Großübung zu Kräften, Momenten, Äquivalenz und Gleichgewicht

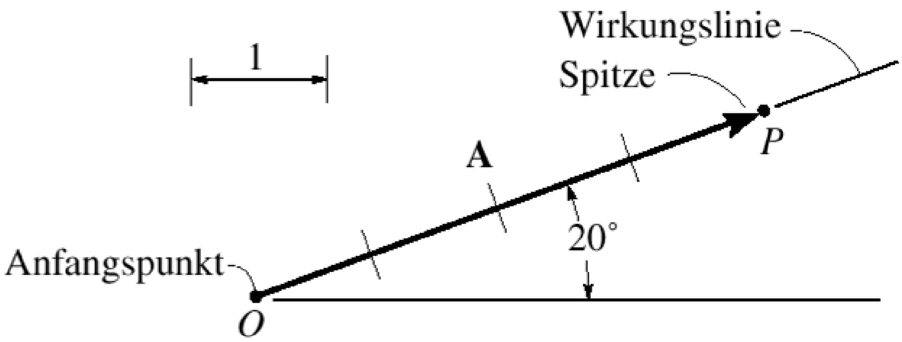
Der Körper

Ein materielles Teilgebiet des Universums bezeichnet man als Körper. Im allgemeinen sind Körper deformierbar.

Sonderfall starrer Körper (Modellvorstellung)

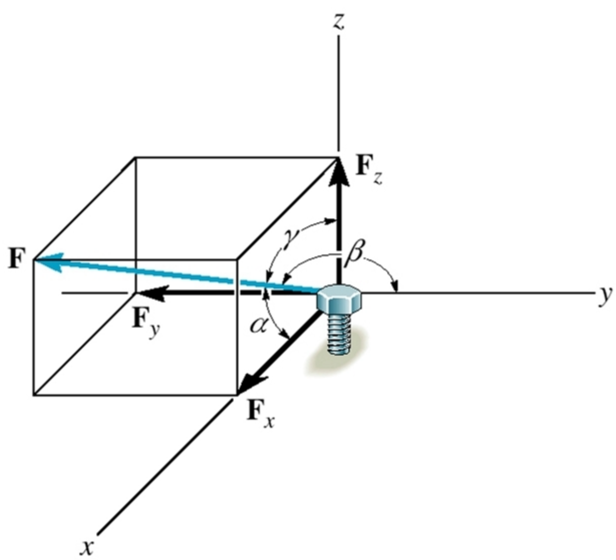
Ein Körper wird als starr bezeichnet, wenn der Abstand benachbarter Körperpunkte zeitlich konstant ist.

Der Kraftvektor



Kräfte sind vektorielle Größen mit folgenden Eigenschaften:

- Sie haben eine Größe, dargestellt durch eine Zahl mit der SI-Einheit *Newton.*
- Sie haben eine Richtung (Wirkungslinie) und einen Richtungssinn (Pfeilspitze).
- Sie haben einen Angriffspunkt am Körper, in einem Koordinatensystem beschrieben durch einen Ortsvektor.



Kraft in einem kartesischen Koordinatensystem

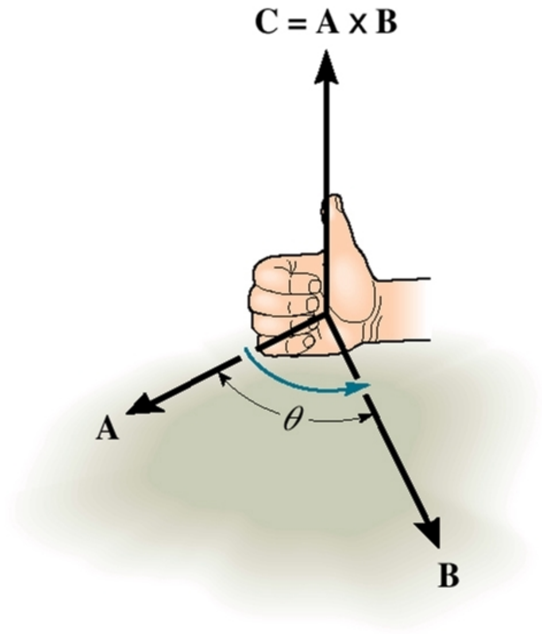
In der Abbildung ist der Ortsvektor der Nullvektor.

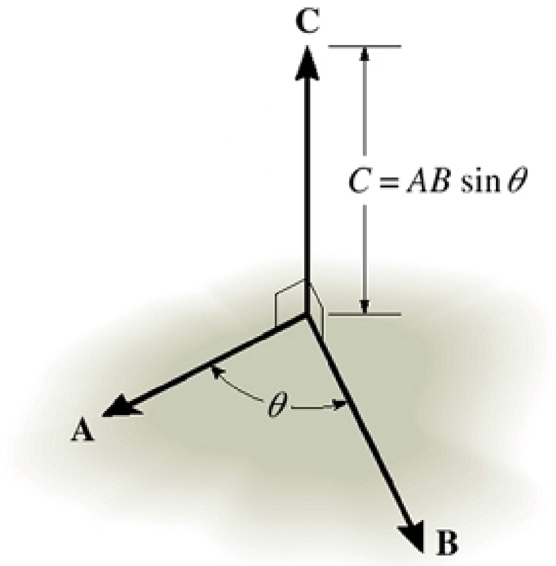
Das Schnittprinzip

Das Universum ist ein zusammenhängendes Kontinuum. Um die Wechselwirkungen zwischen Teilgebieten (Körpern) analysieren zu können, schneidet man diese gedanklich aus dem Universum heraus und trägt an den Schnittstellen mechanisch äquivalente physikalische Größen (Schnittgrößen, Kräfte) an.

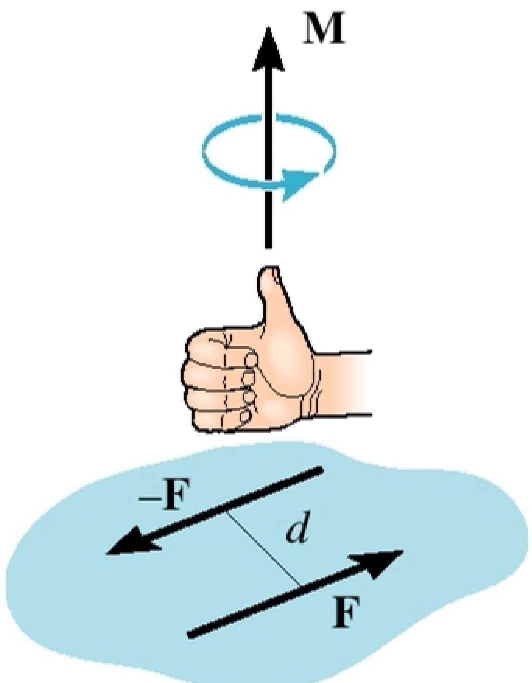
Der Momentenvektor $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Er beschreibt die Wirkung einer Kraft bezüglich eines Bezugspunktes (Drehpunktes) und wird berechnet aus dem Kreuzprodukt von Ortsvektor und Kraftvektor.
Für die Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$ gilt die „rechte-Hand-Regel“.





Das Versetzungsmoment, Moment eines Kräftepaares



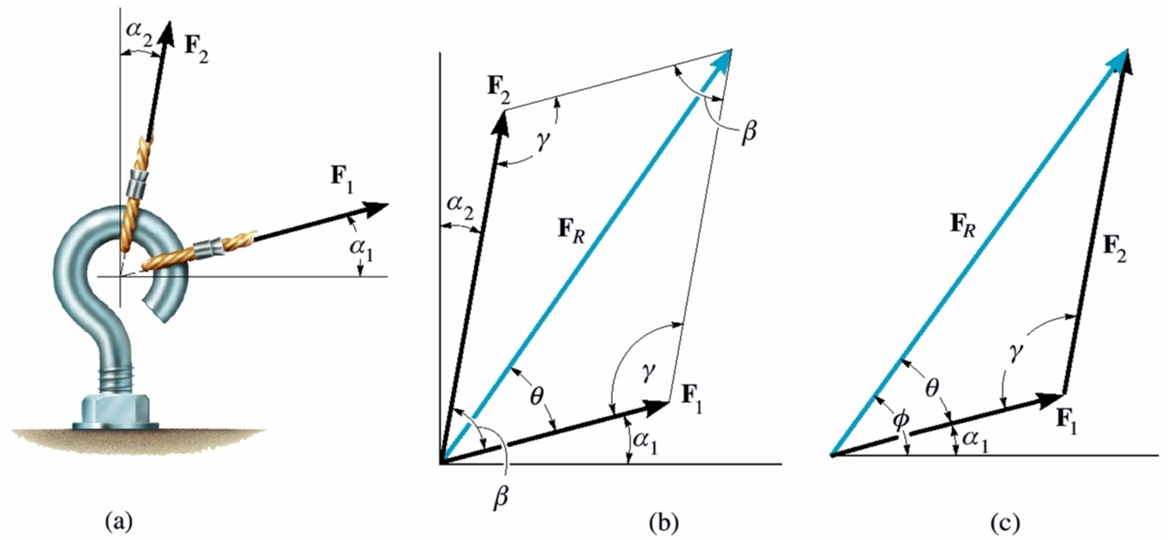
Wird eine Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben, ändert sich ihr Moment bezüglich eines beliebigen Punktes nicht.
Wird eine Kraft parallel zu ihrer Wirkungslinie verschoben, entsteht ein Versetzungsmoment.

$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}$, $|\mathbf{M}| = |\mathbf{d}|\,|\mathbf{F}|\,sin(\mathbf{d},\mathbf{F})$

falls $\mathbf{d} \perp \mathbf{F}$ ist $|\mathbf{M}| = |\mathbf{d}|\,|\mathbf{F}|$

Äquivalenz von Kraftsystemen

Unter Äquivalenz von Kraftsystemen versteht man das statisch gleichwertige Ersetzen von Kräftegruppen durch z.B. eine resultierende Kraft.



Das sind 2 Gleichungen

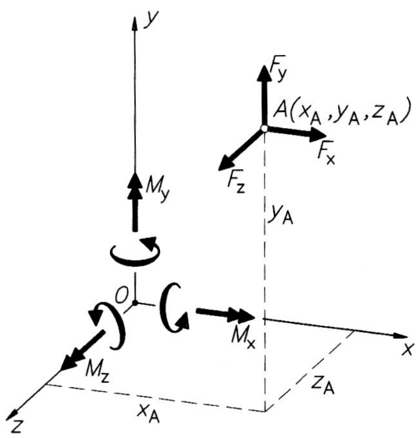
$$\mathbf{F}_R = \sum_{(i)} \mathbf{F}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_0 = \sum_{(i)} \mathbf{M}_{0i} = \sum_{(i)} \mathbf{r}_{0i} \times \mathbf{F}_i$$

in vektorieller Darstellung oder 6 Gleichungen in Komponentendarstellung in kartesischen Koordinaten.

$$F_{Rx} = \sum_{(i)} F_{xi} \qquad M_{Rx} = \sum_{(i)} M_{xi} = \sum_{(i)} \left(F_{zi} y_{ai} - F_{yi} z_{ai} \right)$$

$$F_{Ry} = \sum_{(i)} F_{yi} \qquad M_{Ry} = \sum_{(i)} M_{yi} = \sum_{(i)} \left(F_{xi} z_{ai} - F_{zi} x_{ai} \right) \quad \text{oder} \quad \mathbf{M}_R = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_a & y_a & z_a \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$F_{Rz} = \sum_{(i)} F_{zi} \qquad M_{Rz} = \sum_{(i)} M_{zi} = \sum_{(i)} \left(F_{yi} x_{ai} - F_{xi} y_{ai} \right)$$



Gleichgewicht der Kräfte und Momente

Kräftegruppen befinden sich im (statischen) Gleichgewicht, wenn es keine resultierende Kraft und kein resultierendes Moment gibt.
Das sind ebenfalls 2 Gleichungen

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{0} = \sum_{(i)} \mathbf{F}_i \qquad \text{und} \qquad \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} = \sum_{(i)} \mathbf{M}_{0i} = \sum_{(i)} \mathbf{r}_{0i} \times \mathbf{F}_i$$

in vektorieller Darstellung oder 6 Gleichungen in Komponentendarstellung in kartesischen Koordinaten.

$$F_{Rx} = 0 = \sum_{(i)} F_{xi} \qquad M_{Rx} = 0 = \sum_{(i)} M_{xi} = \sum_{(i)} \left(F_{zi} y_{ai} - F_{yi} z_{ai}\right)$$

$$F_{Ry} = 0 = \sum_{(i)} F_{yi} \qquad M_{Ry} = 0 = \sum_{(i)} M_{yi} = \sum_{(i)} \left(F_{xi} z_{ai} - F_{zi} x_{ai}\right)$$

$$F_{Rz} = 0 = \sum_{(i)} F_{zi} \qquad M_{Rz} = 0 = \sum_{(i)} M_{zi} = \sum_{(i)} \left(F_{yi} x_{ai} - F_{xi} y_{ai}\right)$$

Allgemeines räumliches Kraftsystem

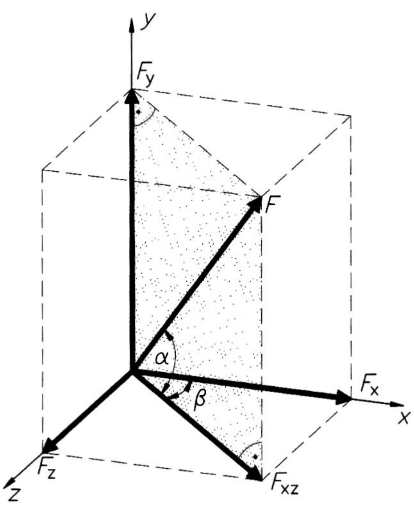
Kraftsysteme sind in aller Regel allgemeine räumliche Kraftsysteme, das heißt die Kräfte sind beliebig im Raum orientiert.

Sonderfälle ebenes Kraftsystem und zentrales Kraftsystem

Ebenes Kraftsystem: Die Kräfte sind beliebig in einer Ebene orientiert.
Zentrales Kraftsystem: Alle Kraftwirkungslinien schneiden sich in einem Punkt.

Zerlegung einer Kraft in vorgegebene Richtungen

Ist die Lage einer Kraft bekannt, kann sie im Raum eindeutig in 3 Richtungen (in der Ebene in 2 Richtungen) zerlegt werden.



$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x \qquad \frac{F_x}{|\mathbf{F}|} = cos(\mathbf{F}, \mathbf{e}_x)$$

$$F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_y \qquad \frac{F_y}{|\mathbf{F}|} = cos(\mathbf{F}, \mathbf{e}_y)$$

$$F_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z \qquad \frac{F_z}{|\mathbf{F}|} = cos(\mathbf{F}, \mathbf{e}_z)$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

oder (in kartesischen Koordinaten)

$$F_y = |\mathbf{F}| sin(\alpha)$$

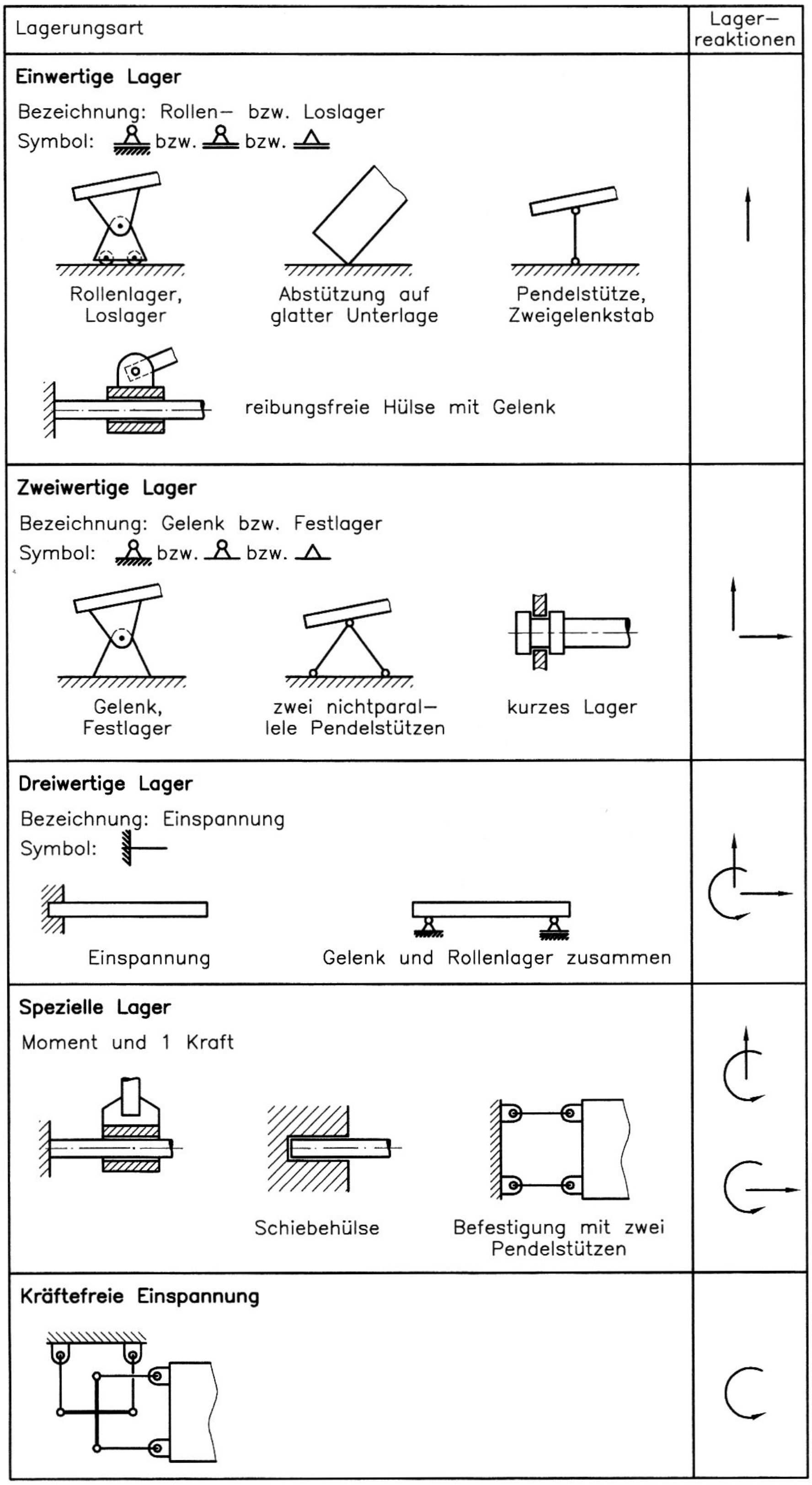
$$F_{xz} = |\mathbf{F}| cos(\alpha)$$

$$F_x = F_{xz} cos(\beta) = |\mathbf{F}| cos(\alpha) cos(\beta)$$

$$F_z = F_{xz} sin(\beta) = |\mathbf{F}| cos(\alpha) sin(\beta)$$

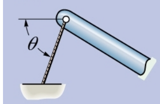
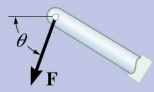
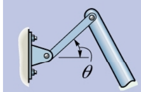
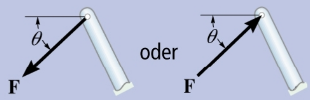
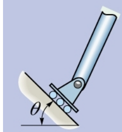
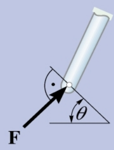
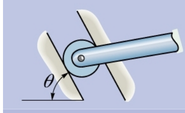
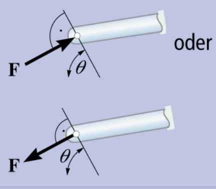
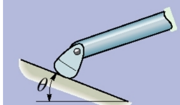
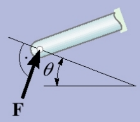
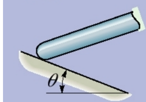
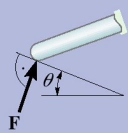
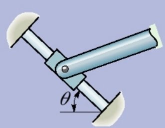
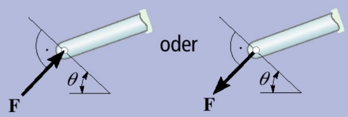
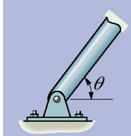
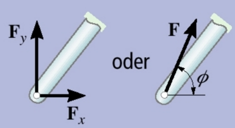
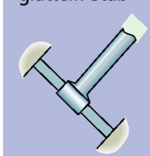
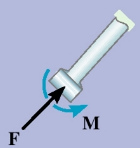
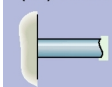
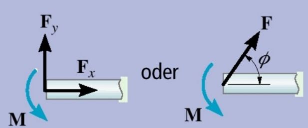
Lagerungssymbole der Statik

Körper können in verschiedener Weise gelagert (mit der Umgebung verbunden) werden. Für die Darstellung der Lagerungen werden verschiedene vereinbart.



Lagerungsarten und Lagerreaktionen ebener Körper

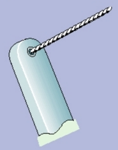
Lagerungen starrer Körper, die durch ebene Kräftesysteme belastet werden

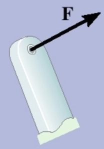
Lagerart	Lagerreaktion	Anzahl der Unbekannten, Lagerwertigkeit w
(1) Seil 		Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Zugkraft, die vom Bauteil weg in Richtung des Seils wirkt ($w = 1$).
(2) Pendelstütze 		Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie entlang der Achse der Pendelstütze verläuft ($w = 1$).
(3) Rollenlager als verschiebbares Gelenk 		Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zur Oberfläche der Unterlage im Kontaktpunkt verläuft ($w = 1$).
(4) Rollenlager oder Bolzen in begrenzender glatter Führung 		Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zur Führung verläuft ($w = 1$).
(5) Pendelstützlager 		Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zur Oberfläche der Unterlage im Kontaktpunkt verläuft ($w = 1$).
(6) glatte Kontaktfläche 		Eine Unbekannte Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zur Oberfläche der Unterlage im Kontaktpunkt verläuft ($w = 1$).
(7) Gelenk mit Schiebehülse auf glattem Stab 		Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zum Stab verläuft ($w = 1$).
(8) unverschiebbares Gelenk oder Scharnier 		Zwei Unbekannte. Die Lagerkraft wird bestimmt durch zwei Kraftkomponenten oder den Betrag und die Richtung ϕ der resultierenden Kraft. *Hinweis:* ϕ und θ sind meist nicht gleich [nur dann, wenn der Rundstab eine Pendelstütze wie in (2) ist] ($w = 2$).
(9) starre Schiebehülse auf glattem Stab 		Zwei Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind das Moment (Kräftepaar) und die Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zum Stab verläuft ($w = 2$).
(10) starre Einspannung 		Drei Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind das Moment (Kräftepaar) und die beiden Kraftkomponenten oder das Moment (Kräftepaar) und der Betrag sowie die Richtung ϕ der resultierenden Kraft ($w = 3$).

Lagerungen für starre Körper, an denen räumliche Kräftesysteme angreifen

Lagerart | **Lagerreaktion** | **Anzahl der Unbekannten, Lagerwertigkeit w**

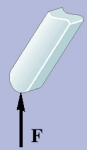
(1) Seil





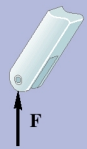
Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, die vom Bauteil weg in Richtung des Seils wirkt ($w = 1$).

(2) glatte Kontaktfläche



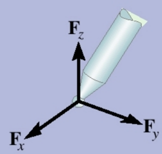
Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zur Kontaktfläche im Kontaktpunkt verläuft ($w = 1$).

(3) Kugellager



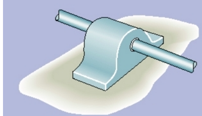
Eine Unbekannte. Die Lagerkraft ist eine Kraft, deren Wirkungslinie senkrecht zur Unterlage im Kontaktpunkt verläuft ($w = 1$).

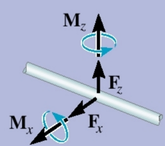
(4) Kugelgelenk



Drei Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind drei orthogonale Kraftkomponenten ($w = 3$).

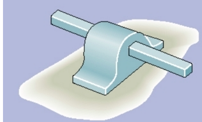
(5) Radiallager

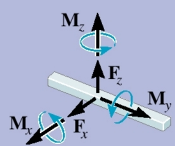




Vier Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind zwei Kräfte und zwei Momentenkomponenten, deren Wirkungslinien senkrecht zur Welle verlaufen ($w = 4$).

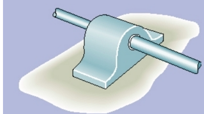
(6) Schublager

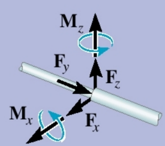




Fünf Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind zwei Kräfte und drei Momentenkomponenten ($w = 5$).

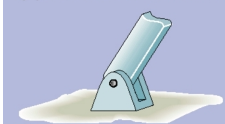
(7) Axiallager

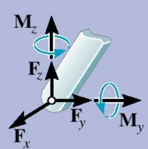




Fünf Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind drei Kräfte und zwei Momentenkomponenten ($w = 5$).

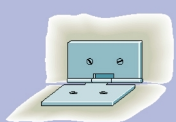
(8) unverschiebbares Gelenklager

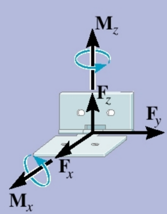




Fünf Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind drei Kräfte und zwei Momentenkomponenten ($w = 5$).

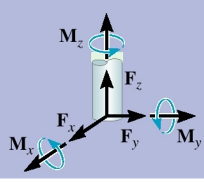
(9) einzelnes Scharnier





Fünf Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind drei Kräfte und zwei Momentenkomponenten ($w = 5$).

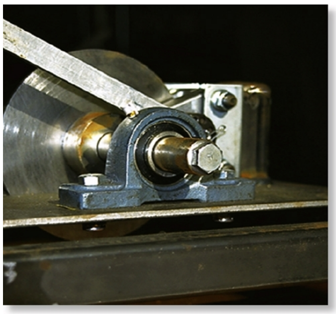
(10) starre Einspannung



Sechs Unbekannte. Die Lagerreaktionen sind drei Kräfte und drei Momentenkomponenten ($w = 6$).

technische Realisierung von Lagern

Kugelgelenk



Festlager

Festlager

Brückenlager (Loslager in Längsrichtung und Festlager in Querrichtung)

bewegliches Brückenlager (Vorder- und Seitenansicht),
Baujahr 1918, Gewicht 6,8 Tonnen,
Verstellweg ± 6 cm (Magdeburg, Hammersteinweg)

Lagerböcke
(Festlager)

links:
Befestigung von
Seilen einer
Hängebrücke
(Herrenkrugsteg
Magdeburg)

Verteilte Belastungen (Volumen-, Flächen- und Streckenlasten)

Die Beanspruchung der Körper erfolgt in der Regel durch verteilte Belastungen wie Volumenlasten (Eigengewicht), Flächenlasten (z.B. Schneelasten, Windlasten usw.). Die Belastung durch „Einzelkräfte“ ist eine Idealisierung. Reduziert man den Körper auf ein ebenes Modell, können auch Linienlasten (Modellvorstellung) auftreten.
Diese Belastungsarten können unter bestimmten Voraussetzungen zu statisch äquivalenten Kräften zusammengefasst werden.

In kartesischen Koordinaten können die resultierenden Kräfte und deren Angriffspunkte wie folgt berechnet werden:

<u>Volumenlast</u> in Richtung von g (Gravitationskonstante)

$$F_R = \iiint_{(V)} \rho\, g\, dx\, dy\, dz \qquad x_R = \frac{1}{F_R} \iiint_{(V)} \rho\, g\, x\, dx\, dy\, dz \qquad y_R = \frac{1}{F_R} \iiint_{(V)} \rho\, g\, y\, dx\, dy\, dz$$

$$z_R = \frac{1}{F_R} \iiint_{(V)} \rho\, g\, z\, dx\, dy\, dz$$

<u>Flächenlast</u> $p_z(x,y)$

$$F_{Rz} = \iint_{(A)} p_z(x,y)\, dx\, dy \qquad x_R = \frac{1}{F_{Rz}} \iint_{(A)} p_z(x,y)\, x\, dx\, dy \qquad y_R = \frac{1}{F_{Rz}} \iint_{(A)} p_z(x,y)\, y\, dx\, dy$$

<u>Linienlast (Streckenlast)</u> $q_y(x)$

$$F_{Ry} = \int_{(x)} q_y(x)\, dx \qquad x_R = \frac{1}{F_{Ry}} \int_{(x)} q_y(x)\, x\, dx$$

<u>Beispiele</u>

Berechnung von Lagerreaktionen und Gelenkreaktionen an 2D „Scheibensystemen“, Gerberträgern, Dreigelenkbögen, räumlichen Systemen

Vorgehensweise:

- Idealisierung des „Objektes“ durch ein physikalisches (mechanisches) Modell
- Freischneiden
- Antragen aller Lasten und Reaktionskräfte
- Aufstellen der erforderlichen Gleichgewichtsbedingungen (mathematisches Modell)
- Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen und Bestimmung der Reaktionskräfte

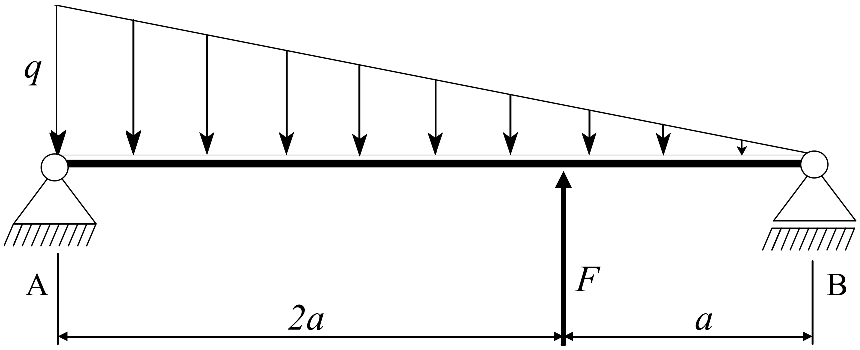
<u>Hinweis:</u> Beim Freischneiden werden eventuell auch verteilte Belastungen „geschnitten“. Erst nach Anwendung des Schnittprinzips dürfen verteilte Lasten in resultierende Kräfte umgerechnet werden!

Ist das „Objekt“ statisch bestimmt gelagert, können die gesuchten Größen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden (Zahl der Unbekannten = Zahl der Gleichungen)

Ist das „Objekt“ statisch unbestimmt (überbestimmt) gelagert, können die gesuchten Größen aus den Gleichgewichtsbedingungen nicht bestimmt werden (Zahl der Unbekannten > Zahl der Gleichungen). Es sind weitere Gleichungen erforderlich, die mit Methoden der Festigkeitslehre gewonnen werden.

Ist das „Objekt“ statisch unbestimmt (unterbestimmt) gelagert, können die gesuchten Größen aus den Gleichgewichtsbedingungen nicht bestimmt werden (Zahl der Unbekannten < Zahl der Gleichungen). Diese Systeme werden auch kinematisch unbestimmt genannt und sind Mechanismen die mit den Mitteln der Statik nicht behandelt werden können.

Gerader Träger mit Einzellast und Linienlast, statisch bestimmt gelagert

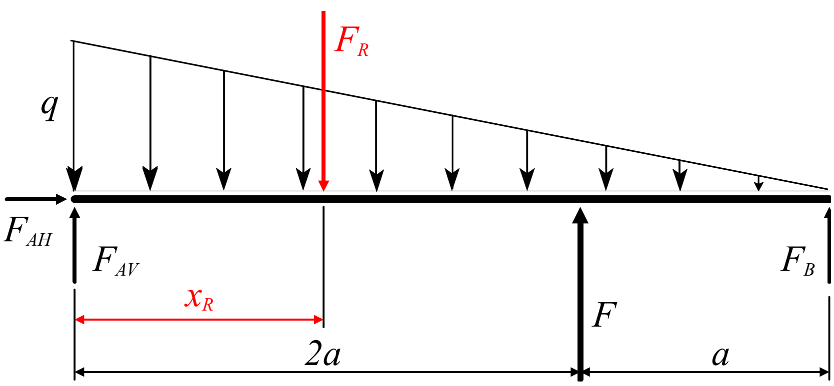


Vor der Bestimmung der Lagerreaktionen ist die Größe und Lage der Resultierenden der Linienlast zu ermitteln. Führt man eine Koordinate x bei A beginnend ein, folgt

$$F_R = \int_0^{3a} q\left(1 - \frac{x}{3a}\right) dx = q\left(x - \frac{x^2}{6a}\right)_0^{3a} = \frac{3}{2} qa \quad \text{und}$$

$$x_R = \frac{1}{F_R}\int_0^{3a} qx\left(1 - \frac{x}{3a}\right) dx = \frac{q}{F_R}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9a}\right)_0^{3a} = \frac{1{,}5\,qa^2}{F_R} = a$$

Schnittbild (Hinweis: die rot eingezeichnete Kraft ersetzt die Linienlast statisch äquivalent und dient hier nur der Veranschaulichung. In Schnittbildern ist entweder die Linienlast **<u>oder</u>** deren Resultierende einzutragen!)



Gleichgewichtsbedingungen

$$\uparrow \quad F_{AV} + F + F_B - \frac{3}{2}qa = 0$$

$$\rightarrow F_{AH} = 0$$

$$A: \frac{3}{2}qa \cdot a - F \cdot 2a - F_B \cdot 3a = 0$$

$$F_B = \frac{1}{2}qa - \frac{2}{3}F$$

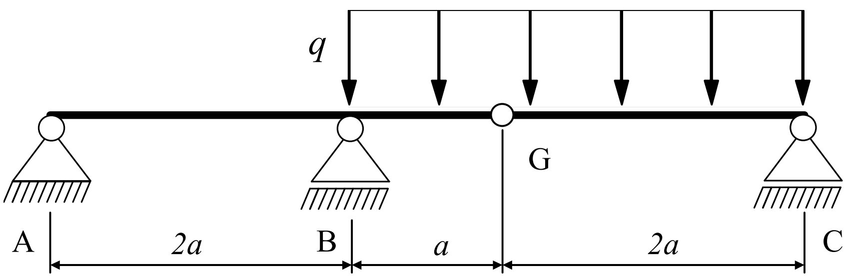
$$B: F_{AV} \cdot 3a - \frac{3}{2}qa \cdot 2a + F \cdot a = 0$$

$$F_{AV} = qa - \frac{1}{3}F$$

Die Momentengleichungen (rechtsdrehend) um die Lagerpunkte liefern unmittelbar die vertikalen Lagerkräfte. Das vertikale Kraftgleichgewicht kann hier nur noch zur Kontrolle verwendet werden; es gibt für das allgemeine ebene Kraftsystem nur drei voneinander unabhängige Gleichungen für die drei unbekannten Lagerreaktionen. Alle weiteren Gleichungen sind Linearkombinationen aus den drei möglichen Gleichungen.

Gerberträger (System gerader Träger, alle Lager und Verbundgelenke liegen auf einer Geraden)

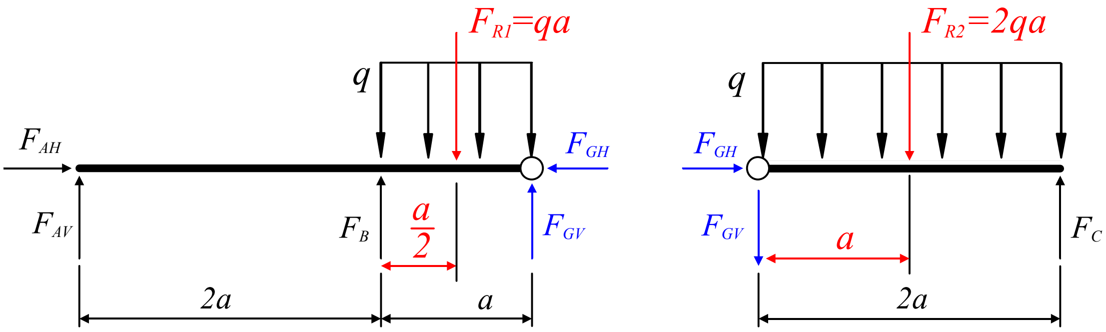
Der statisch bestimmte Durchlaufträger, der durch ein Festlager und i Rollenlager gestützt wird, muss (i-1) Gelenke enthalten. Dabei dürfen sich zwischen zwei Auflagern nicht mehr als zwei Gelenke und an einem Teilbalken nicht mehr als zwei Auflager befinden.



Das Modell besteht aus n (hier zwei) Teilsystemen. Für jedes Teilsystem sind bei ebenen Problemen drei Gleichgewichtbedingungen möglich (hier also insgesamt sechs).

Schnittbilder (Hinweis: die rot eingezeichneten Kräfte ersetzten die Linienlast statisch äquivalent und dienen hier nur der Veranschaulichung. In Schnittbildern ist entweder die Linienlast **oder** deren Resultierende einzutragen!)

An den Verbindungsstellen wird das System aufgetrennt und es gilt das Reaktionsprinzip.



Gleichgewichtsbedingungen

$$A: \quad qa \cdot \frac{5}{2} a - F_B \cdot 2a - F_{GV} \cdot 3a = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow \quad F_{AV} + F_B + F_{GV} - qa = 0 \qquad (2)$$

$$\rightarrow \quad F_{AH} = F_{GH} \qquad (3)$$

$$C: \quad -2qa \cdot a - F_{GV} \cdot 2a = 0 \qquad (4)$$

$$\uparrow \quad F_C - F_{GV} - 2qa = 0 \qquad (5)$$

$$\rightarrow \quad F_{GH} = 0 \qquad (6)$$

Aus den Gleichungen (...) ergeben sich die gesuchten Lager- und Gelenkkräfte.

$$(3) \quad F_{AH} = 0$$

$$(4) \quad F_{GV} = -qa$$

$$(5) \quad F_C = qa$$

$$(1) \quad F_B = \frac{11}{4} qa$$

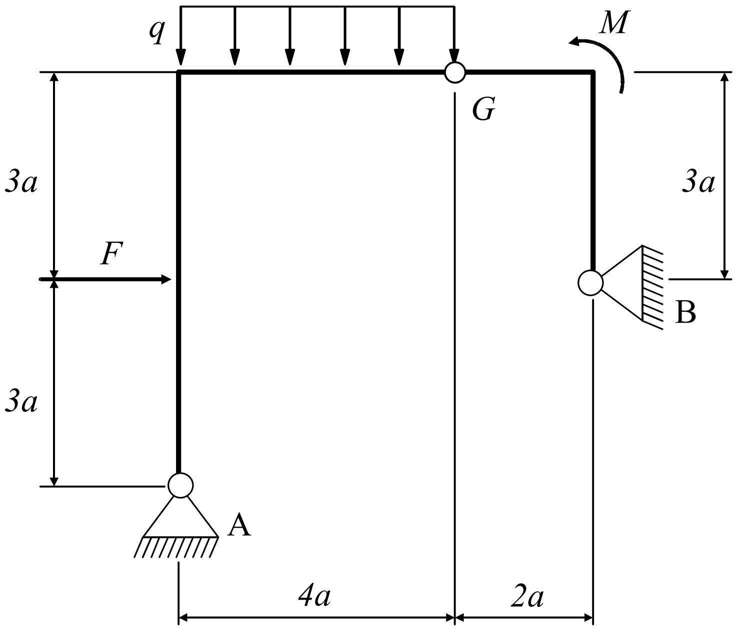
$$(2) \quad F_{AV} = -\frac{3}{4} qa$$

Statt der Gleichungen (2) und (5) wären auch die folgenden Gleichungen möglich:

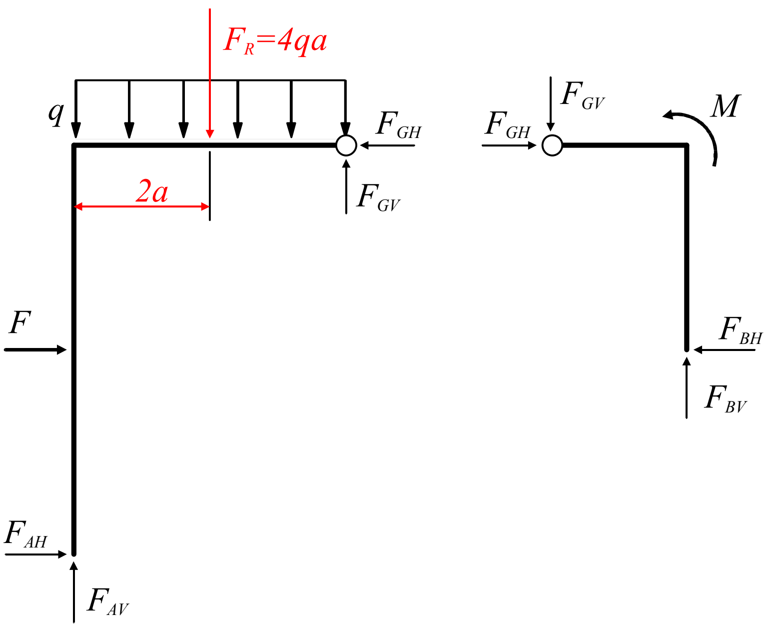
$$B: \quad F_{AV} \cdot 2a + qa \cdot \frac{1}{2} a - F_{GV} \cdot a = 0 \qquad (2a)$$

$$G: \quad 2qa \cdot a - F_C \cdot 2a = 0 \qquad (5a)$$

Dreigelenkbogen (gerade, gekrümmte oder abgewinkelte Träger – Lager und Verbundgelenke liegen nicht auf einer Geraden)



Schnittbild (Hinweis: die rot eingezeichnete Kraft ersetzt die Linienlast statisch äquivalent und dient hier nur der Veranschaulichung. In Schnittbildern ist entweder die Linienlast **oder** deren Resultierende einzutragen!)



Gleichgewichtsbedingungen

Bei Dreigelenkbögen ist es zweckmäßig, an den Teilsystemen das Momentengleichgewicht bezogen auf die Lager auszuwerten.

$$A: \quad 4qa \cdot 2a - F_{GH} \cdot 6a - F_{GV} \cdot 4a + F \cdot 3a = 0$$
$$B: \quad -M + F_{GH} \cdot 3a - F_{GV} \cdot 2a = 0$$

Das so entstandene Gleichungssystem für die Gelenkkräfte lässt sich leicht lösen. Die zweite Gleichung wird mit 2 multipliziert und dann beide Gleichungen addiert oder subtrahiert.

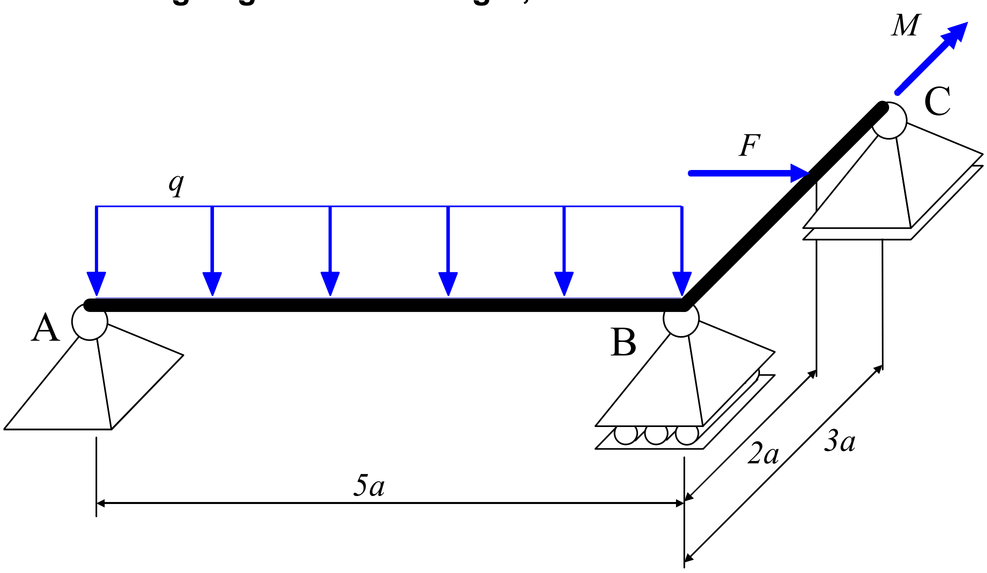
$$A: \quad 4qa \cdot 2a - F_{GH} \cdot 6a - F_{GV} \cdot 4a + F \cdot 3a = 0$$
$$B: \quad -2M \quad + F_{GH} \cdot 6a - F_{GV} \cdot 4a \qquad = 0$$

$$F_{GV} = \frac{8qa^2 - 2M + 3Fa}{8a}$$
$$F_{GH} = \frac{8qa^2 + 2M + 3Fa}{12a}$$

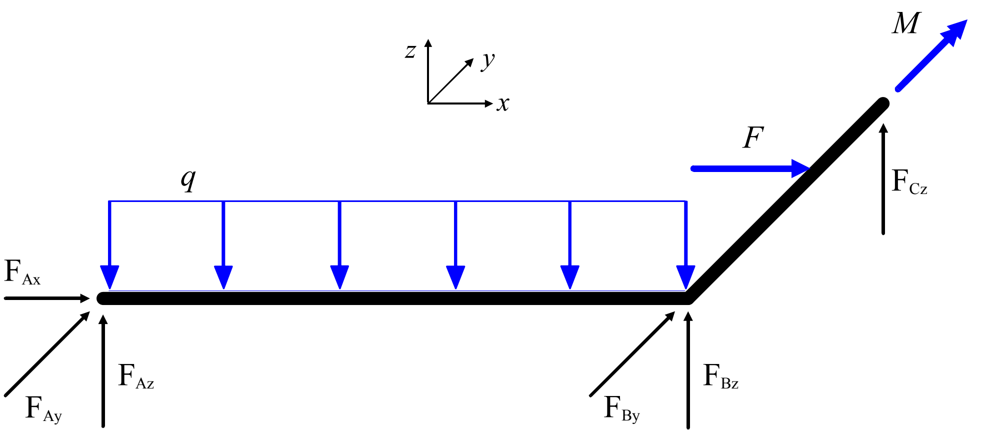
Die weiteren Gleichgewichtsbedingungen liefern nach Umstellen der Gleichungen die übrigen Lagerreaktionen.

$$\uparrow \quad F_{AV} + F_{GV} - 4qa = 0$$
$$\rightarrow \quad F_{AH} + F - F_{GH} = 0$$
$$\uparrow \quad F_{BV} - F_{GV} = 0$$
$$\leftarrow \quad F_{BH} - F_{GH} = 0$$

rechtwinklig abgewinkelter Träger, 3D – Problem



Schnittbild



Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen können vektoriell oder in skalarer Form notiert werden.

Kraft- und Momentengleichgewicht in Richtung (...) durch (...)

$$x: \quad F_{Ax} + F = 0$$
$$y: \quad F_{Ay} + F_{By} = 0$$
$$z: \quad F_{Az} + F_{Bz} + F_{Cz} - 5qa = 0$$
$$x_{AB}: F_{Cz} \cdot 3a = 0$$
$$y_{BC}: F_{Az} \cdot 5a - 5qa \cdot \frac{5}{2} a + M = 0$$
$$z_B: \; -F_{Ay} \cdot 5a - F \cdot 2a = 0$$

Lagerreaktionen

$$F_{Ax} = -F$$
$$F_{By} = -F_{Ay} = \frac{2}{5} F$$
$$F_{Bz} = -F_{Az} - F_{Cz} + 5qa = \frac{5}{2} qa + \frac{M}{5a}$$
$$F_{Cz} = 0$$
$$F_{Az} = \frac{5}{2} qa - \frac{M}{5a}$$
$$F_{Ay} = -\frac{2}{5} F$$