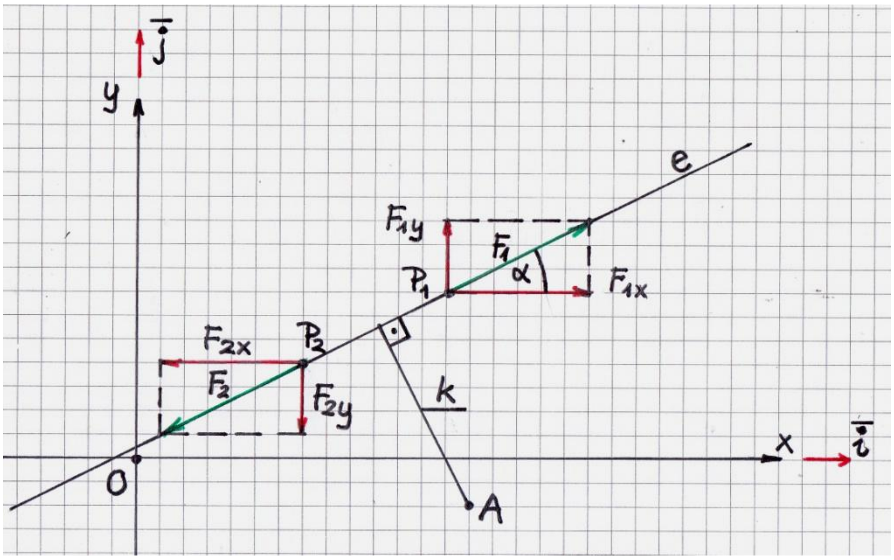
A síkbeli Statika egyensúlyi egyenleteiről

Statikai tanulmányaink egyik mérföldköve az egyensúlyi egyenletek belátása és sikeres alkalmazása. Most egy erre vonatkozó lehetséges tanulási / tanítási útvonalat vázolunk fel.

Az alapgondolat kifejtése az alábbi 3 lépésben történik:
~ az egyensúlyi axióma alkalmazása;
~ a vetületi tétel alkalmazása;
~ a nyomatéki tétel alkalmazása.
A részletezéshez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Itt az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ vektorú legegyszerűbb egyensúlyi erőrendszert tüntettük fel.
A Statika *két erő eredőjéről* szóló, valamint az *egyensúlyi axiómájának* megfelelően:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{0} \;\rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0 \;\rightarrow\; R_x = 0\,,\; R_y = 0\,. \qquad (1)$$

Ekkor (1) - ből:

$$\mathbf{F_1} = -\mathbf{F_2} \;\rightarrow |\mathbf{F_1}| = |-\mathbf{F_2}| = F. \qquad (2)$$

Továbbá a *vetületi tétel* szerint:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x}\,, \qquad (3)$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y}\,. \qquad (5)$$

Ámde

$$\mathbf{R} = \mathbf{R_x} + \mathbf{R_y} = R_x \cdot \mathbf{i} + R_y \cdot \mathbf{j}\,, \qquad (6)$$

ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a koordináta - tengelyek menti egységvektorok.

Most (1), (3), (5) és (6) szerint:

$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 0$, (7 / 1)

vagy

$\boxed{\sum_{i=1}^{2} F_{ix} = 0 .}$ (7 / 2)

Hasonlóan:

$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 0$, (8 / 1)

vagy

$\boxed{\sum_{i=1}^{2} F_{iy} = 0 .}$ (8 / 2)

Majd a nyomatéki tétel szerint egy tetszőleges $\boldsymbol{A}$ pontra vett nyomatékkal, (2) - vel is:

$R \cdot k_R = F_2 \cdot k_2 - F_1 \cdot k_1 = F \cdot k - F \cdot k = 0$, (9 / 1)

azaz

$\boxed{\sum_{i=1}^{2} M_{F_i}^{A} = 0.}$ (9)

Azt kaptuk, hogy az egyensúlyi axióma erőrendszerére vonatkozóan fennállnak a beke - retezett egyenletek.

Azonban mi tetszőleges síkbeli erőrendszer egyensúlyát kifejező feltételi egyenleteket keresünk, vagyis olyanokat, melyek $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{2}$ esetén is érvényesek, ahol $\boldsymbol{n}$ az erőrendszert alkotó erők darabszáma. A keresett, az általánosabb esetre vonatkozó egyensúlyi egyen - leteket rögtön megkaphatjuk az előzőekből, az alábbi meggondolásokkal.

Most vegyük úgy, hogy az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ erők egy - egy

~ $\boldsymbol{E_I}$ ($\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, …, $\mathbf{E_m}$) és

~ $\boldsymbol{E_{II}}$ ($\mathbf{E_{m+1}}$, $\mathbf{E_{m+2}}$,…, $\mathbf{E_n}$) rész - erőrendszer eredői, melyekre fennáll, hogy:

$\mathbf{F_1} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} + \cdots + \mathbf{E_m} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \mathbf{E_i}$, (10 / 1)

$\mathbf{F_2} = \mathbf{E_{m+1}} + \mathbf{E_{m+2}} + \cdots + \mathbf{E_n} = \sum_{\mathrm{i=m+1}}^{\mathrm{n}} \mathbf{E_i}$ **.** (10 / 2)

A vetületi tétel szerint (10 / 1) és (10 / 2) - ből:

$F_{1x} = E_{1x} + E_{2x} + \cdots + E_{mx} = \sum_{i=1}^{m} E_{ix}$, (11 / 1)

$F_{2x} = E_{m+1,x} + E_{m+2,x} + \cdots + E_{n\,,x} = \sum_{i=m+1}^{n} E_{ix}$. (11 / 2)

Hasonlóképpen:

$F_{1y} = E_{1y} + E_{2y} + \cdots + E_{my} = \sum_{i=1}^{m} E_{iy}$, (12 / 1)

$$F_{2y} = E_{m+1,y} + E_{m+2,y} + \dots + E_{n,y} = \sum_{i=m+1}^{n} E_{iy} \,. \qquad (12/2)$$

Most (11 / 1) és (11 / 2) összeadásával:

$$F_{1x} + F_{2x} = (E_{1x} + E_{2x} + \dots + E_{mx}) + \left(E_{m+1,x} + E_{m+2,x} + \dots + E_{n,x}\right) = \sum_{i=1}^{n} E_{ix} \,. \qquad (13)$$

Majd (12 / 1) és (12 / 2) összeadásával:

$$F_{1y} + F_{2y} = \left(E_{1y} + E_{2y} + \dots + E_{my}\right) + \left(E_{m+1,y} + E_{m+2,y} + \dots + E_{n,y}\right) = \sum_{i=1}^{n} E_{iy} \,. \qquad (14)$$

Ezután (7 / 1) és (13) szerint:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_{ix} = 0}\,, \qquad (15)$$

majd (7 / 2) és (14) szerint:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_{iy} = 0\,.} \qquad (16)$$

A (15) és (16) egyenletek a síkbeli Statika *vetületi egyensúlyi egyenletei*, tetszőleges elrendezésű, ***n*** darab erőből álló **(*E*)** erőrendszer esetén.

Most a nyomatéki tételt alkalmazva az $\boldsymbol{E_I}$ és $\boldsymbol{E_{II}}$ rész - erőrendszerre:

$$-F_1 \cdot k_1 = \sum_{i=1}^{m} E_i \cdot k_i \,; \qquad (17)$$

$$F_2 \cdot k_2 = \sum_{i=m+1}^{n} E_i \cdot k_i \,; \qquad (18)$$

majd (17) és (18) összeadásával:

$$-F_1 \cdot k_1 + F_2 \cdot k_2 = \sum_{i=1}^{m} E_i \cdot k_i + \sum_{i=m+1}^{n} E_i \cdot k_i = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot k_i \,; \qquad (19)$$

ezután (9 / 1) és (19) - cel:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot k_i = 0 \;\rightarrow\; \boxed{\sum_{i=1}^{n} M_{E_i}^{A} = 0\,.} \qquad (20)$$

A (20) egyenlet a síkbeli Statika *nyomatéki egyensúlyi egyenlete*, tetszőleges elrendezésű, ***n*** darab erőből álló **(*E*)** erőrendszer esetén.

Megjegyzések:

M1. Szokásosabb a (15), (16), (20) egyensúlyi feltételi egyenletek alábbi alakja:

$$\boxed{\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,,\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,,\ \sum_{i=1}^{n} M_{F_i}^{A} = 0\,.}} \qquad (21)$$

M2. Tudjuk, hogy az $\boldsymbol{A}$ *nyomatékvonatkoztatási pont* speciális megválasztásával a (21 / 3) nyomatéki egyenlet akkor is teljesülhet, ha az erőrendszer nincs is egyensúlyban. Ez a helyzet előáll, ha az $\boldsymbol{A}$ pont az erőrendszer eredőjének hatásvonalán helyezkedik el. Ez azt is jelenti, hogy (21 / 3) szükséges, de még nem elegendő feltétele az egyensúlynak.

M3. Látjuk, hogy (21) szerint a síkbeli Statika egyensúlyi egyenleteinek száma: 3. Ez azt is jelenti, hogy ezen egyenletek alkalmazásával 3 db ismeretlen határozható meg, az *egyensúlyozási feladat* kapcsán. Például egy *kéttámaszú tartó*nál az „A" jelű *fix csukló*ban ébredő **A** reakcióerő $\boldsymbol{A_x}$ és $\boldsymbol{A_y}$ (skaláris) komponense, valamint a „B" jelű *görgős támasz* - nál ébredő **B** reakcióerő $\boldsymbol{B}$ (előjeles) nagysága jelenti a 3 db ismeretlen mennyiséget. Ha ez a 3 db egyenlet elegendő az ismeretlenek meghatározásához, akkor a feladatot *statikailag határozott*nak nevezzük. Ellenkező esetben a feladat *statikailag határozatlan*, vagyis az egyensúlyi egyenleteken kívül további – legtöbbször *alakváltozási* – feltételi egyenleteket kell felírnunk, hogy ugyanannyi egyenletünk legyen, ahány ismeretlenünk van.

M4. A szakirodalomból (is) tudjuk, hogy a síkbeli Statika 3 db egyensúlyi egyenlete a (21) egyenletek csoportjától eltérő is lehet. Ehhez ld. pl.: [1]!
Leggyakrabban mégis a (21) egyenleteket alkalmazzuk.

M5. Jelen írásunkban kerültük a vektoralgebra erősebb használatát; pedig ezzel a segéd - eszközzel sokkal gyorsabban célt érhetünk, az egyensúlyi feltételi egyenletek vizsgálata során is. Például:

$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$;

skalárisan végigszorozva ezt a vektoregyenletet az **i** egységvektorral:

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{F_2} \cdot \mathbf{i} \ \rightarrow R_x = F_{1x} + F_{2x}$.

Ez a vetületi tétel egy lehetséges felírási módja, esetünkben.

M6. Érdemes megemlítenünk, hogy a (21) egyenletek egymástól függetlenek. Ez azért fontos, mert ez biztosítja, hogy 3 ismeretlent határozhassunk meg alkalmazásuk - kal. Ha a 3 egyensúlyi egyenlet közül pl. az egyik a másiknak konstans - szorosa lenne, akkor csak 2 független egyenletünk lenne, melyek csak 2 ismeretlen meghatározására lennének elegendőek.

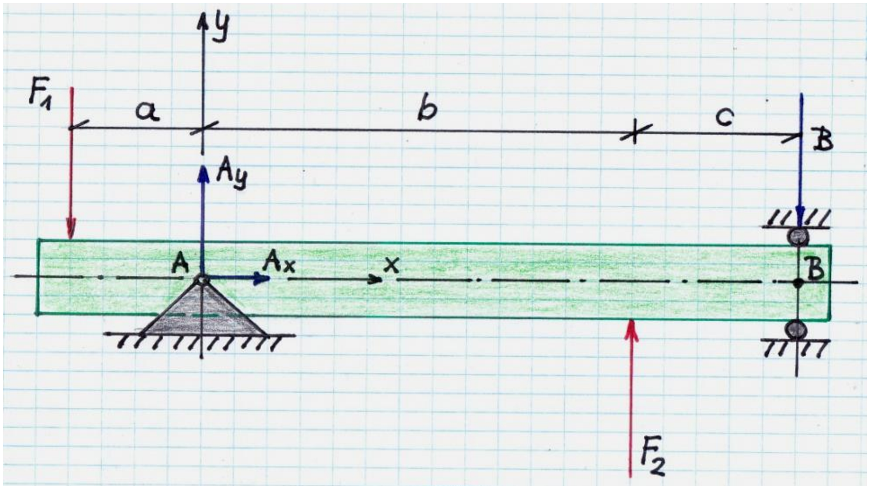
M7. Lényeges információ, hogy a (21) egyenletet – vagy vele egyenértékű egyéb egyenleteket – akár definíciószerűen is rögzíthetnénk, hasonlóan a statikai axiómákhoz. Ezt azért nem tesszük, mert ez durva információvesztéshez vezethetne. Ekkor azonban végig kell rágnunk magunkat a fentihez hasonló gondolatmeneteken, ha jót akarunk.

Most nézzünk néhány tipikus példát az egyensúlyi egyenletek alkalmazására!

1. PÉLDA:

Függőleges hatásvonalú koncentrált erőkkel terhelt, statikailag határozott megtámasztású kéttámaszú tartó egyensúlyozása

Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Itt egy konzolos kéttámaszú tartót szemléltettünk a megadott külső aktív (piros) és a keresett reakció - erőkkel (kék). Az egyensúlyozási feladat az alábbi.
Adott: $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.
Keresett: $\boldsymbol{A_x}$, $\boldsymbol{A_y}$, $\boldsymbol{B}$.

Megoldás

I. *Két vetületi és egy nyomatéki egyenlettel*

A (21) egyenletekkel dolgozunk, kicsit kényelmesebb alakban felírva azokat.
Vízszintes vetületi egyensúlyi egyenlet:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + 0 = 0 \ \rightarrow \underline{\underline{A_x = 0}} \, . \qquad (\text{ P1 / 1 })$$

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet az $\boldsymbol{A}$ pontra:

$$\sum M_A = 0 : \quad F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - B \cdot (b + c) + A \cdot 0 = 0 \ \rightarrow \underline{\underline{B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b}{b + c}}} \, . \qquad (\text{ P1 / 2 })$$

Függőleges vetületi egyensúlyi egyenlet:

$\sum F_y = 0 : \; -F_1 + A + F_2 - B = 0 \; \rightarrow A = F_1 - F_2 + B \, .$ (P1 / 3)

Most (P1 / 2) - t (P1 / 3) - ba helyettesítve:

$A = F_1 - F_2 + \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b}{b+c} = F_1 \cdot \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) - F_2 \cdot \left(1 - \frac{b}{b+c}\right) = F_1 \cdot \frac{a+b+c}{b+c} - F_2 \cdot \frac{b+c-b}{b+c} =$

$= F_1 \cdot \frac{a+b+c}{b+c} - F_2 \cdot \frac{c}{b+c}$, tehát:

$\underline{\underline{A = F_1 \cdot \frac{a+b+c}{b+c} - F_2 \cdot \frac{c}{b+c}}}\, .$ (P1 / 4)

A kétszer aláhúzott képletek adják a feladat paraméteres megoldását.

II. *Egy vetületi és két nyomatéki egyensúlyi egyenlettel*

Vízszintes vetületi egyensúlyi egyenlet:

$\sum F_x = 0 : \; A_x + 0 = 0 \; \rightarrow \underline{\underline{A_x = 0}}\, .$ (P1 / 1)

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet az ***A*** pontra:

$\sum M_A = 0 : \quad F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - B \cdot (b + c) + A \cdot 0 = 0 \; \rightarrow \; \underline{\underline{B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b}{b+c}}}\, .$ (P1 / 2)

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet a ***B*** pontra:

$\sum M_B = 0 : \; F_1 \cdot (a + b + c) - A \cdot (b + c) - F_2 \cdot c = 0 \; \rightarrow \; \underline{\underline{A = F_1 \cdot \frac{a+b+c}{b+c} - F_2 \cdot \frac{c}{b+c}}}\, .$

(P1 / 4)

Látjuk, hogy a II. megoldás gyorsabb és kényelmesebb itt, mint az I. Fontos körülmény, hogy a II. megoldással kapott eredmény előállításával ellenőriztük az I. megoldással kapott eredményünket. Ezt tesszük szinte minden esetben, a továbbiakban is.

A megoldás során az alábbi előjel - konvenciót alkalmaztuk:

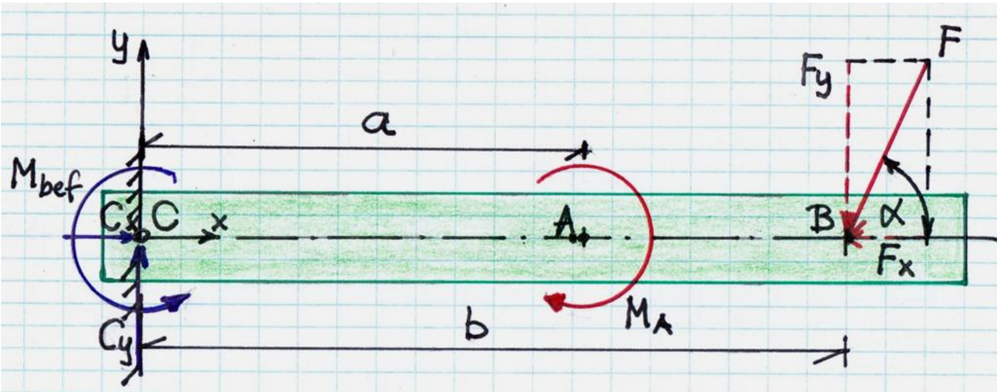
$\rightarrow : \boldsymbol{F_x} > 0$; $\uparrow : \boldsymbol{F_y} > 0$; $\circlearrowleft : M > 0$.

▲▲▲

2. PÉLDA:

Egyik végén befogott, másik végén szabad rúd ferde koncentrált erővel és erőpárral terhelve

Ehhez tekintsük a 3. ábrát is!



3. ábra

Adott: ***F, α ; M***$_A$ ***; a , b***.

Keresett: ***C***$_x$ ***, C***$_y$ ***, M***$_{bef}$.

<u>Megoldás</u>

$\rightarrow: C_x - F_x = 0$, innen : $\underline{\underline{C_x = F_x = F \cdot \cos\alpha}}$. (P2 / 1)

$\uparrow: C_y - F_y = 0$, innen : $\underline{\underline{C_y = F_y = F \cdot \sin\alpha}}$. (P2 / 2)

$\circlearrowleft_C: M_{bef} - M_A - F_y \cdot b = 0$, innen:

$\underline{\underline{M_{bef}}} = M_A + F_y \cdot b = \underline{\underline{M_A + F \cdot \sin\alpha \cdot b}}$. (P2 / 3)

Látjuk, hogy az ***a*** távolság - adatot nem használtuk fel. Ennek az az oka, hogy az erőpár forgatónyomatéka a sík minden pontjára ugyanaz.

Megjegyezzük, hogy

~ a ***b = CB*** távolságot a tartó tengelyvonalán mértük;

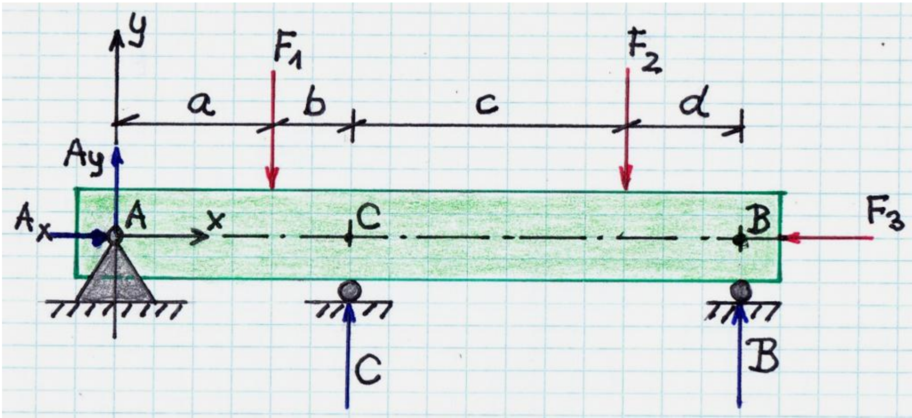
~ a szummás jelek helyett az előző példa végén mutatott nyilas jeleket használtuk az egyensúlyi kijelentések azonosításához.

▲▲▲

3. PÉLDA:

Egy fix és két görgős támaszú folytatólagos tartó koncentrált erőkkel terhelve

Ehhez tekintsük a 4. ábrát is!



4. ábra

Adott: $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$.
Keresett: $\boldsymbol{A_x}$, $\boldsymbol{A_y}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$.

Ez a feladat *egyszeresen statikailag határozatlan*, mert a 4 db ($\boldsymbol{A_x}$, $\boldsymbol{A_y}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) ismeretlen meghatározására csak 3 db egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre. Utóbbiak:

$\rightarrow : A_x - F_3 = 0$, innen: $A_x = F_3$. (P3 / 1)

$\uparrow : A_y + B + C - F_1 - F_2 = 0$. (P3 / 2)

$\circlearrowleft_A : B \cdot (a + b + c + d) + C \cdot (a + b) - F_1 \cdot a - F_2 \cdot (a + b + c) + F_3 \cdot 0 = 0.$ (P3 / 3)

A hiányzó egyenletet / egyenleteket rendszerint szilárdságtani / alakváltozási összefüggé - sekkel pótoljuk. Ez már inkább a haladó tanulmányok tárgyát képezi.

▲▲▲

Ajánlott irodalom:

[1] – ***Németh Ferenc***: Mechanika I. – Statika
Panem – McGraw - Hill, Budapest, 1996., 58 ~ 59. o.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Sződliget, 2017. 10. 15.