Numerik–Labor WS02/03
Numerisches Differenzieren

Differenzenquotienten

Differenzenquotienten dienen der Approximation von Ableitungen. Aufgrund von Rundungs– und Messfehlern sind die Funktionswerte im allgemeinen nicht exakt. Wären diese Fehler nicht vorhanden, so wären möglichst kleine Schrittweiten optimal. Bei Anwesenheit von Fehlern sieht dies jedoch ganz anders aus. Ist `D(f,x,h)` ein Differenzenquotient zur Approximation von $f'(x)$ mit der Schrittweite `h`, so sagt die Theorie

$$Err(f,x,h) := D(f,x,h) \; - \; f'(x) \; \approx \; const \cdot h^p \; + \; \frac{\text{Störung}}{h}$$

voraus, wobei man p die Ordnung des Differenzenquotienten nennt. Ist keine Störung vorhanden, so gilt $\log(Err(f,x,h)) = p \cdot \log(h)$; zeichnet man also den Fehler $Err(f,x,h)$ über der Schrittweite h auf einer doppelt–logarithmischen Skala auf, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung p. Wenn dieser Graph (für kleine h) von dieser Geraden abweicht, so muss dies im wesentlichen an den Störungen liegen; das kleinste h, das noch auf dieser Geraden liegt, ist die "optimale" Schrittweite; der zugehörige Fehler ist im allgemeinen der kleinstmögliche Fehler.

Vorversuch

Laden Sie mit

```
getf /kurs/etp/SciLab/CS2.sci
```

die für den Vorversuch benötigten Funktionen.

Im Vorversuch sollen verschiedene Differenzenquotienten $D(f,x,h)$ für die Funktion

$$f(x) = x^{1/x} \quad \text{mit Ableitung} \quad f'(x) = f(x)\frac{1-\log(x)}{x^2}$$

ausprobiert werden. Dazu berechnen wir mit Hilfe der Befehlsfolge

```
H = logspace(-1, -L, 51);
Err = D(fct, x, H) - fct_abl(x);
plot2d('ll', H, abs(Err)+1e-20);
Ordnung();
```

den Fehler des Differenzenquotienten zu verschiedenen Schrittweiten h und lassen diesen doppellogarithmisch plotten. Die Namen der zur Verfügung stehenden Differenzenquotienten `D` und den dazu passenden Wert für den Parameter `L` können Sie der Tabelle weiter unten entnehmen.

Der Befehl `Ordnung()` fordert Sie auf, in der Zeichnung Anfang und Ende des geradlinigen Stückes mit der Maus zu markieren. Aus diesen Werten wird die Ordnung des Verfahrens und die "optimale" Schrittweite samt des kleinsten erzielbaren Fehlers berechnet. Füllen Sie die folgende Tabelle aus:

`D`	`L`	h_{opt}	Fehler	Fehler–Ordnung
Dz1a	8			
Dz1b	5			
Dl1a	12			
Dl1b	8			
Dl1c	5			
Dl1d	5			

Setzt man die globale Variable `Stoerung` vor Durchführung der obigen Tests auf einen Wert ungleich Null (z.B. `Stoerung = 1e-5`), so liefert `fct(x)` statt $f(x)$ den gestörten Wert `x^(1/x) + Stoerung * rand()`. Wie groß sind die kleinsten erreichbaren Fehler dann?

Minitest A

Implementieren Sie den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und stellen Sie damit fest, welcher von drei gegebenen Kandidaten `Ja, Jb` oder `Jc` die Jacobi–Matrix zu einer ebenfalls gegebenen Funktion `f` ist.

Hinweise

- Nach Ausführung des Befehls

  ```
  load /kurs/etp/NumLab/Mini_A
  ```

  stehen die Funktionen `f, Ja, Jb` und `Jc` in SciLab zur Verfügung.

- Um den Differenzenquotienten `DJh(f, x, h)` einer vektorwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ zur Schrittweite $h > 0$ zu berechnen, müssen Sie spaltenweise vorgehen. Sei I_k die k–te Spalte der Einheitsmatrix. Dann gilt für die k–te Spalte der Jacobi–Matrix von f

  $$J_k = \frac{\partial}{\partial x_k} f \approx (f(x + h * I_k) - f(x - h * I_k))/(2 * h).$$

  Den obigen Ausdruck können Sie in SciLab fast genauso eingeben, wenn Sie die Tatsache ausnutzen, daß einzelne Spalten einer Matrix mit Hilfe des Doppelpunktes angesprochen werden können.

- Zeichnen Sie dann den Fehler

  ```
  norm(DJh(f, x, h) - J(x))
  ```

  für die drei Kandidaten `J = Ja, Jb, Jc` als Funktion von h an der Stelle `x = [3; 2; 1]`, und entscheiden Sie anhand der Grafiken, welche Funktion die Jacobi–Matrix von f berechnet.