de amplitud  $k_a$  está medida en  $\text{Volt}^{-1}$ .

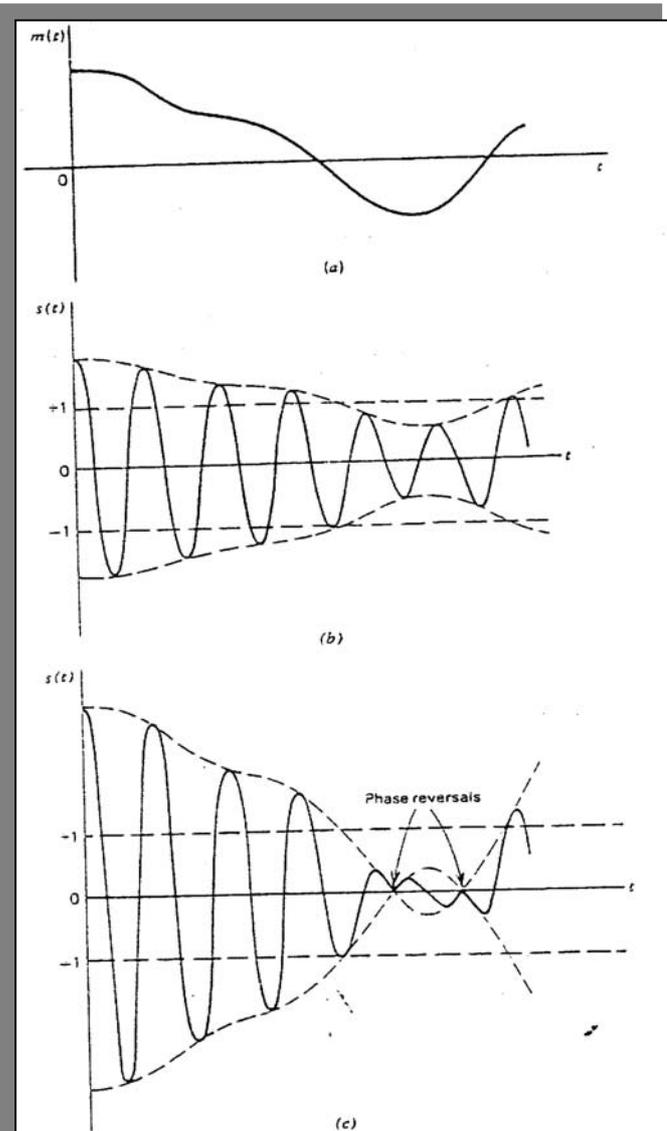
La figura 1.a muestra una señal en banda base  $m(t)$ , y las figuras 1b y 1c muestran las correspondientes ondas de AM  $s(t)$  para dos valores de sensibilidad de amplitud  $k_a$  y una portadora de amplitud  $A=1$  Volt.

Observamos que la envolvente de  $s(t)$  tiene esencialmente la misma forma que la señal en banda base  $m(t)$  a condición de que se satisfagan dos requerimientos:

1. La amplitud de  $k_a \cdot m(t)$  es siempre menor que la unidad, esto es,

$$|K_a \cdot m(t)| < 1 \quad \forall t \quad (3)$$

Esta condición es ilustrada en la Fig. 1b; ella asegura que la función  $1+k_a \cdot m(t)$  es siempre positiva, y ya que una envolvente es una función positiva, podemos expresar la envolvente de la onda AM  $s(t)$  de la ecuación (2) como  $A_c \cdot [1+k_a \cdot m(t)]$ . Cuando la sensibilidad de amplitud  $k_a$  de la moduladora es lo suficientemente grande para hacer  $|K_a \cdot m(t)| > 1$  para algún instante  $t$ , la onda portadora se vuelve sobremodulada, resultando en reversiones de fase cuando el factor  $1+k_a \cdot m(t)$  cruza cero. La onda modulada exhibe entonces distorsión



**Figura 1** Ilustración del proceso de modulación de amplitud. (a) Señal en banda base  $m(t)$ . (b) Onda AM para  $k_a \cdot m(t) < 1$  para todo  $t$ . (c) Onda AM para  $|k_a \cdot m(t)| > 1$  para algún instante  $t$ .

de envolvente, como en la Fig. 1c. Es por lo tanto evidente que evitando la sobremodulación, se mantiene una relación uno a uno entre la envolvente de la onda AM y la onda moduladora para todos los instantes de tiempo, una característica útil, como veremos más adelante. El valor absoluto máximo de  $k_a \cdot m(t)$  multiplicado por 100 se conoce como el porcentaje de modulación.

2. La frecuencia de la portadora  $f_c$  es mucho mayor que la más alta frecuencia  $W$  de las que componen la señal-mensaje  $m(t)$ , esto es

$$f_c \gg W \quad (4)$$

Llamamos a  $W$  ancho de banda del mensaje. Si la condición de la Ec. (4) no es satisfecha, no puede visualizarse (y por lo tanto detectarse) una envolvente en forma satisfactoria.

De la Ec. (2), encontramos que la transformada de Fourier de la onda AM  $s(t)$  está dada por

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{k_a \cdot A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (5)$$

Supongamos que la señal en banda base  $m(t)$  es limitada en banda dentro del intervalo  $-W \leq f \leq W$ , como en la figura 2.a. La forma del espectro mostrado en esta figura tiene el único propósito de la ilustración. Encontramos de la ecuación (5) que el espectro  $S(f)$  de la onda AM es como el mostrado en la Fig. 2b para el caso en que  $f_c > W$ .

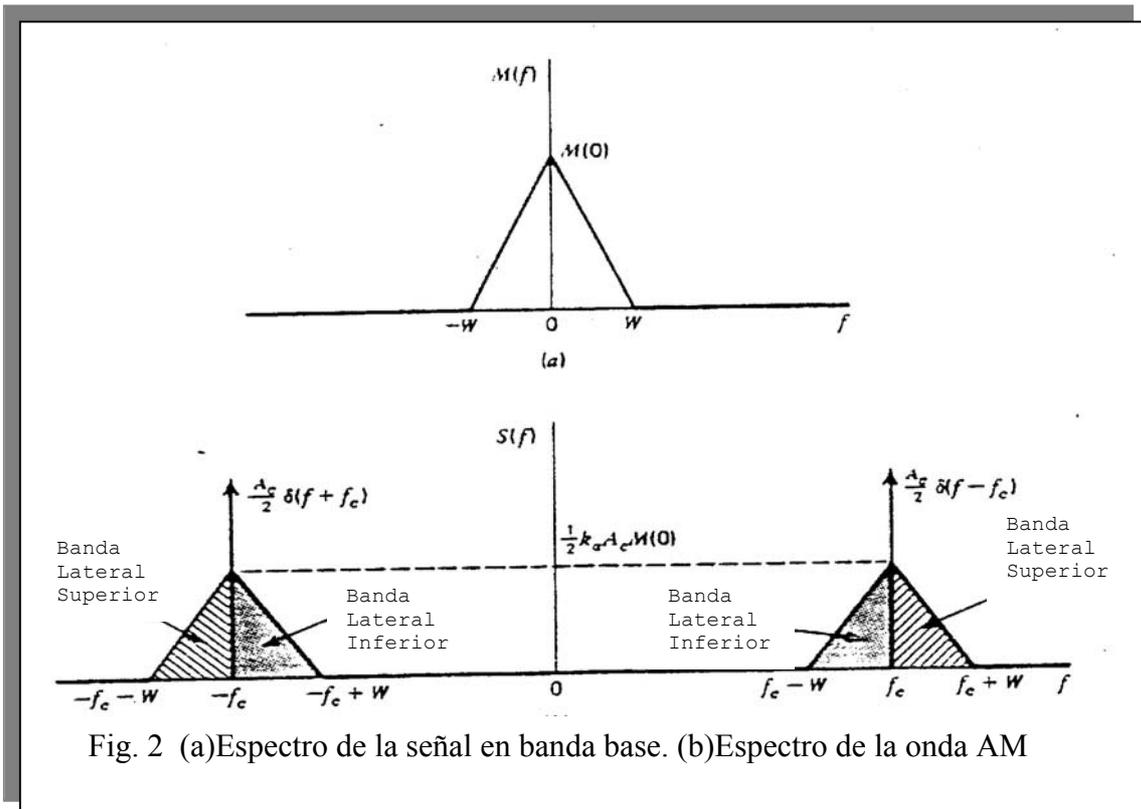


Fig. 2 (a)Espectro de la señal en banda base. (b)Espectro de la onda AM

Este espectro consiste de dos impulsos multiplicadas por el factor  $A_c/2$  y ubicadas en  $\pm f_c$ , y dos versiones del espectro de la señal en banda base trasladadas en frecuencia por  $\pm f_c$  y escaladas por  $k_a \cdot A_c/2$ . A partir del espectro de la Fig. 2b, notamos lo siguiente:

- Como resultado del proceso de modulación, el espectro de la señal-mensaje  $m(t)$  para frecuencias negativas extendiéndose desde  $-W$  hasta  $0$  se vuelve completamente visible para frecuencias positivas (i.e. medibles), a condición de que la frecuencia de la portadora satisfaga la condición  $f_c \gg W$ ; aquí yace la importancia de la idea de frecuencias "negativas".
- Para frecuencias positivas, la porción del espectro de una onda AM que yace por encima de la frecuencia de la portadora  $f_c$  es denominada banda lateral superior, mientras que la porción simétrica por debajo de  $f_c$  se denomina banda lateral inferior. Para frecuencias negativas, la banda lateral superior está representada por la porción del espectro debajo de  $-f_c$  y la banda lateral inferior está representada por la porción por encima de  $-f_c$ . La condición  $f_c \gg W$  asegura que las bandas laterales no se superpongan.
- Para frecuencias positivas, la frecuencia más alta componente de la onda AM es igual a  $f_c + W$ , y la frecuencia componente más baja es igual a  $f_c - W$ . La diferencia entre estas dos frecuencias define el ancho de banda de la transmisión  $B_T$  para una onda AM, el cual es exactamente dos veces el ancho de banda del mensaje  $W$ , esto es

$$B_T = 2W \quad (6)$$

### EJEMPLO 1 Modulación de Tono Simple

Considere una onda moduladora  $m(t)$  que consiste de un único tono o frecuencia componente, esto es,

$$m(t) = A_m \cdot \cos(2\pi f_m t)$$

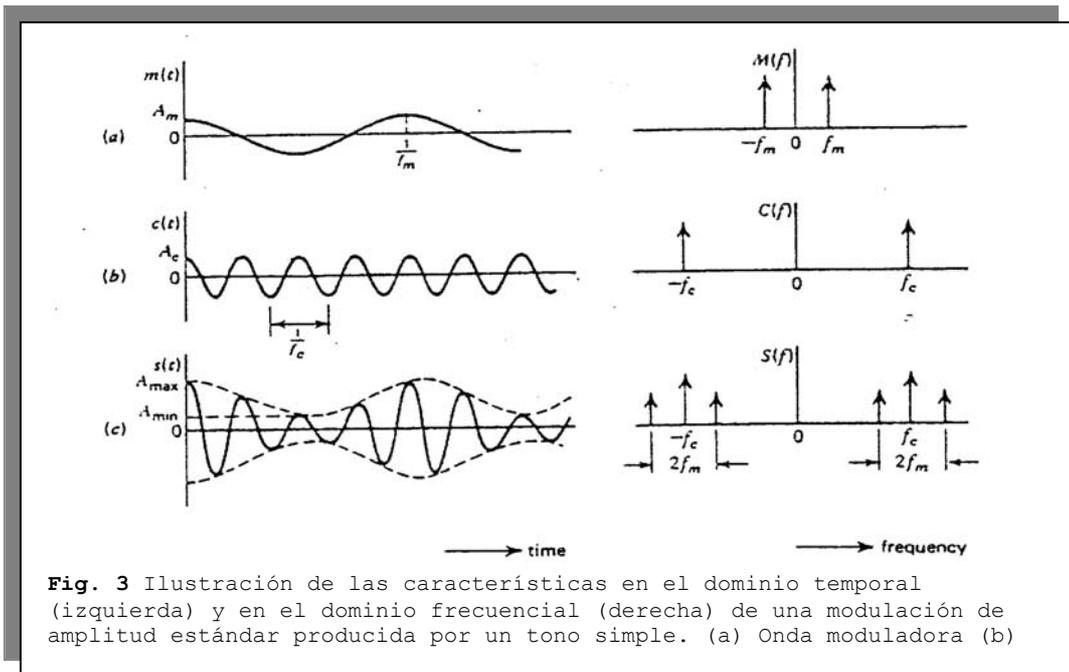
donde  $A_m$  es la amplitud de la onda moduladora senoidal y  $f_m$  es su frecuencia (ver Fig. 3.a). La onda portadora senoidal tiene una amplitud  $A_c$  y frecuencia  $f_c$  (Ver Fig. 3b). La onda AM correspondiente está por lo tanto dada por:

$$s(t) = A_c \cdot [1 + \mu \cdot \cos(2\pi f_m t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (7)$$

donde

$$\mu = K_a \cdot A_m$$

La constante adimensional  $\mu$  es el factor de modulación, o el porcentaje de modulación cuando está expresado numéricamente como tal. A fin de evitar distorsión de envolvente debido a sobremodulación, el factor de modulación  $\mu$  debe ser mantenido debajo de la unidad.



**Fig. 3** Ilustración de las características en el dominio temporal (izquierda) y en el dominio frecuencial (derecha) de una modulación de amplitud estándar producida por un tono simple. (a) Onda moduladora (b)

La figura 3c muestra un esbozo de  $s(t)$  para  $\mu$  menor que la unidad. Denotemos con  $A_{\max}$  y  $A_{\min}$  los valores máximo y mínimo de la envolvente de la onda modulada. Entonces, a partir de la Ec.(7) obtenemos

$$\frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{A_c \cdot (1 + \mu)}{A_c \cdot (1 - \mu)}$$

esto es

$$\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Expresando el producto de los dos cosenos en la Ec.(7) como la suma de dos ondas senoidales, una de frecuencia  $f_c + f_m$  y la otra de frecuencia  $f_c - f_m$ , obtenemos

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \mu \cdot A_c \cdot \cos[2\pi \cdot (f_c + f_m)t] + \frac{1}{2} \mu \cdot A_c \cdot \cos[2\pi \cdot (f_c - f_m)t]$$

La transformada de Fourier de  $s(t)$  es por lo tanto

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c \cdot [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{1}{4} \mu \cdot A_c \cdot [\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)] + \frac{1}{4} \mu \cdot A_c \cdot [\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)]$$

Por consiguiente el espectro de una onda AM, para el caso especial de modulación senoidal, consiste de impulsos en  $\pm f_c, f_c \pm f_m$  y  $-f_c \pm f_m$ , como en la Fig. 3c.

En la práctica, la onda AM  $s(t)$  es una onda de voltaje o corriente. En cualquier caso, la potencia promedio entregada a un resistor de  $1\Omega$  por  $s(t)$  está constituida de tres componentes:

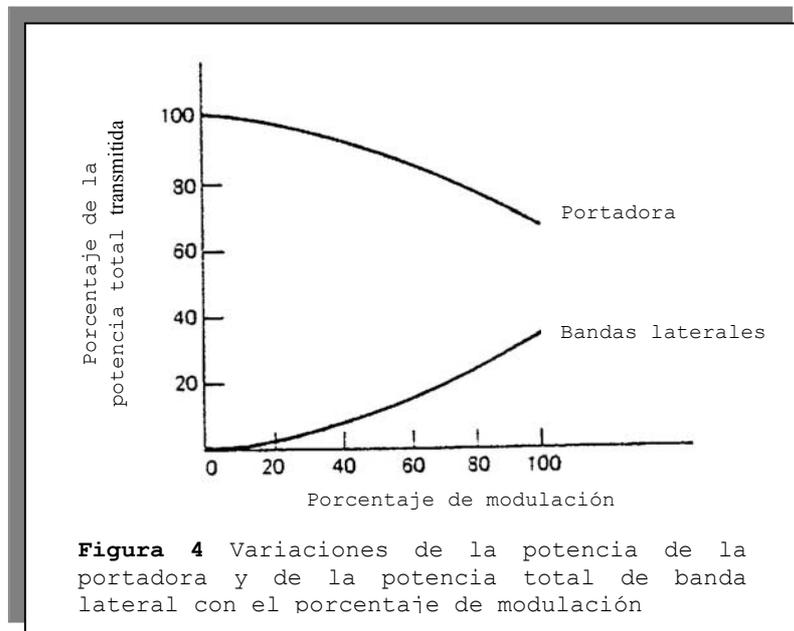
$$\text{Potencia de la portadora} = \frac{1}{2} A_c^2$$

$$\text{Potencia de la frecuencia lateral superior} = \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2$$

$$\text{Potencia de la frecuencia lateral inferior} = \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2$$

Para un resistor de carga diferente de  $1\Omega$ , el cual es el generalmente el caso en la práctica, las expresiones para la potencia de la portadora, potencia de la frecuencia lateral superior y potencia de la frecuencia lateral inferior son simplemente escaladas por el factor  $1/R$  o  $R$ , dependiendo de si la onda modulada  $s(t)$  es un voltaje o una corriente, respectivamente. En cualquier caso, la relación entre la potencia de banda lateral total y la potencia total en la onda modulada es igual a  $\mu^2/(2+\mu^2)$ , la cual depende únicamente del factor de modulación  $\mu$ . Si  $\mu=1$ , esto es, es utilizado un 100% de modulación, la potencia total en las dos frecuencias laterales de la onda AM resultante es sólo 1/3 de la potencia total en la onda modulada.

La Fig. 4 muestra el porcentaje de potencia total en ambas frecuencias laterales y en la portadora trazadas en función del porcentaje de modulación. Nótese que cuando el porcentaje de modulación es menor que 20%, la potencia en una frecuencia lateral es menor que 1% de la potencia total en la onda AM.



#### Modulador de conmutación

La generación de una onda AM puede ser lograda utilizando varios dispositivos; describimos aquí uno de tales dispositivos llamado modulador de conmutación. Detalles de este modulador son mostrados en

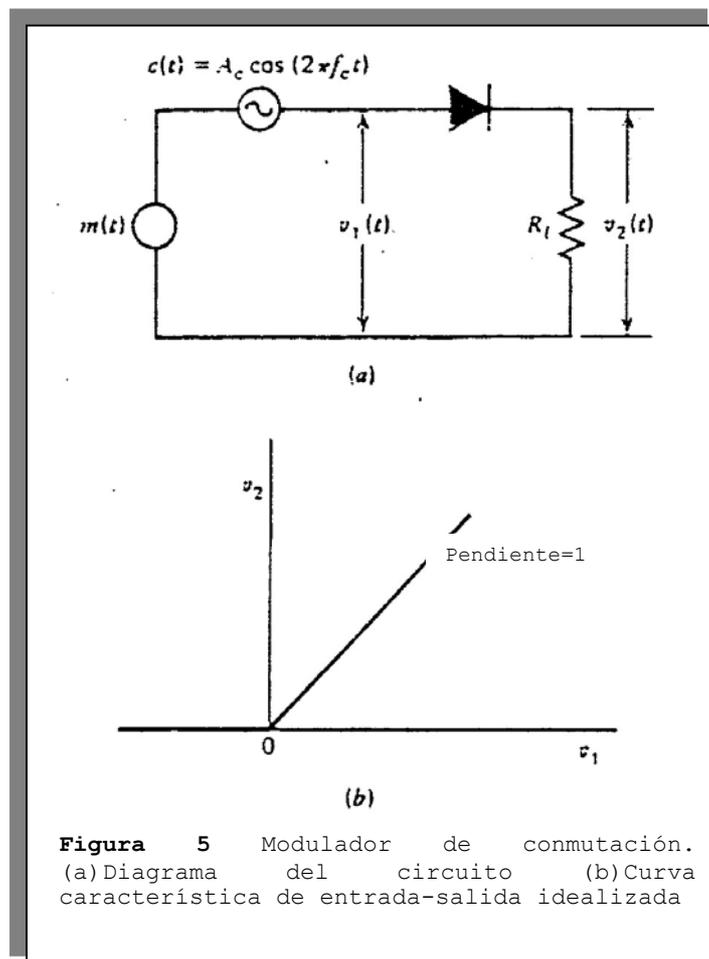
la Fig. 5.a, donde se asume que la onda portadora  $c(t)$  aplicada al diodo es grande en amplitud, de manera que oscila de un lado a otro de la curva característica del diodo. Asumimos que el diodo actúa como un conmutador ideal, esto es, presenta impedancia cero cuando está directamente polarizado [correspondiendo a  $c(t) > 0$ ]. Podemos de esta manera aproximar la característica de transferencia de la combinación diodo-resistor de carga por una característica seccionalmente lineal, como la mostrada en la Fig. 5b. En consecuencia, para un voltaje de entrada  $v_1(t)$  consistente de la suma de la portadora y la señal mensaje:

$$V_1(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) + m(t) \quad (8)$$

donde  $|m(t)| \ll A_c$ , el voltaje de carga  $v_2(t)$  resultante es

$$v_2(t) \cong \begin{cases} v_1(t), & c(t) > 0 \\ 0, & c(t) < 0 \end{cases} \quad (9)$$

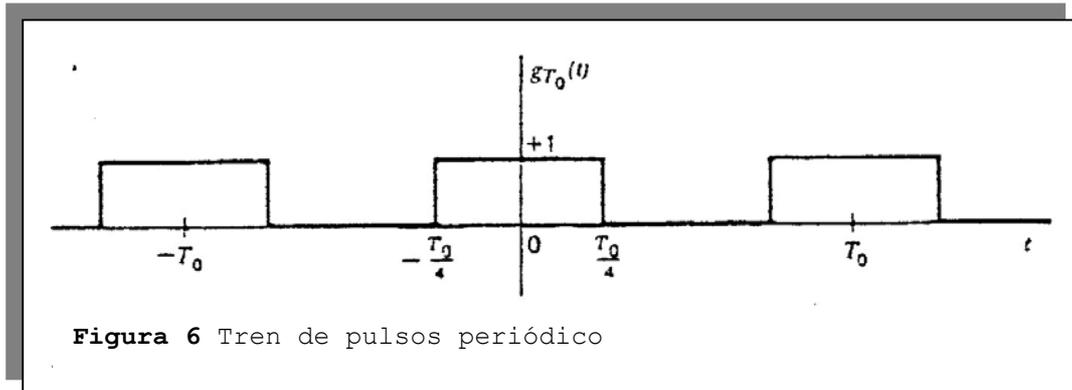
Esto es, el voltaje de carga  $v_2(t)$  varía periódicamente entre los valores  $v_1(t)$  y cero a una velocidad igual a la frecuencia de la portadora  $f_c$ . De este manera, asumiendo una onda moduladora que es débil comparada con la onda portadora de hecho hemos reemplazado el comportamiento no lineal del diodo por un funcionamiento seccionalmente lineal variante en el tiempo aproximadamente equivalente.



Podemos expresar la Ec.(9) matemáticamente como

$$v_2(t) \cong [A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) + m(t)] g_{T_0}(t) \quad (10)$$

donde  $g_{T_0}(t)$  es un tren de pulsos periódico de ciclo de trabajo igual a un  $\frac{1}{2}$ , y período  $T_0=1/f_c$ , como en la Fig. 6. Representando  $g_{T_0}(t)$



Por su serie de Fourier, tenemos

$$g_{T_0}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[2\pi f_c t(2n-1)] \quad (11)$$

Por lo tanto, substituyendo la Ec. (11) en la (10), encontramos que el voltaje de carga  $v_2(t)$  consiste en la suma de dos componentes:

1. La componente

$$\frac{A_c}{2} \left[ 1 + \frac{4}{\pi A_c} m(t) \right] \cos(2\pi f_c t)$$

la cual es la onda AM con sensibilidad de amplitud  $k_a=4/\pi A_c$ . El modulador de conmutación se hace por consiguiente más sensitivo reduciendo la amplitud de la portadora  $A_c$ ; sin embargo, debe mantenerse lo suficientemente grande para hacer actuar al diodo como un conmutador ideal.

2. Componentes no deseadas cuyo espectro contiene impulsos en  $0, \pm 2f_c, \pm 4f_c$ , y así sucesivamente, los cuales ocupan intervalos de frecuencia de ancho  $2W$  centrados en  $0, \pm 3f_c, \pm 5f_c$ , y así sucesivamente, donde  $W$  es el ancho de banda del mensaje. Los términos no deseados son eliminados del voltaje de carga por medio de un filtro pasa-banda con frecuencia de media banda  $f_c$  y ancho de banda  $2W$ , a condición de que  $f_c > 2W$ . Esta última condición asegura que las distancias frecuenciales entre la onda AM deseada y las componentes no deseadas son lo suficientemente grandes para que el filtro pasa banda elimine dichas componentes.

#### DETECTOR DE ENVOLVENTE

Como se mencionó en la sección introductoria, el proceso de demodulación es utilizado para recuperar la onda moduladora original a

partir de la onda modulada entrante; efectivamente, la demodulación es el proceso inverso de la modulación. Al igual que la modulación, la demodulación de una onda AM puede lograrse utilizando varios dispositivos; describimos aquí un dispositivo simple y aún altamente efectivo conocido como el detector de envolvente. Alguna versión de este demodulador es utilizada en casi todos los receptores de radio AM comerciales. sin embargo, para que funcione correctamente, la onda AM tiene que ser de banda estrecha, lo que requiere que la frecuencia de la portadora sea grande comparada con el ancho de banda del mensaje. Más aún, el porcentaje de modulación debe ser menor que 100%.

Un detector de envolvente del tipo de la serie es mostrado en la figura 7.a, el cual consiste de un diodo y un filtro resistor-capacitor(RC). El funcionamiento de este detector de envolvente es el que se describe a continuación. En un semiciclo positivo de la señal de entrada, el diodo se halla directamente polarizado y el capacitor C se carga rápidamente hasta el valor de pico de la señal de entrada. Cuando la señal de entrada cae debajo de este valor, el diodo queda inversamente polarizado y el capacitor C se descarga lentamente a través de la resistencia de carga  $R_L$ . El proceso de descarga continua hasta el próximo semiciclo positivo. Cuando la señal de entrada se hace mayor que el voltaje sobre el capacitor, el diodo conduce nuevamente y el proceso se repite. Asumimos que el diodo es ideal, presentando resistencia  $r_f$  al flujo de corriente en la región de polarización directa y resistencia infinita en la región de polarización inversa. Asumimos además que la onda AM aplicada al detector de envolvente es provisto por un fuente de voltaje de impedancia interna  $R_s$ . La constante de tiempo de carga  $(r_f + R_s).C$  debe ser pequeña comparada con el período de la portadora  $1/f_c$ , esto es,

$$(r_f + R_s).C \ll \frac{1}{f_c} \quad (12)$$

de manera que el capacitor se cargue rápidamente y de ese modo siga al voltaje aplicado hasta el pico positivo cuando el diodo se halla en conducción. Por otro lado, la constante de tiempo de descarga  $R_L.C$  debe ser lo suficiente grande para asegurar que el capacitor se descargue lentamente a través de la resistencia de carga  $R_L$  entre picos positivos de la onda portadora, pero no tanto como para que el capacitor no se descargue a la máxima velocidad de cambio de la onda moduladora, esto es

$$\frac{1}{f_c} \ll R_L.C \ll \frac{1}{W} \quad (13)$$

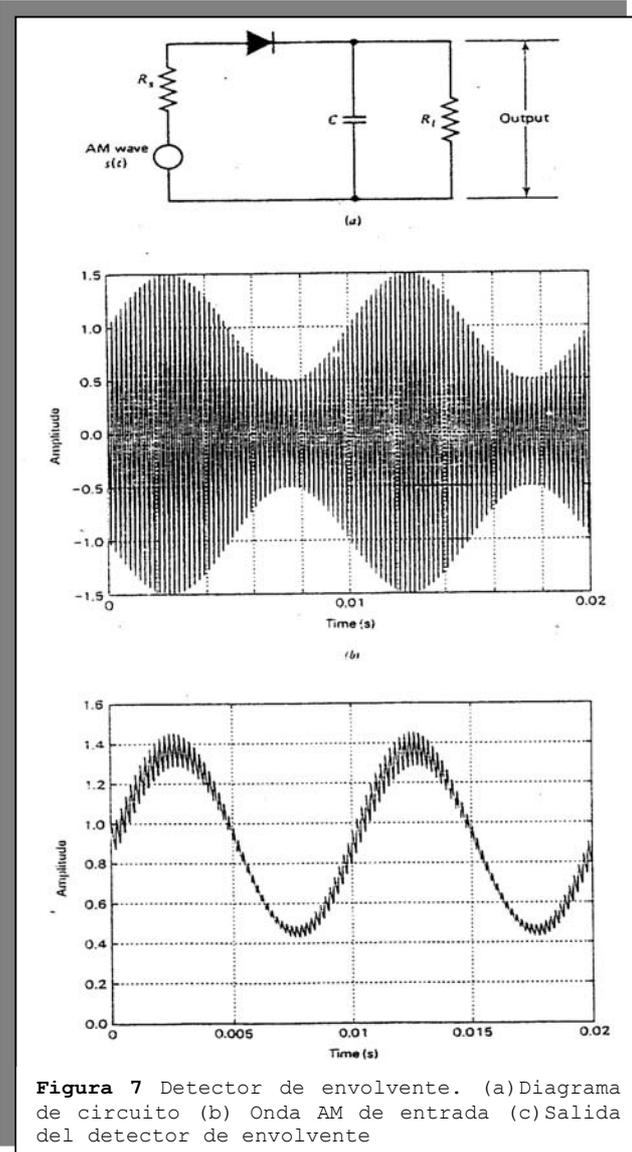


Figura 7 Detector de envolvente. (a)Diagrama de circuito (b) Onda AM de entrada (c)Salida del detector de envolvente

donde  $W$  es el ancho de banda del mensaje. El resultado es que el voltaje del capacitor, o salida del detector, es aproximadamente el mismo que la envolvente de la onda AM, como se demuestra más adelante.

### **EXPERIMENTO PARA COMPUTADORA I Modulación de amplitud sinusoidal**

Considere la onda sinusoidal de AM mostrada en la Fig. 7b, asumiendo 50% de modulación. La salida del detector de envolvente se muestra en la Fig. 7c. Esta última forma de onda es computada asumiendo que el diodo es ideal, de resistencia constante  $r_f$  en polarización directa y resistencia infinita en polarización inversa. Los valores numéricos utilizados en el cómputo de la Fig. 7c son los siguientes:

Resistencia de fuente	$R_s=75\Omega$
Resistencia directa	$r_f=25\Omega$
Resistencia de carga	$R_L=10k\Omega$
Capacidad	$C=0.01 \mu F$
Ancho de banda del mensaje	$W=1 \text{ kHz}$
Frecuencia de la portadora	$f_c=20 \text{ kHz}$

La figura 7c muestra que la salida del detector de envolvente contiene un pequeño ripple (rizado, ondulación) con la frecuencia de la portadora. Este ripple es fácilmente eliminado mediante un filtro pasa-bajos.

### **3 VIRTUDES, LIMITACIONES Y MODIFICACIONES DE LA MODULACIÓN DE AMPLITUD**

La modulación de amplitud es el método más antiguo para implementar la modulación. Su mayor virtud es la facilidad con la que se genera y se revierte. La modulación es lograda en forma bastante sencilla en el transmisor utilizando un modulador de conmutación (descrito previamente) o un modulador de ley cuadrática (descrito en el Problema 3.4). La demodulación es lograda con la misma sencillez en el receptor utilizando un detector de envolvente (descrito previamente) o un detector de ley cuadrática (descrito en el Problema 3.6). El resultado final es que un sistema de modulación de amplitud es relativamente barato de construir, lo cual es la razón de que las emisiones de radio AM han sido tan populares por tanto tiempo y es bastante probable que se mantengan también en el futuro.

Sin embargo, recordemos del Capítulo 1 que la potencia transmitida y el ancho de banda del canal son nuestros dos recursos primarios de comunicación y deberían utilizarse eficientemente. En este contexto, encontramos que la forma estándar de modulación de amplitud definida en la Ec. (2) sufre dos limitaciones principales:

1. *La modulación de amplitud derrocha potencia.* La onda portadora  $c(t)$  es completamente independiente de la señal portadora de información o señal en banda base  $m(t)$ . La transmisión de la onda portadora representa por lo tanto un derroche de potencia, lo que significa que en modulación de amplitud sólo una fracción de la potencia total transmitida tiene realmente que ver con  $m(t)$ .
2. *La modulación de amplitud derrocha ancho de banda.* Las bandas laterales superior e inferior de una onda AM están unívocamente relacionadas entre ellas en virtud de su simetría respecto de la frecuencia de la portadora; por lo tanto, dados los espectros de amplitud y fase de cualquier banda lateral, podemos unívocamente determinar la otra. Esto significa que, en lo que respecta a la transmisión de información, sólo una banda lateral es necesaria, y el canal de comunicación por lo tanto sólo necesita proveer el

mismo ancho de banda que la señal en banda base. A la luz de esta observación, la modulación de amplitud derrocha ancho de banda ya que requiere un ancho de banda de transmisión igual al doble del ancho de banda del mensaje.

Para superar estas limitaciones, debemos hacer ciertos cambios, los que tendrán como resultado un incremento de la complejidad del sistema del proceso de modulación de amplitud. En efecto, intercambiamos complejidad del sistema por una mejor utilización de los recursos de comunicación. Partiendo de la forma estándar de modulación de amplitud, podemos distinguir tres formas modificadas:

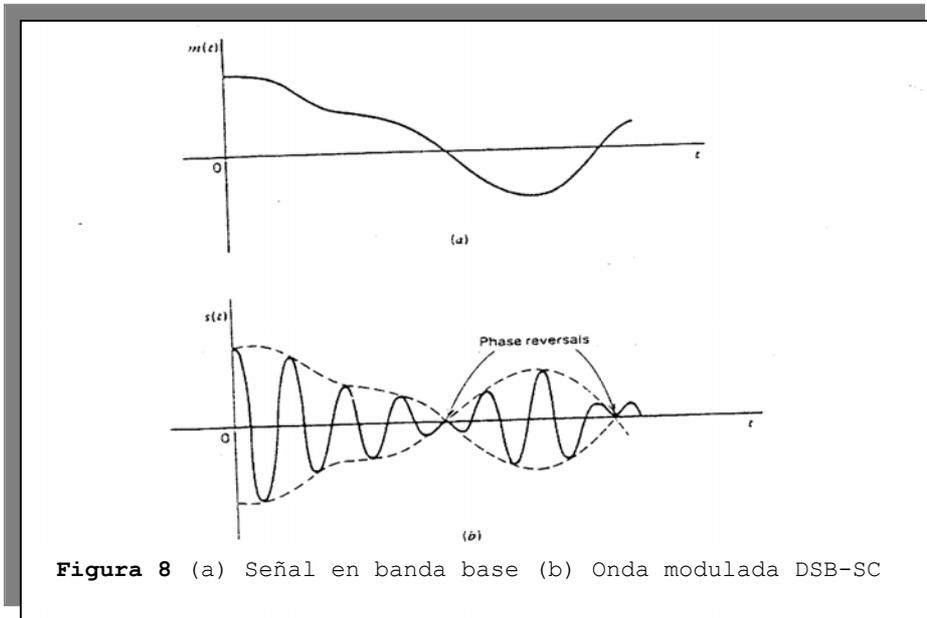
1. **Modulación de doble banda lateral-portadora suprimida** (DSB-SC: Double SideBand-Suppressed Carrier), en la cual la onda transmitida consiste de únicamente las bandas laterales superior e inferior. Se ahorra potencia transmitida a mediante la eliminación de la onda portadora, pero el requerimiento de ancho de banda del canal es el mismo que antes (i.e, el doble del ancho de banda del mensaje).
2. **Modulación de banda lateral residual** (VSB: Vestigial Sideband Modulation), en la cual una banda lateral es hecha pasar casi completamente y únicamente una pequeña parte (residuo) de la otra banda lateral es retenida. El ancho de banda de canal requerido es por lo tanto superior al ancho de banda del mensaje en una cantidad igual al ancho de la banda lateral residual. Esta forma de modulación es conveniente para la transmisión de señales de banda ancha tales como señales de TV que contienen componentes importantes a frecuencias extremadamente bajas. En emisiones comerciales de televisión, una portadora considerable es transmitida conjuntamente con la onda modulada, lo que hace posible demodular la señal modulada entrante mediante un detector de envolvente en el receptor y simplificar de esta forma el diseño del receptor.
3. **Modulación de banda lateral simple** (SSB: Single SideBand modulation), en la cual la onda modulada consiste únicamente en la banda lateral superior o la banda lateral inferior. La función esencial de la SSB es por lo tanto trasladar el espectro de la señal moduladora (con o sin inversión) a una nueva ubicación en el dominio frecuencial. La modulación de banda lateral simple es particularmente conveniente para la transmisión de señales de voz en virtud del hueco energético que existe en el espectro de señales de voz entre cero y unos cuantos cientos de Hz. Es una forma óptima de modulación en la que se requiere el mínimo de potencia transmitida y el mínimo de ancho de banda del canal; su principal desventaja es su elevado costo y complejidad.

En la sección 4 describimos la modulación DSB-SC, seguida por descripciones de las modulaciones VSB y SSB en secciones posteriores.

#### 4. MODULACION DE BANDA LATERAL DOBLE-PORTADORA SUPRIMIDA

Básicamente, la modulación DSB-SC consiste en el producto de la señal mensaje  $m(t)$  y la onda portadora  $c(t)$ , de la manera siguiente:

$$s(t) = c(t).m(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t).m(t) \quad (14)$$



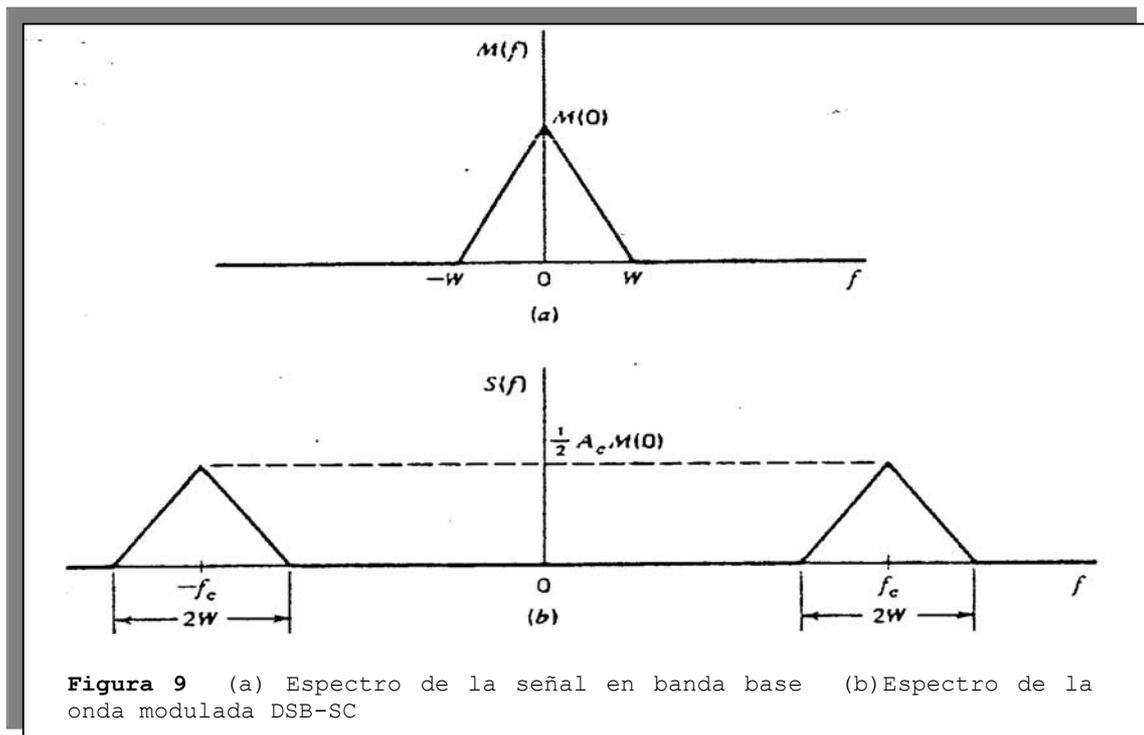
**Figura 8** (a) Señal en banda base (b) Onda modulada DSB-SC

En consecuencia, la señal modulada  $s(t)$  experimenta una inversión de fase cada vez que la señal mensaje  $m(t)$  cruza cero, como se indica en la figura 8b. La envolvente de una señal modulada DSB-SC es por consiguiente diferente de la señal mensaje.

De la ecuación (14), la transformada de Fourier de  $s(t)$  se obtiene como:

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (15)$$

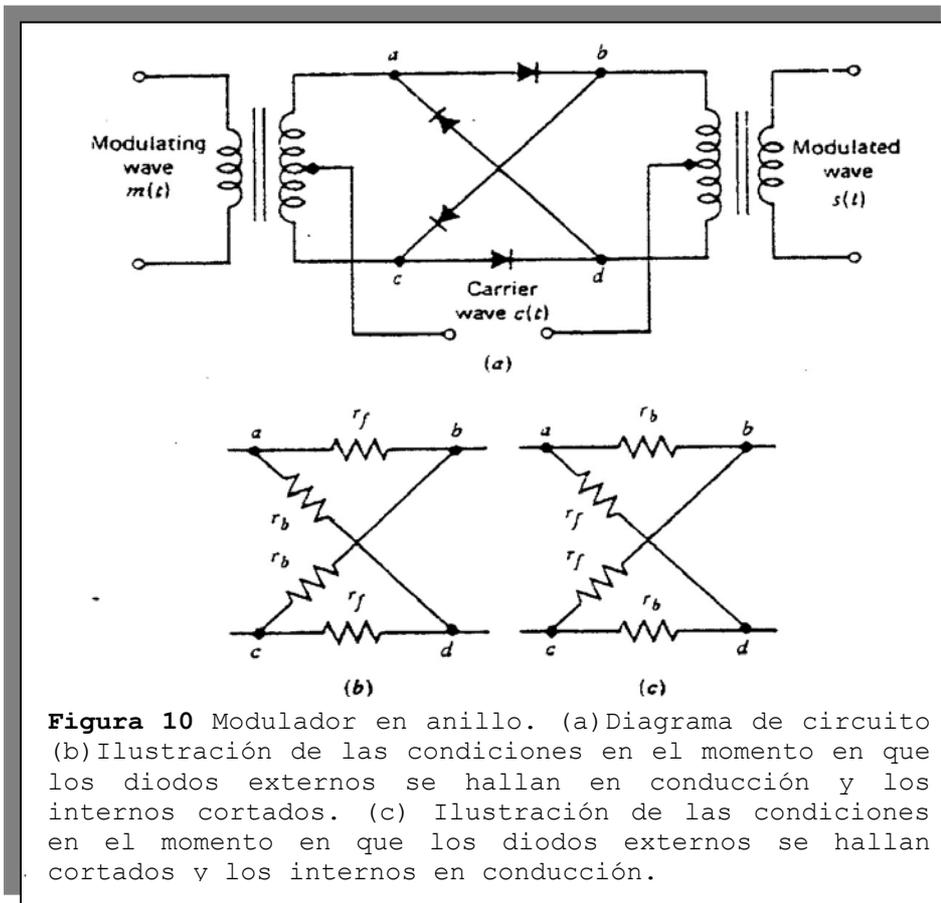
Para el caso en el que la señal en banda base  $m(t)$  se halla limitada al intervalo  $-W \leq f \leq W$ , como en la Fig. 9.a, hallamos de esta manera que el espectro  $S(f)$  de la onda DSB-SC es como la ilustrada en la Fig. 9b. Excepto por un cambio en el factor de escala, el proceso de modulación simplemente translada el espectro de la señal en banda base  $\pm f_c$ . Por supuesto, el ancho de banda de transmisión requerido por la modulación DSB-SC es el mismo que para modulación de amplitud, a saber,  $2W$ .



**Figura 9** (a) Espectro de la señal en banda base (b) Espectro de la onda modulada DSB-SC

### Modulador en anillo

Uno de los más útiles moduladores por producto, conveniente para generar una onda DSB-SC, es el modulador en anillo mostrado en la Fig. 10.a. Los cuatro diodos forman un anillo en el cual todos apuntan en la misma dirección (de aquí el nombre). Los diodos son controlados por una onda portadora cuadrada  $c(t)$  de frecuencia  $f_c$ , la cual es aplicada longitudinalmente por medio de dos transformadores de punto medio. Si los transformadores se hallan perfectamente balanceados y los diodos son idénticos, no hay "fuga" de la frecuencia de modulación (conmutación) hacia la salida del modulador.



**Figura 10** Modulador en anillo. (a) Diagrama de circuito (b) Ilustración de las condiciones en el momento en que los diodos externos se hallan en conducción y los internos cortados. (c) Ilustración de las condiciones en el momento en que los diodos externos se hallan cortados y los internos en conducción.

Para comprender el funcionamiento del circuito, asumimos que los diodos tienen una resistencia directa  $r_f$  constante cuando se hallan en conducción y una resistencia inversa constante  $r_b$  cuando se hallan cortados y que conmutan mientras la onda portadora  $c(t)$  atraviesa cero. En un semiciclo de la onda portadora, los diodos externos son cambiados a sus resistencias directas  $r_f$  y los diodos internos a sus resistencias inversas  $r_b$ , como se indica en la Fig. 10b. En el otro semiciclo de la onda portadora, los diodos funcionan en la condición opuesta, como se muestra en la Fig. 10c. Típicamente, las resistencias en los extremos de entrada y salida del modulador son las mismas (asumiendo transformadores ideales 1:1). Bajo las condiciones aquí descritas es un asunto sencillo demostrar que el voltaje de salida en la Fig. 10b tiene la misma magnitud que el voltaje de salida en la Fig. 10c, pero tienen polaridad opuesta. En efecto, el modulador en anillo actúa como un conmutador.

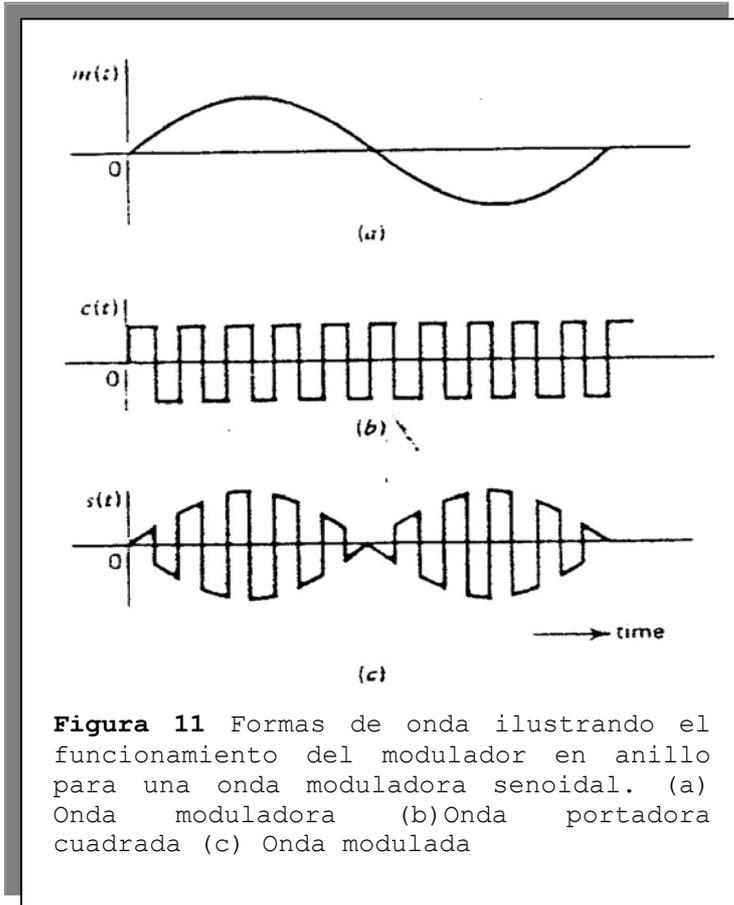
La figura 11c muestra la forma de onda idealizada de la señal modulada  $s(t)$  producida por el modulador en anillo, asumiendo una onda moduladora sinusoidal  $m(t)$  como la de la Fig. 11.a y una onda portadora cuadrada  $c(t)$  como la de la Fig. 11b. Entonces, la onda

portadora cuadrada  $c(t)$  puede ser representada por una serie de Fourier como la siguiente:

$$c(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[2\pi f_c t(2n-1)]$$

La salida del modulador en anillo es por lo tanto

$$s(t) = c(t)m(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[2\pi f_c t(2n-1)]m(t)$$

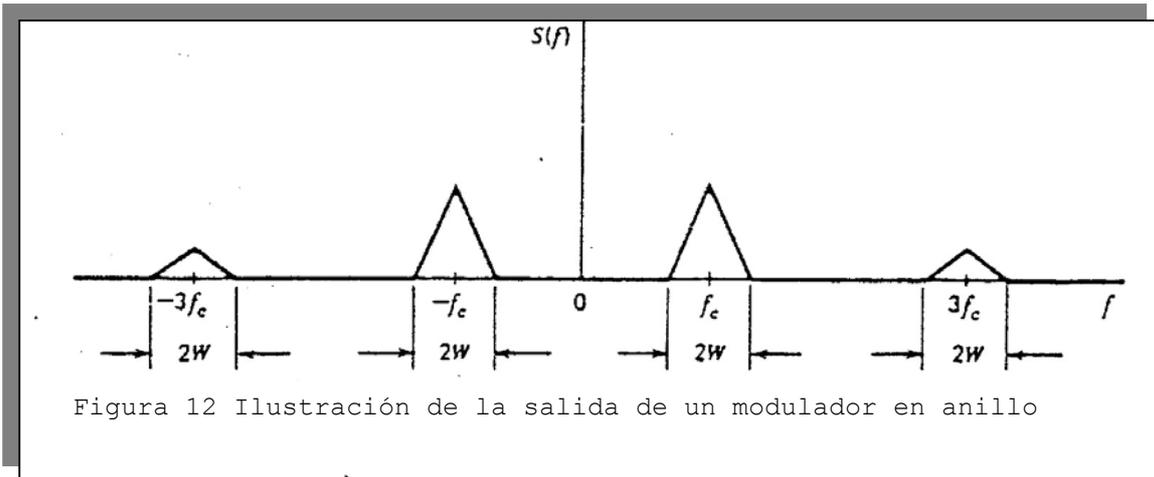


**Figura 11** Formas de onda ilustrando el funcionamiento del modulador en anillo para una onda moduladora senoidal. (a) Onda moduladora (b) Onda portadora cuadrada (c) Onda modulada

Vemos que no hay salida del modulador a la frecuencia de la portadora, esto es, la salida del modulador consiste enteramente de productos de modulación. El modulador de anillo es llamado a veces modulador de balanceado doble, debido a que se halla balanceado con respecto tanto a la señal en banda base como a la onda cuadrada portadora.

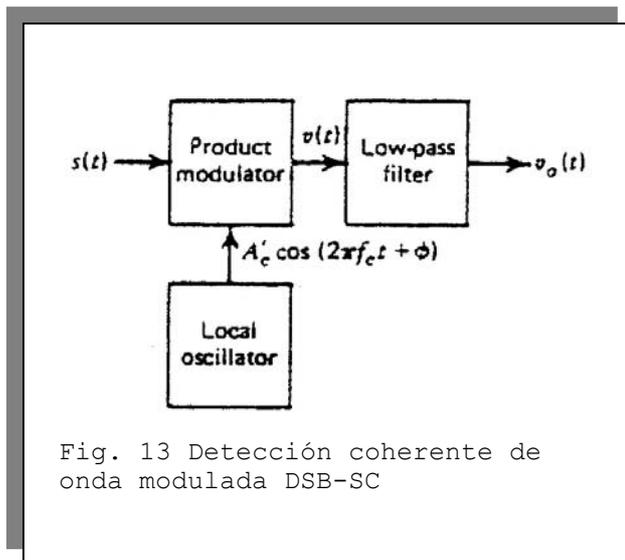
Asumiendo que  $m(t)$  está limitada por la banda de frecuencias  $-W \leq f \leq W$ , el espectro de la salida del modulador consiste en dos bandas laterales alrededor de cada uno de los armónicos impares de la onda cuadrada portadora  $m(t)$ , como se ilustra en la Fig 12. Aquí se ha asumido que  $f_c > W$  de

manera tal de prevenir la superposición de bandas laterales, la cual surge cuando las bandas laterales pertenecientes a las frecuencias armónicas adyacentes  $f_c$  y  $3f_c$  se superponen. De esta forma, siempre que  $f_c > W$ , podemos utilizar un filtro pasa-banda de frecuencia de media banda  $f_c$  y ancho de banda  $2W$  para seleccionar el par deseado de bandas laterales alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$ . Como corresponde, la circuitería necesaria para la generación de una onda modulada DSB-SC consiste en un modulador en anillo seguido de un filtro pasa-banda.



### Detección Coherente

La señal en banda base  $m(t)$  puede ser unívocamente recuperada a partir de una onda DSB-SC  $s(t)$  multiplicando  $s(t)$  en primer lugar con una onda sinusoidal generada localmente y luego filtrando el producto con un filtro pasa-bajos, como en la Fig. 13. Se asume que la señal del oscilador local es exactamente coherente o sincronizada, tanto en



frecuencia como en fase, con la onda portadora  $c(t)$  utilizada en el modulador por producto para generar  $s(t)$ . Este método de demodulación es conocido como detección coherente o demodulación sincrónica.

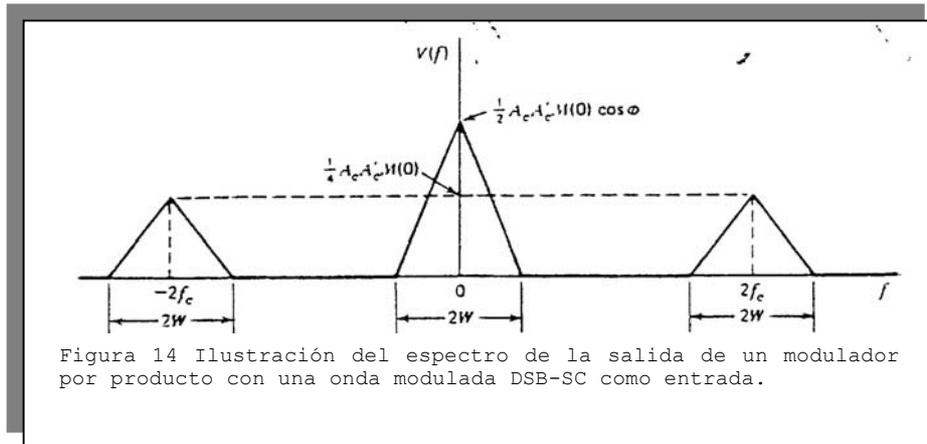
Es instructivo ver la detección coherente como un caso especial del proceso de demodulación utilizando la señal de un oscilador local de la misma frecuencia pero de diferencia de fase arbitraria  $\phi$ , medida con respecto a la onda portadora  $c(t)$ . De esta manera, denotando a la señal del oscilador mediante

$A'_c \cos(2\pi f_c t + \phi)$ , y utilizando la Ec.(14) para la onda DSB-SC  $s(t)$ , encontramos que la salida del modulador por producto en la Fig. 13 es

$$\begin{aligned}
 v(t) &= A'_c \cos(2\pi f_c t + \phi) \cdot s(t) = A_c A'_c \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi) \cdot m(t) \\
 &= \frac{1}{2} A_c A'_c \cos(4\pi f_c t + \phi) \cdot m(t) + \frac{1}{2} A_c A'_c \cos \phi \cdot m(t) \quad (18)
 \end{aligned}$$

El primer término en la Ec.(18) representa una señal modulada DSB-SC con una frecuencia portadora  $2f_c$ , mientras que el segundo término es proporcional a la señal en banda base  $m(t)$ . Esto es además ilustrado por el espectro  $V(f)$  mostrado en la Fig. 14, donde se asume que la señal en banda base  $m(t)$  está limitada dentro del intervalo  $-W \leq f \leq W$ . Es por lo tanto evidente que el primer término en la Ec.(18) es eliminado por el filtro pasa-bajos de la Fig. 13, con la condición de que la frecuencia de corte de este filtro sea mayor que  $W$  pero menor que  $2f_c$ .

W. Esto es satisfecho eligiendo  $f_c > W$ . A la salida del filtro obtenemos entonces una señal dada por



$$v_o(t) = \frac{1}{2} A_c \cdot A'_c \cdot \cos \phi \cdot m(t) \quad (19)$$

La señal demodulada  $v_o(t)$  es por lo tanto proporcional a  $m(t)$  cuando el error de fase  $\phi$  es constante. La amplitud de esta señal demodulada es máxima cuando  $\phi=0$ , y es mínima (cero) cuando  $\phi=\pm\pi/2$ . La señal demodulada nula, la cual ocurre para  $\phi=\pm\pi/2$ , representa el efecto nulo de cuadratura del detector coherente. De esta forma el error de fase  $\phi$  en el oscilador local provoca que la salida del detector sea atenuada por un factor igual a  $\cos\phi$ . Mientras el error de fase  $\phi$  sea constante, la salida del detector provee una versión no distorsionada de la señal en banda base original  $m(t)$ . En la práctica, sin embargo, usualmente encontramos que el error de fase  $\phi$  varía aleatoriamente con el tiempo, debido a variaciones aleatorias en el canal de comunicación. El resultado es que a la salida del detector, el factor de multiplicación  $\cos\phi$  también varía aleatoriamente con el tiempo, lo cual es obviamente indeseable. Por lo tanto, deben tomarse medidas en el sistema para mantener al oscilador local en el receptor en perfecto sincronismo, tanto en frecuencia como en fase, con la onda portadora utilizada para generar la señal modulada DSB-SC en el transmisor. La complejidad del sistema resultante es el precio que debe pagarse por suprimir la onda portadora para ahorrar potencia en el transmisor.

### Receptor Costas

Un método para obtener un sistema receptor sincrónico práctico, conveniente para la demodulación de ondas DSB-SC, es utilizar el receptor Costas mostrado en la Fig. 15. Este receptor consiste de dos detectores coherentes alimentados con la misma señal de entrada, a saber, la onda entrante DSB-SC  $A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot m(t)$ , pero con señales de osciladores locales individuales que se hallan en cuadratura de fase entre ellas. La frecuencia del oscilador local se ajusta de manera que sea la misma que la frecuencia  $f_c$  de la portadora, la cual se asume a priori conocida. El detector de la rama superior se conoce como detector coherente en fase o canal I, y el de la rama inferior como detector coherente en cuadratura o canal Q. Estos dos detectores son apareados de manera que formen un sistema de retroalimentación negativa diseñado de tal manera para mantener el oscilador local en sincronismo con la onda portadora.

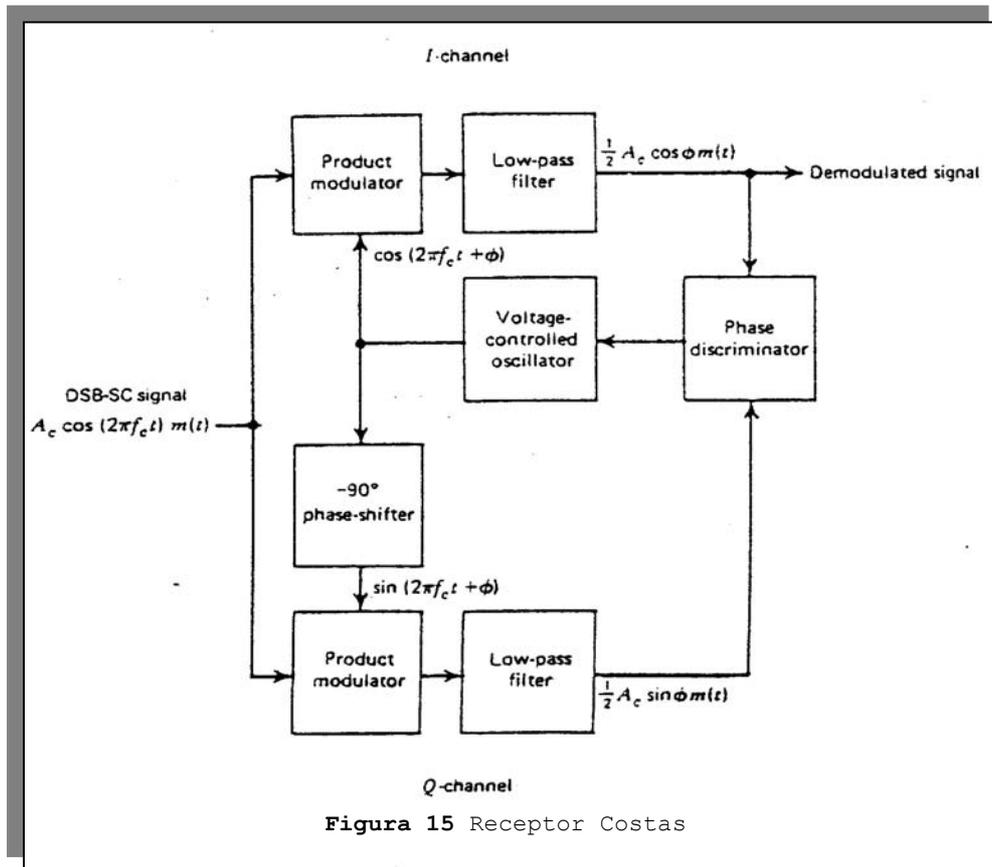


Figura 15 Receptor Costas

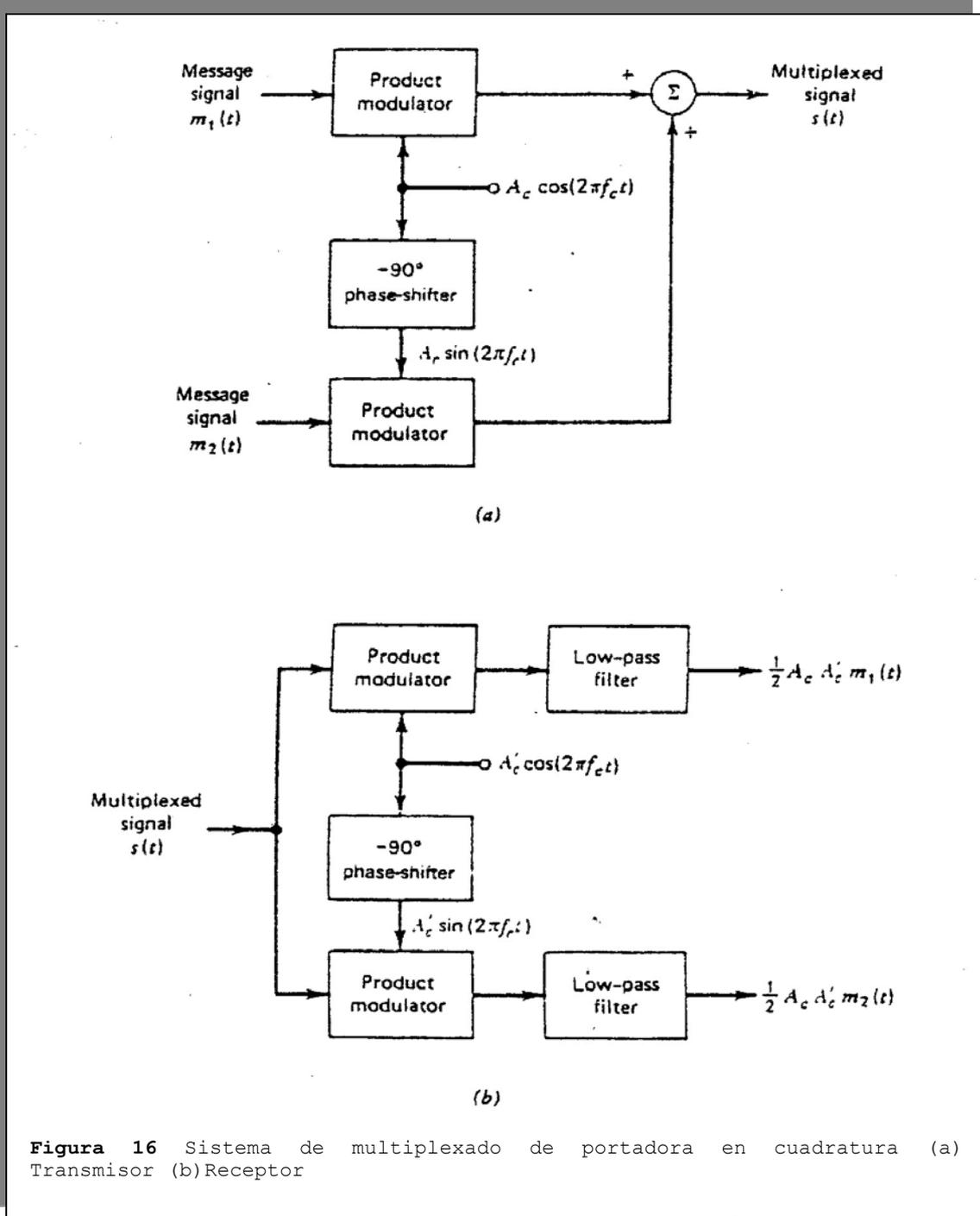
Para entender el funcionamiento de este receptor, supongamos que la señal del oscilador local tiene la misma fase que la onda portadora  $A_c \cos(2\pi f_c t)$  utilizada para generar la onda DSB-SC entrante. Bajo estas condiciones, encontramos que la salida del canal I contiene la señal  $m(t)$  demodulada deseada, mientras que la salida del canal Q es cero debido al efecto nulo de cuadratura del canal Q. Supongamos luego que la fase del oscilador local se aparta de su valor correcto un pequeño ángulo de  $\phi$  radianes. La salida del canal I se mantendrá esencialmente invariante, pero habrá ahora alguna señal apareciendo a la salida del canal Q, la cual es proporcional a  $\sin \phi \approx \phi$  para  $\phi$  pequeño. Esta salida del canal Q tendrá la misma polaridad que la salida del canal I para una dirección del desplazamiento de fase del oscilador local y la polaridad opuesta para la dirección contraria. De esta manera, mediante la combinación de las salidas de los canales Q e I en un discriminador de fase (el cual consiste de un multiplicador seguido de un filtro pasa-bajos), como el mostrado en la Fig. 15, se obtiene una señal de control de c.c. que corrige automáticamente errores en la fase del oscilador controlado por voltaje.

Es evidente que el control de fase en el receptor Costas cesa con la modulación y que el establecimiento de fase debe ser reestablecido con la reaparición de la modulación. Este no es un problema serio cuando se reciben transmisiones de voz, porque el proceso de establecimiento ocurre tan rápido que no se percibe ninguna distorsión.

### Multiplexado de portadora en cuadratura

Al efecto nulo de cuadratura del detector coherente puede también dársele un buen uso en la construcción del así llamado multiplexado de portadora en cuadratura o modulación de amplitud en cuadratura (QAM). Esta configuración habilita que dos ondas moduladas DSB-SC (resultantes de la aplicación de dos señales físicamente independien-

tes) ocupen el mismo ancho de banda de canal, y además admite la separación de las dos señales mensaje a la salida del receptor. Se trata por lo tanto de una configuración de conservación de ancho de banda.



Un diagrama de bloques del sistema de multiplexado de portadora en cuadratura se muestra en la Fig. 16. La parte transmisora del sistema, mostrada en la Fig. 16.a, requiere el uso de dos moduladores por producto separados que son alimentados con dos ondas portadoras de la misma frecuencia pero cuya fases difieren -90 grados. La señal transmitida  $s(t)$  consiste de la suma de las salidas de estos dos moduladores por producto, como la mostrada por

$$s(t) = A_c \cdot m_1(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + A_c \cdot m_2(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (20)$$

donde  $m_1(t)$  y  $m_2(t)$  denotan dos señales mensaje diferentes aplicadas a los moduladores por producto. De esta manera  $s(t)$  ocupa un ancho de banda de canal de  $2W$  centrados en la frecuencia de la portadora  $f_c$ , donde  $W$  es el ancho de banda de mensaje de  $m_1(t)$  y  $m_2(t)$ . De acuerdo con la Ec.(3.20), podemos ver a  $A_c.m_1(t)$  como la componente en fase de la señal pasabanda multiplexada  $s(t)$  y  $-A_c.m_2(t)$  como su componente en cuadratura.

La parte receptora del sistema es mostrada en la Fig. 16b. La señal multiplexada  $s(t)$  es aplicada simultáneamente a dos detectores coherentes separados que están alimentados con dos portadoras locales de la misma frecuencia, pero cuyas fases difieren  $-90$  grados. La

salida del detector superior es  $\frac{1}{2}A'_c.m_1(t)$ , mientras que la salida del

detector inferior es  $\frac{1}{2}A'_c.m_2(t)$ . Para que el sistema funcione

satisfactoriamente, es importante mantener correctamente las fases y relaciones de frecuencia entre los osciladores locales utilizados en las partes emisora y receptora del sistema.

Para mantener esta sincronización, podemos utilizar un receptor Costas descrito arriba. Otro método comúnmente utilizado es enviar una señal piloto fuera de la banda de paso de la señal modulada. En el último método, la señal piloto típicamente consiste de un tono sinusoidal de baja potencia cuya frecuencia y fase están relacionadas con la onda portadora  $c(t)$ ; en el receptor, la señal piloto es extraída por medio de un circuito convenientemente sintonizado y luego trasladada a la frecuencia correcta para su uso en el detector coherente.

#### 4. FILTRADO DE BANDAS LATERALES

El próximo tema que deseamos tratar es cómo procesar una señal modulada DSB-SC de manera de generar una señal modulada de banda lateral residual (VSB) o de banda lateral simple (SSB). Un método intuitivamente satisfactorio para lograr este requerimiento es el método de discriminación de frecuencia que involucra el uso de un filtro apropiado a la salida de un modulador por producto responsable de la generación de la señal modulada DSB-SC. Naturalmente, la especificación exacta del filtro depende del tipo de modulación deseado.

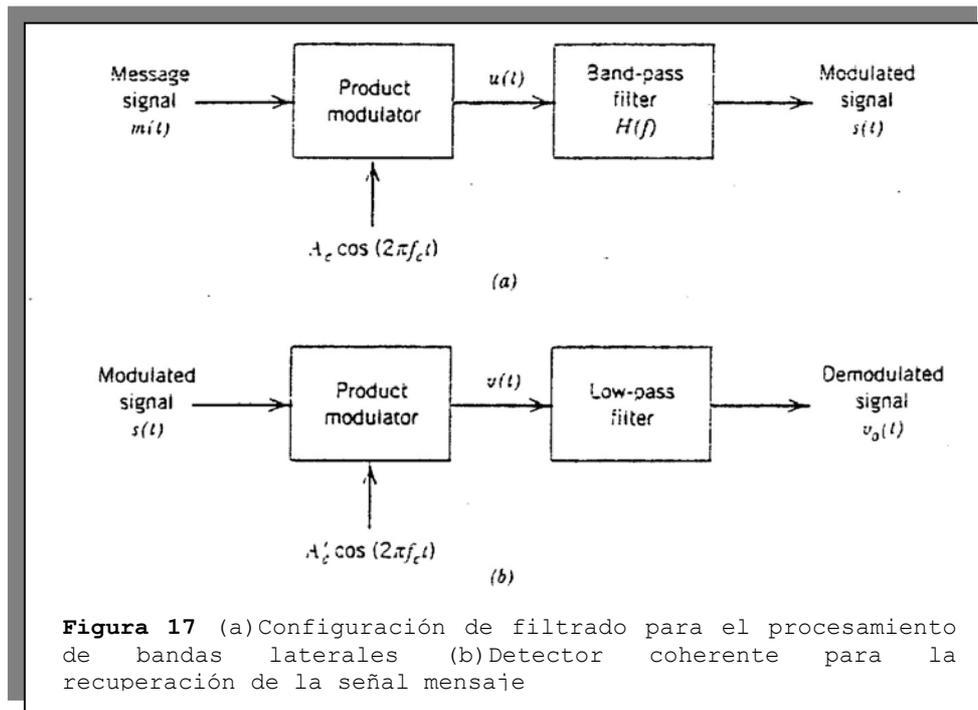
Consideremos entonces el circuito descrito en la Fig. 17.a, donde  $u(t)$  denota la salida del modulador por producto,

$$u(t) = A_c.m(t).\cos(2\pi f_c t)$$

Denotemos con  $H(f)$  a la función transferencia del filtro ubicado a la salida del modulador por producto. El espectro de la señal modulada  $s(t)$  producida al pasar  $u(t)$  a través del filtro está dada por

$$S(f) = U(f).H(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]H(f) \quad (21)$$

Donde  $M(f)$  es la transformada de Fourier de la señal mensaje  $m(t)$ . El problema que deseamos enfrentar es determinar la  $H(f)$  particular requerida para producir una señal modulada  $s(t)$  con las características espectrales deseadas, tal que la señal mensaje original  $m(t)$  pueda ser recuperada a partir de  $s(t)$  mediante detección coherente.



**Figura 17** (a) Configuración de filtrado para el procesamiento de bandas laterales (b) Detector coherente para la recuperación de la señal mensaje

El primer paso en el proceso de detección coherente involucra multiplicar la señal modulada  $s(t)$  por una onda sinusoidal localmente generada  $A'_c \cdot \cos(2\pi f_c t)$ , la cual es sincrónica con la onda portadora  $A_c \cdot \cos(2\pi f_c t)$ , tanto en frecuencia como en fase, como en la Fig. 17b. Podemos de esta forma escribir

$$v(t) = A'_c \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot s(t)$$

Transformando esta relación al dominio frecuencial obtenemos la transformada de Fourier de  $v(t)$  como

$$V(f) = \frac{A'_c}{2} [S(f - f_c) + S(f + f_c)] \quad (22)$$

Por lo tanto, la substitución de la Ec. (3.21) en la (3.22) produce

$$V(f) = \frac{A_c A'_c}{4} M(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)] + \frac{A_c A'_c}{4} [M(f - 2f_c) H(f - f_c) + M(f + 2f_c) H(f + f_c)] \quad (23)$$

Las componentes de alta frecuencia de  $v(t)$  representadas por el segundo término en la Ec. (23) son eliminadas por el filtro pasa-bajos de la Fig. 3.17b para producir una salida  $v_o(t)$ , cuyo espectro está dado por las componentes remanentes:

$$V_o(f) = \frac{A_c A'_c}{4} M(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)] \quad (24)$$

Para una reproducción sin distorsión de la señal en banda base original  $m(t)$  a la salida del detector coherente, se requiere que  $V_o(f)$  sea una versión escalada de  $M(f)$ . Esto significa, por lo tanto, que la función transferencia  $H(f)$  debe satisfacer la condición

$$H(f - f_c) + H(f + f_c) = 2H(f_c) \quad (25)$$

donde  $H(f_c)$ , el valor de  $H(f)$  en  $f=f_c$ , es una constante. Cuando el espectro del mensaje (espectro en banda base)  $M(f)$  es cero fuera del rango de frecuencias  $-W \leq f \leq W$ , necesitamos satisfacer la Ec.(25) únicamente para valores de  $f$  en este intervalo. Además, para simplificar la explicación, fijamos  $H(f_c) = \frac{1}{2}$ . De esta manera requerimos que  $H(f)$  satisfaga la condición:

$$H(f - f_c) + H(f + f_c) = 1, \quad -W \leq f \leq W \quad (26)$$

Hay mucha flexibilidad en la selección de  $H(f)$  para satisfacer esta condición, como se tratará luego en las secciones 6 y 7. En todo caso, bajo la condición descrita en la Ec.(26), hallamos de la Ec.(24) que la salida del detector coherente de la Fig. 17b está dada por

$$v_o(t) = \frac{A_c A_c'}{2} m(t) \quad (27)$$

La ecuación (21) define el espectro de la señal modulada  $s(t)$ . Reconocer que  $s(t)$  es una señal pasabanda, podemos formular su descripción en el dominio temporal en términos de las componentes en fase y en cuadratura, utilizando el método passband signaling descrito en la sección 2.12. En particular,  $s(t)$  puede expresarse en la forma canónica

$$s(t) = s_I(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - s_Q(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (28)$$

donde  $s_I(t)$  es la componente en fase de  $s(t)$ , y  $s_Q(t)$  es su componente en cuadratura. Para determinar  $s(t)$ , hacemos notar que su Transformada de Fourier está relacionada con la transformada de Fourier de  $s(t)$  como sigue (ver problema 2.29):

$$S_I(f) = \begin{cases} S(f - f_c) + S(f + f_c) & -W \leq f \leq W \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

De aquí, substituyendo la Ec.(21) en la (29), encontramos que la transformada de Fourier de  $s_I(t)$  está dada por

$$\begin{aligned} S_I(f) &= \frac{1}{2} A_c M(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)] = \\ &= \frac{1}{2} A_c M(f) \quad -W \leq f \leq W \end{aligned} \quad (30)$$

donde, en la segunda línea, hemos hecho uso de la condición de la Ec.(3.26) impuesta sobre  $H(f)$ . De la Ec.(30) rápidamente vemos que la componente en fase de la señal modulada  $s(t)$  está definida por

$$S_I(t) = \frac{1}{2} A_c m(t)$$

la cual, excepto por el factor de escala, es la misma que la señal mensaje original  $m(t)$ .

Para determinar la componente en cuadratura  $s_Q(t)$  de la señal modulada  $s(t)$ , reconocemos que su transformada de Fourier está definida en términos de la transformada de Fourier de  $s(t)$  de la manera siguiente (ver Problema 2.29):

$$S_Q(f) = \begin{cases} j[S(f-f_c) - S(f+f_c)] & -W \leq f \leq W \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (32)$$

Por lo tanto, substituyendo la Ec. (3.21) en la (3.32), obtenemos

$$S_Q(f) = \frac{j}{2} A_c M(f) [H(f-f_c) - H(f+f_c)] \quad -W \leq f \leq W \quad (33)$$

Esta ecuación sugiere que podemos generar  $s_Q(t)$ , excepto por un factor de escala, haciendo pasar la señal mensaje  $m(t)$  a través de un nuevo filtro cuya función transferencia está relacionada a la del filtro de la Fig. 3.17.a como sigue

$$H_Q(f) = j[H(f-f_c) - H(f+f_c)] \quad -W \leq f \leq W \quad (34)$$

Denotemos con  $m'(t)$  la salida de este filtro producida en respuesta a la entrada  $m(t)$ . De aquí, podemos expresar la componente en cuadratura de la señal modulada  $s(t)$  como

$$S_Q(t) = \frac{1}{2} A_c m'(t)$$

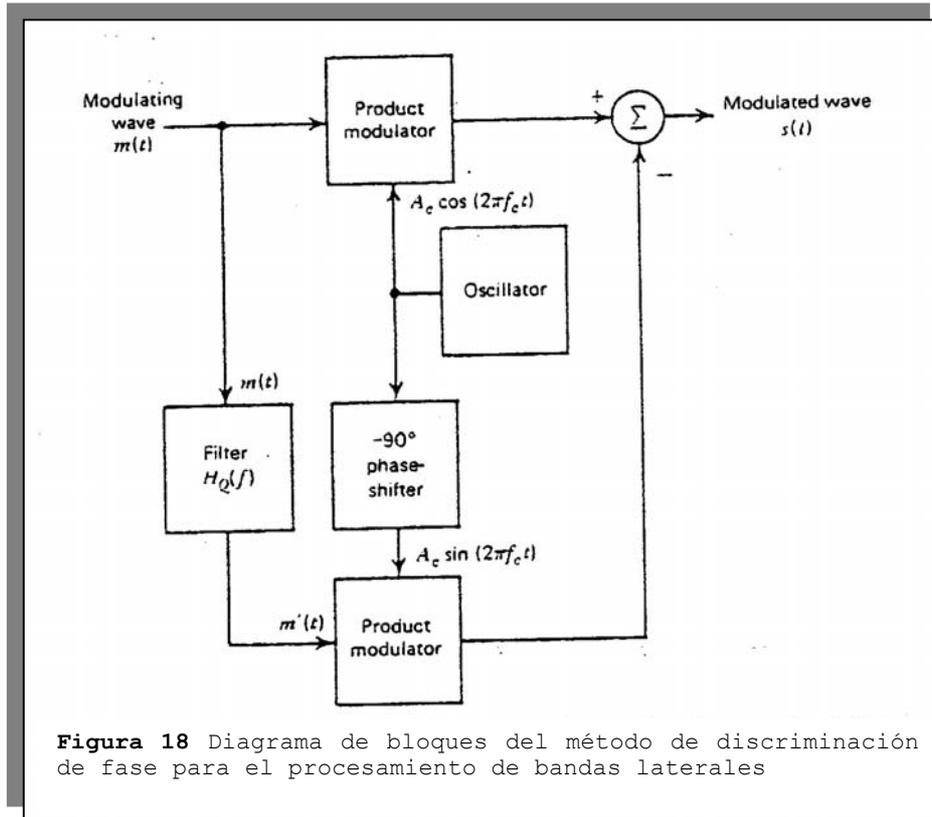
En consecuencia, substituyendo las Ecs. (31) y (35) en la (28), encontramos que  $s(t)$  puede ser escrita en la forma canónica

$$s(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2} A_c m'(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (36)$$

La ecuación (36), excepto por el factor de escala  $\frac{1}{2}$ , sugiere al circuito de la Fig. 18 como la base de un método de discriminación de fase para la generación de la onda modulada  $s(t)$ . Hay aquí dos puntos importantes para notar:

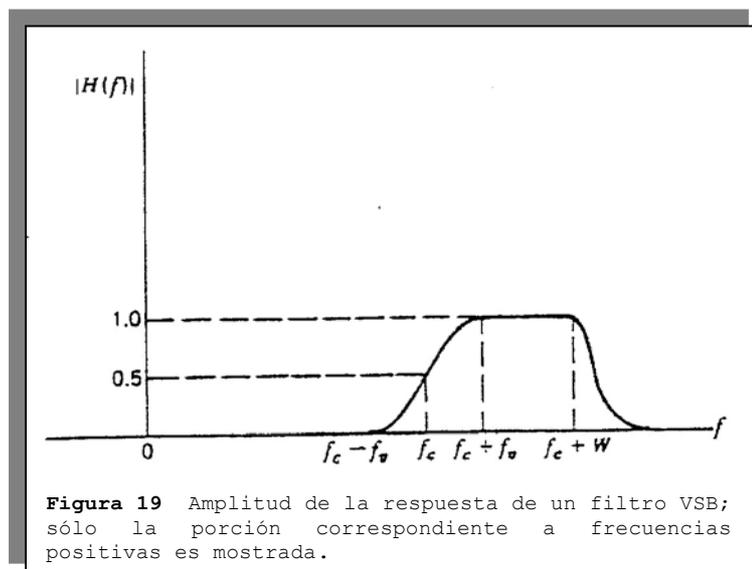
1. La componente en fase  $s_I(t)$  es completamente independiente de la función transferencia  $H(f)$  del filtro pasabanda involucrado en la generación de la onda modulada  $s(t)$  de la Fig. 17.a, mientras satisfaga la condición de la Ec. (26).
2. La modificación espectral atribuida a la función transferencia  $H(f)$  está dada únicamente por la componente en cuadratura  $s_Q(t)$ .

El rol de la componente en cuadratura es únicamente interferir con la componente en fase, de manera de reducir o eliminar la potencia en una de las bandas laterales de la señal modulada  $s(t)$ , dependiendo de la aplicación de interés.



El tratamiento del tema presentado hasta ahora ha sido de naturaleza bastante aproximada. En las dos próximas secciones, consideramos la generación de señales moduladas VSB y SSB como casos especiales de la señal modulada  $s(t)$  definida en la Ec. (36).

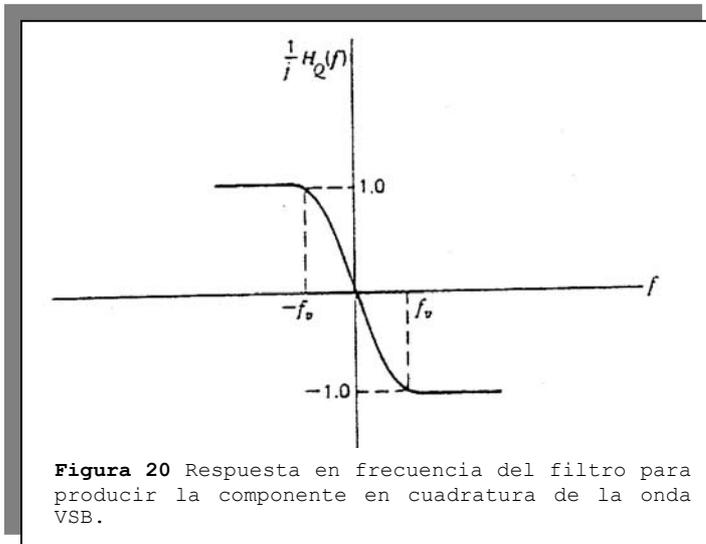
### 5. MODULACIÓN DE BANDA LATERAL RESIDUAL



Asumiendo que el requerimiento es generar una señal modulada VSB conteniendo un residuo de la banda lateral inferior, encontramos que la Ec. (3.26) es satisfecha utilizando un filtro pasabanda cuya función transferencia  $H(f)$  es como la mostrada en la Fig. 19; para simplificar las cosas, sólo se muestra la respuesta para frecuencias positivas. La

respuesta en frecuencia está normalizada, de manera que  $|H(f)|$  es igual a un medio para la frecuencia de la portadora  $f_c$ . La característica importante para notar, sin embargo, es que la porción de corte de la respuesta en frecuencia alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$  exhibe simetría impar. Esto es decir, dentro del intervalo de transición  $f_c - f_v \leq f \leq f_c + f_v$  la suma de los valores de  $|H(f)|$  de dos frecuencias cualquiera igualmente desplazadas por encima y por debajo de  $f_c$  es la unidad;  $f_v$  es el ancho de la banda lateral residual. Note también que en el exterior de la banda de frecuencia de interés (i.e.,  $|f| > f_c + W$ ), la función transferencia  $H(f)$  puede tener una especificación arbitraria.

La correspondiente respuesta en frecuencia del filtro que produce la componente en cuadratura de la señal modulada VSB de acuerdo con la Ec.(34) es la mostrada en la Fig. 20.



Las figuras 19 y 20 se aplican a una señal modulada VSB que contiene un residuo de la banda lateral inferior. Para una señal modulada VSB que contiene un residuo de la banda lateral superior, obtenemos resultados similares excepto por las siguientes diferencias: La porción de corte superior de  $H(f)$  es controlada para exhibir simetría impar alrededor de la frecuencia portadora  $f_c$ , mientras

que la porción de corte inferior es arbitraria. Esto tiene el efecto de reemplazar el signo menos en el sumador de salida de la Fig. 18 por un signo más.

### Señales de televisión

Un tratamiento de la modulación de banda lateral residual estaría incompleta sin una mención de su rol en emisiones comerciales de TV. Los detalles exactos del formato de modulación utilizado para transmitir la señal de video característica de un sistema de TV están influenciados por dos factores:

1. La señal de video exhibe un ancho de banda grande y un contenido significativo de baja frecuencia, lo que sugiere el uso de modulación de banda lateral residual.
2. La circuitería utilizada para la demodulación en el receptor debería ser simple y por lo tanto barata; esto sugiere el uso de detección de envolvente, lo cual requiere la adición de una portadora a la onda modulada VSB.

Con respecto al punto 1, sin embargo, debería acentuarse que aunque existe por cierto un deseo básico de conservar el ancho de banda, en emisiones comerciales de TV la señal transmitida no es exactamente una señal modulada VSB. La razón es que los niveles de potencia transmitidos son altos, con el resultado de que sería costoso controlar rígidamente el filtrado de las bandas laterales. En cambio, un filtro VSB se inserta en cada en cada receptor donde los niveles de

potencia son bajos. El rendimiento general es el mismo que para la modulación de ancho de banda residual convencional, excepto por algo de potencia y ancho de banda desperdiciados. Estos comentarios son ilustrados en la Fig. 21. En particular, la Fig. 21.a muestra el espectro idealizado de una señal de TV transmitida. La banda lateral superior, un 25 % de la banda lateral inferior, y la portadora de imagen son transmitidas. La respuesta en frecuencia del filtro VSB utilizado para darle al espectro la forma requerida en el receptor es la mostrada en la Fig. 21b.

El ancho de banda utilizado para emisiones de TV en Norteamérica es de 6 MHz, como se indica en la Fig. 21b. Este ancho de banda de canal no sólo alberga el requerimiento de ancho de banda de las señales de video moduladas VSB sino que también provee ancho de banda para las señales de audio que transmitidas junto a ellas que modulan una portadora propia. Los valores representados en el eje de frecuencia en las Figs. 21.a y 21b están relacionados con un canal específico de TV. De acuerdo a esta figura, la frecuencia de la portadora de imagen es de 55.25 MHz, y la frecuencia de la portadora de sonido es de 59.75 MHz. Note, sin embargo, que el contenido de información de la señal de TV yace en un espectro en banda base que se extiende desde 1.25 MHz por debajo de la portadora de imagen hasta 4.5 MHz por encima de ella. Con respecto al punto 2, el uso de detección de envolvente (aplicada a una onda modulada VSB más la portadora) produce distorsión de la forma de onda en la señal de video recuperada a la salida del detector. La distorsión es producida por la componente en cuadratura de la onda modulada VSB; este punto es discutido a continuación.

#### Distorsión de la forma de onda

El uso en el dominio temporal de la descripción dada por la Ec. (36) permite la determinación de la distorsión de la forma de onda causada por el detector de envolvente. Específicamente, añadir la componente portadora  $A_c \cdot \cos(2\pi f_c t)$  a la Ec.(3.36), ésta siendo escalada por un factor  $k_a$ , modifica la señal modulada aplicada al detector de envolvente de la siguiente forma

$$s(t) = A_c \left[ 1 + \frac{1}{2} k_a m(t) \right] \cdot \cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2} k_a A_c m'(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (37)$$

donde la constante  $k_a$  determina el porcentaje de modulación. La salida del detector de envolvente, denotada por  $a(t)$ , es por lo tanto

$$\begin{aligned} a(t) &= A_c \cdot \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2} k_a m(t) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} k_a m'(t) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= A_c \left[ 1 + \frac{1}{2} k_a m(t) \right] \cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{\frac{1}{2} k_a m'(t)}{1 + \frac{1}{2} k_a m(t)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (38)$$

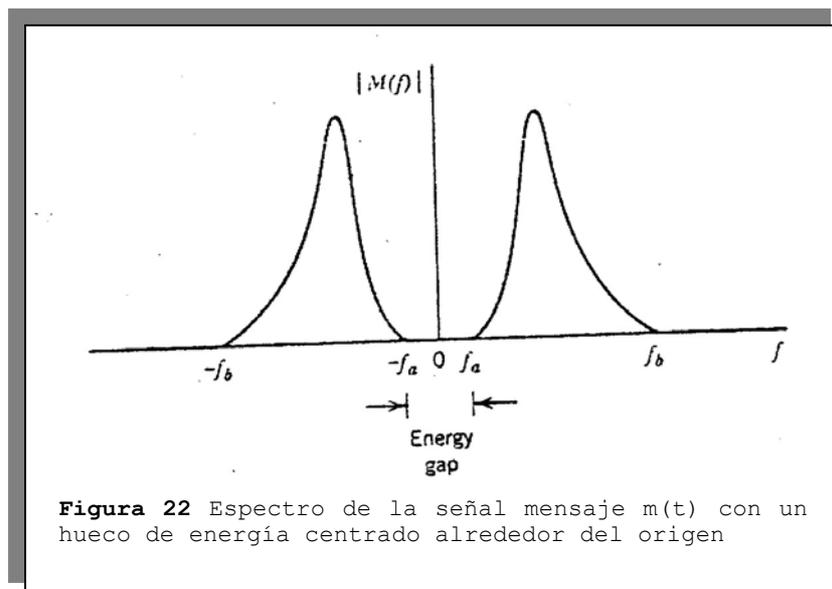
La Ec.(38) indica que la distorsión es aportada por  $m'(t)$ , la cual es responsable de la componente en cuadratura de la señal modulada VSB entrante. Esta distorsión puede ser reducida utilizando dos métodos:

- Reducir la sensibilidad de amplitud  $k_a$  reduciendo el porcentaje de modulación.
- Reducir  $m'(t)$  incrementando el ancho de la banda lateral residual.

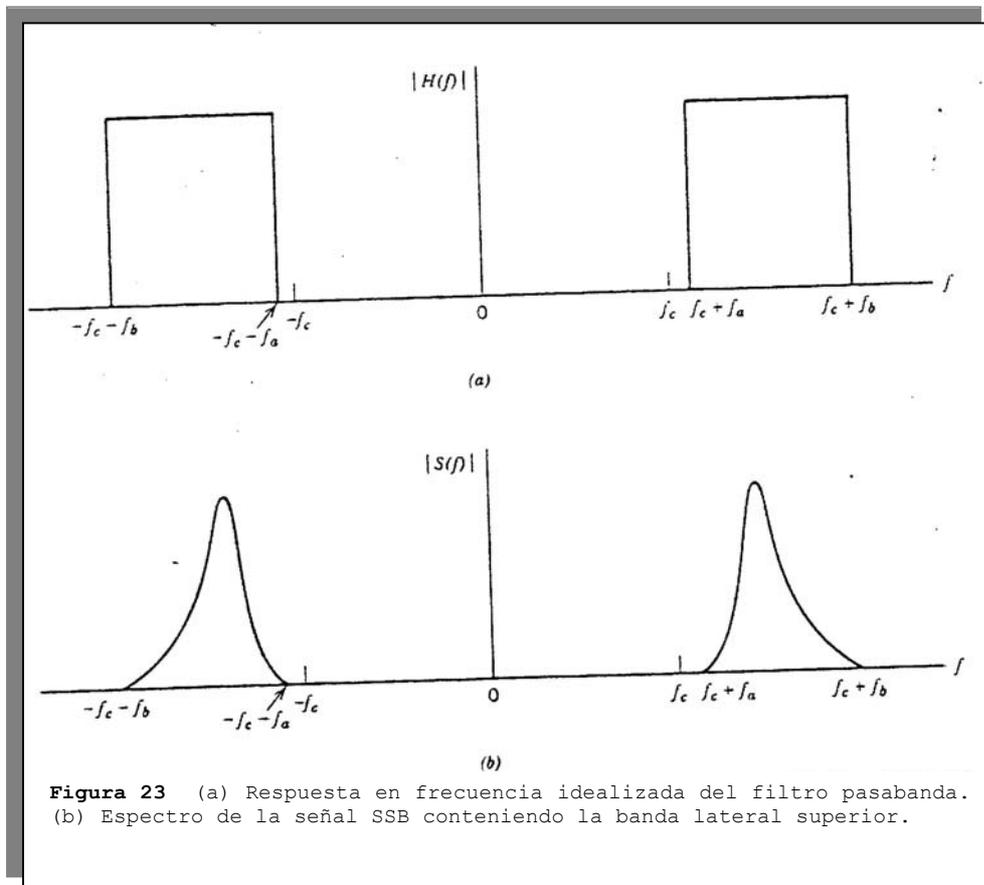
Ambos métodos son de hecho utilizados en la práctica. En emisiones comerciales de TV, el ancho de la banda lateral residual (el cual es de alrededor de 0.75 MHz o un sexto de una banda lateral completa) se determina para mantener la distorsión debida a  $m'(t)$  dentro de límites tolerables cuando el porcentaje de modulación es cercano a 100.

## 6. MODULACIÓN DE BANDA LATERAL SIMPLE

Consideremos a continuación la generación de señal modulada SSN conteniendo la banda lateral superior únicamente. Desde un punto de vista práctico, el requerimiento más severo de la generación SSB usualmente surge de la banda lateral no deseada, cuya componente frecuencial más cercana se halla separada de la banda lateral deseada por el doble de la frecuencia más baja que compone la señal mensaje o moduladora. La consecuencia es que para que la generación de una señal modulada SSB sea posible, el espectro del mensaje debe tener un hueco de energía centrado en el origen, como se ilustra en la Fig. 22.



Este requerimiento es naturalmente satisfecho por señales de voz, cuyo hueco energético es de un ancho aproximado de 600 Hz (i.e., se extiende desde -300 Hz hasta +300 Hz). Podemos entonces generar una señal SSB que contiene la banda lateral superior mediante la utilización de un filtro pasabanda, cuya respuesta en frecuencia está idealmente relacionada con la frecuencia de la portadora  $f_c$ , como se muestra en la Fig. 23.a. De esta manera, dado el espectro del mensaje definido en la Fig. 22, hallamos que el espectro correspondiente de señal SSB es como el mostrado en la Fig. 23b.



**Figura 23** (a) Respuesta en frecuencia idealizada del filtro pasabanda.  
 (b) Espectro de la señal SSB conteniendo la banda lateral superior.

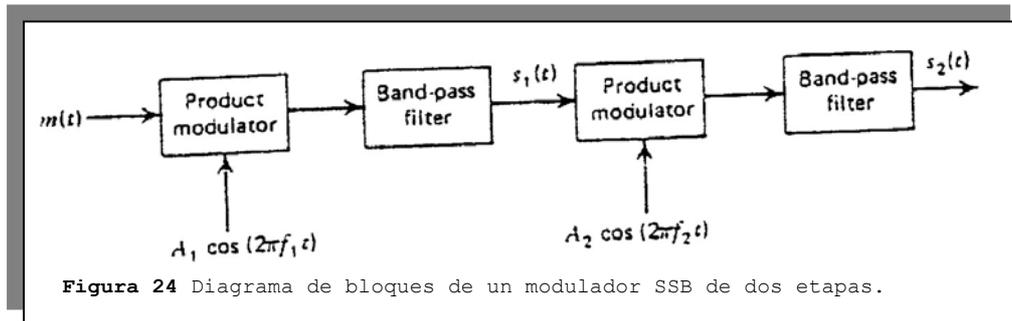
En el diseño del filtro pasabanda de la Fig. 17.a. para la generación de una onda modulada SSB, debemos satisfacer tres requerimientos básicos:

- La banda lateral deseada yace dentro de la banda de paso del filtro.
- La banda lateral no deseada yace dentro de la banda filtrada.
- La banda de transición del filtro, que separa la banda de paso de la banda filtrada, es el doble de la frecuencia más baja que compone la señal mensaje.

Este tipo de discriminación de frecuencia requiere el uso de filtros altamente selectivos, los cuales pueden ser realizados en la práctica únicamente por medio de resonadores de cristal.

Cuando es necesario generar una señal SSB que ocupe una banda de frecuencia que es mucho mayor que la de la señal en banda base (e.g., trasladar una señal de voz a la región de alta frecuencia del espectro de radio), se torna muy dificultoso diseñar un filtro apropiado que pase la banda lateral deseada y rechace la otra, utilizando la disposición simple de la Fig. 17.a. En tal situación es necesario recurrir a un proceso de modulación múltiple de manera de simplificar los requerimientos de filtrado. Esta aproximación, involucrando dos etapas de modulación, se ilustra en la Fig. 3.24. La señal SSB  $s_1(t)$  a la salida del primer filtro pasabanda es utilizada como la onda moduladora para el segundo modulador por producto, el cual produce una señal DSB-SC con un espectro que está simétricamente espaciado respecto a la segunda frecuencia portadora  $f_2$ . La separación frecuencial entre las bandas laterales de esta señal DSB-SC es efectivamente el doble de la frecuencia  $f_1$  de la primer portadora,

haciendo de ese modo relativamente sencillo eliminar la banda lateral indeseada mediante el segundo filtro pasabanda, y generar de ese modo la señal SSB  $s_2(t)$ .



### Descripción en el dominio temporal de la señal modulada SSB

El próximo tema a ser considerado es la descripción en el dominio temporal de una señal modulada SSB  $s(t)$ . Dada la respuesta en frecuencia idealizada de la Fig. 23.a. como la descripción de  $H(f)$ , encontramos a partir de la Ec.(34) que la descripción correspondiente de  $H_Q(f)$  responsable de la generación de la componente en cuadratura  $s_Q(t)$  es como la mostrada en la Fig. 25. Utilizando la definición de la función signo  $\text{sgn}(f)$ , enseguida vemos de la Fig. (25) que

$$H_Q(f) = -j.\text{sgn}(f) \quad (39)$$

lo cual se conoce como la función transferencia del transformador de Hilbert(ver sección 2.10). En otras palabras,  $m'(t)$  en la Ec. (36) es exactamente la transformada de Hilbert de la señal mensaje original

$m(t)$ . De esta manera, utilizando  $\hat{m}(t)$  para denotar a esta transformada de Hilbert, podemos describir formalmente una señal modulada SSB que contiene únicamente la banda lateral superior como sigue:

$$s(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Esto significa que el filtro responsable de la generación de la componente en cuadratura de  $s(t)$  en el modulador de la Fig. 3.18 consiste en un transformador de Hilbert. Además, si queremos generar una señal modulada SSB que contenga sólo la banda lateral inferior, simplemente reemplazamos el signo menos en el sumador de salida de la Fig. 18 por un signo más. Un modulador SSB basado en la disposición mostrada en la Fig. 18 en la manera aquí descrita es llamado modulador de Hartley.

### Demodulación de señales SSB

La señal demodulada  $v_o(t)$  definida en la Ec.(27) asume un perfecto sincronismo entre el oscilador en el detector coherente de la Fig. 17b y el oscilador en el modulador de la Fig. 17.a, tanto en fase como en frecuencia. Esto puede lograrse por uno de dos métodos:

- Transmitir una portadora piloto conjuntamente con la banda lateral seleccionada, o

- Usar, en el receptor, un oscilador altamente estable sintonizado a la misma frecuencia que la de la portadora.

En el último método, es inevitable que haya algún error de fase  $\phi$  en la señal del oscilador local con respecto a la onda portadora utilizada para generar la onda modulada SSB entrante  $s(t)$ . Denotando a la señal del oscilador local mediante  $A_c' \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi)$ , hallamos que (luego de ciertos pasos sencillos de entender) la señal demodulada resultante está dada por (para el caso en que sólo la banda lateral superior es transmitida)

$$v_o(t) = \frac{1}{4} A_c \cdot A_c' \left[ m(t) \cdot \cos \phi + \hat{m}(t) \cdot \sin \phi \right] \quad (41)$$

Distintamente al proceso idealizado de detección coherente descrito en la Ec.(27), la señal demodulada  $v_o(t)$  de la Ec.(41) contiene una

componente indeseada proporcional a  $\hat{m}(t) \cdot \sin \phi$ , la cual no puede ser eliminada por filtrado. Esta componente no deseada se manifiesta como una distorsión de fase. Para graficar esto, tomamos la transformada de Fourier de  $v_o(t)$  en la Ec.(41) para obtener

$$V_o(f) = \frac{1}{4} A_c \cdot A_c' \left[ M(f) \cdot \cos \phi + \hat{M}(f) \cdot \sin \phi \right] \quad (42)$$

Pero de la definición de la transformada de Hilbert  $\hat{m}(t)$ , sabemos que la transformada de Fourier de  $\hat{m}(t)$  está relacionada con la transformada de Fourier de la señal original  $m(t)$  por

$$\hat{M}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) M(f) \quad (43)$$

Por lo tanto, substituyendo la Ec.(43) en la (42) y luego simplificando, obtenemos

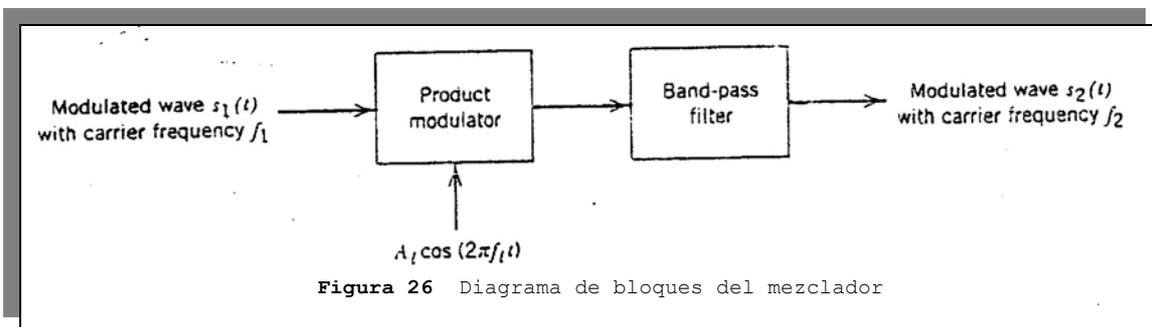
$$V_o(f) = \begin{cases} \frac{1}{4} A_c \cdot A_c' \cdot M(f) \cdot \exp(-j\phi), & f > 0 \\ \frac{1}{4} A_c \cdot A_c' \cdot M(f) \cdot \exp(j\phi), & f < 0 \end{cases} \quad (44)$$

De esta manera el error de fase  $\phi$  en la salida del oscilador local resulta en una distorsión de fase, donde cada componente frecuencial de la señal mensaje original  $m(t)$  experimenta un desplazamiento de fase constante  $\phi$  a lo largo de la demodulación en el receptor. Esta distorsión de fase puede ser tolerada en comunicaciones de voz, debido a que el oído humano es relativamente insensible a la distorsión de fase; la presencia de distorsión de fase da origen a un efecto de voz

Pato Donald. En la transmisión de señales de música y video, por otra parte, la presencia de distorsión de fase en forma de una diferencia de fase constante es totalmente inaceptable.

## 7. TRANSLACIÓN DE FRECUENCIA

El funcionamiento básico ligado a la modulación de banda lateral simple es de hecho una forma de translación de frecuencia, razón por la cual la modulación de banda lateral simple es a veces llamada cambio, mezcla o heterodyning de frecuencia. Esta operación es claramente ilustrada por la comparación del espectro de la señal mostrada en la Fig. 23b con el de la señal mensaje original en la Fig. 22. Específicamente, vemos que el espectro de un mensaje que ocupa la banda que va de  $f_a$  a  $f_b$  para frecuencias positivas en la Fig. 22, es desplazado hacia arriba por una cantidad igual a la frecuencia de la portadora  $f_c$  en la Fig. 23b; el espectro del mensaje para frecuencias negativas es trasladado hacia debajo en forma simétrica.



La idea de translación de frecuencia aquí descrita puede ser generalizada como sigue. Supongamos que tenemos una onda modulada  $s_1(t)$  cuyo espectro está centrado en una frecuencia portadora  $f_1$ , y el requerimiento es trasladarlo hacia arriba en frecuencia de manera que su frecuencia portadora cambia de  $f_1$  a un nuevo valor  $f_2$ . Esto puede lograrse utilizando el mezclador mostrado en la Fig. 26, el cual es similar a la configuración de la Fig. 17.a. Específicamente, el mezclador es un dispositivo que consiste en un modulador por producto seguido de un filtro pasabanda. El filtro pasabanda está diseñado de manera que tenga un ancho de banda igual al de la señal modulada  $s_1(t)$  utilizada como entrada. El punto clave a resolver es la frecuencia del oscilador local conectado al modulador por producto. Denotemos a esta frecuencia con  $f_1$ . Debido a la translación de frecuencia llevada a cabo por el mezclador, la frecuencia portadora  $f_1$  de la señal modulada entrante es cambiada en una cantidad igual a  $f_1$ ; de aquí podemos establecer que

$$f_2 = f_1 + f_1$$

Resolviendo para  $f_1$ , tenemos de esta manera

$$f_1 = f_2 - f_1$$

Esta relación asume que  $f_2 > f_1$ , en cuyo caso la frecuencia de la portadora es trasladada hacia arriba. Si, por otra parte, tenemos que  $f_1 > f_2$ , la frecuencia de la portadora es trasladada hacia abajo, por lo cual la frecuencia correspondiente del oscilador local es

$$f_1 = f_1 - f_2$$

Es importante notar que la mezcla es una operación lineal. En consecuencia, la relación de las bandas laterales de la onda modulada

entrante con la portadora se halla completamente conservada a la salida del mezclador.

## 8. MODULACIÓN DE ÁNGULO

En las secciones previas de este capítulo, investigamos el efecto de variar lentamente la amplitud de una onda portadora sinusoidal de acuerdo con la señal en banda base (portadora de información). Hay otra forma de modular una onda portadora sinusoidal, a saber, la modulación de ángulo, en la cual el ángulo de la onda portadora es variado de acuerdo con la señal en banda base. En este método de modulación, la amplitud de la onda portadora se mantiene constante. Una característica importante de la modulación de ángulo es que puede proveer mejor discriminación contra el ruido y las interferencias que el método de modulación de amplitud. Como será demostrado en el Capítulo 5, sin embargo, esta mejora en el rendimiento es alcanzada pagando el costo de un ancho de banda de transmisión mayor; esto es, la modulación de fase nos provee de un medio práctico de intercambiar ancho de banda del canal por un mejor desenvolvimiento frente al ruido. Tal compromiso no es posible para la modulación de amplitud.

### Definiciones básicas

Denotemos con  $\theta_i(t)$  al ángulo de una portadora sinusoidal modulada, asumiendo que sea una función de la señal mensaje. Expresamos la onda modulada en ángulo resultante como

$$s(t) = A_c \cdot \cos[\theta_i(t)] \quad (45)$$

donde  $A_c$  es la amplitud de la portadora. Una oscilación completa ocurre cada vez que  $\theta_i(t)$  cambia  $2\pi$  radianes. Si  $\theta_i(t)$  se incrementa monótonamente con el tiempo, la frecuencia promedio en Hz, sobre un intervalo que va de  $t$  a  $t + \Delta t$ , está dada por

$$f_{\Delta t} = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} \quad (46)$$

Podemos de esta manera definir la frecuencia instantánea de la señal modulada en ángulo  $s(t)$  como sigue:

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (47)$$

De esta manera, de acuerdo a la Ec.(45), podemos interpretar a la señal modulada en ángulo  $s(t)$  como un fasor rotante de módulo  $A_c$  y ángulo  $\theta_i(t)$ . La velocidad angular de dicho fasor es  $\frac{d\theta_i(t)}{dt}$  medida en radianes/segundo, de acuerdo con la Ec.(47). En el caso simple de una portadora no modulada, el ángulo  $\theta_i(t)$  es

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

y el fasor correspondiente rota con una velocidad angular constante igual a  $2\pi f_c$ . La constante  $\phi_c$  es el valor de  $\theta_i(t)$  en  $t=0$ .

Hay un número infinito de maneras en la cual el ángulo  $\theta_i(t)$  puede ser variado en alguna forma con la señal mensaje (señal en banda base). Sin embargo, consideraremos sólo dos métodos comúnmente utilizados, modulación de fase y modulación de frecuencia, como se definen debajo:

- Modulación de fase (PM: Phase Modulation) es aquella forma de modulación de ángulo en la cual el ángulo  $\theta_i(t)$  es variado linealmente con la señal mensaje  $m(t)$ , de la siguiente manera

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p \cdot m(t) \quad (48)$$

El término  $2\pi f_c t$  representa el ángulo de la portadora no modulada; y la constante  $k_p$  representa la sensibilidad de fase del modulador, expresada en radianes/Volt con la suposición de que  $m(t)$  es una forma de onda de voltaje. Por conveniencia, hemos asumido en la Ec.(48) que el ángulo de la portadora no modulada es cero en  $t=0$ . La señal modulada en fase  $s(t)$  es de esta manera descrita en el dominio temporal por

$$s(t) = A_c \cdot \cos[2\pi f_c t + k_p \cdot m(t)] \quad (49)$$

- Modulación de frecuencia (FM: Frequency Modulation) es aquella forma de modulación en la cual la frecuencia instantánea  $f_i(t)$  es variada linealmente con la señal mensaje  $m(t)$  de la siguiente manera:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) \quad (50)$$

El término  $f_c$  representa la frecuencia de la portadora no modulada, y la constante  $k_f$  representa la sensibilidad de frecuencia del modulador, expresada en Hz por Volt con la suposición de que  $m(t)$  es una forma de onda de voltaje. Integrando la Ec.(50) con respecto al tiempo y multiplicando el resultado por  $2\pi$ , obtenemos

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t) \cdot dt \quad (51)$$

donde, por conveniencia, hemos asumido que el ángulo de la onda portadora no modulada es cero en  $t=0$ . La señal de frecuencia modulada es por lo tanto descrita en el dominio temporal por

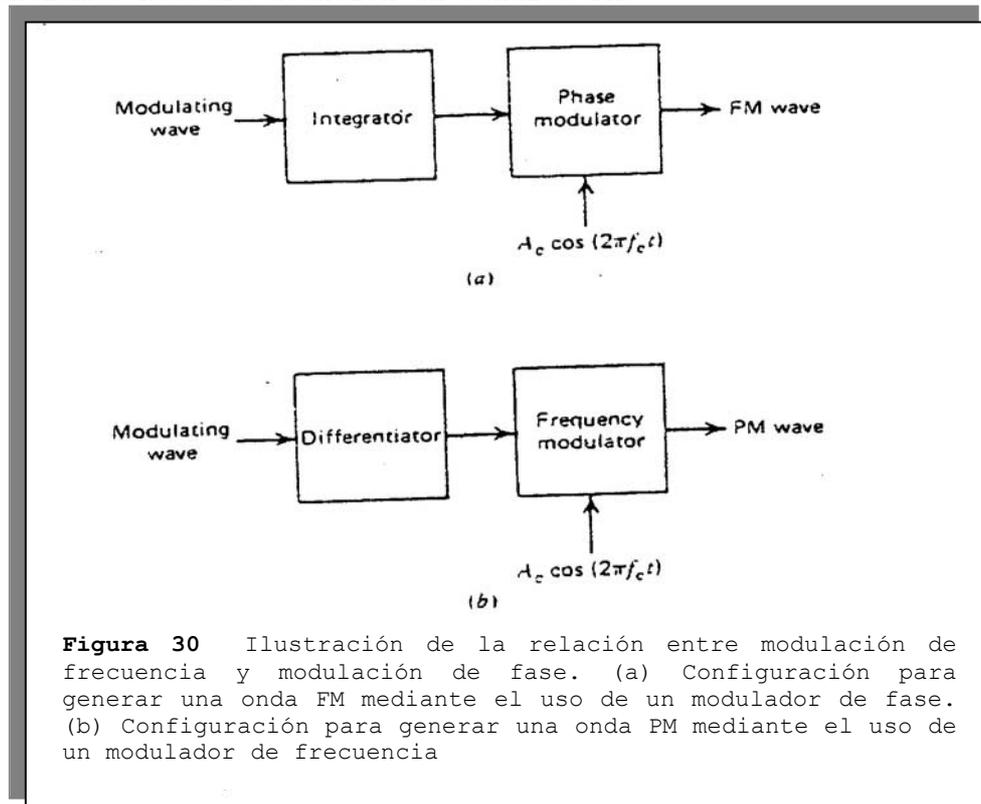
$$s(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t) dt \right] \quad (52)$$

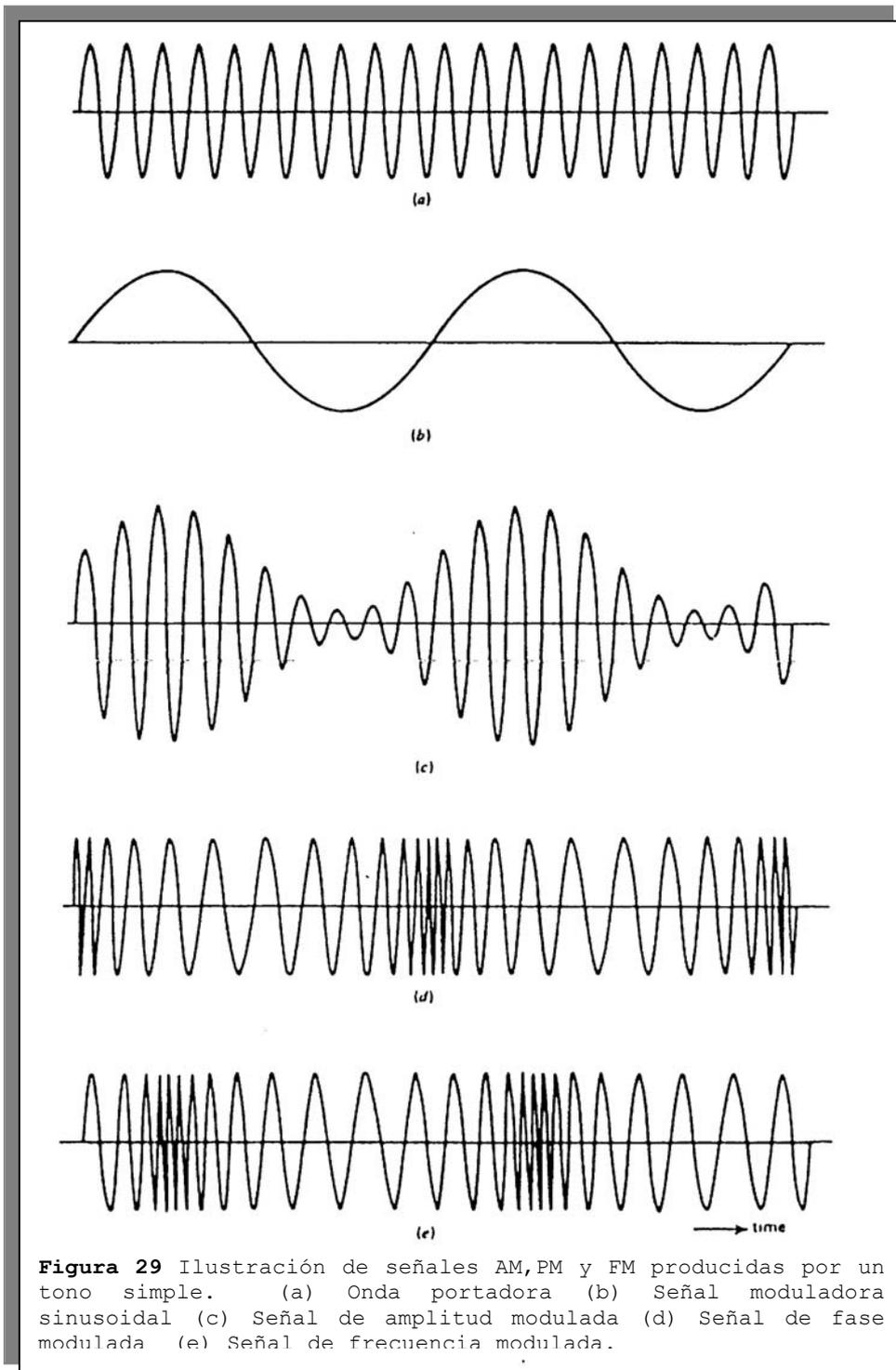
Una consecuencia de permitir que el ángulo  $\theta_i(t)$  se convierta en dependiente de la señal mensaje  $m(t)$  como en la Ec. (48) o de su integral como en la Ec.(51) es que los "cruces por cero" de una señal PM o una señal FM no tienen más una regularidad perfecta en su espaciado; el término "cruces por cero" se refiere a los instantes de tiempo en los cuales una forma de onda cambia de un valor negativo a uno positivo o viceversa. Esta es una característica importante que distingue tanto a las señales PM como FM de una señal AM. Otra diferencia importante es que la envolvente de una señal PM o FM es constante (igual a la amplitud de la portadora), mientras que la envolvente de una señal AM es dependiente de la señal mensaje.

Estas diferencias entre señales de amplitud modulada y señales de ángulo modulado son ilustradas en la Fig. 29 para el caso de modulación sinusoidal. Las figuras 29.a y 29b se refieren a las ondas portadora sinusoidal y moduladora, respectivamente. Las figuras 29c, 29d, y 29e muestran las correspondiente señales AM, PM y FM, respectivamente. Estas formas de onda indican que puede hacerse una distinción entre ondas PM y FM sólo cuando son comparadas con la señal moduladora original, la cual muestra que existe una relación cercana entre las señales PM y FM.

Lo que es más, la comparación de la Ec.(49) con la Ec.(52) revela que un señal FM puede ser considerada como una señal PM en la cual la onda moduladora es  $\int_0^t m(t).dt$  en lugar de  $m(t)$ . Esto significa que una señal

FM puede ser generada integrando en primer lugar  $m(t)$  y luego utilizando el resultado como la entrada de un modulador de fase, como en la Fig 30.a. A la inversa, una señal PM puede ser generada diferenciando en primer término  $m(t)$  y luego utilizando el resultado como entrada de un modulador de frecuencia, como en la Fig. 30b. Podemos de esta manera deducir todas las propiedades de las señales PM a partir de las de señales FM y viceversa. En lo sucesivo, concentramos nuestra atención en señales FM.





## 9. MODULACIÓN DE FRECUENCIA

La señal FM  $s(t)$  definida por la Ec. (52) es una función no lineal de la señal moduladora  $m(t)$ , lo que hace de la modulación de frecuencia un proceso de modulación no lineal. Consecuentemente, a diferencia de la modulación de amplitud, el espectro de una señal FM no está relacionado de manera simple al de la señal moduladora; por el contrario, su análisis es mucho más difícil que el de una señal AM. ¿Cómo podemos entonces abordar el análisis espectral de una señal FM? Nos proponemos proporcionar una respuesta empírica a esta importante pregunta procediendo de la siguiente manera:

- Consideramos el caso más simple posible, a saber, el de la modulación de un tono simple que produce una señal FM de banda estrecha.
- Luego consideramos el caso más general también teniendo en cuenta la modulación de un tono simple, pero esta vez la señal FM es de banda ancha.

Podríamos, por supuesto, continuar y considerar el caso más elaborado de una señal FM multitono. Sin embargo, nos proponemos no hacer eso, porque nuestro objetivo inmediato es establecer una relación empírica entre el ancho de banda de transmisión de una señal FM y el ancho de banda del mensaje. Como veremos subsiguientemente, el análisis espectral de dos etapas descrito arriba nos proporciona una idea suficiente para proponer una solución al problema. Consideremos entonces una señal moduladora sinusoidal definida por

$$m(t) = A_m \cdot \cos(2\pi f_m t) \quad (53)$$

La frecuencia instantánea de la señal FM resultante es igual a

$$f_i(t) = f_c + k_f \cdot A_m \cos(2\pi f_m t) = f_c + \Delta f \cdot \cos(2\pi f_m t) \quad (54)$$

donde

$$\Delta f = k_f \cdot A_m \quad (55)$$

La cantidad  $\Delta f$  es llamada desviación de frecuencia, y representa la máxima diferencia de la frecuencia instantánea de la señal FM respecto de la frecuencia de la portadora  $f_c$ . Una característica fundamental de una señal FM es que la desviación de frecuencia  $\Delta f$  es proporcional a la amplitud de la señal moduladora y es independiente de la frecuencia moduladora.

Utilizando la Ec.(54), el ángulo  $\theta_i(t)$  de la señal FM se obtiene como

$$\theta_i(t) = 2\pi \int_0^t f_i(t) \cdot dt = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \cdot \sin(2\pi f_m t) \quad (56)$$

La relación de la desviación de frecuencia  $\Delta f$  y la frecuencia de modulación  $f_m$  es comúnmente llamada índice de modulación de la señal FM. Lo denotamos con  $\beta$ , y de esta manera escribimos

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} \quad (57)$$

y

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t) \quad (58)$$

De la Ec.(58) vemos que, en un sentido físico, el parámetro  $\beta$  representa la desviación de fase de la señal FM, esto es, el máximo apartamiento del ángulo  $\theta_i(t)$  respecto del ángulo  $2\pi f_c t$  de la portadora no modulada; de aquí,  $\beta$  se mide en radianes. La señal FM propiamente dicha está dada por

$$s(t) = A_c \cdot \cos[2\pi f_c t + \beta \cdot \sin(2\pi f_c t)] \quad (59)$$

Dependiendo del valor del índice de modulación  $\beta$ , podemos distinguir dos casos de modulación de frecuencia:

- FM de banda estrecha, para la cual  $\beta$  es pequeño comparado con un radián.
- FM de banda ancha, para la cual  $\beta$  es grande comparado con un radián.