

A csavarvonal axonometrikus képéről

Miután egyre jobban megy a **Graph** ingyenes függvény - ábrázoló szoftver használata, kipróbáltuk, hogy tudunk - e vele csavarvonalat ábrázolni, axonometrikusan.

A válasz: tudunk. Most erről a kis kalandról számolunk be lelkes Olvasóinknak.

Nemrég a már többször említett [1] - et lapozgattuk, ahol ezt találtuk – 1. ábra.

6.3.2. A csavarvonal merőleges vetületei

A csavarvonal tengelyirányú merőleges vetülete kör, a tengellyel párhuzamos síkra eső merőleges vetülete a szinuszgörbe affin transzformáltja. A csavarvonalnak a tengelyével hegyesszöget bezáró síkra eső merőleges vetülete nyújtott, csúcsos, vagy hurkolt ortociklois affin transzformáltja aszerint, hogy a tengely és a képsík szöge a csavarvonal emelkedési szögénél kisebb, egyenlő, vagy nagyobb.

1. ábra

Ez felkeltette az érdeklődésünket: vajon meg tudnánk - e rajzoltatni a **Graph** - fal a mondott helyzetekben lévő merőleges vetületeket. Ugyanis emlékszünk, hogy egyik korábbi dolgozatunkban – címe: *A csavarvonalról és a csavarmenetről*, jele: (KD - 1) – elég sokat dolgoztunk a csavarvonal vetületi és kiterített ábráinak elkészítésekor – ld.: 4. ábra! Gépesíteni kell a rajzolást! Az elvégzett munka eredményei az alábbi ábrákon szemléltethetők meg. A feladat lényege: „belőni” a csavarvonal, ill. a merőleges axonometrikus ábrázolás paramétereit, az 1. ábra szövegének megfelelően. Ezt most részletesen kifejthetjük.

A közönséges csavarvonal paraméteres egyenletrendszere, a mozgástani származtatás szerint, ha (X, Y, Z) egy P pont koordinátái – ld. a 4. ábrát is! – :

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= r \cdot \cos(\omega \cdot t); \\ Y(t) &= r \cdot \sin(\omega \cdot t); \\ Z(t) &= u \cdot t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Az alkalmazott jelölések:

r : az alapkör sugara;

ω : a forgómozgás szögsebességének nagysága;

u : a haladó mozgás sebességének nagysága;

t : az idő.

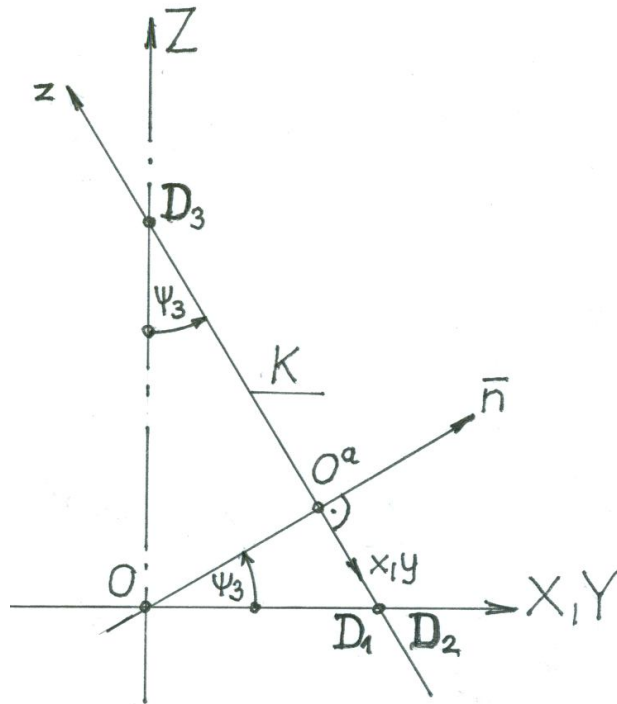
Az axonometrikus ábrázolással kapcsolatos összefüggéseinket egy korábbi dolgozatunkból vesszük, melynek címe:

Az orthogonális axonometria alapösszefüggéseiről, illetve azok alkalmazásáról, jele: (KD - 2).

A csavarvonal Z tengelye és a K axonometrikus képsík által bezárt szögre:

$$\cos \psi_3 = q_z, \quad (2)$$

ahol q_z : a merőleges axonometria z tengelye menti rövidülési együtthatója
– ld.: 2. ábra!



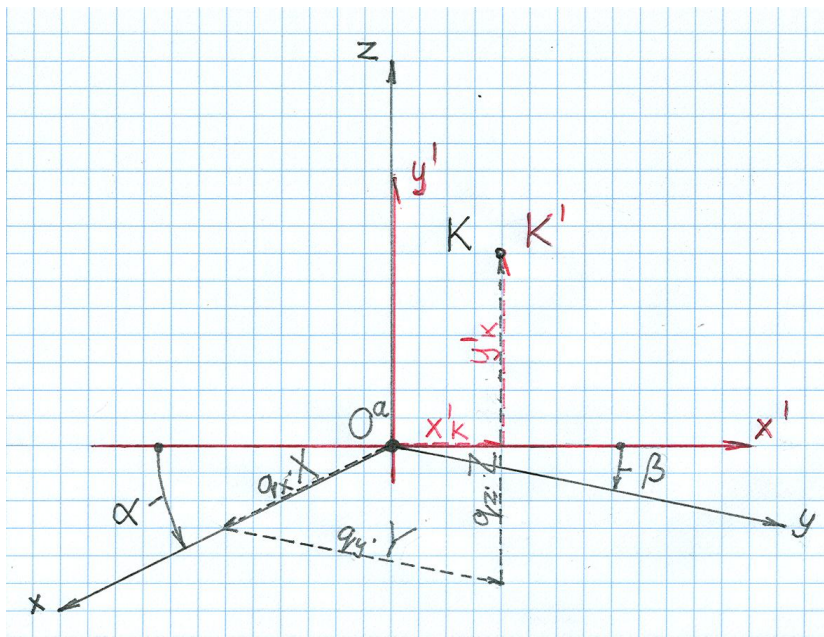
2. ábra

Ennek képlete, szintén (KD - 2) -ből átvéve azt:

$$q_z = \sqrt{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

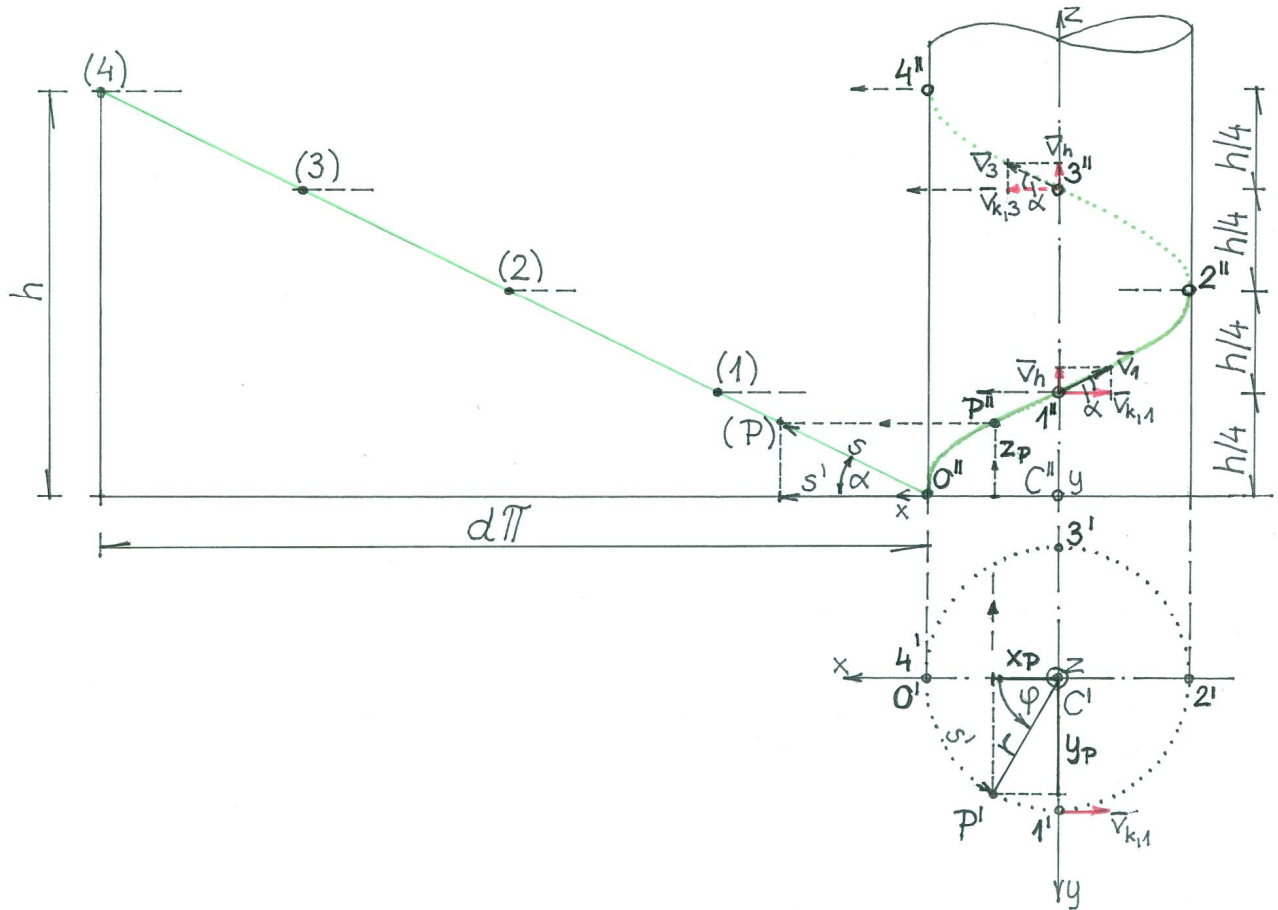
(3)

ahol α, β : az ábrázolás szög - paraméterei – ld.: 3. ábra!



3. ábra

A csavarvonal menetemelkedési szögére – ld. a (KD - 1) -ből átvett 4. ábrát is! – :



4. ábra

$$\operatorname{tg} \alpha_{cs} = \frac{v_{\text{haladó}}}{v_{\text{kör}}} = \frac{u}{r \cdot \omega}. \quad (4)$$

A fenti jelölésekkel az 1. ábra szövege szerint:

$$\left. \begin{array}{l} \text{hurkolt ciklois : } \alpha_{cs} < \psi_3; \\ \text{csúcsos ciklois : } \alpha_{cs} = \psi_3; \\ \text{nyújtott ciklois : } \alpha_{cs} > \psi_3. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Most (2) és (3) szerint:

$$\psi_3 = \arccos q_z = \arccos \sqrt{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

Majd (4) - ből:

$$\alpha_{cs} = \operatorname{arctg} \frac{u}{r \cdot \omega}. \quad (7)$$

A feladat megoldása az (5), (6), (7) képleteken alapul.

Az egyszerűség kedvéért azt választjuk, hogy:

$$\alpha = \beta. \quad (8)$$

Ekkor (6) - ből:

$$\psi_3 = \arccos \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (9)$$

Az ábrázoláshoz megválasztjuk az α szöveget:

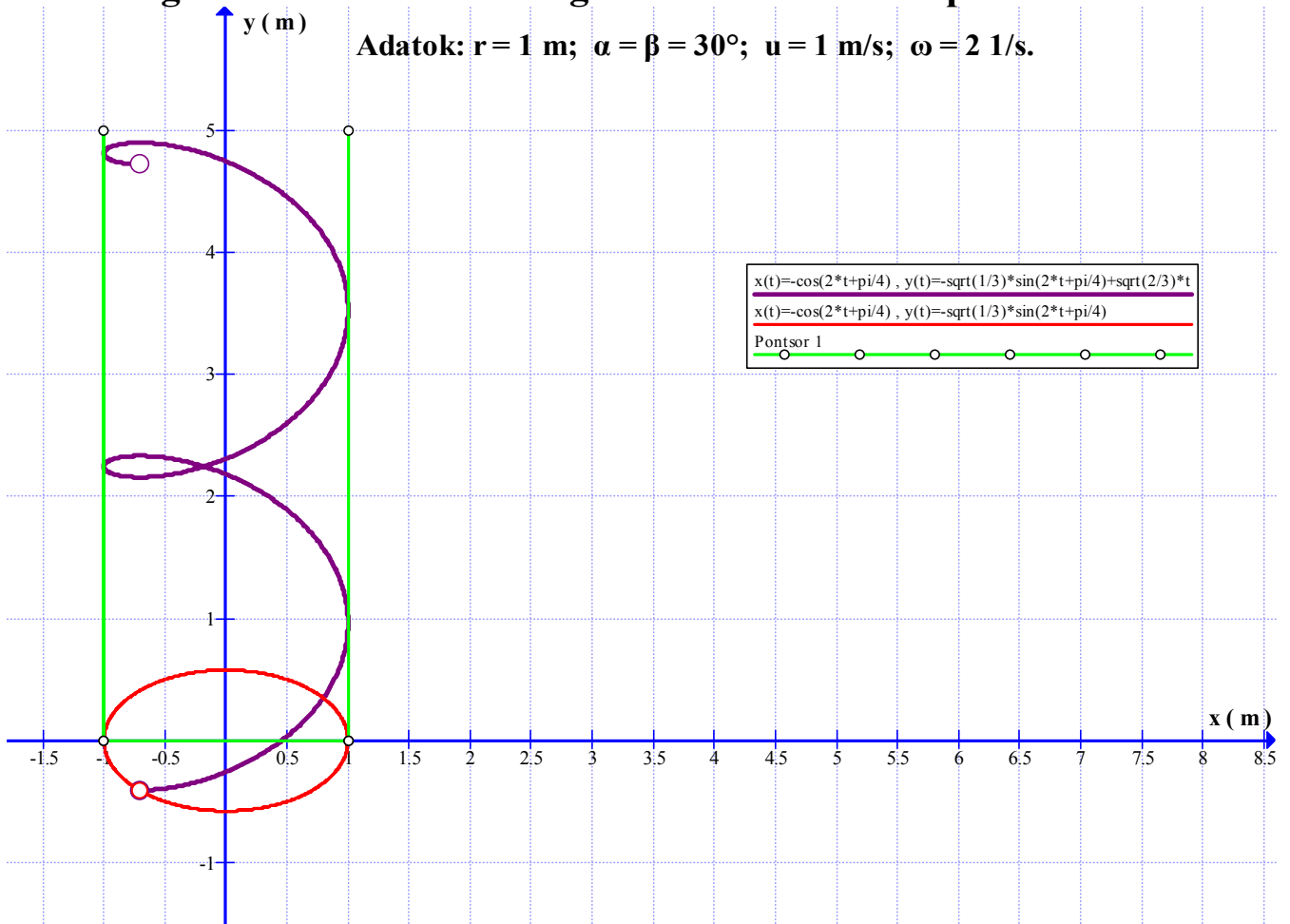
$$\alpha = 30^\circ. \quad (10)$$

Ekkor (9) és (10) - zel:

$$\psi_3 = \arccos \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = 35,26^\circ. \quad (11)$$

A hurkolt ciklois ábrázolásához felvett adatok és az eredmény az 5. ábrán látható.

Közönséges csavarvonal merőleges axonometrikus képe: hurkolt ciklois



5. ábra

Az adatokkal és (7) - tel:

$$\alpha_{cs} = \operatorname{arctg} \frac{u}{r \cdot \omega} = \operatorname{arctg} \frac{1 \text{ m/s}}{1 \text{ m} \cdot 2 \frac{1}{s}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 26,57^\circ. \quad (12)$$

Most (11) és (12) összevetésével:

$$\alpha_{cs} = 26,57^\circ < \psi_3 = 35,26^\circ, \quad (13)$$

vagyis (5) és (13) szerint valóban egy hurkolt cikloisnak kellett itt kirajzolódnia.

Az ábrázolási képleteket (KD - 2) - ből átvéve :

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}} \cdot X + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}} \cdot Y, \quad (14)$$

$$y' = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}} \cdot X - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}} \cdot Y + \sqrt{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \cdot Z, \quad (15)$$

ahol x' és y' a képsíkon felvett merőleges tengelykereszt tengelyei, mint a 3. ábrán is. Most (8), (10), (14), (15) - tel:

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot Y, \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot X - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot Y + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot Z. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Majd (1) és (16) - tal:

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t)]; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t) + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot u \cdot t = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot r \cdot [\sin(\omega \cdot t) + \cos(\omega \cdot t)] + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot u \cdot t. \end{aligned} \quad (18)$$

Most azonos átalakítással:

$$\begin{aligned} \sin \varphi - \cos \varphi &= \sqrt{2} \cdot \left(\sin \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(\sin \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \cos \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= -\sqrt{2} \cdot \left(\cos \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \varphi \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cdot \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Majd az adatokkal és (19) - cel:

$$x' = -\cos \left(2 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ (m)}. \quad (20)$$

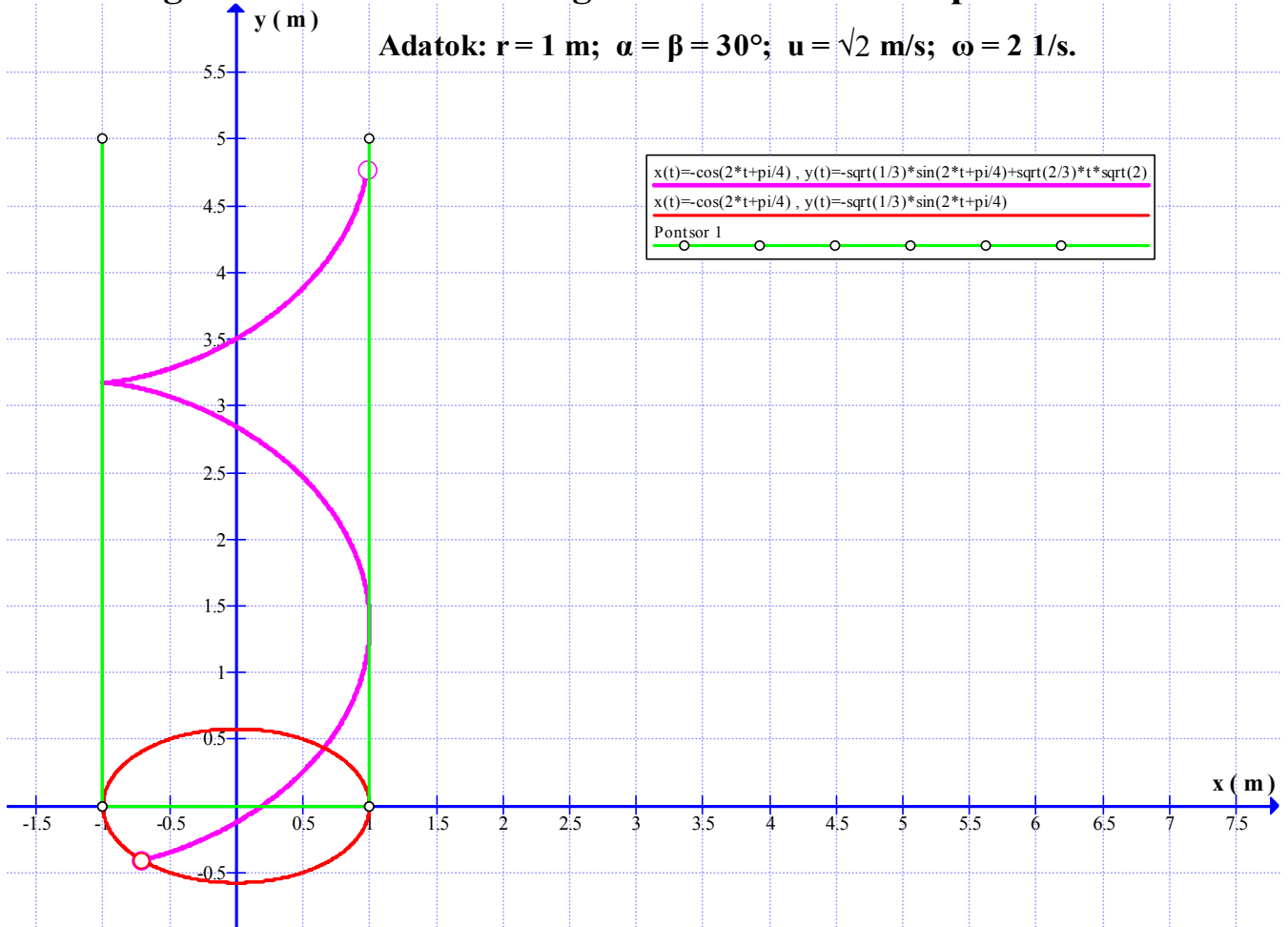
Hasonlóképpen (18) - at is átalakítva, az adatokkal is:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \left(2 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t \text{ (m)}. \quad (21)$$

A (20) és (21) egyenleteket az 5. ábrán is feltüntettük.

A csúcsos ciklois ábrázolásához felvett adatok és az eredmény a 6. ábrán látható.

Közönséges csavarvonal merőleges axonometrikus képe: csúcsos ciklois



6. ábra

Az adatokkal és (7) - tel:

$$\alpha_{cs} = \operatorname{arctg} \frac{u}{r \cdot \omega} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \text{ m/s}}{1 \text{ m} \cdot 2 \frac{1}{\text{s}}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = 35,26^\circ, \quad (22)$$

azaz (11) és (22) - vel:

$$\alpha_{cs} = \psi_3 = 35,26^\circ, \quad (23)$$

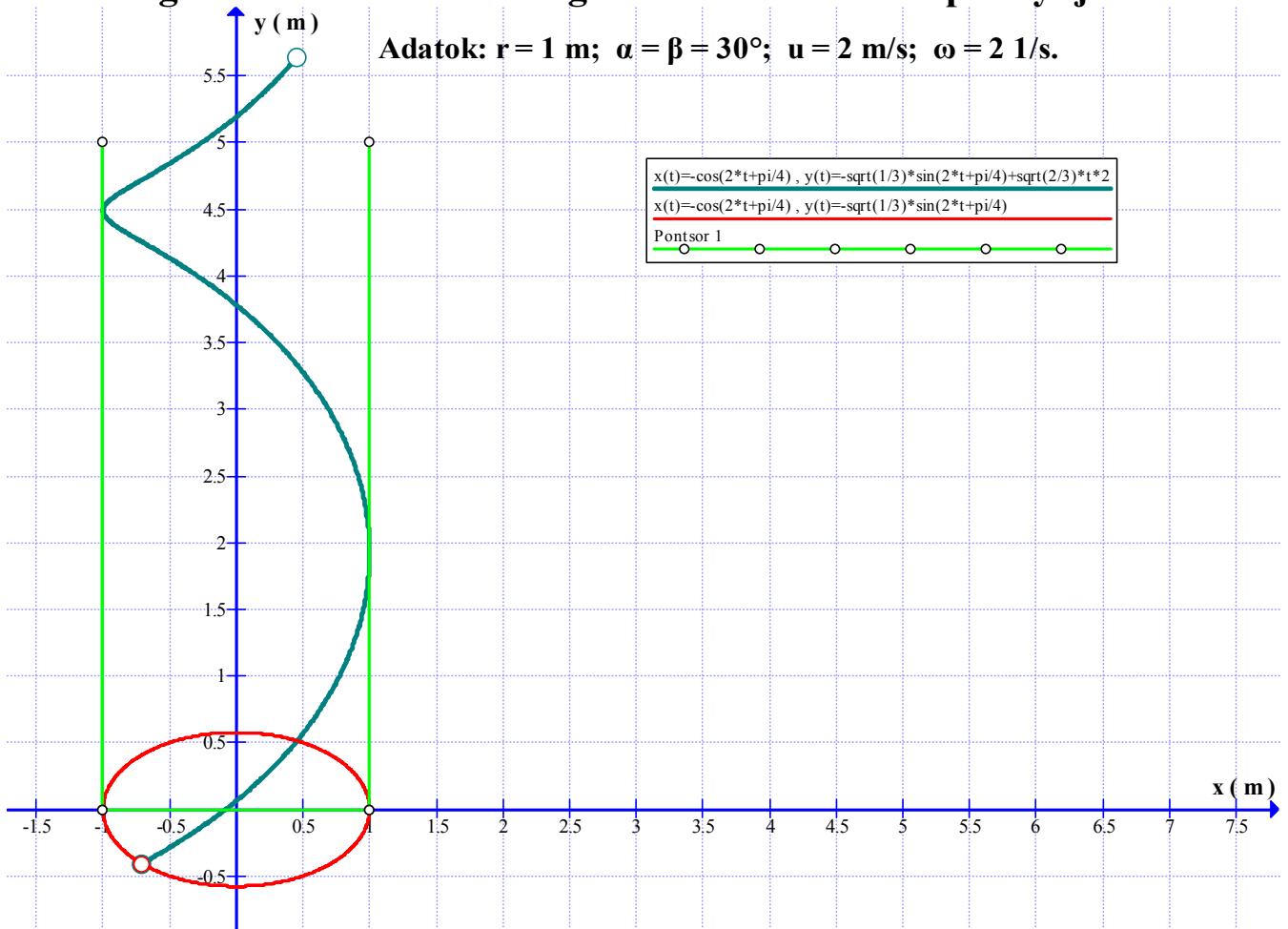
vagyis (5) és (23) szerint valóban egy csúcsos cikloisnak kellett itt kirajzolódnia.

A nyújtott ciklois ábrázolásához felvett adatok és az eredmény a 7. ábrán látható.

Az adatokkal és (7) - tel:

$$\alpha_{cs} = \operatorname{arctg} \frac{u}{r \cdot \omega} = \operatorname{arctg} \frac{2 \text{ m/s}}{1 \text{ m} \cdot 2 \frac{1}{\text{s}}} = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ, \quad (24)$$

Közönséges csavarvonal merőleges axonometrikus képe: nyújtott ciklois



7. ábra

azaz (11) és (24) - gyel:

$$45^\circ = \alpha_{cs} > \psi_3 = 35,26^\circ, \quad (25)$$

vagyis (5) és (25) szerint valóban egy nyújtott cikloisnak kellett itt kirajzolódnia.

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk. Megjegyezzük, hogy számításaink, ábráink nem bizonyítják, hanem inkább csak szemléltetik az 1. ábrán közölt kijelentések igazát. Annál is inkább, mert az elkészített csavarvonal - vetületek (5., 6., 7. ábra) nem egy csavarvonal képei három képsík - állásnál, hanem három különböző csavarvonal képe, egy képsík - állásnál.

Irodalom:

[1] – <http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=100>

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnök tanár

Sződliget, 2010. március 21.