GEOMETRÍA II

Licenciatura en Matemática - Año 2014
Equipo docente: Viviana del Barco - Mariana Cisneros

PRÁCTICA Nº 7: El espacio proyectivo n-dimensional

1. Demostrar que en $P_n(V)$ dos rectas cualesquiera coplanares tienen intersección no vacía.
2. Describir los puntos del plano proyectivo $P_2\mathbb{Z}_2$. Dar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P = [(1,0,0)]$ y $Q = [(0,1,0)]$ y determinar todos sus puntos. Mostrar que en $P_2\mathbb{Z}_2$ hay exáctamente 7 rectas distintas.
3. Encontrar las coordenadas homogéneas de los puntos $Q_1 = [(1,0)]$ y $Q_2 = [(-2,2)]$ en el referencial $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3\}$ de $\mathbb{P}^1\mathbb{K}$, siendo:
   a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $P_1 = [(1,1)]$, $P_2 = [(2,-3)]$ y $P_3 = [(0,1)]$;
   b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $P_1 = [(1,0)]$, $P_2 = [(i,1)]$ y $P_3 = [(1+i,1)]$;
   c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $P_1 = [(1,3)]$, $P_2 = [(0,-1)]$ y $P_3 = [(1,2)]$
4. En el plano proyectivo $P_2\mathbb{Z}_7$ considerar los conjuntos de puntos
   $$\mathcal{R} = \{[(1,0,0)], [(0,1,0)], [(0,0,1)], [(1,1,1)]\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{R}' = \{[(2,1,0)], [(3,1,1)], [(0,1,1)], [(3,3,4)]\}.$$
   Probar que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son referenciales proyectivos. Hallar las coordenadas homogéneas de los siguientes puntos en ambos referenciales:
   $$P_1 = [(0,0,6)],\ P_2 = [(3,5,1)],\ P_3 = [(0,4,4)],\ P_4 = [(2,1,3)].$$
   Hallar las coordenadas no homogeneas de los mismos en ambos referenciales. Dar la ecuación de la recta formada por los puntos al infinito del referencial $\mathcal{R}'$.
5. En el espacio proyectivo $P_3\mathbb{Z}_5$, dar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P = [(3,0,0,1)]$ y $Q = [(4,2,1,0)]$. Dar explícitamente los puntos de la recta r_{PQ}. Hallar el punto de intersección con la recta determinada por P y $S = [(0,1,1,1)]$.
6. Probar que:
   a) sobre una recta proyectiva $P_1(V)$, cualquier familia de tres puntos distintos forman un referencial proyectivo.
   b) sobre $P_2(V)$, toda familia de cuatro puntos tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados, constituyen un referencial proyectivo.
7. Dados $U_0 = [(0,0,6)]$, $U_1 = [(3,5,1)]$, $U_2 = [(0,4,4)]$ en $P_2\mathbb{R}$, probar que es un cjto proyectivamente independiente. Dar dos posibles puntos U y U' manera que $\{U_1, U_2, U_3; U\}$ y $\{U_1, U_2, U_3; U'\}$ formen referencial proyectivo.
8. Sea $F : V \longrightarrow V'$ una aplicación semi-lineal. Probar que la función semi-lineal proyectiva $f : P_n(V) \longrightarrow P_n(V')$ asociada a F preserva colinealidad y coplanaridad.
9. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ en $P_n(V)$ dos referenciales proyectivos. Sean $\{v_0, \dots, v_n\}$ y $\{v'_0, \dots, v'_n\}$ dos bases de V, adaptadas a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ respectivamente. Sea M la matriz de cambio de base de $\{v'_0, \dots, v'_n\}$ a $\{v_0, \dots, v_n\}$. Dado $P \in P_n(V)$, P tiene coordenadas homogéneas en ambos referenciales.
   a) Si $[x_0, \dots, x_n]$ son coordenadas homogéneas de P en $\mathcal{R}$ y $(z_0, \dots, z_n)^t = M(x_0, \dots, x_n)^t$, entonces $[z_0, \dots, z_n]$ son coordenadas homogéneas de P en $\mathcal{R}'$.
   b) Si $[x_0, \dots, x_n]$ son coordenadas homogéneas de P en $\mathcal{R}$ e $[y_0, \dots, y_n]$ son coordenadas homogéneas de P en $\mathcal{R}'$, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda(y_0, \dots, y_n)^t = M(x_0, \dots, x_n)^t$.
10. Demostrar que una proyectividad $f : P_n(V) \longrightarrow P_n(V')$ lleva conjuntos de puntos proyectivamente independientes de $P_n(V)$ en puntos proyectivamente independientes de $P_n(V')$.
11. Sea $\mathcal{R}$ un referencial proyectivo de $P_n(V)$ y sea $\mathcal{F} = \{P \in P_n(V) : P = [x_0, \dots, x_{n-1}, 0]\}$. Probar que $\mathcal{F}$ es un subespacio proyectivo de dimensión $n-1$.
12. En $P_2\mathbb{Z}_5$ se considera el referencial canónico $\mathcal{R}$. Sea $f : P_2\mathbb{K} \longrightarrow P_2\mathbb{K}$ la proyectividad que en $\mathcal{R}$ está inducida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar las imágenes de los puntos $[(2,1,0)], [(3,1,1)], [(0,1,1)], [(3,3,4)]$ y la ecuación de la recta r cuya imágen por f es la recta a l infinito según $\mathcal{R}$.
13. Mostrar que la proyectividad definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ en el referencial canónico de $P_1\mathbb{R}$ deja fijos los puntos $[(1,1)]$ y $[(1,-1)]$. ¿Son $(1,1)$ y $(1,-1)$ puntos fijos de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ definida por A?