
Ü B U N G

M A S C H I N E N E L E M E N T E

Tragfähigkeitsnachweise: Grundlagen

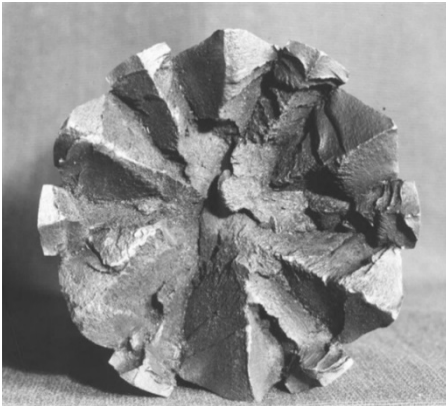
Stephan Voigt, M.Eng.

Agenda

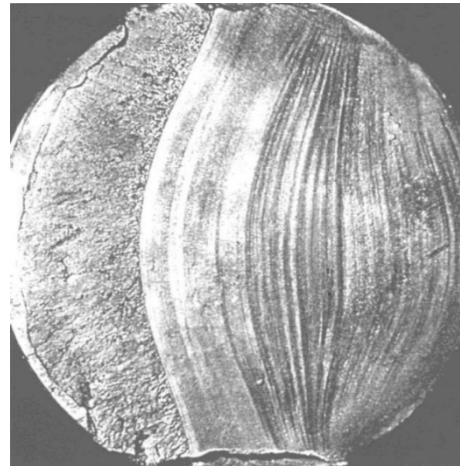
1. Versagen von Maschinenelementen
2. Tragfähigkeitsnachweis hinsichtlich zulässiger Spannungen
 - 2.1 Beanspruchung
 - 2.2 Beanspruchbarkeit
 - 2.3 Festigkeitsmindernde Einflüsse
 - 2.4 Festigkeitsnachweis
3. Tragfähigkeitsnachweis hinsichtlich zulässiger Verformungen

1. Versagen von Maschinenelementen

- Ursache des Versagens (1): zu hohe (äußere) Belastungen



Sprödbrech
Dauerbruch
unzul. Verformung



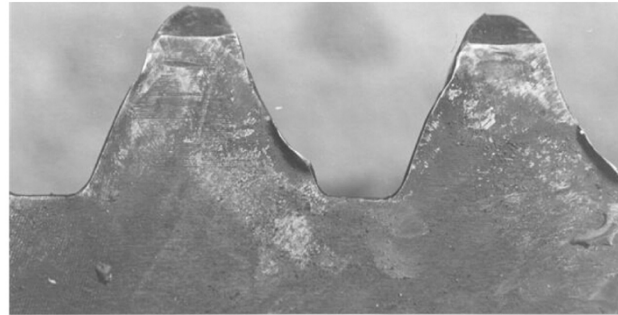
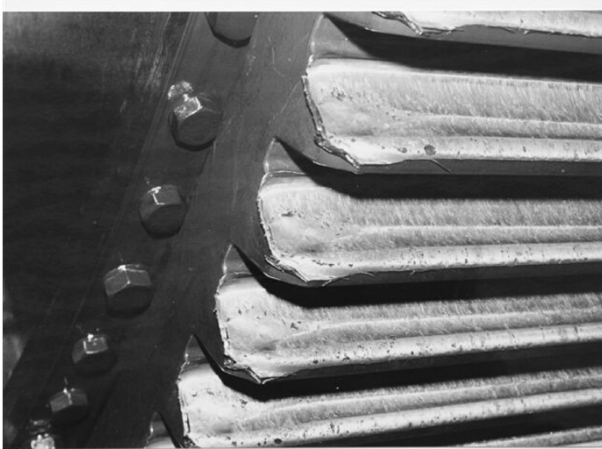
Begriffe:
Belastung,
Beanspruchung,
Beanspruchbarkeit

- Fazit:

$\text{Beanspruchbarkeit} < \text{Beanspruchung}$



- Ursache des Versagens (2): Anforderungen, Anwendung → Verschleiß



- Ursache des Versagens (3): Korrosion



2. Tragfähigkeitsnachweis hinsichtlich zulässiger Spannungen

2.1 Beanspruchung

- Definition

Unter der Beanspruchung eines Bauteils bzw. einer Baugruppe versteht man die Wirkung einer äußeren Belastung. Diese führt zur Ausbildung von mechanischen Spannungen im Bauteil bzw. in der Baugruppe.

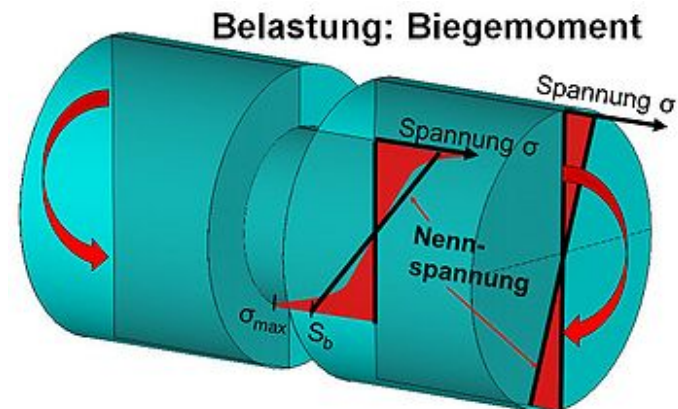
- Man unterscheidet:

- Nennspannungen / Nennspannungskonzept

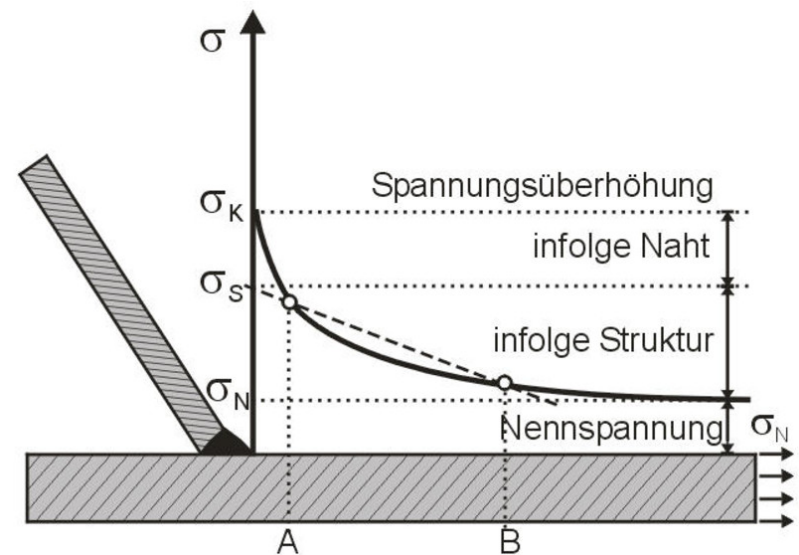
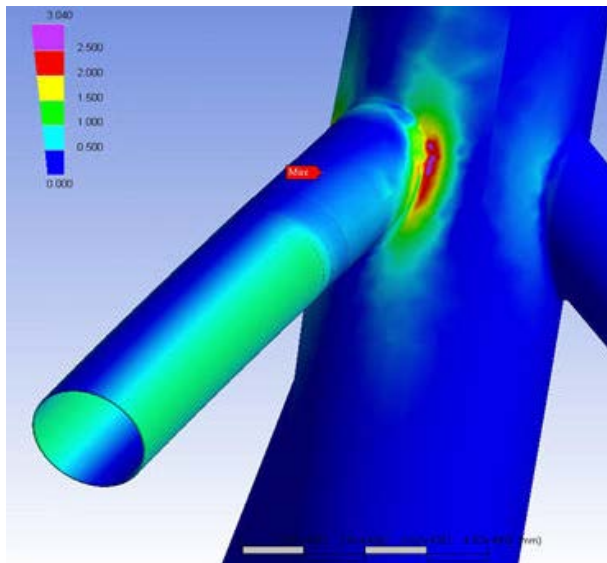
- Bezug auf einen definierten Querschnitt (stab- und flächenförmige Bauteile)
- Berücksichtigung von geometrischen Kerben mittels experimentell ermittelten Faktoren

$$\sigma_n = M_b / W_b$$

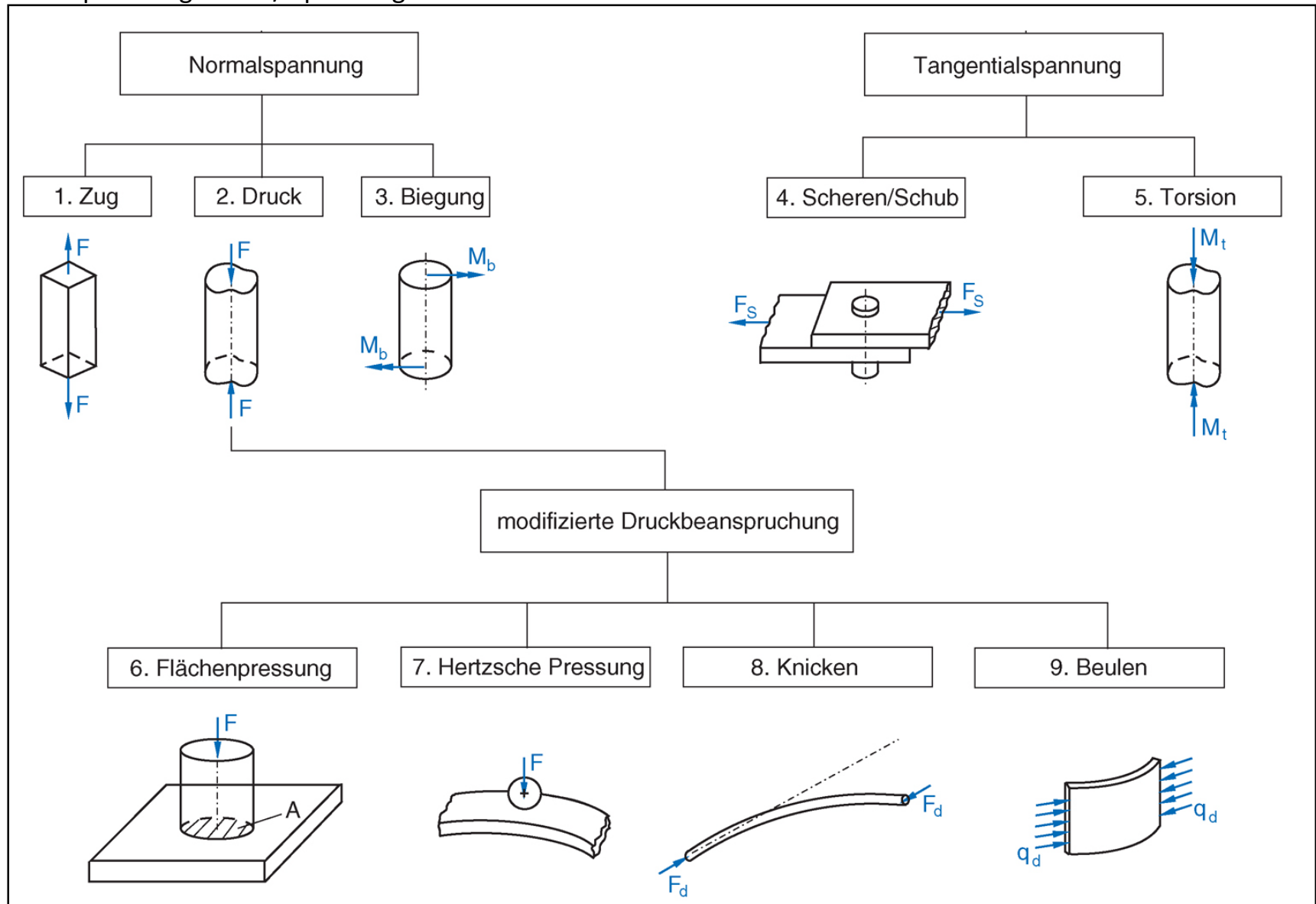
$$\sigma = \alpha \cdot \sigma_n$$



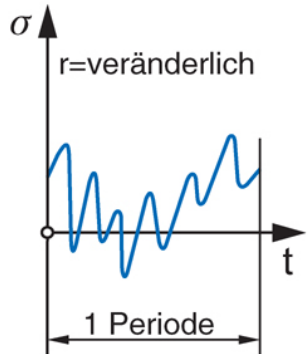
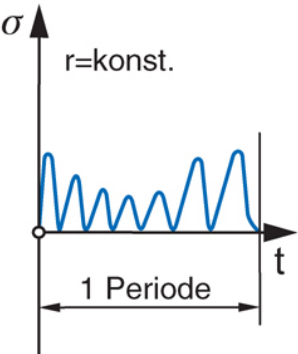
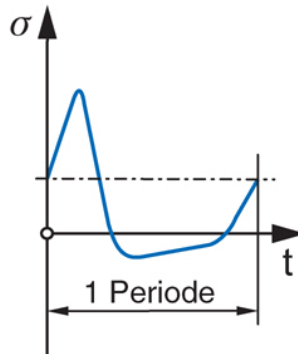
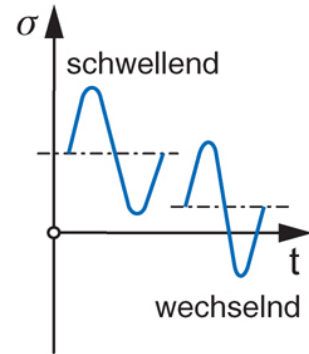
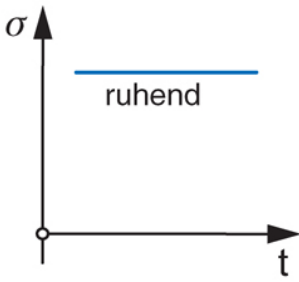
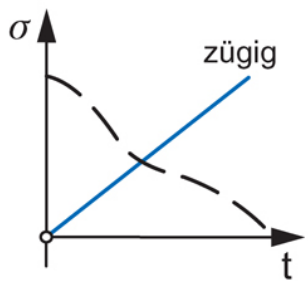
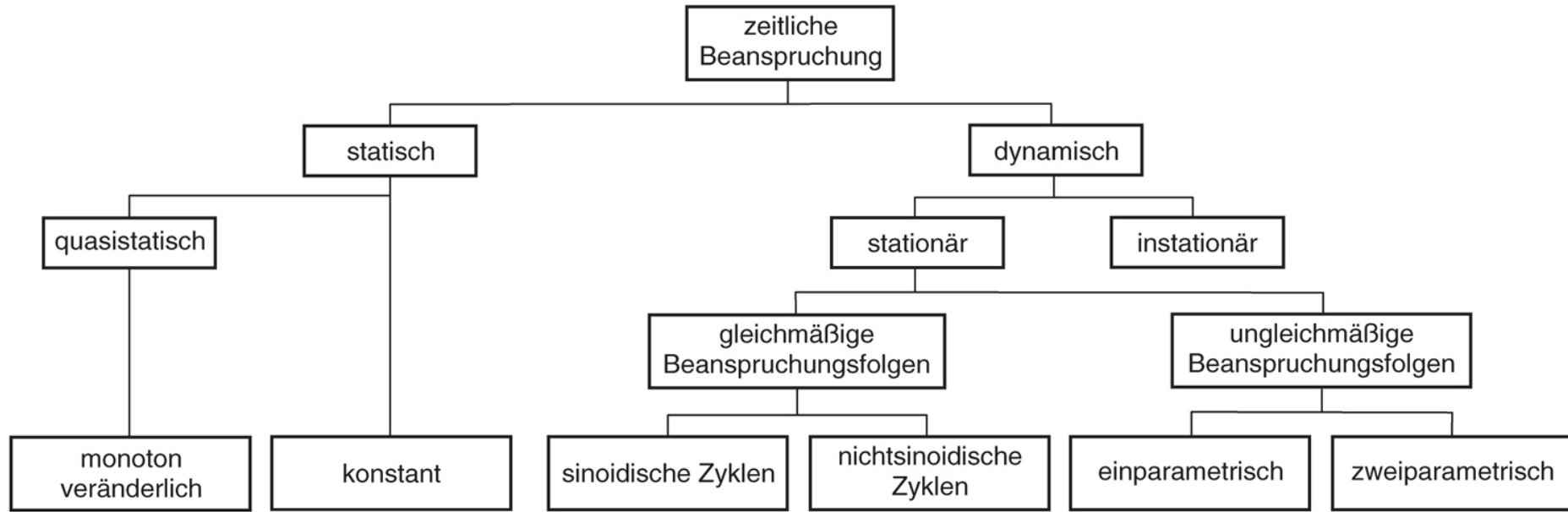
- Örtliche Spannungen / Örtliches Konzept (Kerbgrundspannungskonzept)
 - Ermittlung der „tatsächlichen“ Spannungen mittels numerischer Methoden (z.B. Finite-Elemente-Methode) oder experimenteller Spannungsermittlung (z.B. Dehnungsmessstreifen)



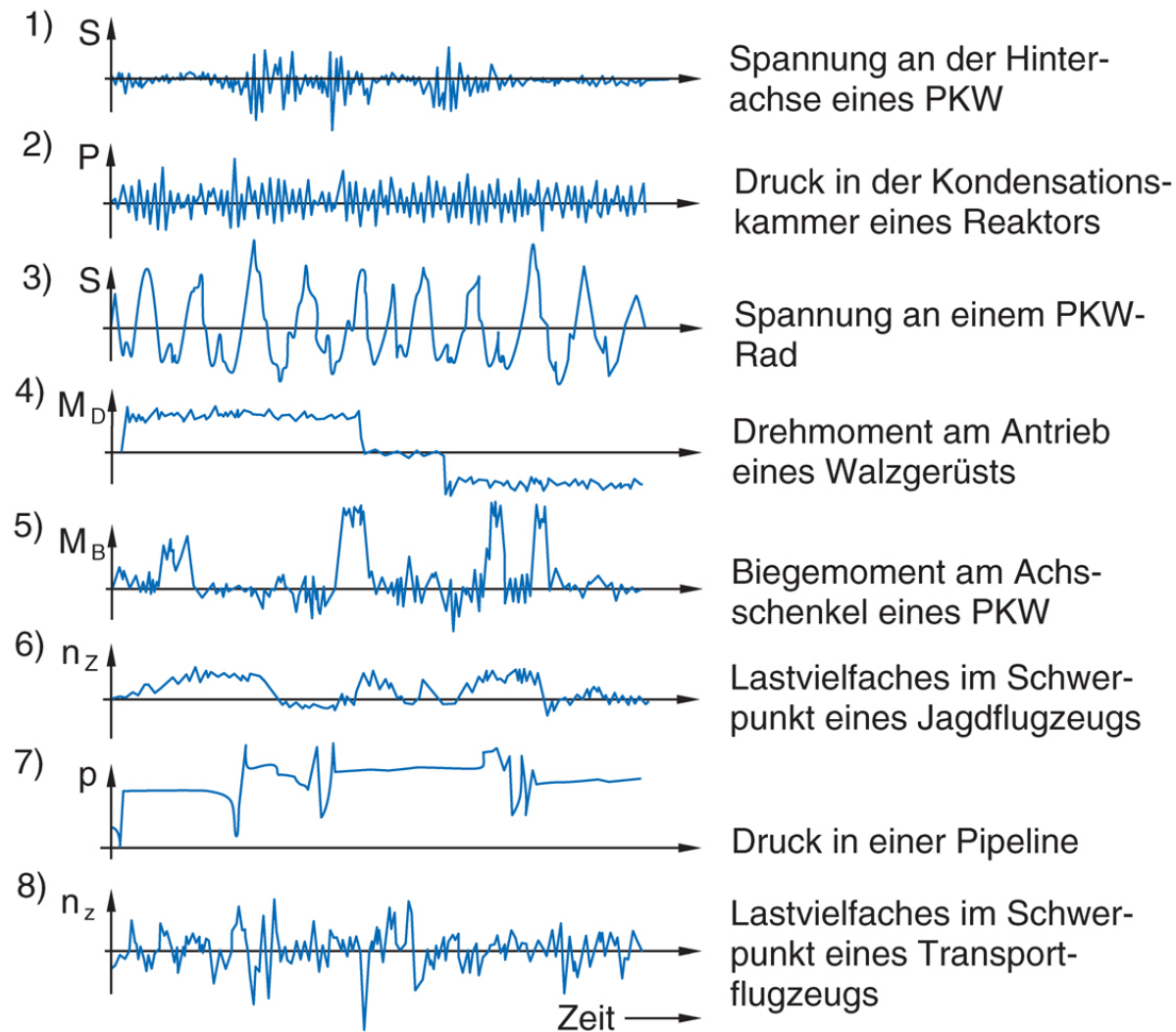
■ Beanspruchungsarten / Spannungsarten



▪ Beanspruchungs-Zeit-Funktionen



- Beispiele dynamischer Belastungen technischer Systeme (Quelle: Buxbaum)



Festigkeithypothesen

- Notwendige Umrechnung:
komplexe (d.h. in der Regel mehrachsige) Beanspruchung → äquivalente einachsige Beanspruchung

- Motiv:
Werte der Beanspruchbarkeit (Vergleichswerte)
beziehen sich (fast) immer auf eine einachsige
Beanspruchung, während reale Beanspruchungen
(fast) nie einachsig sind!

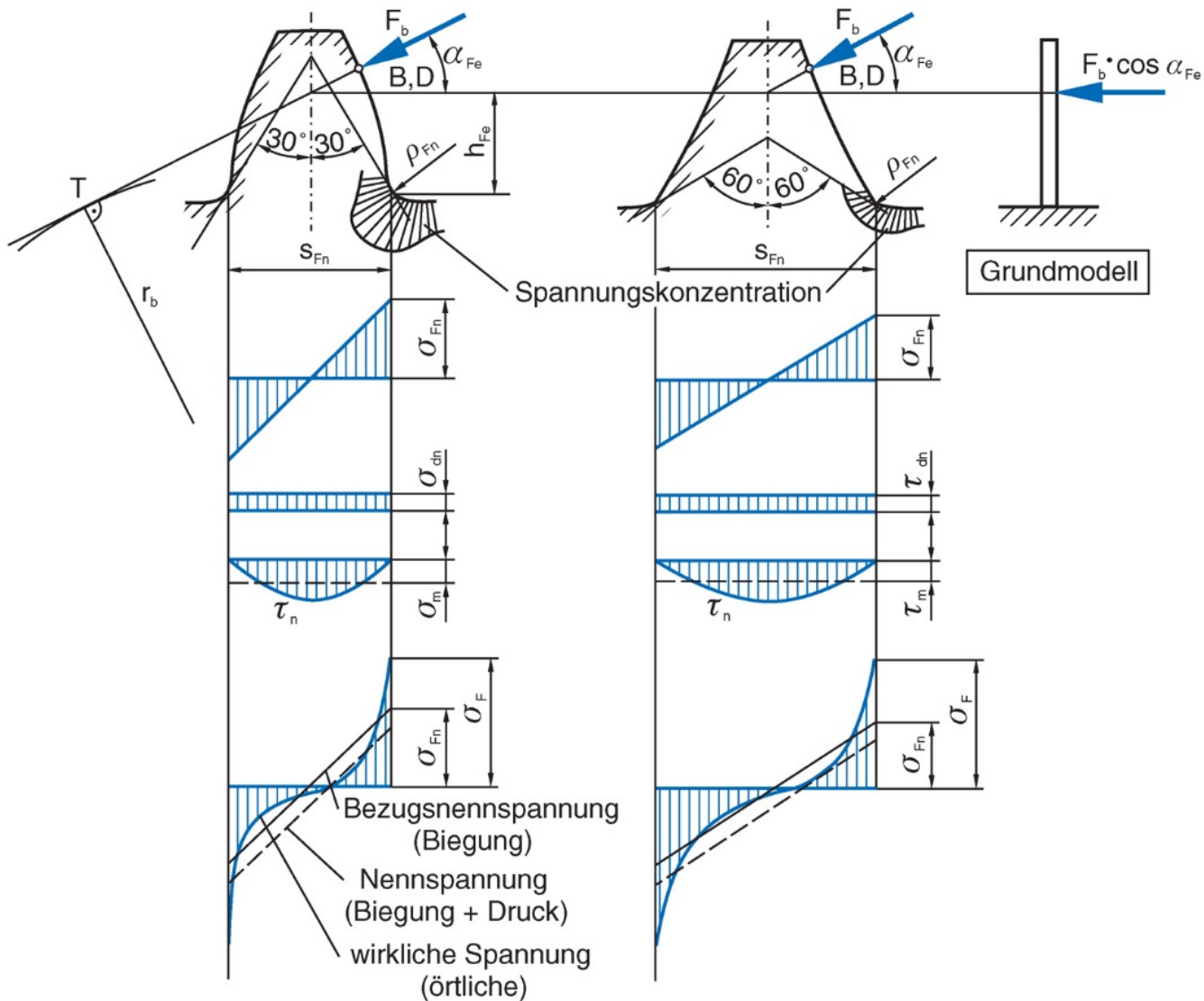


- Spezialfall: gleichgerichtete Beanspruchungskomponenten, z.B. biegebelastete Achse unter Zug

$$\sigma_{\max} = \sigma_z + \sigma_{b,\max}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_z - \sigma_{b,\min}$$

▪ Beispiel für eine zusammengesetzte Beanspruchung: Zahnfußspannungen



- Normalspannungshypothese (NH) nach Rankine
 - Anwendung, wenn das Bauteil aufgrund der größten Normalspannung σ_1 versagt
 - Spröde Werkstoffe (z.B. Grauguss)
 - Schweißkonstruktionen (Spannungsversprödung)
 - Typische Beanspruchung: Zug

 - Charakteristik: Trennbruch, kaum Fließen

 - Versagen wird ausgeschlossen, wenn

$$\sigma_{vNH} = |\sigma_{\max}| = \sigma_1 < \sigma_{zul}$$

- Bei spröden Werkstoffen unter Druckbeanspruchung gilt

$$\sigma_{vNH} = \sigma_3 < |\sigma_{zuld}| \text{ mit } \sigma_{zuld} \neq \sigma_{zulz}$$

- Schubspannungshypothese (SH) nach Tresca
 - Anwendung, wenn der Werkstoff infolge der größten Hauptspannungsdifferenz d.h. infolge der größten Schubspannung versagt
 - Duktile Werkstoffe (meist unter statischer Belastung und Druckbeanspruchung)
 - Häufig auch anstelle von NH, aufgrund einfacherer Formeln

 - Versagen wird ausgeschlossen, wenn:

$$\sigma_{\text{vSH}} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}} < \sigma_{\text{zul}}$$

- Beim einachsigen Spannungszustand gilt:

$$\sigma_{\text{vSH}} = \sigma_1 = 2 \cdot \tau_{\text{max}}$$

- Beim ebenen Spannungszustand gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{vSH}} = |\sigma_1 - \sigma_2| &= \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) \\ &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

- Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) nach von Mises

- Anwendung bei mehrachsig beanspruchten, duktilen Werkstoffen (sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen)
- Versagen wird ausgeschlossen, wenn:

$$\sigma_{\text{vGEH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} < \sigma_{\text{zul}}$$

- Beim ebenen Spannungszustand mit $\sigma_3 = 0$ folgt:

$$\sigma_{\text{vGEH}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau^2}$$

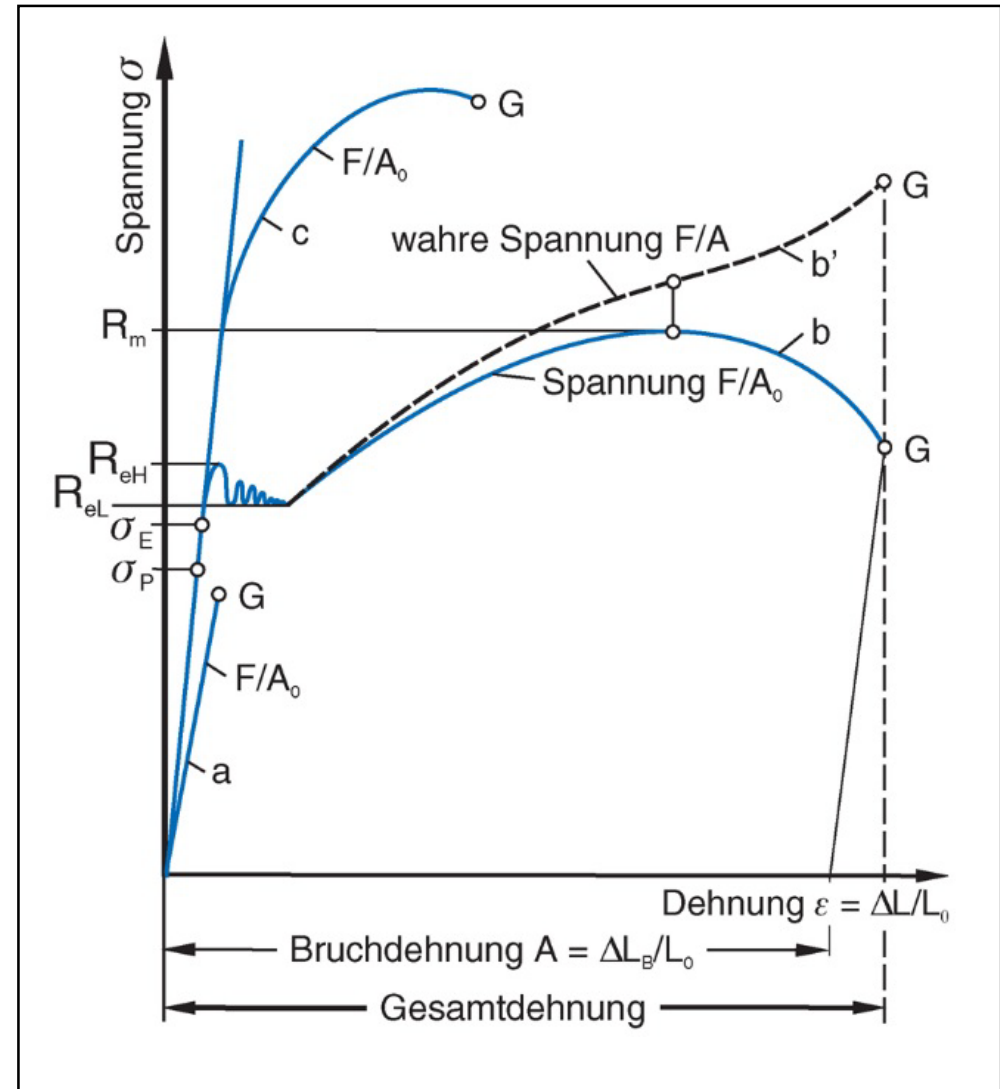
- Häufig: biegebeanspruchte Welle mit $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_b$ und $\tau = \tau_t$:

$$\sigma_{\text{vGEH}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$$

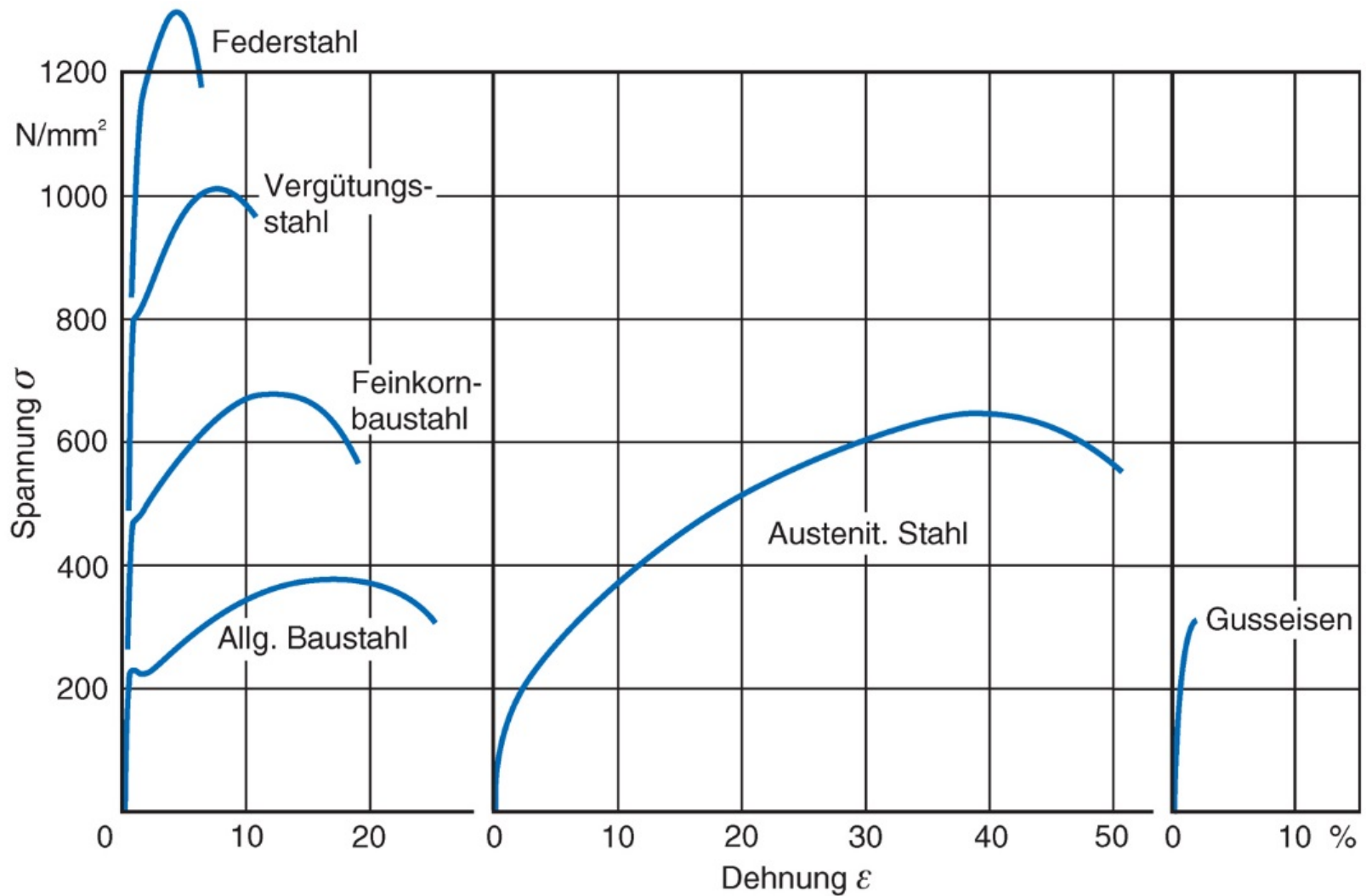
2.2 Beanspruchbarkeit

Beanspruchbarkeit bei statischer Belastung

- Spannungs-Dehnungs-Kurve, Zugversuch



Spannungs-Dehnungs-Kurven verschiedener Stahlwerkstoffe



- Werkstoffkennwerte bei Raumtemperatur

Belastung	Bezeichnung	Zeichen	Ersatzwert bei Stahlwerkstoffen	Berechnung gegen
Zug	Streckgrenze (Fließgrenze)	R_e	-	Verformung
	0,2%-Dehngrenze	$R_{p0,2}$	-	Verformung
	Zugfestigkeit	R_m	-	Bruch
Druck	Druckfließgrenze	R_{ed}	$= R_e$	Verformung
	0,2%-Stauchgrenze	$\sigma_{d0,2}$	$= R_{p0,2}$	Verformung
	Druckfestigkeit	σ_{dB}	$= R_m$	Bruch
Biegung	Biegefließgrenze	σ_{bF}	$\approx R_e$	Verformung
	0,2%-Biegedehngrenze	$\sigma_{b0,2}$	$\approx R_{p0,2}$	Verformung
	Biegefestigkeit	σ_{bB}	$\approx R_m$	Bruch
Torsion	Torsionsfließgrenze	τ_{tF}	$\approx R_e/\sqrt{3}$	Verformung
	0,4%-Torsionsdehngrenze	$\tau_{t0,4}$	$\approx R_{p0,2}/\sqrt{3}$	Verformung
	Torsionsfestigkeit	τ_{tB}	$\approx R_m$	Bruch
Abscherung	Scherfließgrenze	τ_{sF}	$\approx R_e/\sqrt{3}$	Verformung
	Scherfestigkeit	τ_{sB}	$\approx R_m/\sqrt{3}$	Bruch

- Werkstoffkennwerte bei hohen Temperaturen

- Werkstoffspezifische Kristallerholungstemperatur stellt Höchstgrenze der Anwendbarkeit dar.

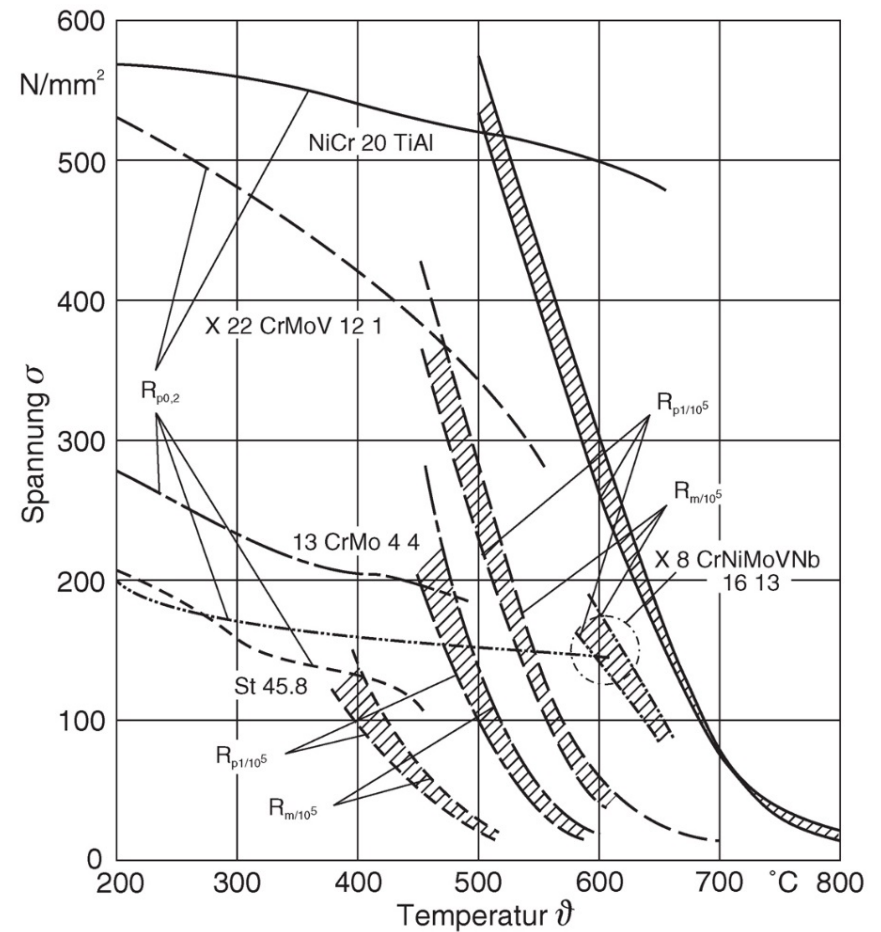
- Unlegierte Stähle: ca. 400°C
- Legierte Stähle: ca. 450 – 500°C
- Hochlegierte, warmfeste Stähle: 550 - 600°C

- Kennwerte bei erhöhten Temperaturen:

- Zeitdehngrenze $R_{p1/10^5/\vartheta}$

- Zeitstandfestigkeit $R_{m/10^5/\vartheta}$

- Warmstreckgrenze $R_{p0,2/\vartheta}$



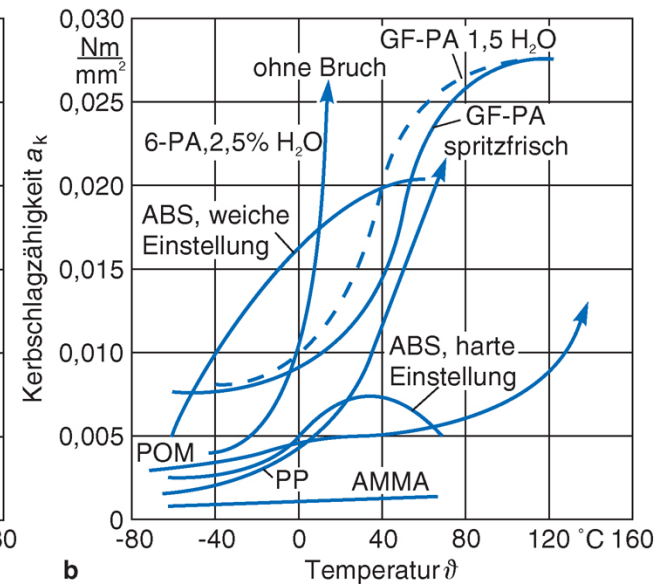
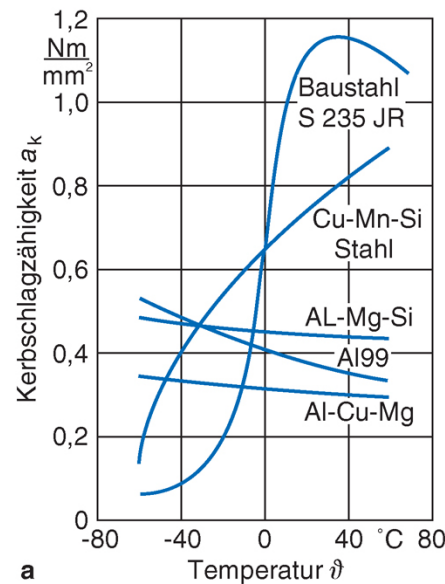
▪ Werkstoffkennwerte bei tiefen Temperaturen

- Konkrete Festigkeitswerte liegen meist nicht vor, jedoch nimmt mit fallender Temperatur
 - der Formänderungswiderstand zu und
 - das Formänderungsvermögen von Metallen mit krz-Gitter ab

→ Spröbruchgefahr

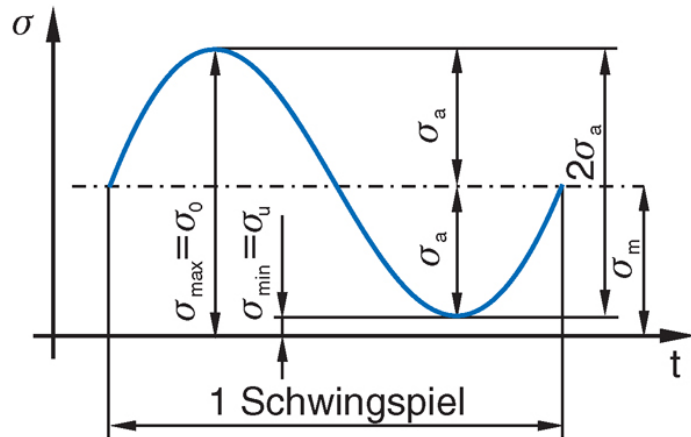
- Kritische Übergangstemperatur wird mittels Kerbschlagbiegeversuch ermittelt

- Schlagarbeit als Maß für die Zähigkeit



Beanspruchbarkeit bei dynamischer Belastung

- Kenngrößen eines Schwingenspiels

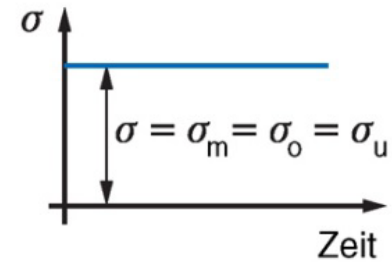


Bezeichnung	Gleichung
Mittelspannung	$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$
Ausschlagsspannung, Spannungsamplitude	$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$
Oberspannung	$\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a$
Unterspannung	$\sigma_u = \sigma_m - \sigma_a$
Spannungsverhältnis	$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$
Funktionale Darstellung	$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin(\omega t)$

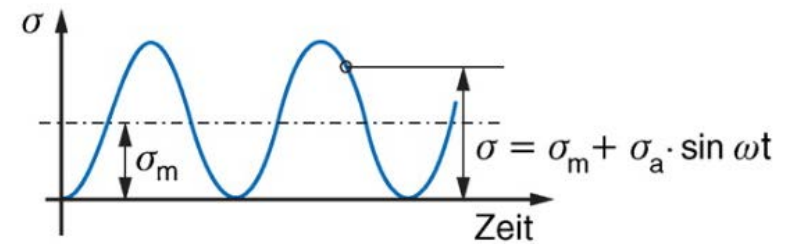
$$\kappa = \text{sgn}(\sigma_o) \cdot \text{sgn}(\sigma_u) \cdot \frac{\min(|\sigma_o|, |\sigma_u|)}{\max(|\sigma_o|, |\sigma_u|)}$$

Belastungsfälle nach von Bach

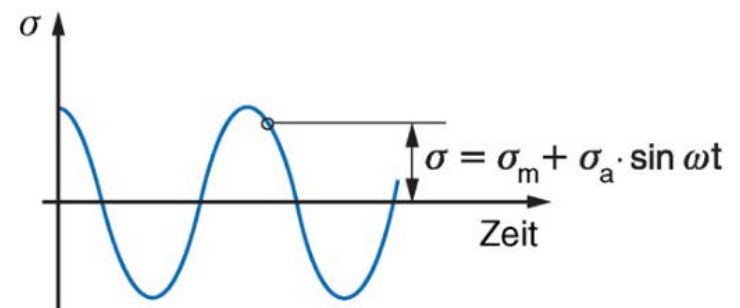
- Fall 1: ruhende Belastung



- Fall 2: rein schwellende Belastung

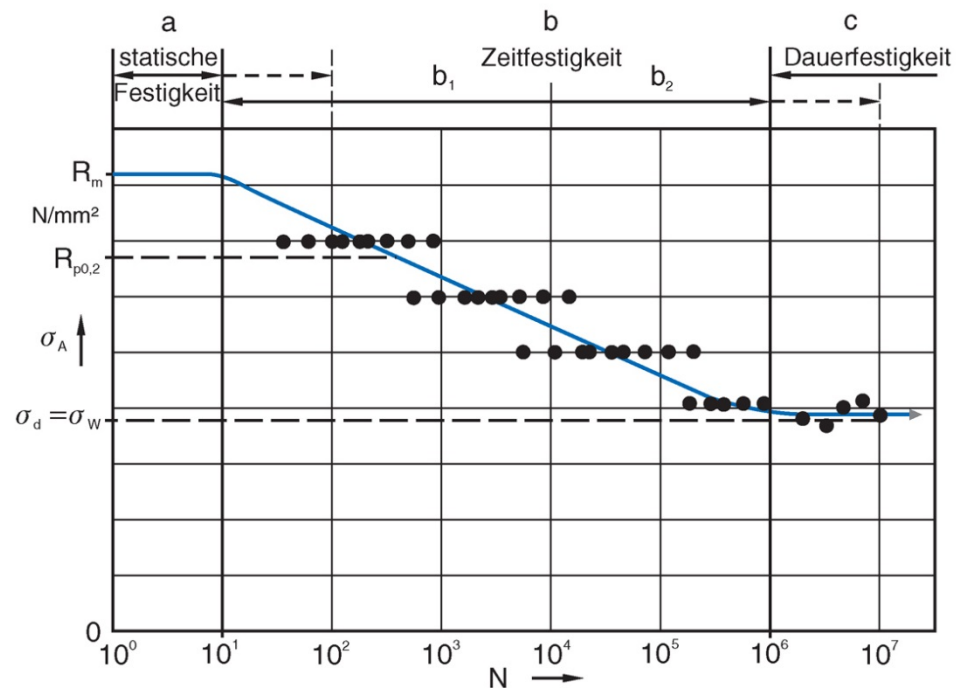


- Fall 3: wechselnde Belastung (allg. wenn $\sigma_{-u} < 0$)

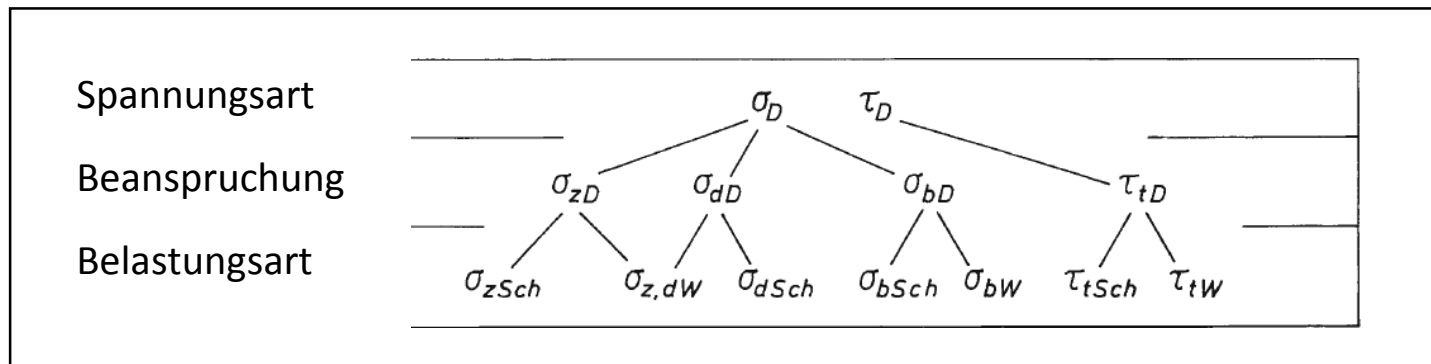


- Lastwechselzahlen und Festigkeit

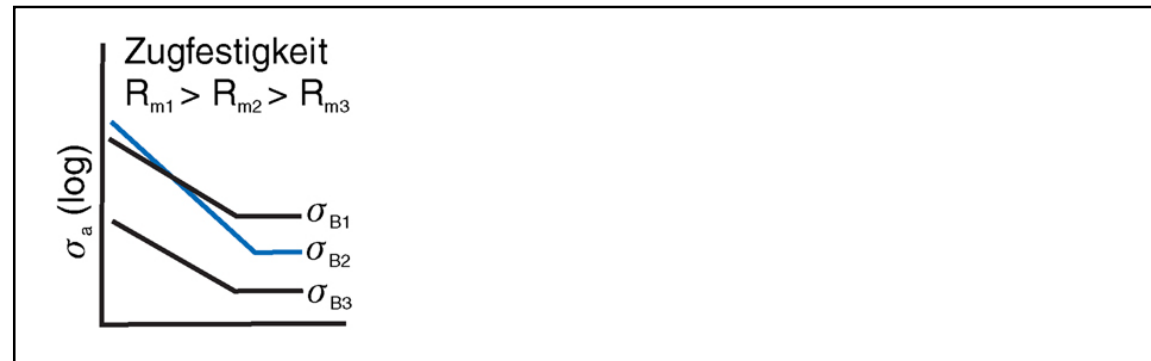
- $N < 10^1 \dots 10^2$ statische Festigkeit
- $10^1 \dots 10^2 < N < 10^3 \dots 10^4$ Kurzzeitfestigkeit (LCF, low cycle fatigue)
- $10^3 < N < 10^4 \dots 10^6$ Zeitfestigkeit (HCF, high cycle fatigue)
- $N > 10^6 \dots 10^7$ Dauerfestigkeit



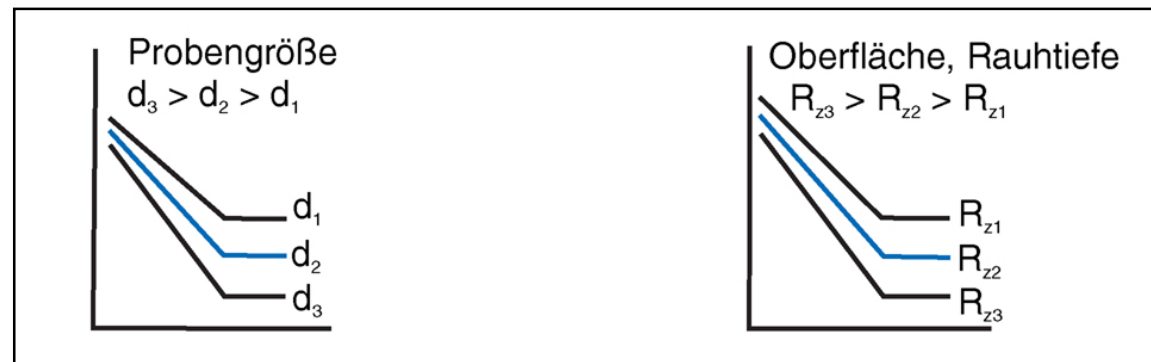
- Arten der Dauerfestigkeit in Abhängigkeit Beanspruchung und Belastungsart (nach von Bach)



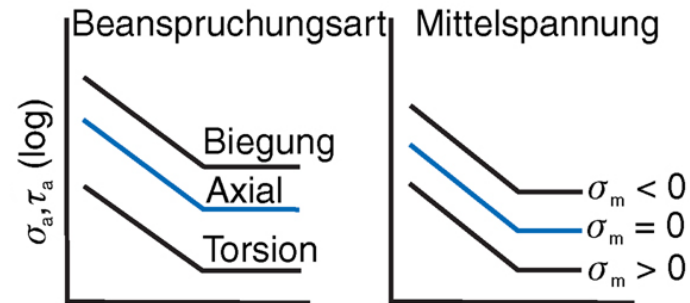
- Einflussgrößen (1)
 - Werkstoff und Werkstoffzustand



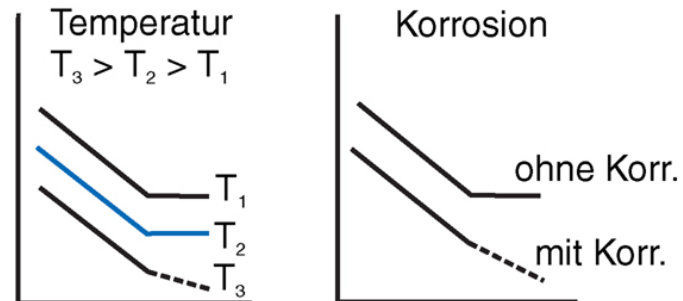
- Probengeometrie und Probenoberfläche



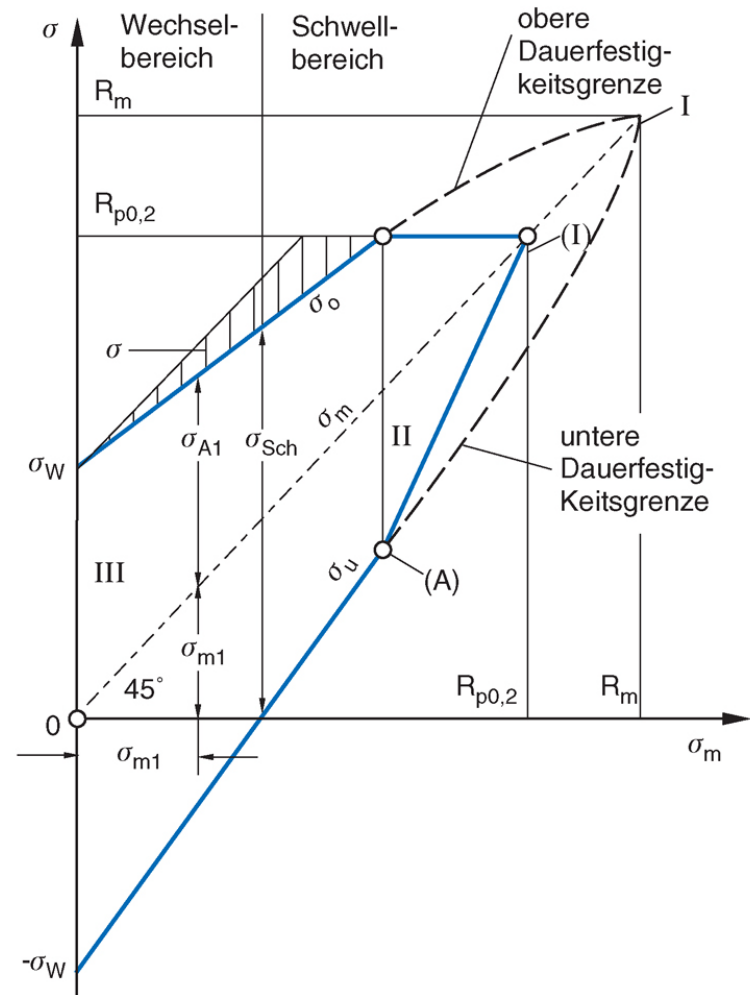
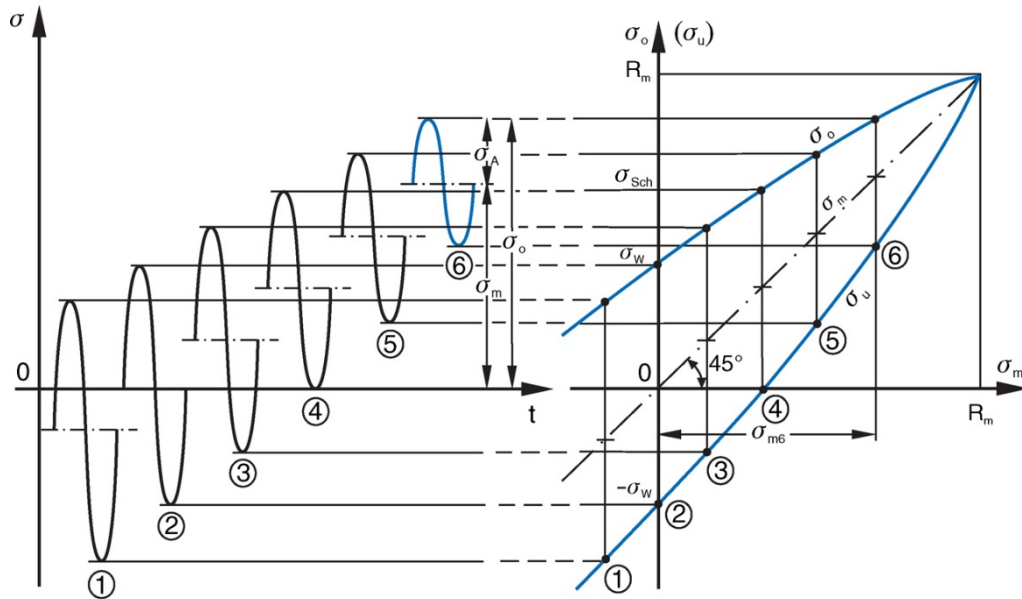
- Einflussgrößen (2)
 - Beanspruchung



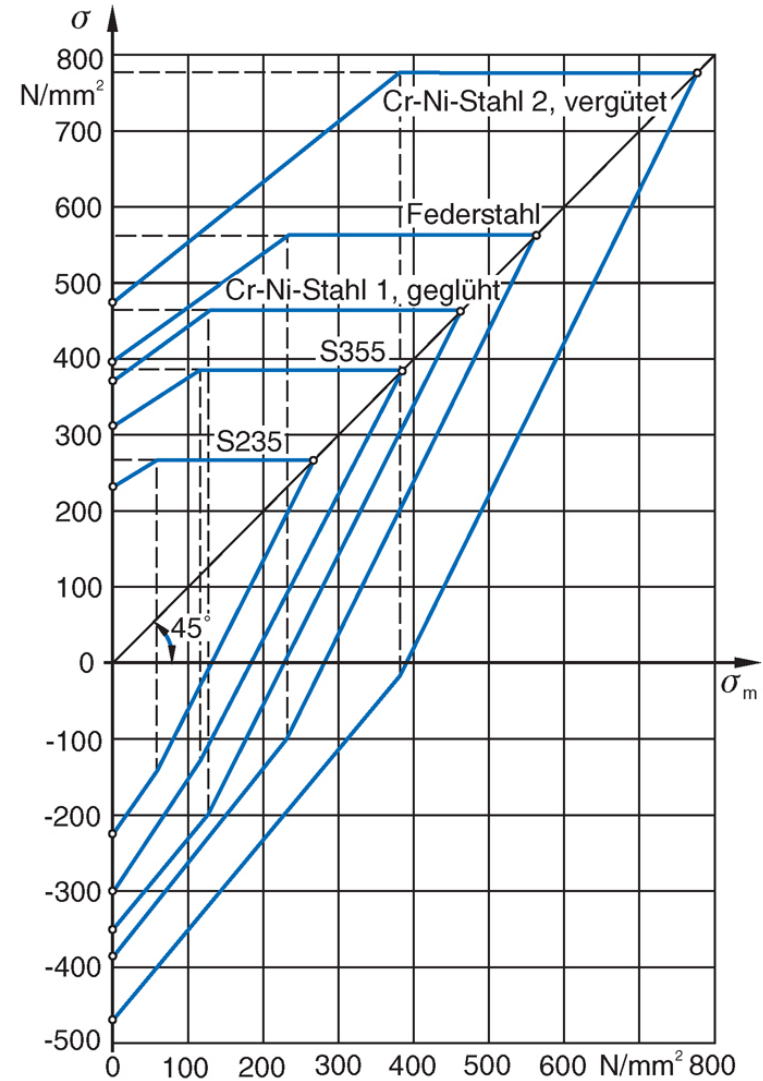
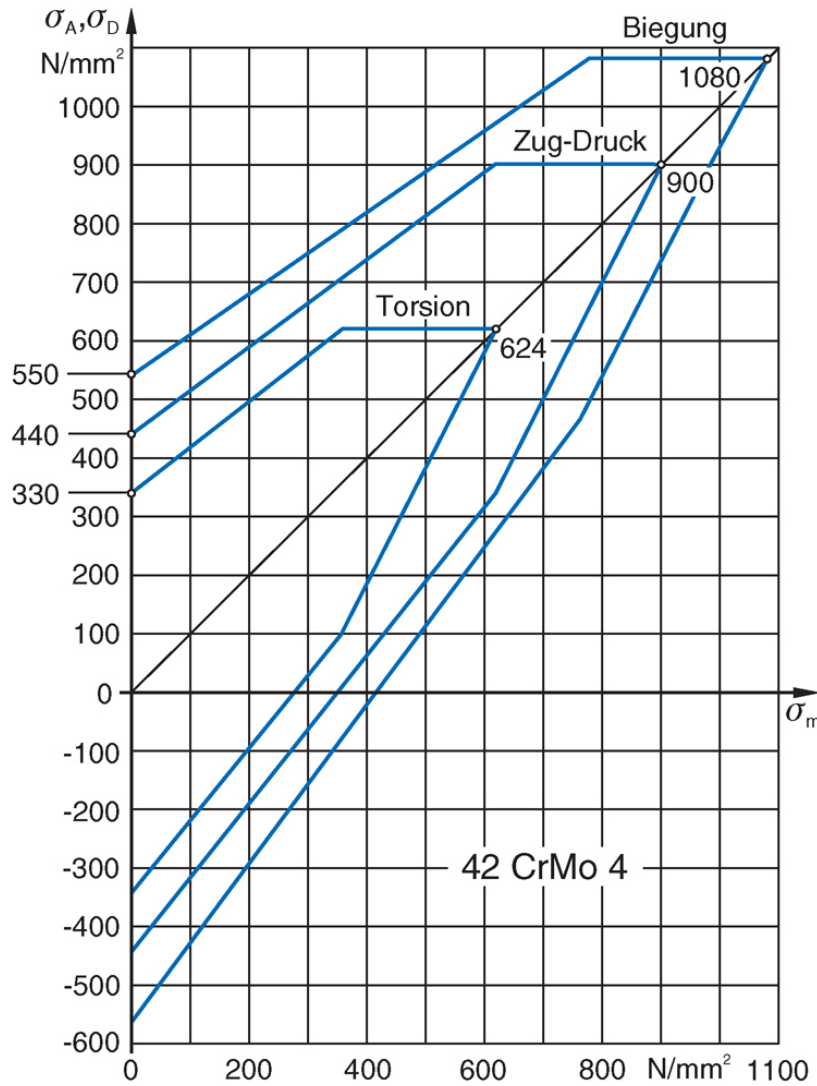
- Umgebungsbedingungen



- Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith (Smith-Diagramm)
 - Darstellung des Mittelspannungseinflusses auf die Dauerfestigkeit



• Beispiele und Einflussgrößen

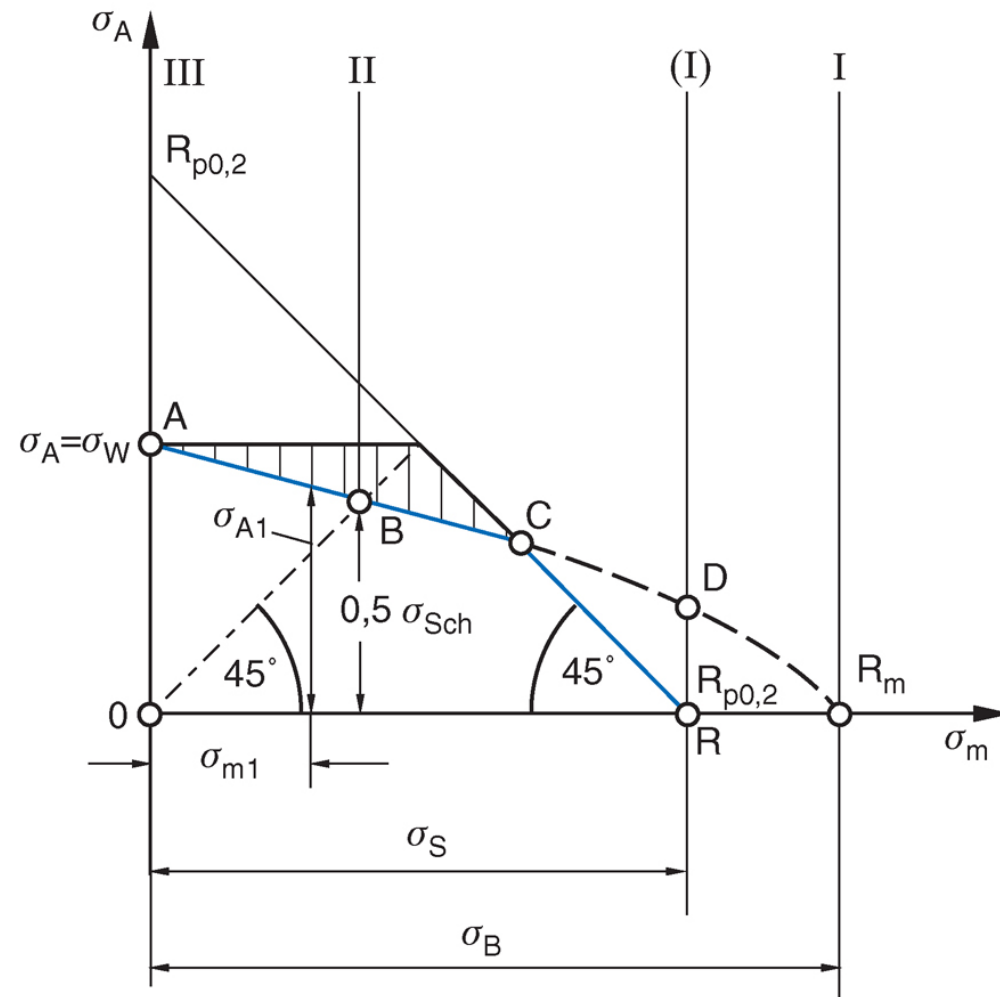


▪ Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh

- Punkte mit $R = \text{const}$ liegen auf einer Gerade durch den Ursprung mit der Steigung

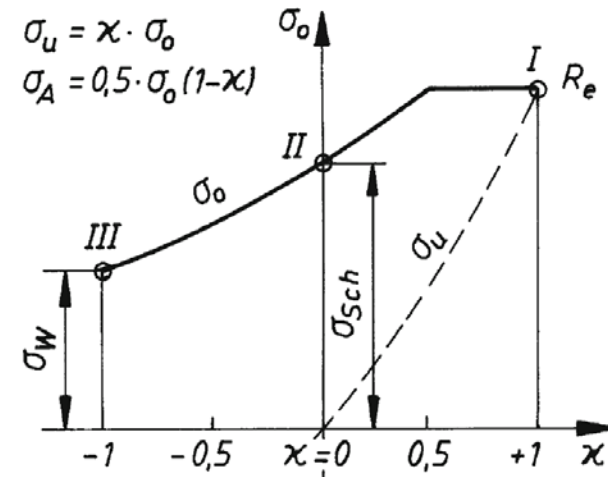
$$\tan \alpha = \frac{\sigma_A}{\sigma_m} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

- Bereich I: obere Dauerfestigkeitsgrenze
 - Theoretische Begrenzung durch R_m
 - Praktische Begrenzung durch $R_{p0,2}$
 - Abszisse: statische Beanspruchung
- Bereich II: Schwellbereich
- Bereich III: Wechselbereich
- Erweiterung in den Druckbereich möglich



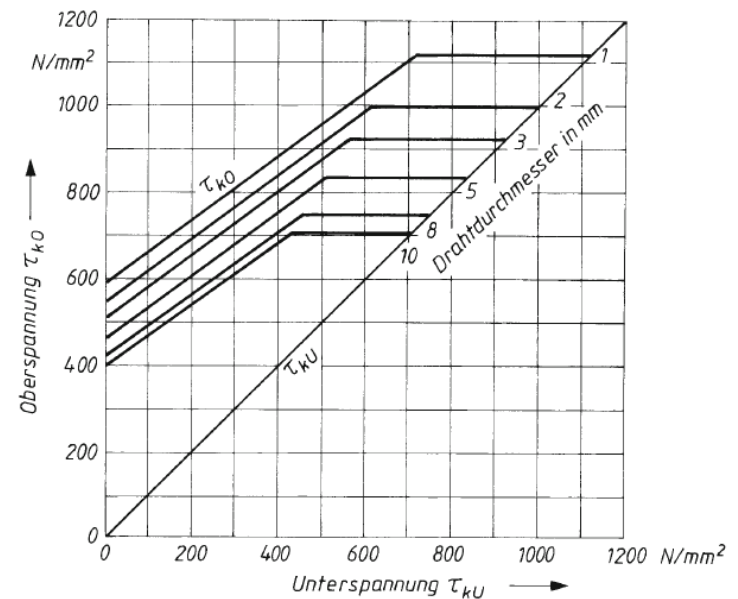
▪ Dauerfestigkeitsschaubild nach Moore-Kommers-Jasper

- Oberspannung über dem Spannungsverhältnis
- Statische Beanspruchung bei $R=1$
- Anwendung vorwiegend bei dynamisch beanspruchten Schweißverbindungen



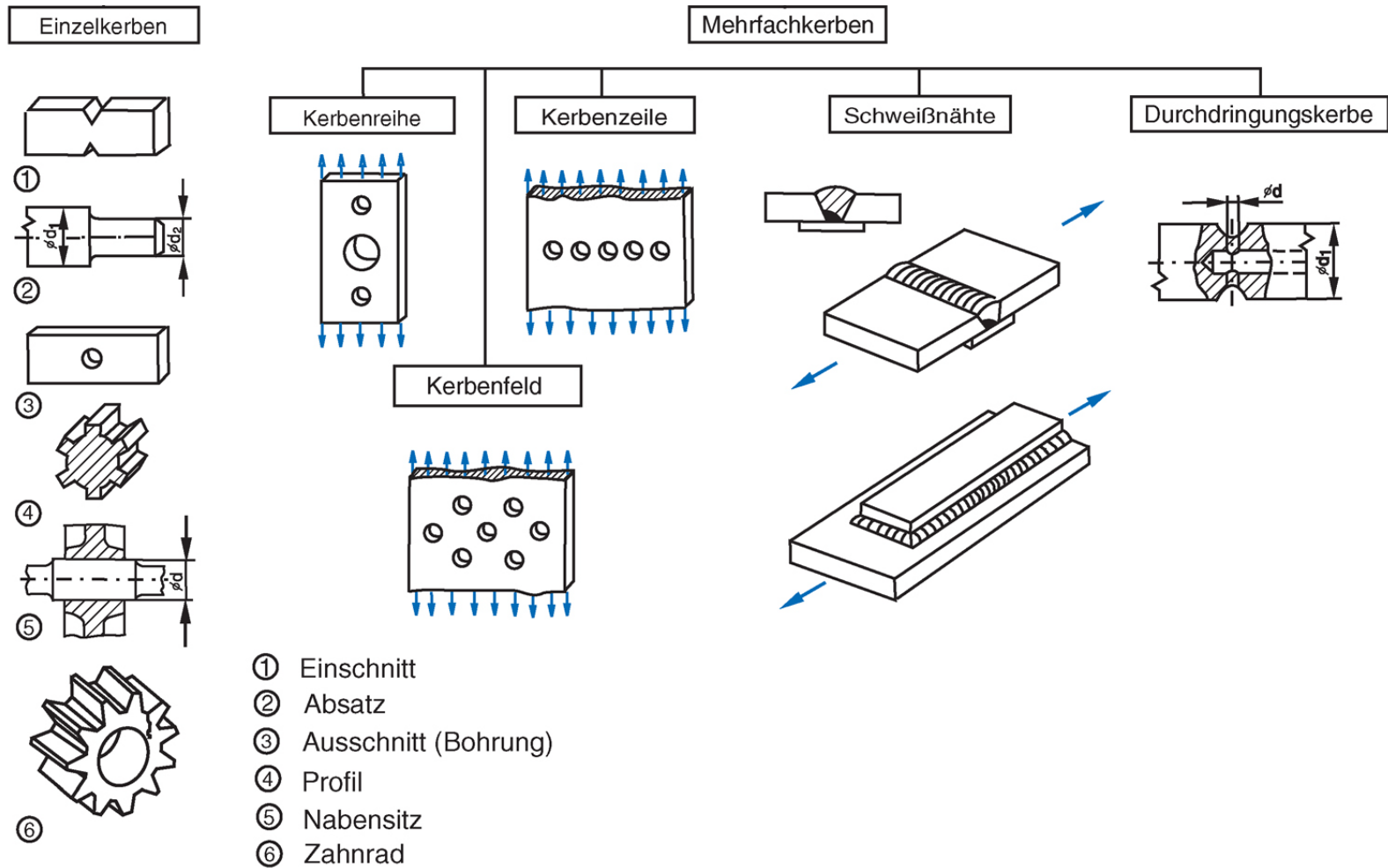
▪ Dauerfestigkeitsschaubild nach Goodman

- Abgewandeltes Smith-Diagramm
 → Abszisse: σ_u anstatt σ_m
- Anwendung vorwiegend bei Federn



2.3 Festigkeitsmindernde Einflüsse

Kerbwirkung

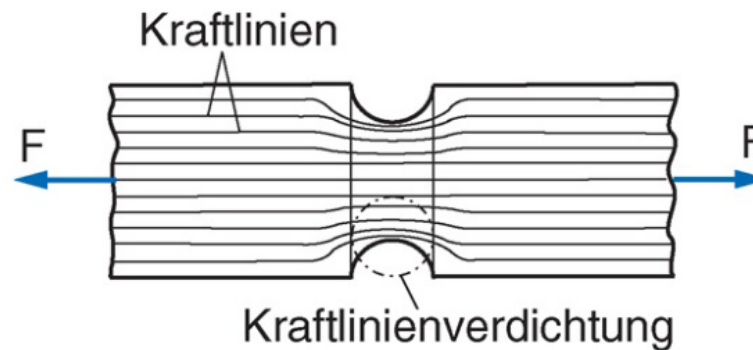


Kerbformzahl

- Die Kerbformzahl ist das Verhältnis aus tatsächlicher Spannung zu Nennspannung im Kerbgrund bei statischer Belastung in Abhängigkeit von Kerbform und Beanspruchung.

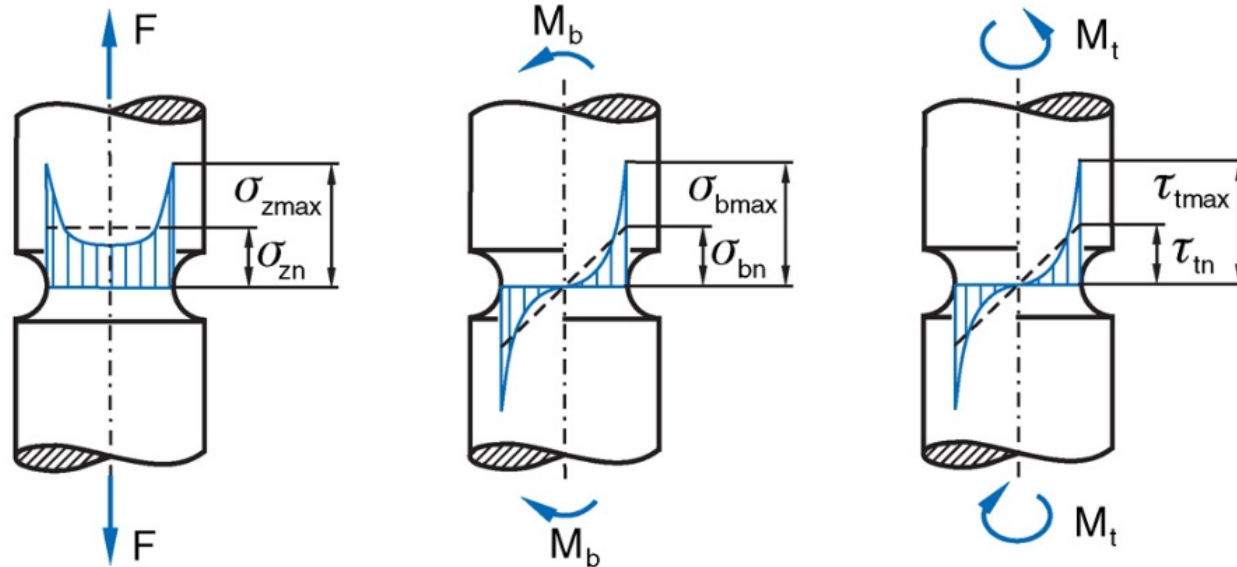
$$\text{Kerbformzahl} = \frac{\text{wirkliche Spannung}}{\text{Nennspannung}}$$

- Anwendung des Kraftflussmodells



- Kerbformzahl ist unabhängig von Werkstoff und Größe der elastischen Beanspruchung

- Je nach Beanspruchung gilt demnach:

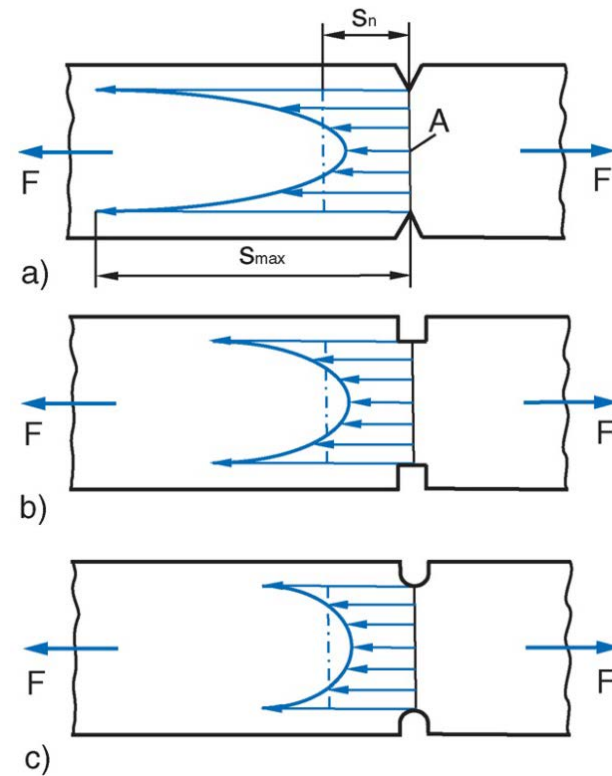


$$\alpha_{\sigma z} = \frac{\sigma_{zmax}}{\sigma_{zn}}$$

$$\alpha_{\sigma b} = \frac{\sigma_{bmax}}{\sigma_{bn}}$$

$$\alpha_{\tau t} = \frac{\tau_{tmax}}{\tau_{tn}}$$

- Kerbformabhängigkeit

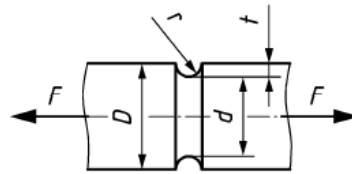


- Ermittlung von Kerbformzahlen

- Experimentell z.B. mittels DMS, Spannungsoptik
- Numerisch z.B. mittels FEM

- Für immer wiederkehrende Bauteile (z.B. Wellen) können z.B. DIN-Vorschriften herangezogen werden

- Beispiele für Kerbformzahlen aus DIN 743 (Tragfähigkeitsnachweis von Achsen und Wellen)



- Nennspannung im Kerbgrund

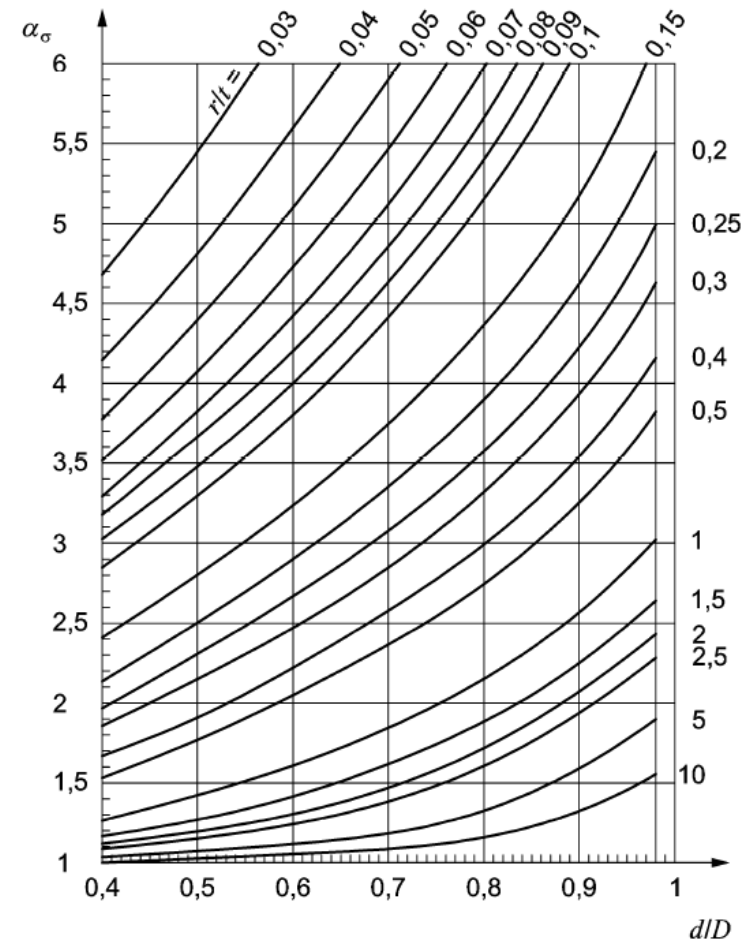
$$\sigma_n = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

- Kerbformzahl

$$\alpha_\sigma = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,22 \cdot \frac{r}{t} + 2,74 \cdot \frac{r}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{r}{d}\right)^2}}$$

- Tatsächliche bzw. maximale Spannung

$$\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \cdot \sigma_n$$



Kerbwirkungszahl

- Die Kerbwirkungszahl ist das Verhältnis aus der Dauerfestigkeit des glatten (kerbfreien) Probenkörpers zur Dauerfestigkeit des gekerbten Stabes.

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_D}{\sigma_{DK}} \qquad \beta_{\tau} = \frac{\tau_D}{\tau_{DK}}$$

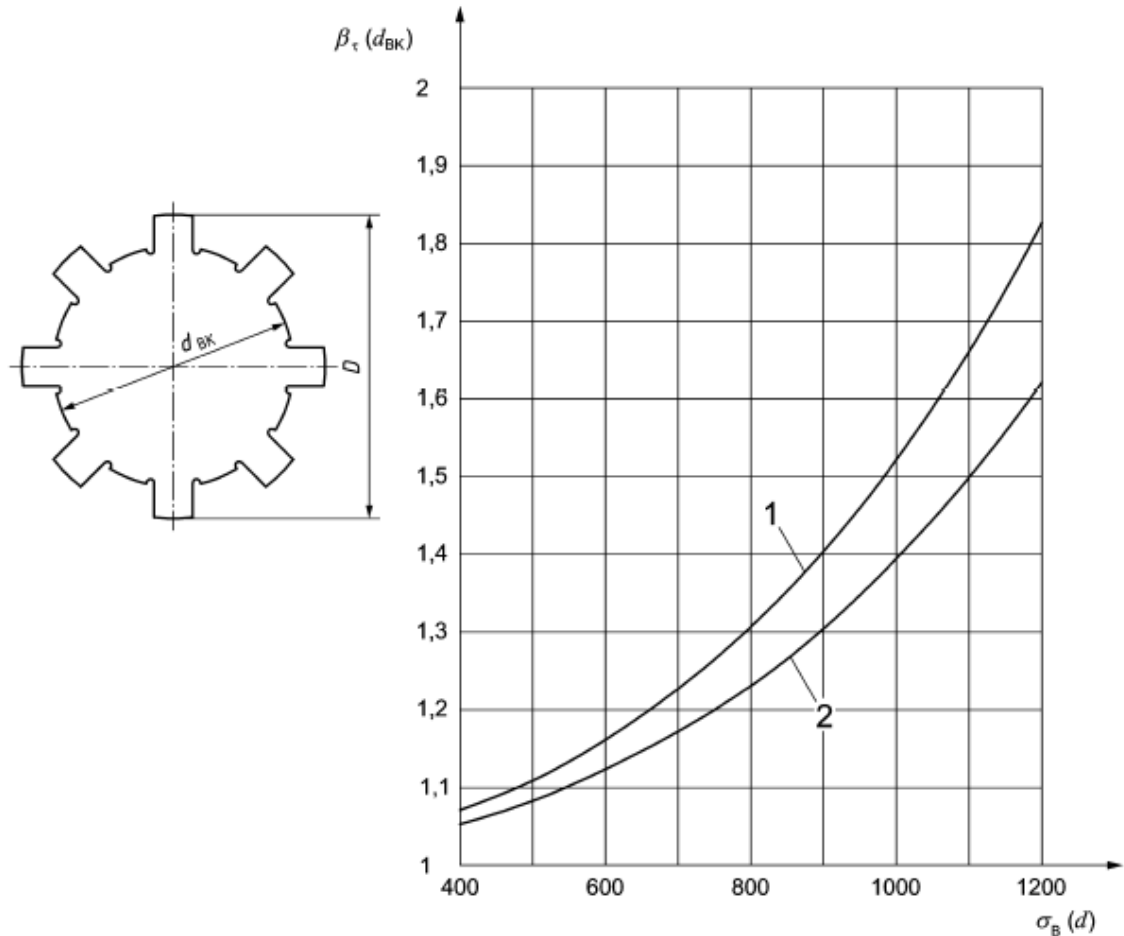
- Einflussgrößen
 - Form und Größe der Kerbe
 - Beanspruchungsart
 - Werkstoffeigenschaften (Zustand, Oberfläche etc.)
- Es gilt immer: $1 \leq \beta \leq \alpha$
 - → Die Kerbwirkung bei dynamischer Beanspruchung ist immer geringer als bei statischer!
 - Kerbformzahl ist obere Schranke der Kerbwirkungszahl

- Ermittlung von Kerbwirkungszahlen

- Experimentell → kosten- und zeitintensive Dauerschwingversuche
- Numerisch über die Formzahl: $\beta = f(\alpha)$

- Beispiel: Keil- (1) und Zahnwelle (2)

- Für $d_{BK} = 29$ mm



Weitere festigkeitsmindernde Einflüsse

- Werkstofffestigkeit
- Umgebungsbedingungen (Temperatur, korrosive Medien etc.)
- Bauteiloberfläche (Rauheit bzw. Rautiefe, Fertigung)
- Bauteilgröße
 - Statistischer Größeneinfluss
 - Geometrischer Größeneinfluss
 - Technologischer Größeneinfluss
 - Oberflächentechnischer Größeneinfluss

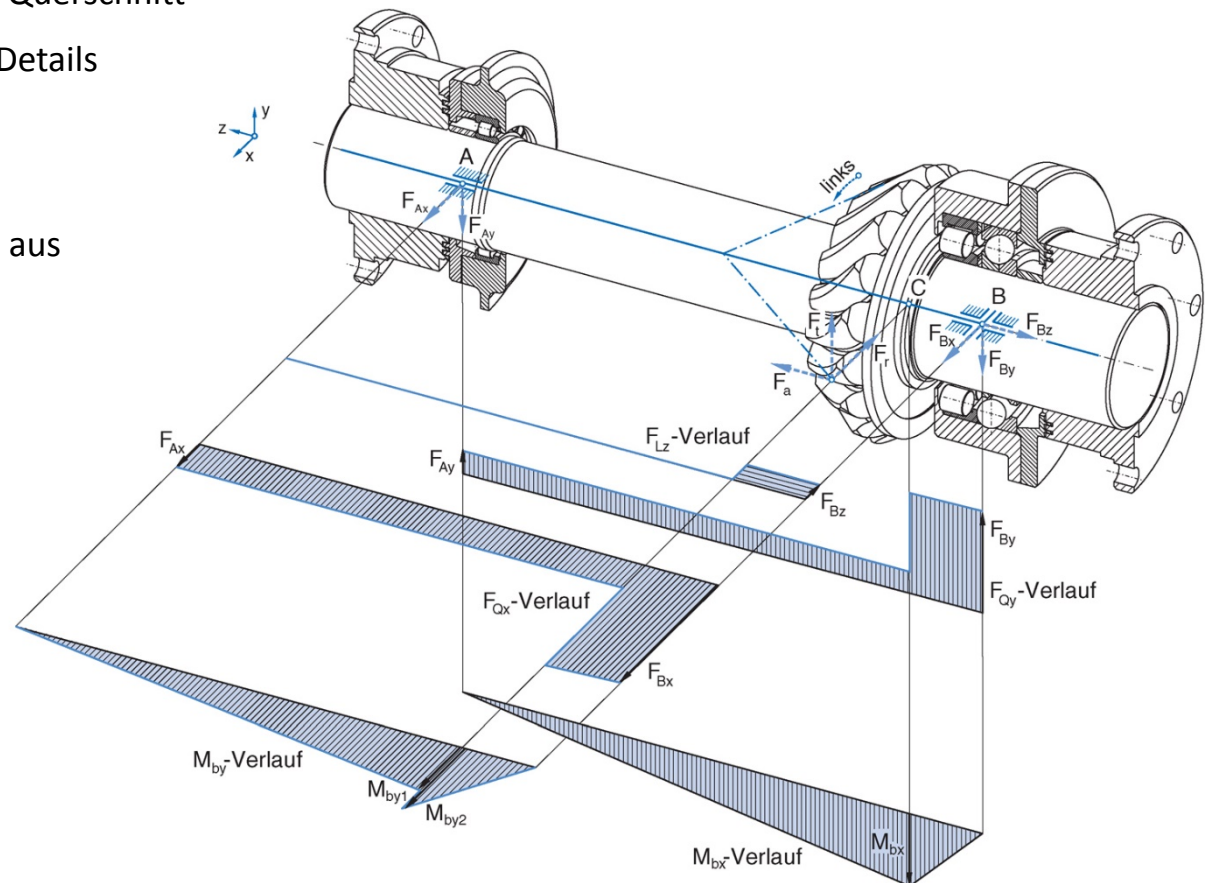
2.4 Festigkeitsnachweis

Grundlegender Ablauf

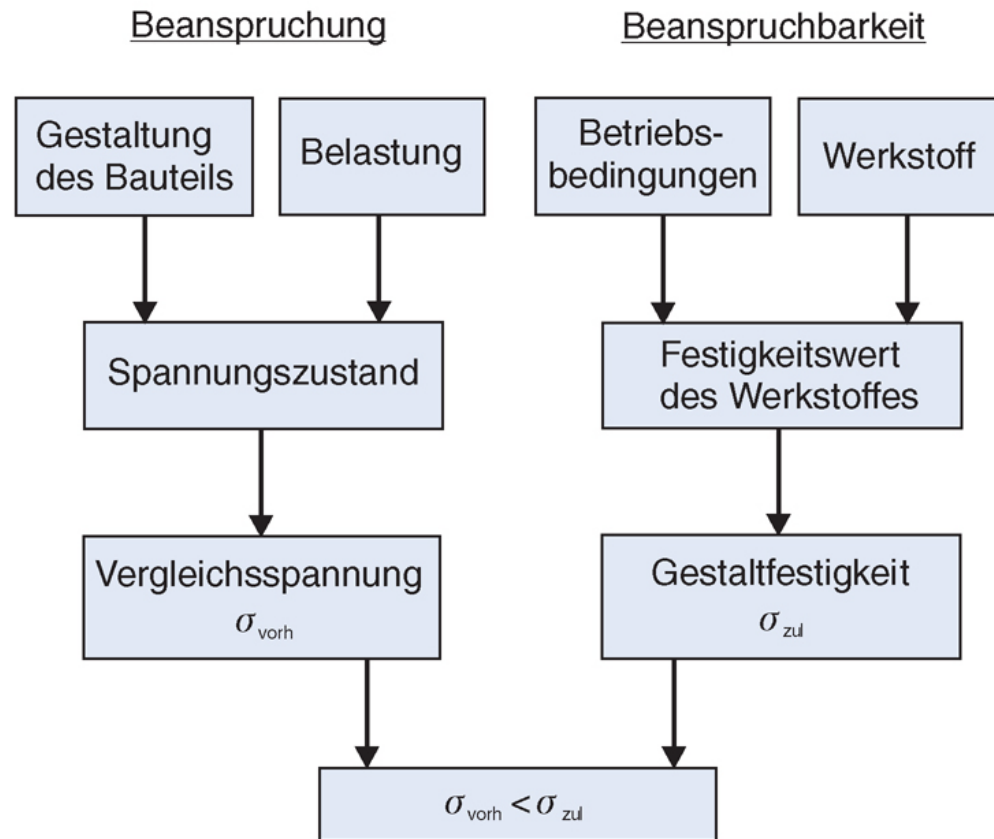
- Ermittlung der (Nenn-)Beanspruchung (Schnittgrößen) in Abhängigkeit der äußeren Belastungen
- Festlegen der versagenskritischen Querschnitt bzw. der kritischen konstruktiven Details

→ Beispiel: Welle

- Ermittlung der Beanspruchbarkeit aus
 - Festigkeitskennwerten,
 - Betriebsbedingungen und
 - Einflussfaktoren



- *Beanspruchung vs. Beanspruchbarkeit* nach Nennspannungskonzept



$$\sigma_{\text{vorhanden}} \leq \sigma_{\text{zulässig}} = \frac{\sigma_{\text{Gestaltfestigkeit}}}{S_{\text{erf}}}$$

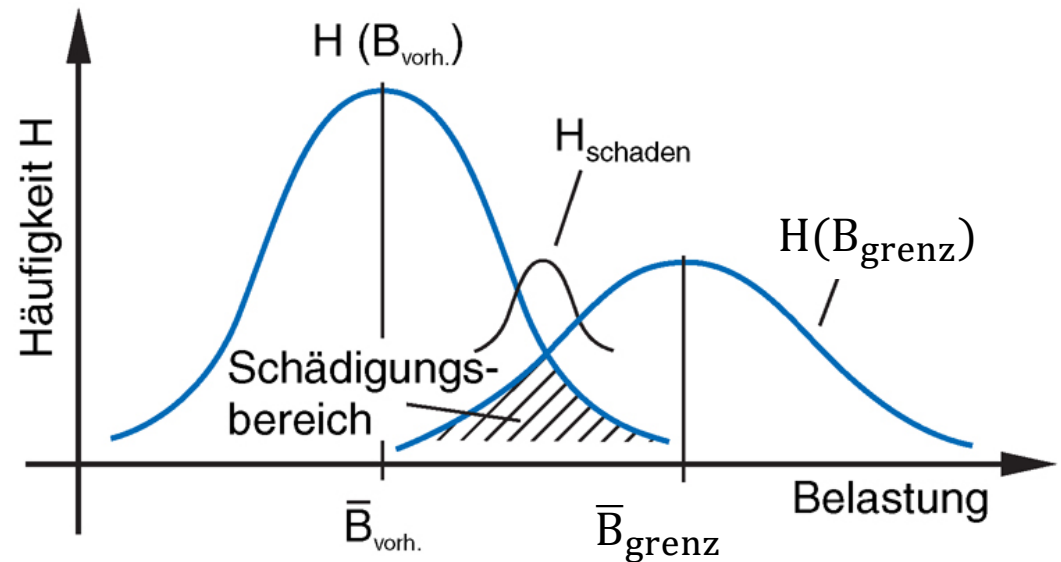
$$\frac{\sigma_{\text{Gestaltfestigkeit}}}{\sigma_{\text{vorhanden}}} \geq S_{\text{erf}} > 1$$

Sicherheitszahlen

Schadensbild	Bezugsgröße	Sicherheitszahl
Gewaltbruch	Bruchfestigkeit	$S_B = 2,0 \dots 4,0$
Ermüdungsbruch	Dauerfestigkeit	$S_D = 1,5 \dots 2,5$
Fließen	Fließgrenze	$S_F = 1,2 \dots 2,0$
Knicken, Beulen	Knickspannung	$S_K = 3,0 \dots 5,0$
Verzahnungsschäden		
Grübchenbildung	Grübchendauerfestigkeit	$S_{Hmin} \geq 1,1$
Ermüdungsbruch	Biegedauerfestigkeit	$S_{Fmin} \geq 1,2$
Fressen	Fressintegraltemperatur	$S_{Bmin} \geq 1,0 \dots 3,0$
Seilbruch		
Aufzüge mit Treibscheibenantrieb	Rechnerische Seilbruchkraft	$\nu = 14$
Kranseile	Rechnerische Seilbruchkraft	$\nu = 3 \dots 12$

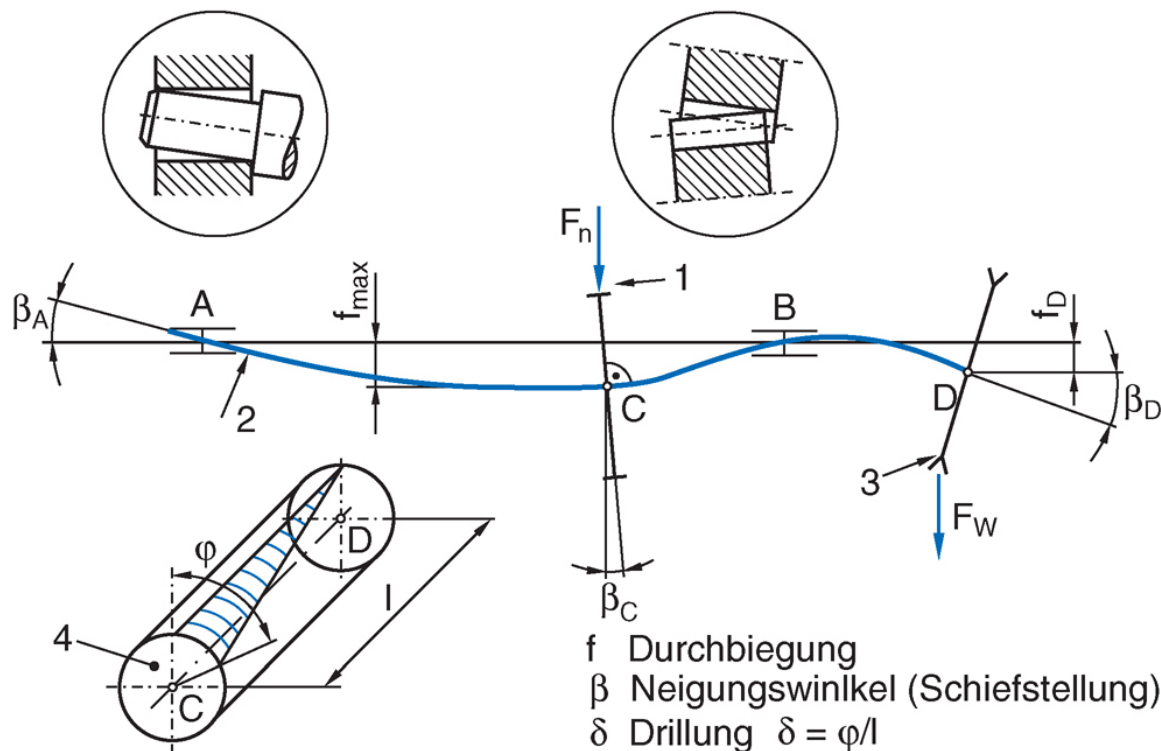
Schadenswahrscheinlichkeit

- Problem: Sicherheitszahl verknüpft zwei voneinander unabhängige Gruppen von Einflussgrößen
→ unterschiedliche statistische Verteilungen, d.h. geringe Korrelation
- Möglichkeiten zur Verkleinerung des Schädigungsbereiches
 - Vergrößerung von B_{grenz}
 - Verringerung der Streubreite von B_{grenz}
 - Gütekontrolle (Qualitätssicherung)
 - Durchführung von Prüfungen
 - Einbau von Belastungsbegrenzungen



3. Tragfähigkeitsnachweis hinsichtlich zulässiger Verformungen

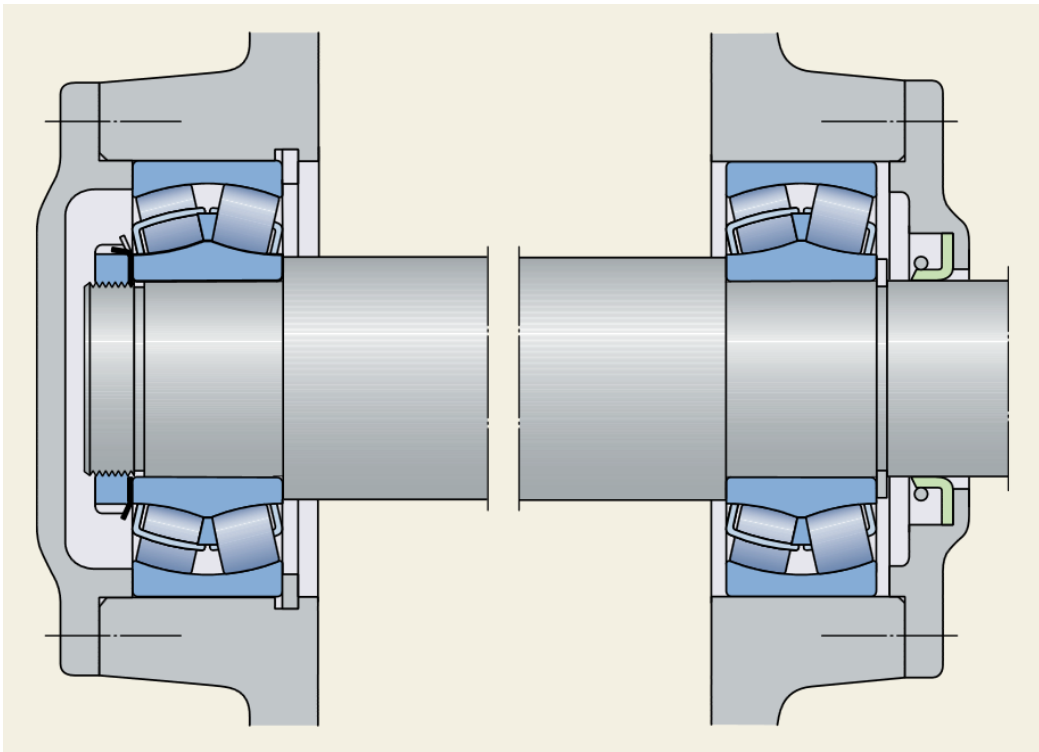
Auswirkungen unzulässiger Verformungen



- 1 Eingriffstörungen mit Gegenrad bei einer Verzahnung
- 2 Kantenpressung in Gleitlagern
- 3 Schrägzug bei Zugmittelgetrieben
- 4 Schlechte Qualität von Bearbeitungsflächen bei Bearbeitungsmaschinen (Werkzeugmaschinen)

Beispiel: Wälzlagerungen

- Größere Schiefstellungen infolge Wellendurchbiegung können nur durch Tonnen- und Pendelrollenlager ausgeglichen werden!



Zulässige Verformungen: Ausgewählte Beispiele

Durchbiegung von Wellen und Achsen im allg. Maschinenbau (bezogen auf Stützlänge)	$f_{\max} = 0,33 \text{ mm/m}$
Durchbiegung von Wellen und Achsen im Werkzeugmaschinenbau (bezogen auf Stützlänge)	$f_{\max} = 0,2 \text{ mm/m}$
Neigung von Gleitlagern (nicht einstellbar)	$\tan \beta_{\max} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad (\beta_{\max} \approx 1')$
Neigung von Rillenkugellagern	$\tan \beta_{\max} \approx 10 \cdot 10^{-4} \quad (\beta_{\max} \approx 3')$
Neigung von Zylinderrollenlagern	$\tan \beta_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-4} \quad (\beta_{\max} \approx 0,6')$
Neigung von Pendelrollenlagern	$\beta_{\max} \approx 2^\circ$
Durchbiegung von Wellen mit Zahnrad (Eingriffsstelle)	$f_{\max} = 0,005 \cdot m_n$
Neigung von Wellen mit gehärtetem Zahnrad (Eingriffsstelle)	$\tan \beta_{\max} \approx 1 \cdot 10^{-4} \quad (\beta_{\max} \approx 0,3')$
Durchbiegung von Schneckenwellen (Eingriffsstelle)	$f_{\max} = 0,001 \cdot d_m$