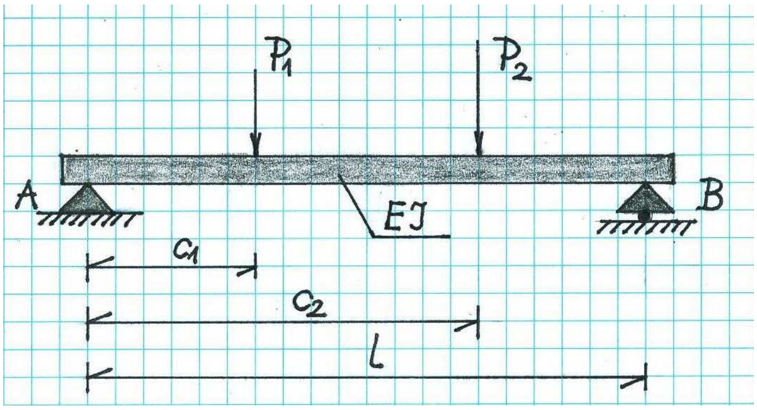
Egy kéttámaszú tartó lehajlásáról

Az alábbiakban egy egyszerű – vagy annak tűnő – feladattal foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy itt a látszat csal. Most tekintsük az 1. ábrát!



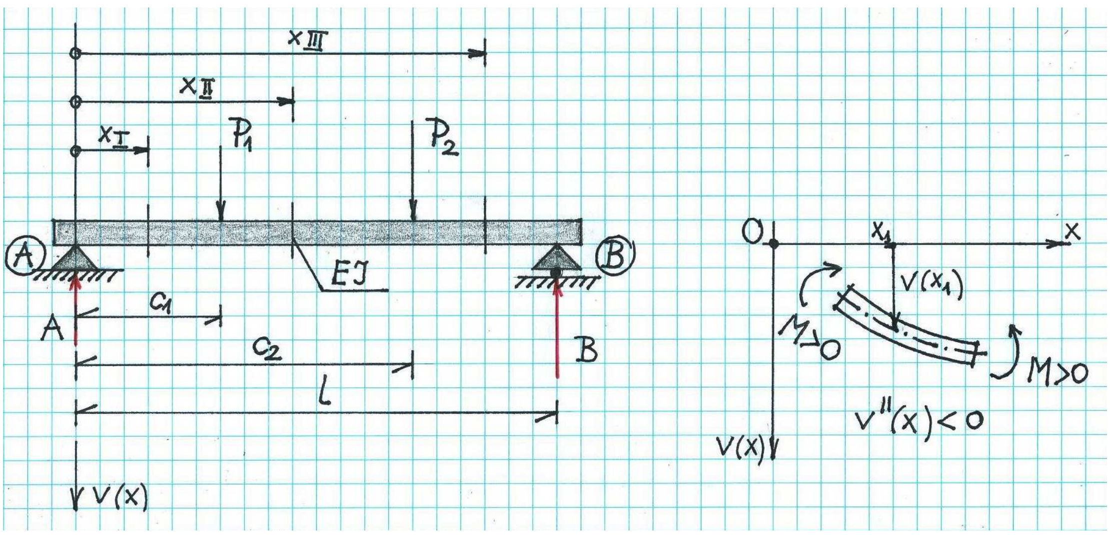
1. ábra

Ez egy kéttámaszú gerendát ábrázol, melyet a tengelyére merőleges hatásvonalú két koncentrált erő terhel. A feladat: a tartó tetszőleges keresztmetszetében meghatározni annak behajlását. A nyírásnak a lehajlásra gyakorolt hatását itt elhanyagoljuk.

A kijelölt feladat a *Szilárdságtan* egy alapfeladata, így azt gondolhatjuk, hogy ez egy lerágott csont. Nos, a helyzet nem egészen ez; ugyanis egy dolog általában beszélni valamiről, és más dolog azt konkrét feladatra alkalmazni. Hogy mit értünk ez alatt, az mindjárt kiderül. Az Olvasó erősítse meg magát lélekben, mert hosszú lesz az út!

Az alapképletek levezetése

A szakirodalom szerint többféle megoldási módszert is kidolgoztak esetünkre. Mi a legegyszerűbb – illetve annak látszó – úton indulunk el: a rugalmas szál diffe - renciálegyenletének felírásával és annak hagyományos módon történő integrálásával dolgozunk – [1]. Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Az eljárás alapegyenlete – [1] – :

$$M(x) = -EI \cdot v''(x) \ , \qquad (1)$$

ahol:
~ $\boldsymbol{M(x)}$: a hajlítónyomaték értéke az $\boldsymbol{x}$ koordinátájú keresztmetszetben;
~ $\boldsymbol{EI}$: a keresztmetszet hajlítómerevsége, ami itt állandó a hossz mentén;
~ $\boldsymbol{v''(x)}$: a rúd görbületének közelítő kifejezése.
Az (1) képletben a negatív előjelet az magyarázza, hogy pozitív hajlítónyomatékhoz negatív görbület tartozik, ahogyan azt a 2. ábra mellékábrája is szemlélteti.

Minthogy a hajlítónyomatéki függvényt a koncentrált erők határozzák meg, ezért a szakaszhatárok is ennek megfelelően alakulnak:

I. szakasz: $0 \le x_I \le c_1$; (2 / 1)

II. szakasz: $c_1 \le x_{II} \le c_2$; (2 / 2)

III. szakasz: $c_2 \le x_{III} \le l$. (2 / 3)

Látjuk, hogy mindegyik szakaszhoz tartozó helykoordináta ugyanonnan mérődik.
A hajlítónyomatéki függvények:

$$\left.\begin{aligned} M(x_I) &= A \cdot x_I \ , \\ M(x_{II}) &= A \cdot x_{II} - P_1 \cdot (x_{II} - c_1) \ , \\ M(x_{III}) &= A \cdot x_{III} - P_1 \cdot (x_{III} - c_1) - P_2 \cdot (x_{III} - c_2) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Most (1) és (3) - mal a megoldandó egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} -EI \cdot v''(x_I) &= A \cdot x_I \ , \\ -EI \cdot v''(x_{II}) &= A \cdot x_{II} - P_1 \cdot (x_{II} - c_1) \ , \\ -EI \cdot v''(x_{III}) &= A \cdot x_{III} - P_1 \cdot (x_{III} - c_1) - P_2 \cdot (x_{III} - c_2) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Az $\boldsymbol{A}$ reakció meghatározására felírjuk az egyensúlyi egyenleteket:

$$\sum M_A = 0 \ \rightarrow \ B \cdot l - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2 \ ,$$

innen:

$$B = P_1 \cdot \frac{c_1}{l} + P_2 \cdot \frac{c_2}{l} \ . \qquad (5)$$

Folytatva:

$$\sum F_y = 0 \ \rightarrow \ P_1 + P_2 - A - B = 0 \ , \qquad (6)$$

innen:

$$A = P_1 + P_2 - B\ . \qquad (7)$$

Majd (5) és (7) - tel:

$$\underline{A = P_1 \cdot \left(1 - \frac{c_1}{l}\right) + P_2 \cdot \left(1 - \frac{c_2}{l}\right)\ .} \qquad (8)$$

Most (4 / 2) és (8) - cal:

$$-EI \cdot v''(x_{II}) = \left(A - P_1\right) \cdot x_{II} + P_1 \cdot c_1\ ; \qquad (9/2)$$

ezután (4 / 3) és (8) - cal:

$$\begin{aligned} -EI \cdot v''(x_{III}) &= A \cdot x_{III} - P_1 \cdot \left(x_{III} - c_1\right) - P_2 \cdot \left(x_{III} - c_2\right) = \\ &= x_{III} \cdot \left(A - P_1 - P_2\right) + P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\ , \end{aligned}$$

tehát:

$$-EI \cdot v''(x_{III}) = \left(A - P_1 - P_2\right) \cdot x_{III} + P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\ . \qquad (9/3)$$

Összegyűjtve az utóbbi eredményeket:

$$\left.\begin{aligned} -EI \cdot v''(x_I) &= A \cdot x_I\ , \\ -EI \cdot v''(x_{II}) &= \left(A - P_1\right) \cdot x_{II} + P_1 \cdot c_1\ , \\ -EI \cdot v''(x_{III}) &= \left(A - P_1 - P_2\right) \cdot x_{III} + P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\ . \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Most egyszer integrálva (10) egyenleteit:

$$\left.\begin{aligned} -EI \cdot v'(x_I) &= \frac{A}{2} \cdot x_I^{\,2} + C_1\ , \\ -EI \cdot v'(x_{II}) &= \frac{A - P_1}{2} \cdot x_{II}^{\,2} + P_1 \cdot c_1 \cdot x_{II} + D_1\ , \\ -EI \cdot v'(x_{III}) &= \frac{A - P_1 - P_2}{2} \cdot x_{III}^{\,2} + \left(P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\right) \cdot x_{III} + E_1\ . \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Újabb integrálással (11) - ből:

$$\left.\begin{aligned}
-EI\cdot v(x_I) &= \frac{A}{6}\cdot x_I{}^3 + C_1\cdot x_I + C_2 \ ,\\
-EI\cdot v(x_{II}) &= \frac{A-P_1}{6}\cdot x_{II}{}^3 + \frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot x_{II}{}^2 + D_1\cdot x_{II} + D_2 \ ,\\
-EI\cdot v(x_{III}) &= \frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot x_{III}{}^3 + \frac{P_1\cdot c_1 + P_2\cdot c_2}{2}\cdot x_{III}{}^2 + E_1\cdot x_{III} + E_2 \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

A (12) képletekben szereplő 6 darab integrálási állandó meghatározásához 6 darab feltételi egyenletre van szükség. Ezek az alábbiak:

$$\left.\begin{aligned}
& v(x_I = 0) = 0 \ ;\\
& v(x_{III} = l) = 0 \ ;\\
& v(x_I = c_1) = v(x_{II} = c_1) \ ;\\
& v(x_{II} = c_2) = v(x_{III} = c_2) \ ;\\
& v'(x_I = c_1) = v'(x_{II} = c_1) \ ;\\
& v'(x_{II} = c_2) = v'(x_{III} = c_2) \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (F)$$

Most (12 / 1) és (F / 1) - gyel:

$$-EI\cdot v(x_I = 0) = \frac{A}{6}\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \ ,$$

tehát:

$$\underline{C_2 = 0 \ .} \qquad (13)$$

Majd (12 / 3) és (F / 2) - vel:

$$-EI\cdot v(x_{III} = l) = \frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^3 + \frac{P_1\cdot c_1 + P_2\cdot c_2}{2}\cdot l^2 + E_1\cdot l + E_2 = 0 \ ,$$

innen:

$$\underline{E_2 = -\left(E_1\cdot l + + \frac{P_1\cdot c_1 + P_2\cdot c_2}{2}\cdot l^2 + \frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^3 \right) \ .} \qquad (14)$$

Ezután (12 / 1), (12 / 2) és (F / 3) - mal:

$$\left.\begin{aligned}
-EI\cdot v(x_I = c_1) &= \frac{A}{6}\cdot c_1^3 + C_1\cdot c_1 + C_2 \ ,\\
-EI\cdot v(x_{II} = c_1) &= \frac{A-P_1}{6}\cdot c_1^3 + \frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot c_1^2 + D_1\cdot c_1 + D_2 \ .
\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\frac{A}{6}\cdot c_1^{\,3}+C_1\cdot c_1+C_2=\frac{A-P_1}{6}\cdot c_1^{\,3}+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot c_1^{\,2}+D_1\cdot c_1+D_2\ ;$$

$$C_1\cdot c_1+C_2=-\frac{P_1}{6}\cdot c_1^{\,3}+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot c_1^{\,2}+D_1\cdot c_1+D_2\ ;$$

innen:

$$\underline{\left(C_1-D_1\right)\cdot c_1\ =\left(D_2-C_2\right)+\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{3}\ .}\qquad (\ 15\ )$$

Most (12 / 2), (12 / 3) és (F / 4) - gyel:

$$\left.\begin{aligned}-EI\cdot v(x_{II}=c_2)&=\frac{A-P_1}{6}\cdot c_2^{\,3}+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot c_2^{\,2}+D_1\cdot c_2+D_2\ ,\\-EI\cdot v(x_{III}=c_2)&=\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot c_2^{\,3}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot c_2^{\,2}+E_1\cdot c_2+E_2\ .\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\frac{A-P_1}{6}\cdot c_2^{\,3}+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot c_2^{\,2}+D_1\cdot c_2+D_2=\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot c_2^{\,3}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot c_2^{\,2}+E_1\cdot c_2+E_2\ ;$$

$$D_1\cdot c_2+D_2=-\frac{P_2}{6}\cdot c_2^{\,3}+\frac{P_2\cdot c_2}{2}\cdot c_2^{\,2}+E_1\cdot c_2+E_2\ ;$$

$$D_1\cdot c_2+D_2=\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{3}+E_1\cdot c_2+E_2\ ;$$

innen:

$$\underline{\left(D_1-E_1\right)\cdot c_2=\left(E_2-D_2\right)+\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{3}\ .}\qquad (\ 16\ )$$

Majd (11 / 1), (11 / 2) és (F / 5) - tel:

$$\left.\begin{aligned}-EI\cdot v'(x_I=c_1)&=\frac{A}{2}\cdot c_1^{\,2}+C_1\ ,\\-EI\cdot v'(x_{II}=c_1)&=\frac{A-P_1}{2}\cdot c_1^{\,2}+P_1\cdot c_1^{\,2}+D_1\ .\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\frac{A}{2}\cdot c_1^{\,2}+C_1=\frac{A-P_1}{2}\cdot c_1^{\,2}+P_1\cdot c_1^{\,2}+D_1\ ;$$

$$C_1=-\frac{P_1}{2}\cdot c_1^{\,2}+P_1\cdot c_1^{\,2}+D_1\ ;$$

$$C_1=\frac{P_1\cdot c_1^{\,2}}{2}+D_1\ ;$$

innen:

$$\underline{C_1 - D_1 = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,2}}{2}} \ . \tag{17}$$

Ezután (11 / 2), (11 / 3) és (F / 6) - tel:

$$\left.\begin{aligned} -EI \cdot v'(x_{II} = c_2) &= \frac{A-P_1}{2} \cdot c_2^{\,2} + P_1 \cdot c_1 \cdot c_2 + D_1 \ , \\ -EI \cdot v'(x_{III} = c_2) &= \frac{A-P_1-P_2}{2} \cdot c_2^{\,2} + \left(P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\right) \cdot c_2 + E_1 \ . \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\frac{A-P_1}{2} \cdot c_2^{\,2} + P_1 \cdot c_1 \cdot c_2 + D_1 = \frac{A-P_1-P_2}{2} \cdot c_2^{\,2} + \left(P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\right) \cdot c_2 + E_1 \ ;$$

$$P_1 \cdot c_1 \cdot c_2 + D_1 = -\frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} + \left(P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2\right) \cdot c_2 + E_1 \ ;$$

$$D_1 = -\frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} + P_2 \cdot c_2^{\,2} + E_1 \ ;$$

$$D_1 = \frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} + E_1 \ ,$$

innen:

$$\underline{\left(D_1 - E_1\right) = \frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2}} \ . \tag{18}$$

Most összefoglaljuk részeredményeinket:

$$\left.\begin{aligned} & C_2 = 0 \ , \\ & E_2 = -\left(E_1 \cdot l + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l^2 + \frac{A-P_1-P_2}{6} \cdot l^3 \right) \ , \\ & \left(C_1 - D_1\right) \cdot c_1 \ = \left(D_2 - C_2\right) + \frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{3} \ , \\ & \left(D_1 - E_1\right) \cdot c_2 = \left(E_2 - D_2\right) + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{3} \ , \\ & C_1 - D_1 = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,2}}{2} \ , \\ & \left(D_1 - E_1\right) = \frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} \ . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

A (19) képletsor 6 darab egyenlet a 6 darab ismeretlenre; ezt az egyenletrendszert a legegyszerűbben kiküszöböléssel oldjuk meg.
Először (19 / 3) és (19 / 5) - tel:

$$\left.\begin{array}{l}\left(C_1-D_1\right)\cdot c_1=\left(D_2-C_2\right)+\dfrac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{3}\ , \\ C_1-D_1=\dfrac{P_1\cdot c_1^{\,2}}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{P_1\cdot c_1^{\,2}}{2}\cdot c_1=\left(D_2-C_2\right)+\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{3}\ ,$$

innen:

$$\left(D_2-C_2\right)=\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{2}-\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{3}=\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6}\ ,$$

tehát:

$$\left(D_2-C_2\right)=\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6}\ ; \qquad (\ 20\ )$$

majd (19 / 1) - et is érvényesítve (20) - ban:

$$\underline{\underline{D_2=\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6}\ .}} \qquad (\ 21\ )$$

Ezután (19 / 4) és (19 / 6) - tal:

$$\left.\begin{array}{l}\left(D_1-E_1\right)\cdot c_2=\left(E_2-D_2\right)+\dfrac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{3}\ , \\ \left(D_1-E_1\right)=\dfrac{P_2\cdot c_2^{\,2}}{2}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{P_2\cdot c_2^{\,2}}{2}\cdot c_2=\left(E_2-D_2\right)+\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{3}\ ,$$

$$\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{2}=\left(E_2-D_2\right)+\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{3}\ ,$$

$$\left(E_2-D_2\right)=\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{2}-\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{3}\ ,$$

innen:

$$\underline{\left(E_2-D_2\right)=\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{6}\ .} \qquad (\ 22\ )$$

Most (22) - ből:

$$E_2=D_2+\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{6}\ , \qquad (\ 23\ )$$

majd (21) és (23) - mal:

$$\underline{\underline{E_2 = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6}\ .}} \tag{24}$$

Ezután (19 / 2) és (24) alapján:

$$-\left(E_1 \cdot l + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l^2 + \frac{A - P_1 - P_2}{6} \cdot l^3 \right) = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6}\ ,$$

$$-E_1 \cdot l = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6} + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l^2 + \frac{A - P_1 - P_2}{6} \cdot l^3\ ,$$

$$-E_1 = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l + \frac{A - P_1 - P_2}{6} \cdot l^2\ ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{E_1 = -\left(\frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l + \frac{A - P_1 - P_2}{6} \cdot l^2 \right)\ .}} \tag{25}$$

Most (19 / 6)

$$D_1 = \frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} + E_1\ ; \tag{26}$$

majd (25) és (26) - ból:

$$\underline{\underline{D_1 = \frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} - \left(\frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l + \frac{A - P_1 - P_2}{6} \cdot l^2 \right)\ .}} \tag{27}$$

Ezután (19 / 5) és (27) - ből:

$$C_1 = D_1 + \frac{P_1 \cdot c_1^{\,2}}{2}\ ; \tag{28}$$

végül (27) és (28) - cal:

$$\underline{\underline{C_1 = \frac{P_1 \cdot c_1^{\,2}}{2} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,2}}{2} - \left(\frac{P_1 \cdot c_1^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_2 \cdot c_2^{\,3}}{6 \cdot l} + \frac{P_1 \cdot c_1 + P_2 \cdot c_2}{2} \cdot l + \frac{A - P_1 - P_2}{6} \cdot l^2 \right)\ .}} \tag{29}$$

Ismét összefoglaljuk részeredményeinket:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1=\frac{P_1\cdot c_1^{\ 2}}{2}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 2}}{2}-\left(\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot l+\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^2\right)\ ,\\
&C_2=0\ ,\\
&D_1=\frac{P_2\cdot c_2^{\ 2}}{2}-\left(\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot l+\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^2\right)\ ,\\
&D_2=\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6}\ ,\\
&E_1=-\left(\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot l+\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^2\right)\ ,\\
&E_2=\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6}\ .
\end{aligned}\right\}\quad (30)$$

Most (8) segítségével ***A*** - t kiküszöböljük (30) - ból, és átalakítjuk a ***C₁, D₁, E₁*** állandók képleteit:

$$A-P_1-P_2=-P_1\cdot\frac{c_1}{l}-P_2\cdot\frac{c_2}{l}=-\left(P_1\cdot\frac{c_1}{l}+P_2\cdot\frac{c_2}{l}\right)\ ,$$

$$\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^2=-\frac{l^2}{6}\cdot\left(P_1\cdot\frac{c_1}{l}+P_2\cdot\frac{c_2}{l}\right)=-\frac{l}{6}\cdot\left(P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2\right)\ ,$$

tehát:

$$\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot l^2=-\left(P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2\right)\cdot\frac{l}{6}\ . \qquad (31)$$

Majd (30 / 1) és (31) - gyel:

$$\begin{aligned}
C_1&=\frac{P_1\cdot c_1^{\ 2}}{2}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 2}}{2}-\left(\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot l-\left(P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2\right)\cdot\frac{l}{6}\right)=\\
&=\frac{P_1\cdot c_1^{\ 2}}{2}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 2}}{2}-\left(\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6\cdot l}+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{3}\cdot l\right)=\\
&=\left(\frac{P_1\cdot c_1^{\ 2}}{2}-\frac{P_1\cdot c_1^{\ 3}}{6\cdot l}-\frac{P_1\cdot c_1}{3}\cdot l\right)+\left(\frac{P_2\cdot c_2^{\ 2}}{2}-\frac{P_2\cdot c_2^{\ 3}}{6\cdot l}-\frac{P_2\cdot c_2}{3}\cdot l\right)\ ;
\end{aligned}$$

(32*)

tovább alakítva:

$$C_1 = P_1 \cdot c_1 \cdot \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_1{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \right) + P_2 \cdot c_2 \cdot \left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_2{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \cdot \right) =$$

$$= P_1 \cdot c_1 \cdot \frac{3 \cdot l \cdot c_1 - c_1{}^2 - 2 \cdot l^2}{2 \cdot 3 \cdot l} + P_2 \cdot c_2 \cdot \frac{3 \cdot l \cdot c_2 - c_2{}^2 - 2 \cdot l^2}{2 \cdot 3 \cdot l} =$$

$$= -P_1 \cdot c_1 \cdot \frac{2 \cdot l^2 + c_1{}^2 - 3 \cdot l \cdot c_1}{6 \cdot l} - P_2 \cdot c_2 \cdot \frac{2 \cdot l^2 + c_2{}^2 - 3 \cdot l \cdot c_2}{6 \cdot l} \ ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{C_1 = -\frac{P_1 \cdot c_1}{6 \cdot l} \cdot \left(2 \cdot l^2 + c_1{}^2 - 3 \cdot l \cdot c_1 \right) - \frac{P_2 \cdot c_2}{6 \cdot l} \cdot \left(2 \cdot l^2 + c_2{}^2 - 3 \cdot l \cdot c_2 \right) \ .}} \qquad (32)$$

Most (28) és (32*) - ból:

$$D_1 = C_1 - \frac{P_1 \cdot c_1{}^2}{2} = P_1 \cdot c_1 \cdot \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_1{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \right) + P_2 \cdot c_2 \cdot \left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_2{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \cdot \right) - \frac{P_1 \cdot c_1{}^2}{2} =$$

$$= P_1 \cdot c_1 \cdot \left(- \frac{c_1{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \right) + P_2 \cdot c_2 \cdot \left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_2{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \cdot \right) = \qquad (33^*)$$

$$= -P_1 \cdot c_1 \cdot \frac{c_1{}^2 + 2 \cdot l^2}{6 \cdot l} - P_2 \cdot c_2 \cdot \frac{2 \cdot l^2 + c_2{}^2 - 3 \cdot l \cdot c_2}{6 \cdot l} \ ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{D_1 = -\frac{P_1 \cdot c_1}{6 \cdot l} \cdot \left(2 \cdot l^2 + c_1{}^2 \right) - \frac{P_2 \cdot c_2}{6 \cdot l} \cdot \left(2 \cdot l^2 + c_2{}^2 - 3 \cdot l \cdot c_2 \right) \ .}} \qquad (33)$$

Majd (19 / 6) és (33 *) - gal:

$$E_1 = D_1 - \frac{P_2 \cdot c_2{}^2}{2} = P_1 \cdot c_1 \cdot \left(- \frac{c_1{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \right) + P_2 \cdot c_2 \cdot \left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_2{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \cdot \right) - \frac{P_2 \cdot c_2{}^2}{2} =$$

$$= P_1 \cdot c_1 \cdot \left(- \frac{c_1{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \right) + P_2 \cdot c_2 \cdot \left(- \frac{c_2{}^2}{6 \cdot l} - \frac{l}{3} \cdot \right) = -P_1 \cdot c_1 \cdot \frac{c_1{}^2 + 2 \cdot l^2}{6 \cdot l} - P_2 \cdot c_2 \cdot \frac{c_2{}^2 + 2 \cdot l^2}{6 \cdot l} \ ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{E_1 = -\frac{P_1 \cdot c_1}{6 \cdot l} \cdot \left(2 \cdot l^2 + c_1{}^2 \right) - \frac{P_2 \cdot c_2}{6 \cdot l} \cdot \left(2 \cdot l^2 + c_2{}^2 \right) \ .}} \qquad (34)$$

Most összefoglaljuk eredményeinket:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= -\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}-3\cdot l\cdot c_1\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right],\\
C_2 &= 0\ ,\\
D_1 &= -\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right],\\
D_2 &= \frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6}\ ,\\
E_1 &= -\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}\right)\right],\\
E_2 &= \frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6}+\frac{P_2\cdot c_2^{\,3}}{6}\ .
\end{aligned}\right\}\qquad (\ 35\ )$$

A (35) képletek közvetlenül a bemenő adatokkal lettek kifejezve.
Most írjuk fel a rugalmas szál végső egyenleteit!
(12 / 1), (8), (35 / 1) és (35 / 2) - vel:

$$-EI\cdot v(x_I)=\frac{A}{6}\cdot x_I^{\,3}+C_1\cdot x_I+C_2=\frac{1}{6}\left[P_1\cdot\left(1-\frac{c_1}{l}\right)+P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_I^{\,3}-$$

$$-\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}-3\cdot l\cdot c_1\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_I+0\ ,$$

innen az I. szakasz behajlásának egyenlete:

$$\left.\begin{aligned}
v(x_I) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[P_1\cdot c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}-3\cdot l\cdot c_1\right)+P_2\cdot c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_I-\\
&\quad-\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[P_1\cdot\left(1-\frac{c_1}{l}\right)+P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_I^{\,3}.
\end{aligned}\right\}$$

$$(\ 36\ )$$

Majd (12 / 2), (8), (35 / 3) és (35 / 4) - gyel:

$$-EI\cdot v(x_{II})=\frac{A-P_1}{6}\cdot x_{II}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot x_{II}{}^2+D_1\cdot x_{II}+D_2=$$

$$=\frac{1}{6}\left[P_1\cdot\left(1-\frac{c_1}{l}\right)+P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)-P_1\right]\cdot x_{II}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot x_{II}{}^2-$$

$$-\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_{II}+\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\left[-P_1\cdot\frac{c_1}{l}+P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_{II}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot x_{II}{}^2-$$

$$-\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_{II}+\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6}\ ,$$

innen:

$$-EI\cdot v(x_{II})=\frac{1}{6}\left[-P_1\cdot\frac{c_1}{l}+P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_{II}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1}{2}\cdot x_{II}{}^2-$$

$$-\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_{II}+\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6}\ ,$$

majd ebből a II. szakasz behajlásának egyenlete:

$$\left.\begin{aligned}v(x_{II})&=\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[P_1\cdot\frac{c_1}{l}-P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_{II}{}^3-\frac{P_1\cdot c_1}{2\cdot E\cdot I}\cdot x_{II}{}^2+\\&+\frac{1}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[P_1\cdot c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+P_2\cdot c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_{II}-\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6\cdot E\cdot I}\ .\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

Ezután (12), (31), (35 / 5) és (35 / 6) - tal:

$$-EI\cdot v(x_{III})=\frac{A-P_1-P_2}{6}\cdot x_{III}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot x_{III}{}^2+E_1\cdot x_{III}+E_2=$$

$$=-\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot x_{III}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot x_{III}{}^2-$$

$$-\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2\right)\right]\cdot x_{III}+\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6}+\frac{P_2\cdot c_2{}^3}{6}\ ,$$

innen:

$$-EI\cdot v(x_{III})=-\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot x_{III}{}^3+\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2}\cdot x_{III}{}^2-$$

$$-\left[\frac{P_1\cdot c_1}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{6\cdot l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2\right)\right]\cdot x_{III}+\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6}+\frac{P_2\cdot c_2{}^3}{6}\ ,$$

ebből pedig a III. szakasz behajlásának egyenlete:

$$\left.\begin{aligned}v(x_{III})=&\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot x_{III}{}^3-\frac{P_1\cdot c_1+P_2\cdot c_2}{2\cdot E\cdot I}\cdot x_{III}{}^2+\\&+\frac{1}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[P_1\cdot c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+P_2\cdot c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2\right)\right]\cdot x_{III}-\\&-\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left(P_1\cdot c_1{}^3+P_2\cdot c_2{}^3\right)\ .\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

Most jöhetnek az ellenőrzések, (F) szerint. Ezt itt már nem részletezzük.
Elvégzése ajánlott, mert eredményeképpen kényelmesebb képletalakok állhatnak elő, valamint a megnyugtató érzés, hogy nem követtünk el durva számolási hibát.
Mi itt az ellenőrzésnek azt a közvetett útját mutatjuk meg, hogy képleteinket speciális esetekre alkalmazzuk, és megnézzük, hogy az eredmények egyeznek - e a szakirodal - mi eredményekkel.

Az alapképletek alkalmazásai

1. Behajlás az erők hatásvonalában

Minthogy a II. szakasz végpontjairól van szó, így (2 / 2) szerint elegendő a (37) képlet használata.

a.) Behajlás a $\boldsymbol{P_1}$ erő hatásvonalában:

$$v(x_{II}=c_1)=\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[P_1\cdot\frac{c_1}{l}-P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot c_1{}^3-\frac{P_1\cdot c_1}{2\cdot E\cdot I}\cdot c_1{}^2+$$

$$+\frac{1}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[P_1\cdot c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1{}^2\right)+P_2\cdot c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2{}^2-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot c_1-\frac{P_1\cdot c_1{}^3}{6\cdot E\cdot I}\ ,$$

tehát:

$$\left.\begin{aligned} v(x_{II}=c_1) &= \frac{c_1^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[P_1\cdot\frac{c_1}{l}-P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]-\frac{4\cdot P_1\cdot c_1^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}+\\ &+\frac{c_1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[\frac{P_1\cdot c_1}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right].\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

b.) Behajlás a ***P₂*** erő hatásvonalában:

$$\begin{aligned} v(x_{II}=c_2) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[P_1\cdot\frac{c_1}{l}-P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot c_2^{\,3}-\frac{P_1\cdot c_1}{2\cdot E\cdot I}\cdot c_2^{\,2}+\\ &+\frac{1}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[P_1\cdot c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)+P_2\cdot c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot c_2-\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}\ ,\end{aligned}$$

tehát:

$$\left.\begin{aligned} v(x_{II}=c_2) &= \frac{c_2^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[P_1\cdot\frac{c_1}{l}-P_2\cdot\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]-\frac{3\cdot P_1\cdot c_1}{6\cdot E\cdot I}\cdot c_2^{\,2}-\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}+\\ &+\frac{c_2}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[\frac{P_1\cdot c_1}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)+\frac{P_2\cdot c_2}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\,2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right].\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

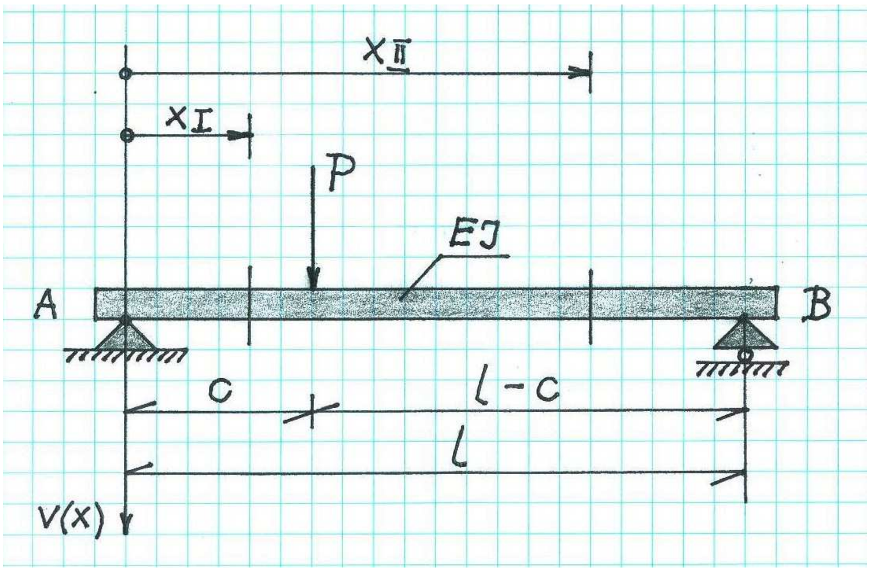
2. A $P_1 = P$, $P_2 = 0$ eset vizsgálata

Ekkor a (36), (37), (38) egyenletekkel és $\boldsymbol{P_2 = 0}$ - val:

$$\left.\begin{aligned} v(x_I) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P_1\cdot c_1}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}-3\cdot l\cdot c_1\right)\cdot x_I-\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot P_1\cdot\left(1-\frac{c_1}{l}\right)\cdot x_I^{\,3}\ ;\\ v(x_{II}) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot P_1\cdot\frac{c_1}{l}\cdot x_{II}^{\,3}-\frac{P_1\cdot c_1}{2\cdot E\cdot I}\cdot x_{II}^{\,2}+\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P_1\cdot c_1}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)\cdot x_{II}-\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}\ ;\\ v(x_{III}) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P_1\cdot c_1}{l}\cdot x_{III}^{\,3}-\frac{P_1\cdot c_1}{2\cdot E\cdot I}\cdot x_{III}^{\,2}+\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P_1\cdot c_1}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\,2}\right)\cdot x_{III}-\frac{P_1\cdot c_1^{\,3}}{6\cdot E\cdot I}\ .\end{aligned}\right\}$$

(41*)

Erről rögtön látható, hogy a 2. és a 3. sor ugyanaz; ez azt jelenti, hogy nincs szükség a III. szakasz megkülönböztetésére, ahogyan az a 3. ábrán is látható.
Így az alcímbeli terhelési eset behajlás - egyenletei, (41*) és $\boldsymbol{P_1 = P}$, $\boldsymbol{c_1 = c}$ - vel:



3. ábra

$$\left.\begin{aligned} v(x_I) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P\cdot c}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)\cdot x_I-\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot P\cdot\left(1-\frac{c}{l}\right)\cdot {x_I}^3\ ;\\ v(x_{II}) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot P\cdot\frac{c}{l}\cdot {x_{II}}^3-\frac{P\cdot c}{2\cdot E\cdot I}\cdot {x_{II}}^2+\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P\cdot c}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2\right)\cdot x_{II}-\frac{P\cdot c^3}{6\cdot E\cdot I}\ . \end{aligned}\right\}$$

(41)

A (41 / 1) képlet megfelelője a szakirodalomban – [1] – :

$$y_1(x)=\frac{Fbx}{6EIl}\left(l^2-b^2-x^2\right). \qquad (\ \S\ )$$

Most (41 / 1) - en átalakításokat végzünk, hogy kiderüljön egyezése a (§) képlettel.

$$\begin{aligned} v(x_I) &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P\cdot c}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)\cdot x_I-\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot P\cdot\left(1-\frac{c}{l}\right)\cdot {x_I}^3 =\\ &= \frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot\frac{P\cdot c}{l}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)\cdot x_I-\frac{1}{6\cdot E\cdot I}\cdot P\cdot\frac{l-c}{l}\cdot {x_I}^3 =\\ &= \frac{P}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[c\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)\cdot x_I-(l-c)\cdot {x_I}^3\right]=\\ &= \frac{P\cdot(l-c)}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[\frac{c}{l-c}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)\cdot x_I-\cdot {x_I}^3\right]=\\ &= \frac{P\cdot(l-c)\cdot x_I}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[\frac{c}{l-c}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)-{x_I}^2\right], \end{aligned}$$

tehát a kérdés:

$$\frac{P\cdot(l-c)\cdot x_I}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[\frac{c}{l-c}\cdot\left(2\cdot l^2+c^2-3\cdot l\cdot c\right)-{x_I}^2\right]\stackrel{?}{=}\frac{Fbx}{6EIl}\left(l^2-b^2-x^2\right)\ . \qquad (\ ?\ )$$

Jelölésbeli megfeleltetések: $\boldsymbol{P \rightarrow F}$, $\boldsymbol{(l-c) \rightarrow b}$, $\boldsymbol{x_I \rightarrow x}$. Ezekkel (?) bal oldala:

$$v(x)=\frac{F\cdot b\cdot x}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left\{\frac{l-b}{b}\cdot\left[2\cdot l^2+\left(l-b\right)^2-3\cdot l\cdot\left(l-b\right)\right]-x^2\right\} . \qquad (\;??\;)$$

Most vegyük észre, hogy (?) jobb oldala akkor egyenlő (??) jobb oldalával, ha fennáll, hogy

$$\frac{l-b}{b}\cdot\left[2\cdot l^2+\left(l-b\right)^2-3\cdot l\cdot\left(l-b\right)\right]=l^2-b^2 . \qquad (\;???\;)$$

Azonos átalakításokkal:

$$\frac{l-b}{b}\cdot\left[2\cdot l^2+\left(l-b\right)^2-3\cdot l\cdot\left(l-b\right)\right]=\left(l-b\right)\cdot\left(l+b\right) ,$$

$$2\cdot l^2+\left(l-b\right)^2-3\cdot l\cdot\left(l-b\right)=b\left(l+b\right) ,$$

$$2\cdot l^2+\left(l-b\right)\cdot\left(l-b-3\cdot l\right)=b\cdot l+b^2 ,$$

$$2\cdot l^2+\left(l-b\right)\cdot\left(-2\cdot l-b\right)=b\cdot l+b^2 ,$$

$$2\cdot l^2-\left(l-b\right)\cdot\left(2\cdot l+b\right)=b\cdot l+b^2 ,$$

$$2\cdot l^2-\left(2\cdot l^2-2\cdot l\cdot b+l\cdot b-b^2\right)=b\cdot l+b^2 ,$$

$$2\cdot l\cdot b-l\cdot b+b^2=b\cdot l+b^2 ,$$

tehát:

$$l\cdot b+b^2\equiv b\cdot l+b^2,$$

azaz (???) azonosság, így az (?) szerinti egyenlőség fennáll. Eszerint eredményünk tartalmilag egyezik a szakirodalomból vett eredménnyel. ☺

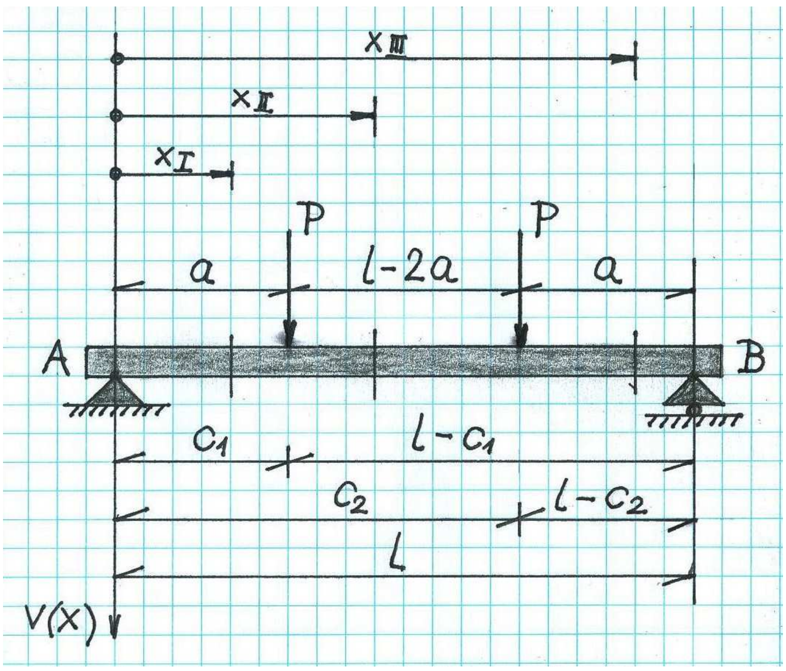
3. A $P_1 = P$, $P_2 = P$ eset vizsgálata

Ekkor a (36), (37), (38) egyenletekkel és $\boldsymbol{P_1 = P_2 = P}$ - vel kapjuk (42) - t. Annak érdekében, hogy a szakirodalomban talált képletekkel összevessük ezt, egy további specializációt hajtunk végre (42) - n, az alábbi választással:

$$\left.\begin{aligned} c_1&=a, \\ c_2&=l-a\ ,\end{aligned}\right\}\rightarrow c_1+c_2=l\ . \qquad (\;!\;)$$

$$\left.\begin{aligned}
v(x_I) &= \frac{P}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\;2}-3\cdot l\cdot c_1\right)+c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\;2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_I - \\
&\quad -\frac{P}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[\left(1-\frac{c_1}{l}\right)+\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_I^{\;3}\;, \\
v(x_{II}) &= \frac{P}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[\frac{c_1}{l}-\left(1-\frac{c_2}{l}\right)\right]\cdot x_{II}^{\;3}-\frac{P\cdot c_1}{2\cdot E\cdot I}\cdot x_{II}^{\;2}+ \\
&\quad +\frac{P}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\;2}\right)+c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\;2}-3\cdot l\cdot c_2\right)\right]\cdot x_{II}-\frac{P\cdot c_1^{\;3}}{6\cdot E\cdot I}\;, \\
v(x_{III}) &= \frac{P\cdot\left(c_1+c_2\right)}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot x_{III}^{\;3}-\frac{P\cdot\left(c_1+c_2\right)}{2\cdot E\cdot I}\cdot x_{III}^{\;2}+ \\
&\quad +\frac{P}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left[c_1\cdot\left(2\cdot l^2+c_1^{\;2}\right)+c_2\cdot\left(2\cdot l^2+c_2^{\;2}\right)\right]\cdot x_{III} - \\
&\quad -\frac{P}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left(c_1^{\;3}+c_2^{\;3}\right)\;.
\end{aligned}\right\} \quad (\,42\,)$$

A mondott speciális esetet a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra

Most (42 / 1) és (!) képletekkel:

$$v(x_I) = \frac{P}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} \cdot \left\{ a \cdot \left(2 \cdot l^2 + a^2 - 3 \cdot l \cdot a \right) + \left(l - a \right) \cdot \left[2 \cdot l^2 + \left(l - a \right)^2 - 3 \cdot l \cdot \left(l - a \right) \right] \right\} \cdot x_I -$$
$$- \frac{P}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[\left(1 - \frac{a}{l} \right) + \left(1 - \frac{l - a}{l} \right) \right] \cdot x_I^{\,3} \;; \qquad (\%)$$

~ (%) - ban a kapcsos zárójeles tényezőt átalakítva:

$$a \cdot \left(2 \cdot l^2 + a^2 - 3 \cdot l \cdot a \right) + \left(l - a \right) \cdot \left[2 \cdot l^2 + \left(l - a \right)^2 - 3 \cdot l \cdot \left(l - a \right) \right] =$$
$$= 2 \cdot l^2 \cdot \left(a + l - a \right) + a \cdot \left(a^2 - 3 \cdot l \cdot a \right) + \left(l - a \right) \cdot \left[\left(l - a \right)^2 - 3 \cdot l \cdot \left(l - a \right) \right] =$$
$$= 2 \cdot l^3 + a^3 - 3 \cdot l \cdot a^2 + \left(l - a \right) \cdot \left[\left(l - a \right)^2 - 3 \cdot l \cdot \left(l - a \right) \right] =$$
$$= 2 \cdot l^3 + a^3 - 3 \cdot l \cdot a^2 + \left(l - a \right) \cdot \left[l^2 - 2 \cdot a \cdot l + a^2 - 3 \cdot l^2 + 3 \cdot l \cdot a \right] =$$
$$= 2 \cdot l^3 + a^3 - 3 \cdot l \cdot a^2 + \left(l - a \right) \cdot \left(a^2 + a \cdot l - 2 \cdot l^2 \right) =$$
$$= 2 \cdot l^3 + a^3 - 3 \cdot l \cdot a^2 + \left(a^2 \cdot l - a^3 + a \cdot l^2 - a^2 \cdot l - 2 \cdot l^3 + 2 \cdot a \cdot l^2 \right) =$$
$$= 2 \cdot l^3 + a^3 - 3 \cdot l \cdot a^2 + \left(-a^3 + 3 \cdot a \cdot l^2 - 2 \cdot l^3 \right) =$$
$$= 2 \cdot l^3 + a^3 - 3 \cdot l \cdot a^2 - a^3 + 3 \cdot a \cdot l^2 - 2 \cdot l^3 = -3 \cdot l \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot l^2 =$$
$$= 3 \cdot a \cdot l^2 - 3 \cdot l \cdot a^2 \;;$$

~ (%) - ban a szögletes zárójelet átalakítva:

$$\left(1 - \frac{a}{l} \right) + \left(1 - \frac{l - a}{l} \right) = 1 - \frac{a}{l} + 1 - 1 + \frac{a}{l} = 1 \;,$$

majd ezen részeredményeket (%) - ba téve:

$$v(x_I) = \frac{P}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} \cdot \left(3 \cdot a \cdot l^2 - 3 \cdot l \cdot a^2 \right) \cdot x_I - \frac{P}{6 \cdot E \cdot I} \cdot x_I^{\,3} =$$
$$= \frac{P}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(3 \cdot a \cdot l - 3 \cdot a^2 \right) \cdot x_I - \frac{P}{6 \cdot E \cdot I} \cdot x_I^{\,3} =$$
$$= \frac{P \cdot x_I}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(3 \cdot a \cdot l - 3 \cdot a^2 - x_I^{\,2} \right) \;,$$

tehát:

$$\underline{\underline{v(x_I) = \frac{P \cdot x_I}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(3 \cdot a \cdot l - 3 \cdot a^2 - x_I^{\,2} \right) \;.}} \qquad (43)$$

A (43) eredmény megegyezik a [3] - ban fellelt megfelelő eredménnyel. ☺

Ezután nézzük a II. szakasz egyenleteit! A (42 / 2) és (!) képletekkel:

$$v(x_{II}) = \frac{P}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left[\frac{a}{l}-\left(1-\frac{l-a}{l}\right)\right]\cdot {x_{II}}^{3} - \frac{P\cdot a}{2\cdot E\cdot I}\cdot {x_{II}}^{2} +$$

$$+\frac{P}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot\left\{a\cdot\left(2\cdot l^2+a^2\right)+(l-a)\cdot\left[2\cdot l^2+(l-a)^2-3\cdot l\cdot(l-a)\right]\right\}\cdot x_{II} - \frac{P\cdot a^3}{6\cdot E\cdot I} \;; \qquad (\%\%)$$

~ (%%) - ban a nagy szögletes zárójel átalakítása:

$$\frac{a}{l}-\left(1-\frac{l-a}{l}\right)=\frac{a}{l}-1+1-\frac{a}{l}=0 \;;$$

~ (%%) - ban a kapcsos zárójel átalakítása, az előző eredményt is felhasználva:

$$a\cdot\left(2\cdot l^2+a^2\right)+(l-a)\cdot\left[2\cdot l^2+(l-a)^2-3\cdot l\cdot(l-a)\right]=3\cdot a\cdot l^2 \;,$$

így (%%) alakja ezekkel:

$$v(x_{II}) = -\frac{P\cdot a}{2\cdot E\cdot I}\cdot {x_{II}}^{2} + \frac{P}{6\cdot E\cdot I\cdot l}\cdot 3\cdot a\cdot l^2\cdot x_{II} - \frac{P\cdot a^3}{6\cdot E\cdot I} =$$

$$= \frac{P\cdot a}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left(-3\cdot {x_{II}}^{2}+3\cdot l\cdot x_{II}-a^2\right) = \frac{P\cdot a}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left(3\cdot l\cdot x_{II}-3\cdot {x_{II}}^{2}-a^2\right) \;,$$

tehát:

$$\underline{\underline{v(x_{II}) = \frac{P\cdot a}{6\cdot E\cdot I}\cdot\left(3\cdot l\cdot x_{II}-3\cdot {x_{II}}^{2}-a^2\right)}} \;. \qquad (44)$$

Ez is egyezik [3] - beli megfelelőjével. ☺

A további számításokat, így például a ***v’(x)*** képletek felírását, a szélsőérték - helyek meghatározását most már az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Megjegyzések:

M1. A [2] műben az itt elvégzett munkával kapcsolatban arról írnak, hogy
„ Két vagy több koncentrált erő – tehát három vagy több szakasz – esetén pedig hat vagy még ennél is több állandóval dolgozni gyakorlatilag lehetetlen.”
Itt láttuk, hogy gyakorlatilag lehetséges, bár igencsak munkaigényes.

M2. A tan - és szakkönyvek kerülik a sok képlet felírását, ezért is arra bíztatják olvasóikat, hogy az addigi eredmények variálásával oldják meg feladataikat.
Ez a helyzet például a (41 / 2) képlet esetében is; erről azt írja [1], hogy
„ A második rúdszakasz ***y₂(x)*** egyenletét felesleges felírni, mert itt is használhatjuk az első szakaszra levezetett függvényt, ha ***b*** helyébe ***a*** - t írunk, és ***x*** - et a jobb oldali rúdvégtől számítjuk.”
Ezzel kapcsolatban idekívánkozik, hogy a számítógépes ábrázoláshoz (is) minden - képpen fel kell írni a rugalmas szál teljes egyenletét, amit talán nem pont egy tan - könyvben kellene megspórolni.

M3. A (44) képlettel kapcsolatos észrevételünk, hogy a [3] forrásmunka ehhez az

$$a \le x \le \frac{l}{2} \qquad (*)$$

tartományt jelöli meg a képlet működési tartományaként. Emlékeztetünk itt arra, hogy (2 / 2) és (!) - nek megfelelően itt érvényes még a

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \le x_{II} \le c_2 \ , \\ c_1 = a \ , \\ c_2 = l - a \end{array} \right\} \rightarrow a \le x_{II} \le l - a \qquad (!!)$$

általánosabb korlátozó feltétel is. Itt bizonyára a szimmetria miatt vették a (*) tarto - mányt.

M4. A szakirodalom arra is bíztatja a felhasználóit, hogy az itteni lineárisan rugalmas esetben alkalmazzák a *szuperpozíció* elvét. Ezzel kapcsolatos azon észrevételünk, hogy ennek során elég könnyű elkeveredni az egymásba ágyazódó tartományokban. Ennek részletesebb végiggondolását is az Olvasóra bízzuk.

M5. Az M1. megjegyzésben említett idézet szerzője arra hegyezte ki mondanivalóját, hogy az ittenihez hasonló – pl.: koncentrált erőkkel terhelt – kéttámaszú tartónál vi - szonylag sok terhelési szakasz esetén a legkényelmesebb lehet az *egységfüggvények (e)* alkalmazása. Ezzel kapcsolatos észrevételünk, hogy híres, abszolút kompetens és mértékadó szerzők sem nagyon erőltetik az *(e)* - témát, helyette más megoldási mód - szerekhez folyamodnak. Ez a helyzet [3] - nál is.

M6. A behajlási alap - differenciálegyenletek integrálásának itteni módját tudatosan választottuk a szakirodalomban megszokottól kissé eltérőre.

M7. Lehajlási egyenleteink még más alkalmazásokat is támogathatnak.
Az érdeklődő Olvasónak ajánljuk ezen alkalmazások részletes felderítését!

Irodalom:

[1] – ***Muttnyánszky Ádám***: Szilárdságtan
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[2] – ***Pelikán József***: Szilárdságtan
Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[3] – ***Stephen P. Timoshenko ~ James M. Gere***: Mechanics of Materials
Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1972.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Sződliget, 2013. április 2.