

Modellezési és szerkesztési módszerek a geotudományok térképein

Jelen kötet tartalmát szerzői jog védi. Részletei
jogdíjfizetési kötelezettség nélkül felhasználhatók az
alábbi hivatkozás feltüntetésével:

Albert G. 2018: Modellezési és szerkesztési módszerek
a geotudományok térképein, Eötvös Loránd
Tudományegyetem Budapest p xx-yy

Lektorálta: Dr. Gercsák Gábor

Tartalomjegyzék

Bevezető	4
Fő témakörök	5
Kvantitatív módszerek (interpoláció)	6
A polinomiális modellek	15
A simulógörbe, avagy a determinisztikus modell	17
Közelítő polinom-függvények, avagy a sztochasztikus modell	18
A lineáris modell.....	19
Gyakorlófeladatok 1D interpolációkra	21
Lineáris interpoláció 2D-ben és 3D-ben.....	25
Szintvonal metszéspont keresése térbeli egyeneseken.....	26
Pont értékének keresése térbeli háromszögben lineáris interpolációval.....	27
Sík illesztése három pontra.....	29
A szabálytalan háromszögháló TIN meghatározása	31
Bilineáris interpoláció	32
Trendsíkok, avagy polinomiális közelítés síkkal.....	35
Dőlésirány és dőlésszög-számítás.....	36
Hibas számítás	37
Lokális interpolációk.....	39
Legközelebbi szomszédok módszere (<i>nearest neighbor</i>).....	39
A természetes szomszédok (<i>natural neighbor</i>) módszer	40
Súlyozás reciprok távolságokkal (<i>inverse distance weighting</i>).....	42
Gyakorlófeladatok vegyes kvantitatív módszerekhez.....	44
Geometriai módszerek.....	50
Sík dőlésének ábrázolása	50
Vízszintes és függőleges metszetek és a látszólagos dőlés	52
Két sík metszévonalának szerkesztése.....	53
Szerkesztések egy sík három ismert pontjából	56
Gyakorlófeladatok síkok ábrázolására.....	59
Szerkesztési módszerek geológiai térképeken.....	62

Képződményhatárok követése tagolt morfológián	62
Dőlés meghatározása térkép alapján	66
Geológiai metszet szerkesztése.....	66
Gyakorlófeladatok	71
Irodalmi források	78
Ábrajegyzék.....	79

Bevezető

A geoinformatika és a tematikus térképek a mai geotudományok szerves részét képezik. Nélkülük érthetetlen és feldolgozhatatlan lenne az a rengeteg adat és megfigyelés, amellyel a földtudományok: a geofizika, geológia, földrajz, geomorfológia, talajtan, hidrológia, meteorológia és klimatológia, vagy akár a planetológia szakemberei nap, mint nap találkozhatnak. Jelen kötet a „*Tematikus térképek a geotudományokban*” egyetemi kurzus gyakorlati anyagát foglalja össze. A tárgy 2006-óta szerepel az Eötvös Loránd Tudományegyetem kínálatában a térképészek számára kötelező kurzusként. Oktatóik a kezdeti években dr. Márton Mátyás professzor, dr. Gercsák Gábor és Draskovics Zsuzsanna voltak, majd 2012-től dr. Albert Gáspár vette át mind az elméleti, mind a gyakorlati órákat. A tantárgy több oldalról világítja meg a felsorolt tudományok térképészeti kihívásait, a térképi ábrázolásmódok történeti okait és követelményeit, illetve azokat a lépcsőfokokat, amelyek a mai szakma-specifikus geoinformatikai rendszerek kialakulásához vezettek. Egyrészt a térképszerkesztő szemszögét tekinti át, amely lehetővé teszi, hogy a térképeket az előállításuk és használati céljuknak legmegfelelőbb módon állítsuk elő, másrészt a térképolvasók szemszögét is vizsgálja. Utóbbi a szakmai és szakmán kívüli olvasóközönséget egyaránt magába foglalja.

A térbeli vonatkozású adatok ábrázolása a térképész feladata, de az adatok feldolgozása szakterületi tudást igényelhet. Sok esetben viszont a szakterületi adatfeldolgozás során keletkezett ábrák nem megfelelőek a kívánt információ hatékony közlésére. Ezért a térképész és a földtudományi szakértő közös munkája kell ahhoz, hogy jó térkép kerüljön az olvasó elé. A kurzus célja ennek az együttműködésnek az elősegítése olyan tudással, ami a térképész és az egyéb földtudományok művelőinek ismereteit egészíti ki kölcsönösen.

A kötet a „*Tematikus térképek a geotudományokban*” kurzus gyakorlatai során tárgyalt módszerek elméleti alapjait diakép-szerű ábrákon, köztes magyarázószöveggel mutatja be. A gyakorlathoz kapcsolódó feladatok olyan formátumban szerepelnek, ahogy a hallgatók az órák során találkozhatnak velük.

Fő témakörök

A gyakorlatok célja a tematikus térképszerkesztéshez szükséges elméleti tudás megszerzése és egy sajátos „térképi modellező” gondolkodásmódnak az elsajátítása, ami a matematikai műveletek és a térképszerkesztői feladatok közti kapcsolat ismeretén alapszik. A térképi ábrázolást a geotudományok esetében szinte mindig térbeli, és nem csak felületi jelenségek bemutatására alkalmazzák. Ha jó térképet akarunk szerkeszteni, akkor a pontszerű 3D adatok feldolgozásának matematikáját és kapcsolatát a felület- és térháló-modellekkel szintén értenünk kell. Sok esetben már eleve felületeken értelmezzük az adatokat (pl. a topográfiai magasságmérések a földfelszínhez kötődnek, míg a kutatófúrásokban észlelt réteghatárok egy rétegfelülethez). Ilyen esetekben a felszínnek közötti reláció (pl. metszés) lehet az a jelenség, amit a térképen ábrázolunk (l.: földtani térkép). A gyakorlat mind numerikus, mind geometriai megközelítésben tárgyalja a problémakört:

- Kvantitatív módszerek - interpolációk (1-5 gyakorlat) – lineáris algebrai számítások, levezetések.
- Geometriai módszerek (7-10. gyakorlat) – szerkesztések

Az algebra-tematikájú gyakorlatokhoz alapvetően elég egy egyszerű számológép, és a jegyzetfüzet, mivel a módszerek megértését segítő feladatok ezekkel is megoldhatóak. A geometriai módszerek gyakorlásához a számológép és jegyzetfüzet mellett a precíz szerkesztést elősegítő eszközök (vonalzó, ceruzák, színesek, tollak) kellenek. A tárgyalt témakörökhöz gyakorlatok, megoldott feladatsorok is tartoznak, amelyek az önálló tanulást segítik.

Kvantitatív módszerek (interpoláció)

A kvantitatív (mennyiségi) módszerek az adatfeldolgozás numerikus módszereit foglalják magukba. Ez alapvetően arra való a geotudományok esetében, hogy a térben, vagy egy felszínen folytonos jelenségek (mint pl. légnyomás) mérése során keletkező adatokból olyan térrészekre is lehessen következtetéseket levonni, ahol nincs mérési pont. A következtetésekhez matematikai formulákat használunk, amelyekkel az elsődleges adatokból levezetett adatokat állítunk elő implicit módszerekkel (pl.: interpoláció).

A tematikus térképek tartalom szerinti csoportosítása Emil Meynen (1965) nevéhez köthető. Ebben az időben ő volt a Nemzetközi Térképészeti Társulás (International Cartographic Association ICA) - Terminológiai Bizottságának vezetője. A tartalom szerinti csoportosítás 7 földtudományi főcsoportot különböztet meg, de ez a fajta csoportosítás csak egy a sok közül (1. ábra).

A tematikus térképek csoportosítása

- A megjelenített tartalom témája szerint
 - A Meynen-féle osztályozási rendszer
- Az információ típusa szerint
 - Kvalitatív
 - Kvantitatív
- Megjelenítés módja szerint
 - Statikus
 - Dinamikus
- Ábrázolt téma komplexitása szerint
 - Analitikus (1 téma)
 - Komplex (több téma)
 - Szintetizáló (több téma + hozzáadott érték)
- Térképkészítés módja szerint
 - Észlelési (felmérési)
 - Levezetett (generalizált)

1. ábra A tematikus térképek ötféle csoportosítása

A kurzus gyakorlatainak száma kevés lenne ahhoz, hogy mindegyik csoportosítás szerint tárgyalja a térképszerkesztéshez kapcsolódó feladatokat. Ellenben a geotudományok során elterjedt kvantitatív és kvalitatív adattípusok térképre-vitele (szerkesztése) kifejtésre kerül.

A kvantitatív adatokat a térképeken 7 különböző ábrázolási módszerrel jeleníthetjük meg (2. ábra). Ezek a geotudományok esetében mind előfordulhatnak (l. a kurzushoz tartozó

elméleti anyag (Albert 2017). A gyakorlat során azonban olyan módszerekre kerül a hangsúly, amelyek felületeket határolnak le és izovonalakat eredményezhetnek.

A kvantitatív adatok ábrázolási módszerei

1. Jel

2. **Felület**

3. **Izovonal**

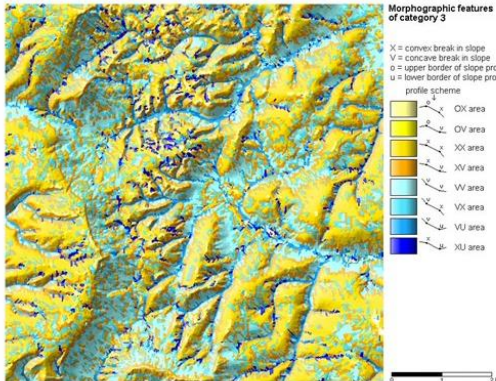
4. Diagram

5. Pont

6. Vektor
(mozgásvonal)

7. Kartogram

Interpolációval feldolgozott adatok térképi ábrázolására leggyakrabban használt módszerek.



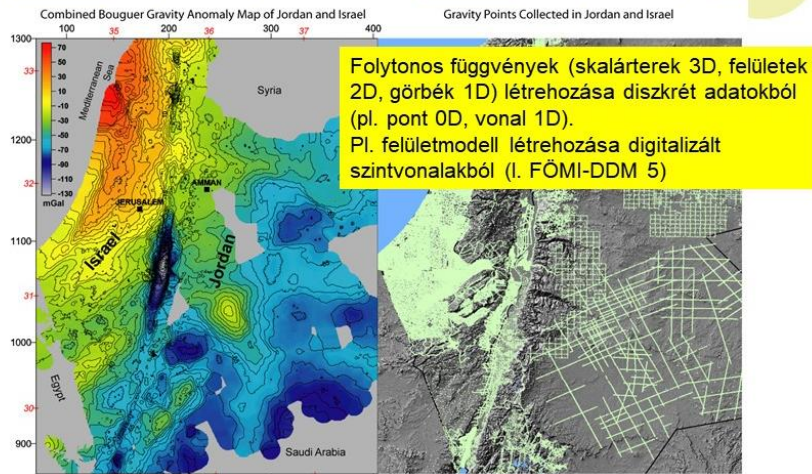
A tematikus ábrázolás módszerei
(Klinghammer & Papp-Váry 1983 - Földünk
tükre a térkép), p. 282.

2. ábra A geotudományok esetében a kvantitatív adatokat leginkább izovonalakkal ábrázolják, de előfordul, hogy a térképeket adattartományok szerint színezzik (l.: az ábrázolt morfológiai térkép).

Az interpoláció során olyan folytonos függvényeket keresünk, amelyek segítségével pontszerű adatokból kiindulva a folytonos jelenséget más, mérési adattal nem rendelkező helyszínen is tudjuk értelmezni. Ez a „hely” lehet az Euklideszi tér egy pontja (3D), egy felület egy pontja (2D), vagy csak egyetlen változó szerint meghatározott érték (1D). A kiválasztott interpolációs módszer függ az adatok területre eső számától (adatsűrűség), az elrendezés homogenitásától, és az adatok elrendezésében jelenlévő, vagy nem jelenlévő irányítottságtól (3. ábra).

Ha az interpolációs függvényt egyetlen változó szerint adjuk meg, akkor 1D módszerről beszélünk. Ilyen, amikor pl. a felszíntől való távolság mint változó függvényeként adjuk meg a légköri nyomást (l.: meteorológia), vagy idősoros elemzéssel vizsgáljuk egy forrás vízhozamát (l.: hidrológia). A függvény kétdimenziós, ha a folytonos jelenséget két változó szerint határozzuk meg a keresett helyen. Ilyen jelenség a földfelszín magassága (x, y koordináta a két változó), vagy a mágneses deklináció értéke a felszínen (l.: geofizika). Háromdimenziós függvények esetében a vizsgált jelenség a tér harmadik dimenziójától is függ (4. ábra). 3D függvényekkel potenciáltrekeket és egyéb térben folytonos jelenségeket tudunk modellezni.

Interpoláció célja a geoinformatikában

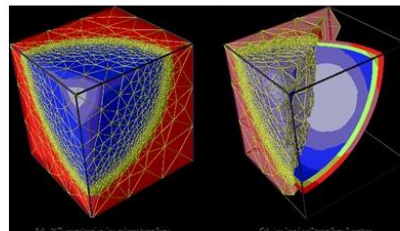
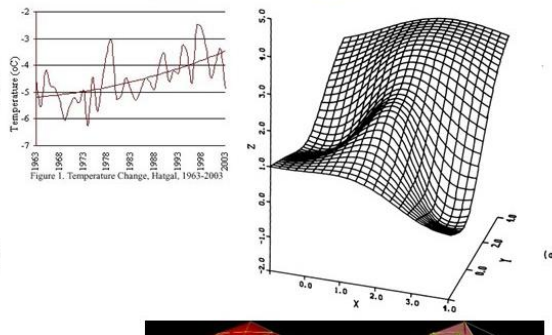


Térkép szerkesztése észlelési pontok értékeinek interpolációjával – az interpolációs eljárás kiválasztását a pontok eloszlása, gyakorisága, és az értékek sajátosságai (pl. irányítottága) határozzák meg.

3. ábra Az interpoláció célja a geoinformatikában.

Az interpolációs módszerek dimenziói

- 1D interpoláció: görbe előállítása (x, y koordináta-rendszerben)
 $y=f(x)$
- 2D interpoláció: felület előállítása (x, y, z koordináta-rendszerben)
 $z=f(x,y)$
- 3D interpoláció: potenciálfelület előállítása (x, y, z koordináta-rendszerben)
 $v=f(x,y,z)$

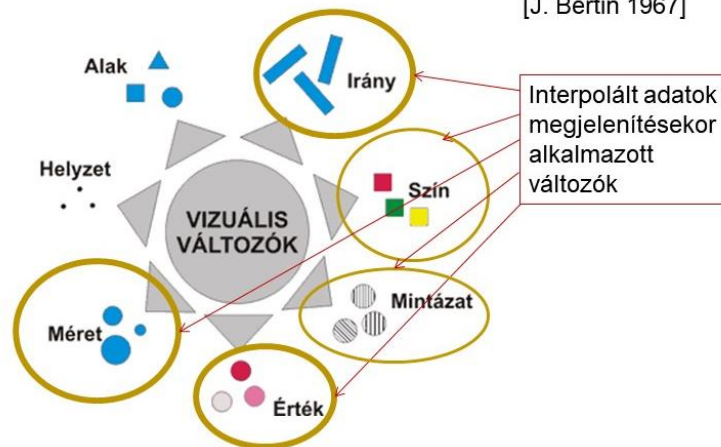


4. ábra Az interpolációs módszerek dimenziói

A kvantitatív adatok Bertin-féle vizuális változói földtudományi térképeken

„A grafikának hét vizuális (szemmel érzékelhető) változója van, vagyis hét tulajdonságának a megváltoztatásával tudjuk ábrázolni az adatokat.”

[J. Bertin 1967]



5. ábra A kvantitatív adatok Bertin-féle vizuális változói földtudományi térképeken.

A kvantitatív adatok ábrázolása térképen a kartográfia módszerei szerint történik, amit tudatosan, az adott jelenségre optimalizálva alkalmazunk. Az ábrázolásnál figyelembe kell venni az adott szakterület hagyományos jelölési módszereit, de alapvetően törekedni kell arra, hogy egy térképi jel ne rendelkezzen háromnál több vizuális változóval, mert az a térkép olvasását nehezíti (Albert 2017). Vizuális változók közül az interpolált adatok esetében leginkább a jel iránya (pl.: izovonal csapása egy adott ponton), értéke (pl.: fő/segédszintvonalak), és a jel mérete (pl.: térrács pontjain elhelyezkedő jelek). Ezen kívül alkalmazhatunk színeket és mintázatokat is pl. hipszografikus kategóriák megkülönböztetésére (5. ábra).

A mennyiségi adatokat ábrázoló földtudományi térképek – térkép mivoltuk miatt – legalább 2D függvényt kell, hogy alkalmazzanak az adatok szerkesztéséhez (6. ábra). Előfordulhat, hogy a térképen 1D módszerrel előállított adat is szerepel (pl.: egy adott kútmélységre számított ionkoncentráció egy vízföldtani térképen, ami pontszerű jelként jelenik meg). Ha a függvény, amivel számolunk az ismeretlen pontokra 2D-s, de a függvényérték a harmadik térdimenzióként értelmezhető, akkor 2,5D módszerrel beszélünk; ilyen a domborzat modellezése pontszerű adatok alapján (7. feladat). Dinamikus térképet szerkeszthetünk, ha a jelenség időbeli változását is felhasználjuk; ilyen esetekben 2+1D módszernek nevezzük, illetve ha térmodellként jelenítjük meg, akkor 4D-s módszernek.

Kvantitatív adatok földtudományi térképeken (pl.)

- Magasság (2,5 D)
 - Lejtőszög, lejtőirány (származtatva a magasságból)
- Mágnesesség (2D)
- Felszínmozgás (2D)
- Geokémiai adatok (2 és 3D)
- Kőzet feszültségterek (2 és 3D)
- Gravitációs állandó (2D)
- Csapadék (1 és 2D)
- Légnyomás (1 és 2D)
- Szennyezettség (2 és 3D)

6. ábra Példa a kvantitatív adatokra földtudományi térképeken.

Az interpolációs módszerek típusai

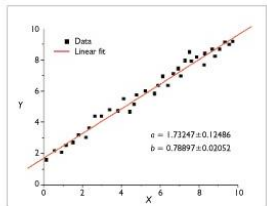
Az interpoláció új adatpontokat hoz létre egy sor ismert adatpont (kontrolpont) értéktartományán belül.

1. Determinisztikus módszert alkalmazunk, ha az adatpontjainkban 100%-ig megbízunk.
 - Ekkor feltételezzük, hogy a méréssel, vagy kísérlet eredményeként létrehozott kontrolpontok **egy függvény változójának** véges számú helyen felvett értékeit reprezentálják.
2. Sztochasztikus módszert alkalmazunk, ha feltételezzük, hogy a mérésekben hiba is van (és a hibát meg is akarjuk becsülni).
 - Ekkor az kontrolpontokra megpróbálunk függvényt illeszteni úgy, hogy a függvény változójának az adott ponton felvett értéke a lehető legkisebb mértékben térjen el a mért értéktől. Ezt **görbeillesztéssel**, vagy felületek esetén regressziós analízissel érhetjük el.

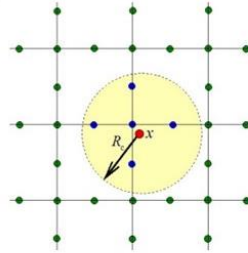
7. ábra Az interpolációs módszerek típusai az alkalmazott módszerek szerint csoportosítva

Csoportosítás

- **Globális módszer:**
Minden kontrolpontot felhasznál a számításhoz (pl. trendek számításához)



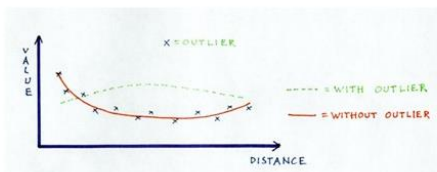
- **Lokális módszer:**
A kontrolpontoknak csak a keresett hely körüli kiválasztott csoportját használja fel.



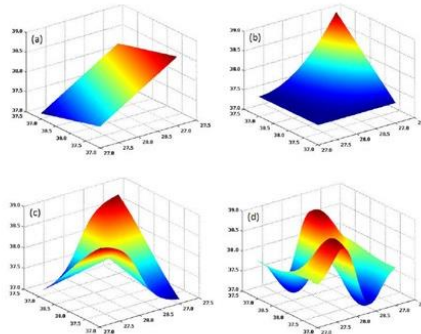
8. ábra Az interpolációs módszerek csoportosítása a felhasznált kontrolpontok alapján. Balra: 1D-s (lineáris) függvény illesztése. Jobbra: keresési sugár (R) az x pont meghatározására felhasználható pontok keresésére egy 2D-s interpolációnál.

Globális módszerek

- **Polinomiális közelítések (polynoms)**
- **Fourier sorok (Fourier-series)**



Előnyük, hogy a kiszámított függvény az egész adatmezőre (N) értelmezhető
Hátrányuk: érzékenyek az adathibákra



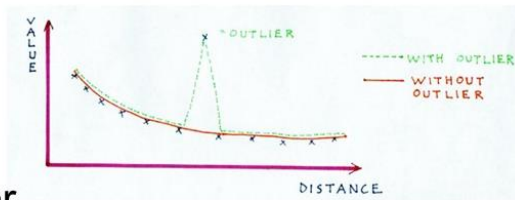
Trend-felületek első (lineáris), második (négyzetes), harmad (kübös) és negyedrendű polinomiális közelítése (Erol 2011).

9. ábra A globális interpolációs módszerek.

Lokális módszerek

- Legközelebbi szomszéd (nearest neighbor)
- Lopott területek módszere (natural neighbor)
- Súlyozott reciprok távolság (inverse distance weighting)
- Krigelés (kriging) – „globalizált” módszer

- Előnye: nem annyira érzékeny a hibákra (különösen a krigelés esetén)



10. ábra A lokális interpolációs módszerek

Az interpolációs módszerek csoportosítása a visszatérő érték szerint.

- Egzakt módszerek
A kontrollpontokon a mért értéket kapjuk vissza.

- Nem egzakt módszerek
A kontrollpontokon a mért értéktől eltérő értéket kapunk vissza.

11. ábra Az interpolációs módszerek csoportosítása visszatérő érték szerint.

Az interpolációs módszereket többféleképpen csoportosíthatjuk. A módszereket két típusra szoktuk bontani aszerint, hogy közelítő, vagy simuló függvényt szeretnénk a mért adatainkra illeszteni (7. ábra). Geoinformatikai szempontból alapvető fontosságú, hogy az alapadatok mindegyikét, vagy csak a keresett értékű hely körüli pontokat dolgozzuk fel (8. ábra). Ha mindegyik mért adatunkat használjuk, akkor globális módszerről beszélünk (9. ábra), ha csak az adott hely körüli kontrollpontokat használjuk fel (pl. egy adott távolságon belül), akkor lokális módszerről beszélünk (10. ábra). A képfeldolgozási

módszerek többnyire ilyen lokális elven működnek: egy kernelfüggvény alapján a képpont értékét megváltoztatják (pl. mozgóátlaggal a zajos pöttyözött képet „letisztítják”). Globális módszerek viszont nagyon alkalmasak trendek számításához.

Polinomiális módszerek mellett ismert globális módszer a Fourier-sor alkotta függvények csoportja is (szinuszok és koszinuszok kombinációjából). Ezek periodikus függvények, főleg 1D módszerek (más néven görbeillesztés) esetén. Ha a módszert úgy alkalmazzuk, hogy a polinom függvény elsőfokú, a sztochasztikus típusú interpolációnál, akkor lineáris regressziós függvényekről beszélhetünk. Ha a számítások 2D (sík) adattérben történnek, akkor trend-felületeknek (trend-surfaces) is szoktuk a függvényeinket nevezni (9. ábra).

Visszatérő érték szerint is csoportosíthatjuk a módszereket egzakt és nem egzakt kategóriákba (11. ábra). Előbbiek a függvény alkalmazásakor a kontrollpontokon az adott kontrollponton mért értéket fogja eredményül adni, azaz a bemenő értékek úgy jelennek meg a térképen, ahogy lemérték őket. A nem egzakt módszerek esetén a függvény nem adja vissza a kontrollponton annak eredeti értékét. Utóbbi kategóriába tartozik a gyakran használt mozgóátlag módszer is.

A felsorolt módszerek csoportosítása

Globális		Lokális	
Determinisztikus	Sztochasztikus	Determinisztikus	Sztochasztikus
Polinomok* (egzakt)	Polinomok* (nem egzakt)	Voronoi sokszögek (egzakt)	Krigelés (egzakt)
	Regresszió (nem egzakt)	Súlyozott reciprok távolság (egzakt)	Mozgó átlag (nem egzakt)
		Spline (egzakt)	

* Egzakt, ha a polinom rendősége a kontrollpontok számánál eggyel kisebb. Nem egzakt, ha a polinom rendősége több mint eggyel kisebb.

12. ábra A gyakori interpolációs módszerek csoportosítása.

Térinformatikai csoportosítás

- Topológiai alapú interpolációk

A kontrollpontok alkotta topológia az elsődleges kritérium az interpolációs függvény paramétereinek meghatározásakor.

Pl.:

- Nearest neighbor (legközelebbi szomszéd)
- Natural neighbor (természetes szomszéd, vagy „lopott területek” módszere)
- Koordináta alapú módszerek (l. a többi eddigi)

13. ábra Az interpolációs módszerek térinformatikai szempontú csoportosítása.

A nem egzakt módszerek egyben sztochasztikus csoportba is tartoznak, mivel értelemszerűen nem „simul” a függvény a kontrollpontokra (12. ábra). Térinformatikai szempontból fontos, hogy a kontrollpontok körüli voronoi sokszögeket/poliédereket felhasználjuk-e a keresett hely értékének becsléséhez vagy nem. Előbbi esetben a geoinformatikai rendszerben a kontrollpontokhoz tartozó alakzatokat is tároljuk az adatbázisban és az interpoláció során felhasználjuk ezek geometriáját. Ezeket topológiai módszereknek nevezzük (13. ábra). Ha a kontrollpont koordinátáin kívül nincs szükség más információra az interpoláció során, akkor nem topológiai módszert használunk. A legközelebbi szomszéd (nearest neighbor) módszer lehet mindkettő, attól függően, hogy milyen típusú adatrendszerben dolgozunk.

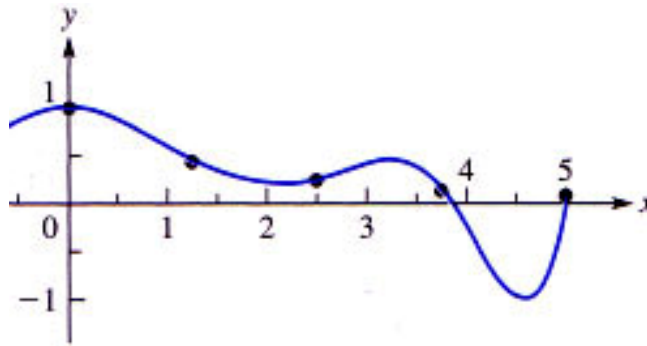
A POLINOMIÁLIS MODELLEK

A polinomokat használó interpolációs módszerek kettőssége jól érzékelteti, hogy bizonyos paraméterek számának változtatásával hogyan módosíthatunk drasztikusan a módszerek alapvető jellegén. Lehet determinisztikus és egzakt, ha a függvény „rásimul” a kontrollpontokra és visszaadja azok értékét a kontrollpont helyén (14. ábra). De lehet sztochasztikus és nem egzakt is, ha regressziós függvényt alkalmazunk. A polinom általános képlete (Horner-szabály):

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

ahol a_i együtthatói, x pedig a változója az egyenletnek. A polinom monomok összegéből áll; monomnak tekinthető egy együttható és egy változó valamilyen hatványának szorzata. A legnagyobb hatványkitevőjű monom adja meg a polinom fokát (adott esetben n). A polinom nem állhat több monomból mint ahány adatot felhasználunk a függvény számításához. Ha n értéke megegyezik a kontrollpontok számával (N adatmező mérete), akkor minden kontrollpontot felhasználtunk; ekkor determinisztikus a függvény. Ha pedig az adatmező nagyobb mint a legnagyobb hatványkitevő, akkor sztochasztikus a függvény.

A polinom függvény segítségével határozzuk meg az ismeretlen ponton a változó értékét (becslés). Az ismert pontok számának növekedésével a függvény elvileg egyre bonyolultabb (azaz magasabb fokú) lehet, de így az interpoláció nagy számítási kapacitást igényelhet, ami a geoinformatikában nem előnyös.

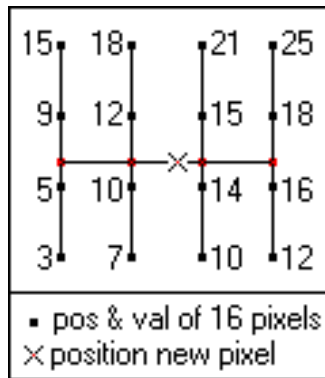


14. ábra Egydimenziós polinomiális függvény öt kontrollponttal. A módszer – bár egzakt és determinisztikus – nem adja vissza azt a szemmel is követhető csökkenést az origótól távolodva, amire számítanánk.

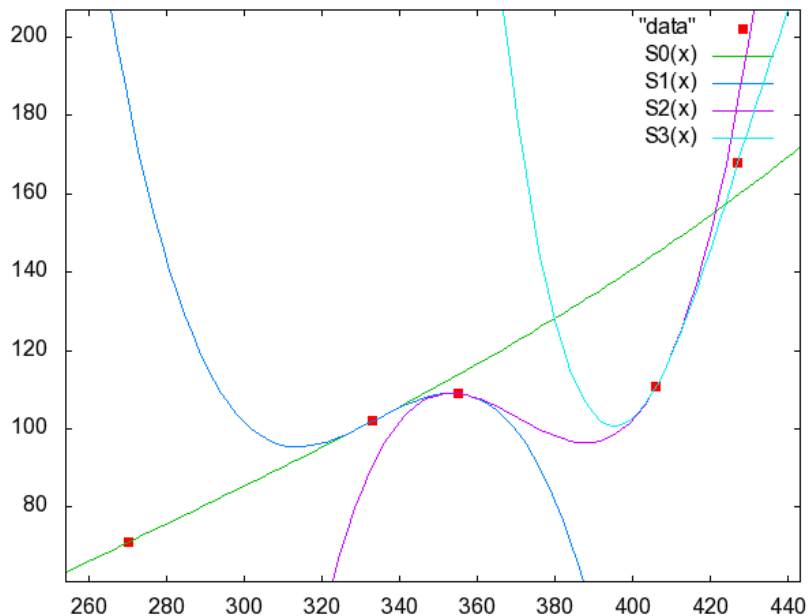
Habár kisszámú kontrollpont esetén nem nehéz kiszámolni a függvény együtthatóit, általában 5-7 kontrollpontnál többre már nem alkalmazzuk ezt a módszert. A geoinformatikai gyakorlatban a spline interpoláció helyettesíti, ahol tartományokra osztva a ponthalmazt, alacsonyabb (általában 3-ad) fokú polinomokkal tudjuk közelíteni a keresett értéket. A polinomiális módszer hátránya a „szél hatás” (edge effect). Ez azt eredményezi, hogy a polinom-függvények „szélein” a függvényérték az abszcisszától (vagy 2D-ben az xy síktól) eltávolodik, és emiatt rossz becslést kapunk a keresett helyekre (15. ábra).

A polinomiális interpoláció helyett alkalmazott spline módszer a 2D rácsháló (grid) esetében leggyakrabban az ún. kétköbös módszerként jelenik meg. A kétköbös (*bicubic*) módszer valójában a sík két irányában elvégzett harmadfokú (*cubic*) polinom interpoláció, amit egyszerre csak az adatmező egy szűk tartományára (pl.: x_n és x_{n+1}) írunk fel.

A spline interpoláció leginkább nagymennyiségű – már gridben tárolt – adat minőségi elemzésére, valamint a rács (grid) felbontásának módosítására alkalmas.



15. ábra Térképi nézet (2D): Az X pont értékének becslése négy y-irányban, majd ezek adataiból egy x-irányban elvégzett harmadfokú polinom meghatározásával



16. ábra Grafikon nézet: 1D-s adatmezőben (pl.: a grid egy irányában) felvett értékekre számított harmadfokú spline polinomok $S(x)$ láncolata.

A simulógörbe, avagy a determinisztikus modell

Polinomiális interpoláció (1D determinisztikus módszer)

A polinom függvény általános képlete (Horner-szabály):

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$$

Felírjuk az ismert x_i pontokra és $f(i)$ ismert függvényértékekre, hogy megkapjuk az a_i -együtthatókat.

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_Nx_0^N = f_0,$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_Nx_1^N = f_1,$$

$$\vdots$$

$$a_0 + a_1x_N + a_2x_N^2 + \dots + a_Nx_N^N = f_N.$$

$N+1$ ismeretlenes egyenletrendszer, ami $N=2$ esetén még egyszerű.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix},$$

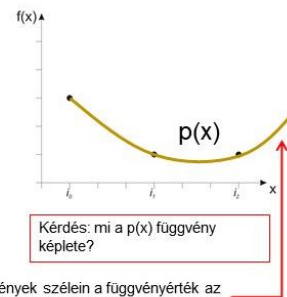
V és f elemei ismertek, „ \mathbf{a} ” oszlop mátrix elemeit keressük

$$\mathbf{a} = V^{-1}\mathbf{f}$$

Példa ($N=2$):

i	x_i	$f(i)$
0	1	3
1	4	1
2	7	1

$i=0, 1, 2, \dots, N$ (adatmező)



A „szél hatás” (edge effect): a polinom függvények szélein a függvényérték az abszcisszától (vagy 2D-s esetben az xy síktól) eltávolodik.

17. ábra A polinomiális interpoláció és egy hozzá kapcsolódó feladat. N valós szám, az adatmező mérete (0 és pozitív egész értéket vehet fel).

A feladatban megadott 3 kontrollpontot tartalmazó adatmezőre a következő egyenleteket lehet felírni:

- I. $a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 3$
- II. $a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 16 = 1$
- III. $a_0 + a_1 \cdot 7 + a_2 \cdot 49 = 1$

Az egyenletrendszerből a három együtthatót kiszámolva és behelyettesítve a polinom általános egyenletébe megkapjuk az interpoláló függvényt, amit az x bármely helyén használhatunk a változó értékének becslésére.

$$p(x) = 37/9 - 11 \cdot x/9 + x^2/9$$

Ellenőrzésképp kiszámolhatjuk az egyik kontrollponton a függvényt (valóban egzakt-e a módszer?), pl. az $x=4$ helyen:

$$p(x) = 37/9 - 44/9 + 16/9$$

$$p(x) = 9/9 = 1$$

Segítség a polinom egyenletrendszerének mátrix-módszerrel való megoldásához

3x3 mátrixok invertálása

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23} & a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12} & a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13} \\ a_{31}a_{23} - a_{33}a_{21} & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11} \\ a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} & a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}.$$

ahol

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{33}a_{22} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})$$

Mátrix szorzása:

Examples

Suppose

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

using the inner product approach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 2b + 3c & 1d + 2e + 3f \\ 4a + 5b + 6c & 4d + 5e + 6f \\ 7a + 8b + 9c & 7d + 8e + 9f \end{pmatrix}$$

18. ábra Az előző ábra feladatának megoldása Gauss-eliminációval, egyenletrendszerrel, vagy mátrixok szorzásával jön ki. Utóbbihoz ad segítséget a jelenlegi ábra.

Közelítő polinom-függvények, avagy a sztochasztikus modell

Polinomiális interpoláció (1D sztochasztikus módszer)

Legkisebb négyzetek módszere: Olyan polinom függvényt keresünk amiben a kontrolpontokon mért érték (x_i) és a $\mathbf{p(x)}$ polinom ugyanazokon a helyeken felvett értéke közti különbségek négyzete a teljes adatmezőre vonatkoztatva minimális, azaz „*minimalizáljuk a különbségek négyzetét*”

A regressziós függvényt a Gauss-féle **normál egyenletekből** számoljuk ki. Az egyenletek a-együtthatóinak száma a polinom fokától függ (m), annál egyel több. A lehetséges egyenletek száma: N (egyben a polinom lehetséges legnagyobb foka is) N az adatmező mérete (azaz a kontrolpontok száma -1) $m=0,1,\dots,N$ a polinom rendűségének száma (ha $m=1$ akkor lineáris függvénnyel közelítünk, ha $m=N$, akkor determinisztikus polinomiális interpolációról beszélünk).

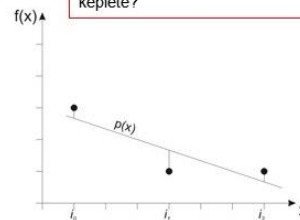
$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^m &= \sum_{i=0}^N f_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^N x_i + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^N x_i f_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^N x_i^m f_i. \end{aligned}$$

A normálegyenletek általános képlete a különbségek négyzetösszegének az a, együtthatók szerinti parciális deriváltjainak a 0-helyen való értelmezéséből vezethető le (Gauss-Markov tétel).

Példa (N=2):

i	x_i	$f(i)$
0	1	3
1	4	1
2	7	1

Kérdés: $m=1$ és $m=2$ esetén mi a $p(x)$ közelítő függvény képlete?



19. ábra A polinomiális interpoláció nem egzakt sztochasztikus módszere, más néven a legkisebb négyzetek módszere.

Gauss-Markov tétel

Minimalizáljuk a négyzetösszeget:

$$D(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=1}^N \left(f_{(j)} - \sum_{i=0}^m a_i x_j^i \right)^2$$

Megfigyelési értékek

Keresett polinom

A minimum lokális, helyét a parciális deriváltak nulla helye adja.
Deriváljunk a_k szerint ($k=0,1,\dots,m$):

$$\frac{\partial D}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=1}^N \left(f_{(j)} - \sum_{i=0}^m a_i x_j^i \right) x_j^k = 0$$

Ebből lesz $m+1$ egyenlet,
azaz egy $m+1$ ismeretlenes
lineáris egyenletrendszer.

$$\sum_{i=0}^m a_i \sum_{j=1}^N x_j^{i+k} = \sum_{j=1}^N f_{(j)} x_j^k \quad k=0,1,\dots,m$$

20. ábra A Gauss-Markov tétel, ami a legkisebb-négyzetek módszerének alapja.

A 19. ábra feladata ugyanazokat a változóértékeket tartalmazza, mint a korábbi feladat, de az interpoláló függvény ezúttal egy lineáris modellt követ, ami azt jelenti, hogy a keresett polinom elsőfokú lesz. Az ábra bonyolult általános képlete emiatt leegyszerűsödik:

- I. $a_0 \cdot 3 + a_1 \cdot 12 = 5$
- II. $a_1 \cdot 12 + a_2 \cdot 66 = 14$

Az egyenesként ábrázolható polinom függvény képlete pedig:

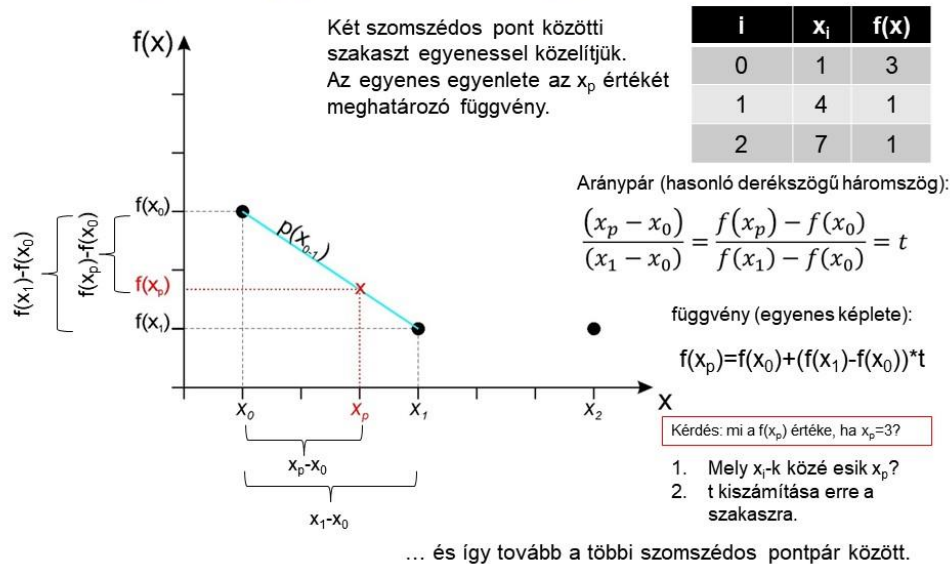
$$p(x) = 3 - x/3$$

A lineáris modell

A lineáris modell a legegyszerűbb és legrégebben használt interpolációs módszer. Lényegében egy változó és két együttható, azaz két monom segítségével felírható a lineáris függvény képlete; ez a legegyszerűbb polinom. Ebből az is következik, hogy a változónak sosem magasabb hatványa, mint egy, továbbá, hogy két ismert kontrollpontra is fel tudjuk már írni a függvényt. Ha egy adatmező több kontrollpontból áll, de nem akarunk sem sztochasztikus módszereket, sem magasabb rendű polinom függvényeket használni, akkor az adatmezőt fel kell bontanunk szakaszokra, ahol páronként vizsgálva a kontrollpontokat azok között lineáris függvénykapcsolatot határozhatunk meg.

Ez a módszer 1D-ben (21. ábra), 2D-ben (TIN-modell) és 3D-ben is működik, és főleg a két utóbbiban elterjedt mivel nagyon gyors modellezést tesz lehetővé.

Szakaszos lineáris interpoláció



21. ábra Szakaszos lineáris interpoláció 1D-ben.

A 21. ábra példája ugyanazt az adatmezőt mutatja be mint a korábbi polinomiális módszerekhez kapcsolódó példák. A feladathoz felírható egyenlet a következő:

$$f(x_p) = f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0)) \cdot t$$

ahol t a szakasz osztási aránya, ami a derékszögű háromszögek hasonlósági tétele miatt azonos lesz az x -változókra és a hozzájuk tartozó függvényértékre is. A t arányt mindig azon pontpár között számítjuk ki, amelyek közé a keresett hely esik. Adott esetben ez az x_0 és x_1 helyeket jelenti.

A keresett $x=3$ ponton az x_0 és x_1 helyek közé meghatározott lineáris függvény alapján tehát:

$$t = (3-1)/(4-1) = 2/3$$

és

$$f(x_p) = 3 + (1-3) \cdot 2/3 = 1 \frac{2}{3} = 1,666$$

Gyakorlófeladatok 1D interpolációkra

A térképész sokszor csak azt az instrukciót kapja, hogy bizonyos adatokból szerkesszen meg egy térképet, amit aztán felhasználhatnak kiadványokhoz, tanulmányokhoz, jelentésekhez, stb. Ilyenkor – ha más nem dönti el – a térkép szerkesztőjének felelősége, hogy a legoptimálisabb módon dolgozza fel az adatokat. A feldolgozási módszerek közé tartozik az interpoláció is, amit ha helytelenül választunk meg, komoly következményekkel is járhat. A következő feladat ennek lehetőségét szemlélteti.

Gyakorló feladatok

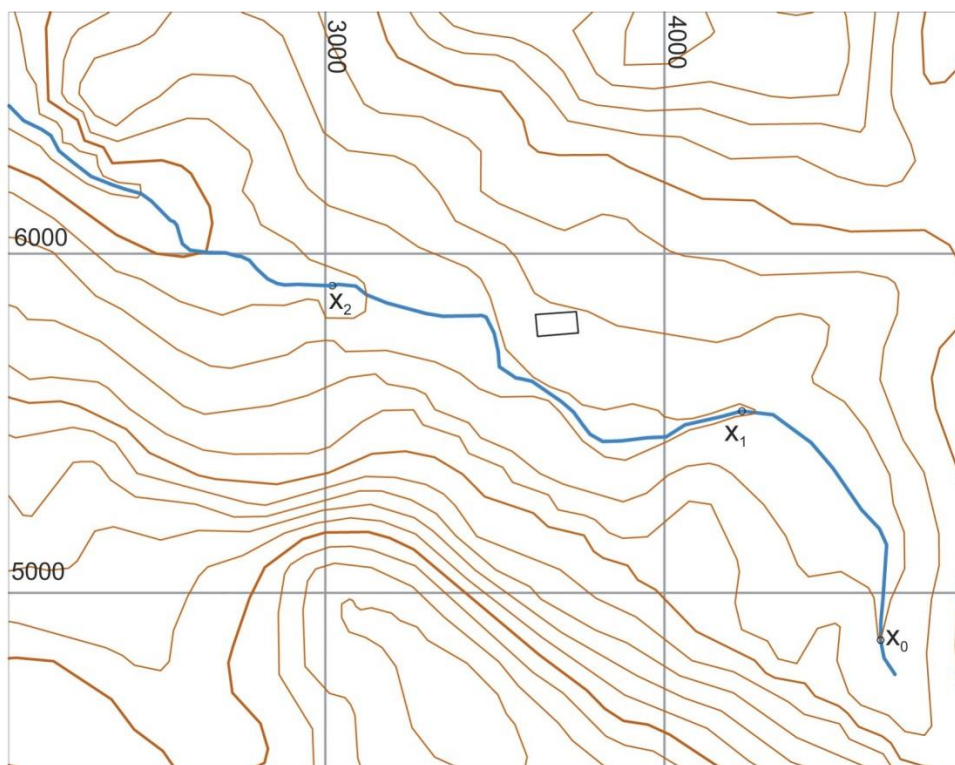
i	táv. [m]	TOC [%]
	x	f(x)
0	100	2
1	800	9
2	1500	21

A patak mentén három ponton mérték a vízminőséget (TOC %). Honnan lehet a patakból ivóvizet venni, ha a minőségi kritérium 5% (TOC)?

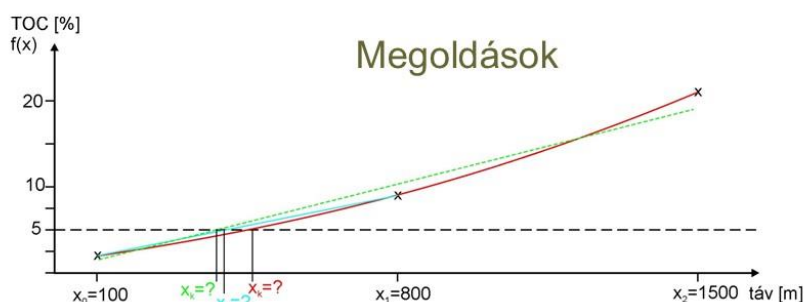
- A forrástól számított távolság függvényében grafikonon ábrázold a x_0 , x_1 , x_2 pontokon mért szennyezés-értékeket.
- Határozd meg a forrástól való távolságát az 5%-os küszöbértéknek a következő interpolációs módszerekkel:
 - módszer (polinom illesztése az összes - 3 - pontra) - [globális determinisztikus módszer - másodfokú polinom]
 - módszer (egyenes szakaszok illesztése a pontpárookra) - [lineáris interpoláció t-paraméteres egyenletekkel]
 - módszer (lineáris közelítés a pontokra) - [legkisebb négyzetek módszerével - egyenes illesztése: elsőfokú polinom]

Ábrázold a grafikonon a különböző eredményeket!

22. ábra Gyakorló feladat 1D interpolációra



23. ábra A feladathoz tartozó terület térképe a három mintavételi ponttal



Megoldások

1. módszer: polinomiális interpoláció (globális 1D determinisztikus módszer)

Felírjuk minden ismert pontra a keresett polinom egyenletét:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 &= f(x_0) & a_0 + a_1 100 + a_2 10000 &= 2 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 &= f(x_1) & a_0 + a_1 800 + a_2 640000 &= 9 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 &= f(x_2) & a_0 + a_1 1500 + a_2 2250000 &= 21 \end{aligned}$$

Kiszámítjuk az a-együtthatókat a következő módszerek valamelyikével:

a) az egyenletrendszer megoldásával

b) Gauss-eliminációval

c) mátrix determinánsának meghatározásával

$$a_0 = 1,408163265$$

$$a_1 = 0,005408163$$

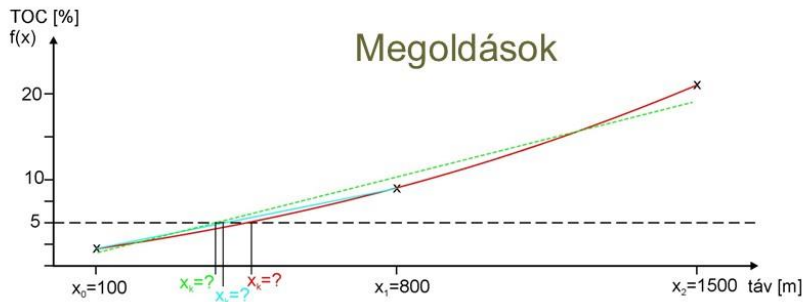
$$a_2 = 0,000005102$$

Az együtthatók ismeretében megoldjuk a másodfokú egyenletét az ismert függvényérték behelyettesítésével:

$$a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 = f(x_k) \quad \text{azaz: } a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 = 5$$

$$x_k = 462,4213$$

24. ábra A feladat megoldása polinomiális interpolációval, determinisztikus módszerrel.



2. módszer: lineáris interpoláció (lokális 1D determinisztikus módszer)
 Felírjuk két ismert pontra* az egyenes paraméteres egyenletét:

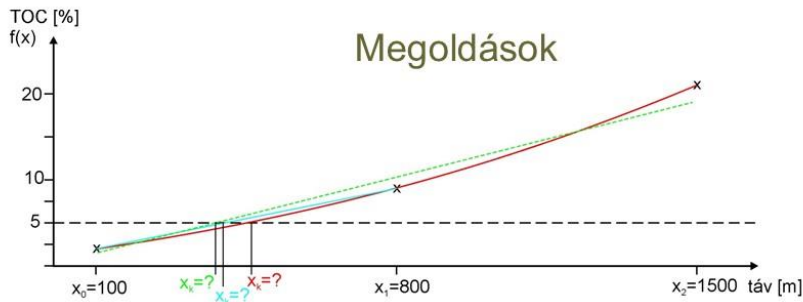
$$x_k = x_0 + (x_1 - x_0)t_k \quad \Rightarrow \quad x_k = 100 + (800 - 100)t_k$$

$$f(x_k) = f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0))t_k \quad \Rightarrow \quad 5 = 2 + (9 - 2)t_k$$

*a két pont legyen szomszédos és lehetőleg az ismert $f(x_k)$ -t fogják közre.

$$x_k = 400$$

25. ábra A feladat megoldása szakaszos lineáris interpolációval.



3. módszer: polinomiális interpoláció (globális 1D sztochasztikus módszer)
 Felírjuk az első fokú Gauss-féle normálegyenleteket ($i=0,1,2$):

$$a_0 \sum x_i^0 + a_1 \sum x_i^1 = \sum f(x_i) \quad \Rightarrow \quad a_0 \cdot 3 + a_1 \cdot 2400 = 32$$

$$a_0 \sum x_i^1 + a_1 \sum x_i^2 = \sum f(x_i) x_i^1 \quad \Rightarrow \quad a_0 \cdot 2400 + a_1 \cdot 2900000 = 38900$$

Kiszámítjuk az a -együtthatókat a következő módszerek valamelyikével:

- a) az egyenletrendszer megoldásával
 - b) Gauss-eliminációval
 - c) mátrix determinánsának meghatározásával
- $$\Rightarrow \quad a_0 = -0,19047619$$
- $$a_1 = 0,013571429$$

Az együtthatók ismeretében megoldjuk a másodfokú egyenletét az ismert függvényérték behelyettesítésével:

$$a_0 + a_1 x_k = f(x_k) \quad \text{azaz:} \quad a_0 + a_1 x_k = 5$$

$$x_k = 382,4561$$

26. ábra A feladat megoldása legkisebb négyzetek módszerével.

A különböző módszerrel számított eredmények között 80 m eltérés is lehet. Ha a térképen látható épület vonatkozásában vizsgáljuk a kérdést, fontos lehet, hogy esetleg a vízvételi

hely alatt, vagy fölött található-e a határérték. Adott esetben a jó megoldás a 24. ábra, mivel a legmagasabb fokú polinommal dolgozott kevés adatpontból.

További gyakorlatok:

1. Egy mélyfúrásban három mélységben mérték a víz nitrát tartalmát: 30, 80 és 120 méter mélységben. Az értékek rendre 80, 70 és 15 mg/l.
Milyen mélységben csökken a nitrát tartalom az 50 mg/l határérték alá? A számításhoz a három pontra illesztett determinisztikus modellt alkalmazza!
2. Egy mélyfúrásban három mélységben mérték a víz nitrát tartalmát: 20, 80 és 120 méter mélységben. Az értékek rendre 85, 70 és 15 mg/l.
Milyen mélységben csökken a nitrát tartalom az 50 mg/l határérték alá? A számításokhoz közelítő lineáris modellt alkalmazzon a legkisebb négyzetek módszerével!
3. Egy mélyfúrásban három mélységben mérték a víz nitrát tartalmát: 5, 42 és 75 méter mélységben. Az értékek rendre 85, 42 és 15 mg/l.
Milyen mélységben csökken a nitrát tartalom az 50 mg/l határérték alá? A számításhoz a szakaszos lineáris modellt alkalmazza!

LINEÁRIS INTERPOLÁCIÓ 2D-BEN ÉS 3D-BEN

A lineáris interpoláció legtöbbet használt módszere a 2D-s TIN háló élei mentén történő értékkeresés, vagy egy adott értékhez pl. szintvonal magasságához, hely keresése. A lineáris interpoláció magasabb térdimenziói ugyanazon elvek szerinti összefüggéssel számíthatók, mint az egyváltozós (1D-s) esetben. A képlet 2D-ben csak annyiban változik, hogy a:

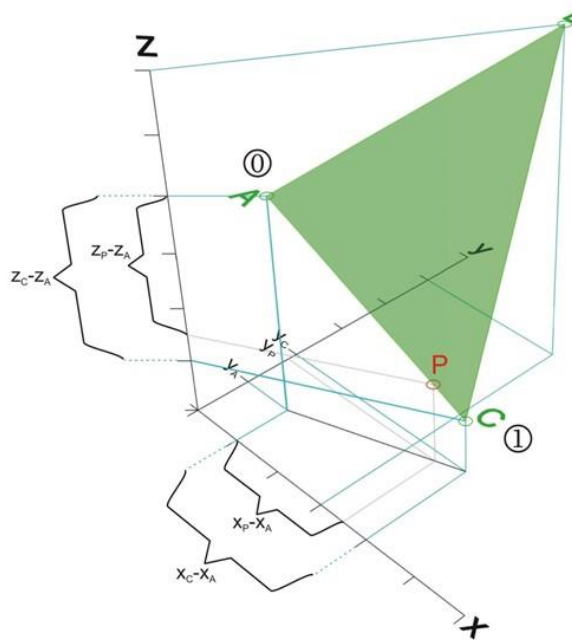
$$f(x_p) = f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0)) \cdot t$$

képletet

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot t$$

formában írjuk fel. Ez az összefüggés a három egymásra merőleges tengely mentén is érvényes, ha két térbeli pont közti szakaszra interpolálunk (27. ábra).

Pontérték számítása lineáris interpolációval (3D)



ABC háromszög oldalai térbeli egyenesek, amelyekre felírhatók:

$$x_P = x_0 + (x_1 - x_0)t$$

$$y_P = y_0 + (y_1 - y_0)t$$

$$z_P = z_0 + (z_1 - z_0)t$$

Az x_P , y_P és z_P a keresett P pont koordinátái és a 0-1 alsóindexek a szakasz kezdő és végpontjának koordinátáit jelölik.

A t aránytényező a szakasz egészének és egy tetszőleges részletének a hányadosa, ami minden irányból azonos.

$$t = \frac{(x_P - x_A)}{(x_C - x_A)} = \frac{(y_P - y_A)}{(y_C - y_A)} = \frac{(z_P - z_A)}{(z_C - z_A)}$$

27. ábra Lineáris interpoláció 3D-ben

Látható az ábra alapján, hogy a változóértékek egymástól való függését a t aránytényező kapcsolja össze. A t -értéke egy adott szakaszra vonatkozóan ugyanis állandó. Másképp fogalmazva a t paraméter azt a helyet jelöli, ahol a keresett pont a szakaszt elmettzi.

Szintvonalmetszéspont keresése térbeli egyeneseken

Szintvonalmetszéspontok keresése (TIN)

p=kontrollpontok betűjele

Keressük az 5-ös szintvonalat.

K-pont és M-pont a szintvonal és a háromszög BC, illetve AB oldalainak metszéspontja. Emiatt mindkettő Z-je 5.

$$x_K = x_C + (x_B - x_C) \cdot t_K$$

$$y_K = y_C + (y_B - y_C) \cdot t_K$$

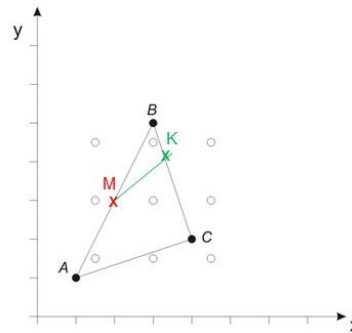
$$z_K = z_C + (z_B - z_C) \cdot t_K \rightarrow t_K \text{ kifejezhető, } y_K \text{ és } x_K \text{ kalkulálható}$$

$$x_K = ?$$

$$y_K = ?$$

Ugyanígy A és B pontokra felírva az egyenleteket kifejezhető t_M és kiszámolható x_M illetve y_M .

p	x	y	z(x,y)
A	1	1	4
B	3	5	6
C	4	2	1
K	?	?	5



28. ábra Szintvonal helyének meghatározása egy térbeli háromszögben.

A 28-as ábra feladata a geoinformatikában nagyon gyakori műveletet bont részleteire: ez a TIN modell alapján szerkesztett szintvonalak szerkesztése. Az adatok és a felülnézeti kép koordinátái megegyeznek a 27-es ábrán látható térbeli alakzatéval. A feladat során célunk az M és a K ismert magasságú ($z=5$) pontok x és y koordinátáinak kiszámítása. Megfelelő értékek behelyettesítésével a következő értékek adódnak:

$$f(x_p) = f(x_o) + (f(x_i) - f(x_o)) \cdot t$$

Ezt az alapösszefüggést adott esetben a z -értékekre érdemes felírni M és K-pontokban, mivel azok ismertek. A K pont esetében a B és C pont közti szakaszra alkalmazzuk az összefüggést (adott esetben C-kezdőponttal):

$$z_K = z_C + (z_B - z_C) \cdot t_K$$

Azaz:

$$5 = 1 + (6 - 1) \cdot t_K$$

$$t_K = 4/5$$

Ebből már az x_K és y_K értékét is ki tudjuk számítani:

$$x_K = x_C + (x_B - x_C) \cdot t_K$$

$$y_K = y_C + (y_B - y_C) \cdot t_K$$

A számítások eredményeként megkapjuk a K pont koordinátáit ($x_K=3,2$ $y_K=4,4$). Az M pont esetében hasonló módon járunk el, csak itt az A és a B pont közti szakaszra írjuk fel az összefüggést (eredmény: $x_M=3$ $y_M=2$). A szakasz bármelyik végpontját kiválaszthatjuk „kezdőpontként” de ügyeljünk rá, hogy a számítások során a kiválasztott sorrendet következetesen tartsuk meg!

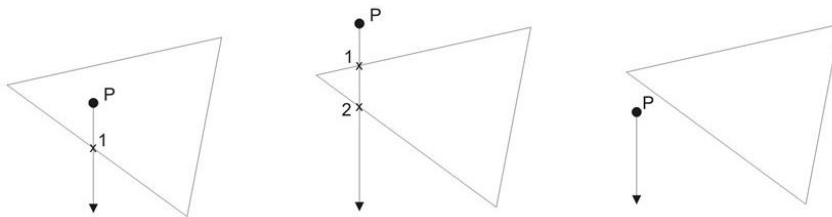
További gyakorlatok:

1. Hol fogja metszeni az y tengelyt az 5-ös szintvonal a 28-as ábra feladatán?
2. Milyen algoritmust lehet alkalmazni a TIN felbontás minden elemének feldolgozására szintvonalyszerkesztéskor?

Pont értékének keresése térbeli háromszögben lineáris interpolációval

A TIN-hálókhoz kapcsolódó másik gyakori művelet a geoinformatikában a szabálytalan adatelrendezésből szabályosba való áttérés. Ennek során egy pontrácsot fektetünk a szabálytalan háromszögek hálózatára és kiszámítjuk a TIN háló csomópontjaiban található adatpontok alapján a rács (angolul grid) csomópontjainak értékét. Ez is egy topológiai módszer, hiszen a számításhoz tudnunk kell, hogy a keresett pont mely háromszögbe esik (29. ábra).

A háromszögbe eső pontok keresése



Pontból indított egyenes és a háromszög oldalainak metszéspontjainak számából megállapítható a bennfoglalás.

1 metszéspont = a pont a háromszögben van

0 vagy 2 metszéspont = a pont a háromszögön kívül van

29. ábra Pont és zárt alakzat topológiai viszonyainak meghatározása.

Pontérték számítása lineáris interpolációval (3D)

p=kontrollpontok betűjele

P-pont z-értékének keresése az ABC háromszög alkotta síkon 3 lépésben:

- 1) Segédpont keresése a háromszög egy tetszőleges oldalán, a keresett pont x, vagy y-koordinátájának értékén.
- 2) Második segédpont keresése egy második oldalon a keresett pont előző segédpontnál használt koordinátájának értékén.
- 3) A keresett pont z-értékének számítása a két segédpont közti szakaszon az előzőekben nem használt koordinátájának értékén.

p	x	y	z(x,y)
A	1	1	4
B	3	5	6
C	4	2	1
P	3	3	?

Felírom az egyenletet az egyik oldal és a keresett rácsponton átmenő, egyik tengellyel párhuzamos, másikra merőleges egyenes metszésére:

$$x_M = x_A + (x_B - x_A) \cdot t_M$$

$$y_M = 3 = y_A + (y_B - y_A) \cdot t_M \rightarrow t_M \text{ kifejezhető, } z_M \text{ és } x_M \text{ kalkulálható}$$

$$z_M = z_A + (z_B - z_A) \cdot t_M$$

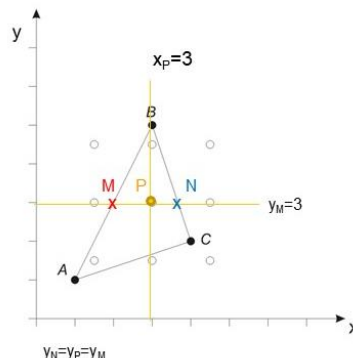
Ugyanígy B és C pontokra felírva az egyenleteket kifejezhető t_N és z_N illetve x_N

Végül M és N pontokra felírható egy hasonló képlet:

$$x_P = 3 = x_N + (x_M - x_N) \cdot t_P \quad t_P \text{ kifejezhető, } z_P \text{ kalkulálható}$$

$$y_P = 3 = y_N + (y_M - y_N) \cdot t_P$$

$$z_P = z_N + (z_M - z_N) \cdot t_P$$



30. ábra Pontérték számítása lineáris interpolációval segédpontok használatával.

Pontértékek számításakor ugyanazokat az összefüggéseket alkalmazhatjuk, mint a szintvonal keresésekor (l. előző fejezet). Itt azonban a keresett pont helye (x és y koordinátája) ismert nem pedig a magassági értéke. A módszer lényege, hogy a keresett P pont y értékével megegyező y-értékkel rendelkező pontokat keresünk a háromszög élein (M és N), majd miután kiszámoltuk ezek magasságát, felhasználjuk őket a keresett pont magasságértékének kiszámítására. Az M-P-N így egy $y=3$ értékű, x-tengellyel párhuzamos segédvonalon helyezkedik el. A P pont x-értékét is tekinthetjük a segédvonalat meghatározó értéknek ($x=3$), ami ebben az esetben az y-tengellyel lesz párhuzamos (l.: 30. ábra). Adott feladatnál mindkét módszerrel elég csak egy segédpontot kiszámítani, mivel az előző fejezetben az M-helyét már megkaptuk ($y_M=3$), illetve a B-csúcspon is használható erre a célra ($x_B=3$). Az N-pontra a B-C szakaszon keressük a z_N értékét az általános lineáris összefüggés felírásával:

$$y_N = y_C + (y_B - y_C) \cdot t_N$$

azaz:

$$3 = 2 + (5 - 2) \cdot t_N$$

$$t_N = 1/3$$

Ennek segítségével már x_N és z_N is kiszámítható:

$$x_N = x_C + (x_B - x_C) \cdot t_N = 4 + (3 - 4) \cdot 1/3 = 11/3$$

$$z_N = z_C + (z_B - z_C) \cdot t_N = 1 + (6 - 1) \cdot 1/3 = 8/3$$

Az ismert x, y, z koordinátájú M(2, 3, 5) és a kiszámított N(11/3, 3, 8/3) alapján a velük egy egyenesen lévő P-re is felírható az összefüggés:

$$x_P = x_M + (x_N - x_M) \cdot t_P$$

azaz:

$$3 = 2 + (11/3 - 2) \cdot t_P$$

$$t_P = 3/5$$

Végül ennek segítségével a z_P is kiszámítható:

$$z_P = z_M + (z_N - z_M) \cdot t_P = 5 + (8/3 - 5) \cdot 3/5 = 18/5 = 3,6$$

Ennél azonban van gyorsabb módszer is a pont magassági értékének számítására a térbeli háromszög síkjában, ez pedig a sík illesztésének determinisztikus módszere.

Sík illesztése három pontra

Sík illesztése 3 pontra polinommal

p=kontrollpontok betűjele

Az elsőrendű trend-sík egy pontjához rendelt z-érték általános képlete:

$$z_{x,y} = b_0 + b_1x + b_2y$$

Ez azt jelenti, hogy a sík magassága minden pontban ugyanolyan szabály szerint függ az xy-től.

$z_A = b_0 + b_1x_A + b_2y_A$
 $z_B = b_0 + b_1x_B + b_2y_B$
 $z_C = b_0 + b_1x_C + b_2y_C$

a) Számold ki az együtthatókat!
 b) Add meg a z=5 szintvonal egyenesének egyenletét y=f(x) függvényként!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

„b” oszlop mátrix elemeit keressük

b=A⁻¹z

TIN-adatmodellben jól alkalmazható módszer.

p	x	y	z(x,y)
A	1	1	4
B	3	5	6
C	4	2	1
P	3	3	?

31. ábra Sík illesztésének determinisztikus módszere.

A sík illesztés a sík egyenletét használja fel a keresett pont értékének számításához. Az egyenlet a sík minden pontjára érvényes összefüggés, és három együtthatója van (b_0 , b_1 , b_2), továbbá alapesetben a háromszög csúcspontjaira tudjuk felírni (l.: 31. ábra). Az ismert

pontok adják meg annak lehetőségét, hogy az együtthatókat kiszámoljuk, majd a sík tetszőleges helyein (pl. a grid pontjain) a magassági értéket kiszámítsuk. A 31-es ábrán látható feladat háromszöge és P pontja megegyezik a korábbi fejezet feladatának paramétereivel, így összevethető a két megoldás. Első lépésként a sík általános egyenletét írjuk fel a csúcspontokra:

$$z_A = b_0 + b_1 \cdot x_A + b_2 \cdot y_A \quad 4 = b_0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1$$

$$z_B = b_0 + b_1 \cdot x_B + b_2 \cdot y_B \quad 6 = b_0 + b_1 \cdot 3 + b_2 \cdot 5$$

$$z_C = b_0 + b_1 \cdot x_C + b_2 \cdot y_C \quad 1 = b_0 + b_1 \cdot 4 + b_2 \cdot 2$$

Az együtthatók kiszámításához a Gauss-elimináció módszere a legpraktikusabb (32. ábra).

2	1	1	1	4	5	1	1	1	4
	0	2	4	2		0	1	2	1
	0	3	1	-3		0	0	1	1.2
3	1	1	1	4	6	1	0	-1	3
	0	3	6	3		0	1	0	-1.4
	0	3	1	-3		0	0	1	1.2
4	1	1	1	4	7	1	0	0	4.2
	0	3	6	3		0	1	0	-1.4
	0	0	-5	-6		0	0	1	1.2

32. ábra A 31-ábra feladatához tartozó egyenletrendszer megoldása Gauss-eliminációval. Az ábrán az együtthatók szorzatának (A) és a függvényértékek (z) mátrixával végzett közös műveletek láthatók a levezetés 2. lépésétől, amikor már a 2. és 3. sorból kivontuk az első.

A számítás eredményei ($b_0=4,2$; $b_1=-1,4$; $b_2=1,2$) felhasználhatók a P-pont értékének kiszámításához:

$$z_P = b_0 + b_1 \cdot x_P + b_2 \cdot y_P \quad z_P = 4,2 - 1,4 \cdot 3 + 1,2 \cdot 3 \quad z_P = 3,6$$

Az eredmény tehát megegyezik azzal, amit a 30. ábra feladatánál kaptunk. Fontos különbség viszont – különösen adatfeldolgozási szemszögből – hogy ez utóbbi módszerrel az együtthatók ismeretében csak annyit kell tennünk más pontok számításakor, hogy azok x, y koordinátáit helyettesítjük be az egyenletbe. Ellenben a korábbi módszerrel, ahol szinte minden pont esetében új segédegyeneseket kell kijelölnünk, és a belső pontok számítása emiatt nehezebb (33. ábra).

Műveleti sorrendek összehasonlítása

Egyenesek illesztése

Viszonylag könnyen automatizálható, de az eljárásokba többszintű ciklusokat kell beépíteni.

- 1) Találja meg a háromszögbe eső (P_i) rácspontokat
 - 2) Keresse meg az ismeretlen ponthoz tartozó (x) tengely-párhuzamos egyenest metsző háromszög oldalakat.
 - 3) Számítsa ki a metszéspontok x és z értékeit
 - 4) Számítsa ki a P pont z értékét
- Ha több azonos y -értékű pontom van, akkor a 4-es eseményt iterálom.
 - A 2-es eseménytől iterálni kell minden új y -értékű pontra.

Sík illesztése

Ha ezt a módszert használjuk, akkor gyorsabb kiszámítani egy tetszőleges koordinátájú pont értékét, mint az egyenesek módszerével. Nem kell túl sok ciklussal bonyolítani az algoritmust.

- 1) Találja meg a háromszögbe eső (P_i) rácspontokat.
 - 2) Számítsa ki a P_i pont z értékét
- A 2-es eseményt kell csak iterálni minden i -edik pontra.



Gyorsabb eljárás!

33. ábra Műveleti sorrendek összehasonlítása a háromszögekben belüli pontérték-számításokkor. A baloldalon a lineáris interpoláció módszere segédpontok felhasználásával, jobboldalon a sík egyenletének felhasználásával terveztük a feldolgozási műveletek sorrendjét.

Szintén egyszerű az együtthatók segítségével a $z=5$ szintvonal pontjainak számítása. Ha például az y -tengellyel való metszésére vagyunk kíváncsiak (l. korábbi „szintvonalkeresés” fejezet további feladatai), akkor a következő módon írhatjuk fel a formulát:

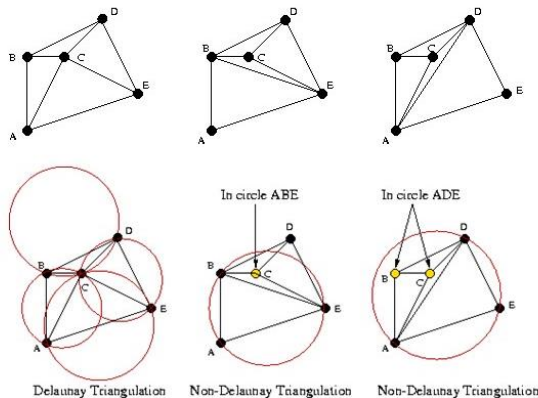
$$z_p = b_0 + b_1 \cdot x_p + b_2 \cdot y_p \quad 5 = 4,2 - 1,4 \cdot x_{p+1,2} + 0 \cdot x_p = 0,57$$

A szabálytalan háromszögháló TIN meghatározása

Láthattuk, hogy a geoinformatika szemszögéből tekintve a TIN és a rácsháló adatmodellek (pl.: Elek 2006) közti átjárhatóság több úton is megoldható, de eltérő számítási igénnyel. Ugyanez igaz az izovonalak (szintvonalak) előállítására is: többféle módszer létezik, de egyik leggyorsabb a nyers adatokból (TIN) élek mentén történő lineáris interpoláció.

A háromszögháló elrendeződése az adatpontokból jön létre a Delaunay-háromszögelés révén. Ez olyan háromszögeket keres az adatmezőben, amelyekre igaz lesz, hogy a köré írt kör (2D), vagy gömb (3D) nem tartalmaz egyetlen másik adatpontot sem. Ezzel a szabálytalan elrendezésű pontok egyértelmű szabálytalan háromszögekre (2D), illetve tetraéderekre (3D) bontása megoldható. A háromszögháló keresésekor a GIS alkalmazás a keresőalgoritmus során felépíti azt a háromszögek/(tetraéderek) háttéradatbázisát, amit a topológiai interpolációs módszereknél felhasználhatunk (34. ábra).

Háromszögek keresése



Tetszőleges elrendezésű pontok háromszögek hálózatává alakítása:

- 1) Tetszőleges szakasz kiválasztása
- 2) Tetszőleges harmadik pont kiválasztása
- 3) A 3 pont köré írt kör és a többi pont viszonyának vizsgálata.
- 4) Háromszög elvetése, ha van a körön belül pont. (visszatérés a 2-es lépéshez)
- 5) Háromszög megtartása, ha nincs. Egyik oldalával tovább ismételni a műveletet, amíg lehet.

34. ábra A Delaunay-háromszögelés és egy lehetséges munkamenet a háromszögek keresésére.

A háromszögháló mint adatmodell akkor is alkalmazható, ha már az adataink szabályos háló-elrendezésben (gridben) vannak, ez azonban több szempontból sem javasolt. Egyik, hogy a TIN felbontása egy szabályos négyzetnek két megoldást is adhat, így nem egyértelmű, hogy a két keletkező háromszög melyik átlón érintkezik egymással. Ezen kívül az TIN adatmodell is feleslegesen terheli a rendszert mivel egy külön adattáblát kell fenntartani a háromszögek azonosítására. A rácsháló pontjai önálló rekordként elegendő alapot adnak további interpolációkhoz és adatelemzésekhez. Az egyik leggyakoribb ilyen művelet a bilineáris interpoláció.

Bilineáris interpoláció

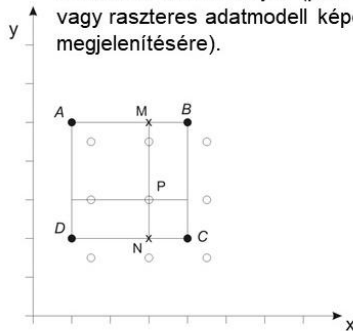
Az ismeretlen pont értékét két különböző irányú lineáris interpolációval állapítjuk meg a síkban. Az irányok többnyire az Euklideszi tér két egymásra merőleges (pl.: az x és y) tengelye. A lineáris interpolációkat az ismeretlen ponthoz közeli ismert kontrollpontok között végezzük el két lépésben. Először az egyik irányban, majd a kapott eredmények segítségével a másik irányban. A becült érték mindkét esetben a kontrollpontoktól való távolsággal egyenes arányban áll.

Ez a módszer nagyon gyors számításokat tesz lehetővé, mivel már rácshálóban tárolt adatokra alkalmazzuk, és nincs szükség másra, csak a pontok adataira az elemzés közben. Emiatt még a TIN-háló-alapú szintvonalszámításnál is gyorsabb, mivel nem kell a háromszögek adattábláját lekérdezni az elemzés során. A bilineáris interpoláció nagy mennyiségű adat előzetes elemzésére, vagy gyors megjelenítésére igen alkalmas. Tipikus

felhasználása a raszteres modellek képernyőn való megjelenítése (képpontok értékeinek számítása), raszteres adatok újra-mintavételezése.

Bilineáris interpoláció egyenesekkel

A bilineáris interpolációt már gridben tárolt adatok elemzéséhez használjuk (pl. a felbontás átszámítására, vagy raszteres adatmodell képernyőn történő megjelenítésére).



p=kontrollpontok betűjele

p	x	y	z(x,y)
A	1	5	4
B	4	5	6
C	4	2	1
D	1	2	2
P	3	3	?

Számítsd ki z_p értékét!

Ugyanazzal a számítási módszerrel dolgozhatunk, mint szabálytalan elrendeződés (háromszögek) esetén:

$$Z_N = Z_D + \left[(Z_C - Z_D) \frac{(X_N - X_D)}{(X_C - X_D)} \right]$$

$$Z_M = Z_A + \left[(Z_B - Z_A) \frac{(X_M - X_A)}{(X_B - X_A)} \right]$$

$$Z_P = Z_M + \left[(Z_N - Z_M) \frac{(Y_M - Y_P)}{(Y_M - Y_N)} \right]$$

Számold ki DBC-háromszögre is z_p értékét lineáris interpolációval!

35. ábra Bilineáris interpoláció rácspontok számításához.

A 35-ös ábra feladata egy tipikus geoinformatikai probléma, a rácsháló-felbontás megváltozása miatt elvégzett interpoláció megoldását szemlélteti. Az alkalmazott matematikai formula a lineáris modell (l. korábbi fejezet), amit adott esetben M és N segédpontokra, majd második lépésben a P pontra írunk fel. M segédpont az A-B szakaszon van és mivel szabályos rácshálóról beszélünk, ezért az $y_M = y_A = y_B$. Tehát a t aránytényezőt az x koordinátákból számoljuk ki:

$$X_M = X_A + (X_B - X_A) \cdot t_M \quad \text{azaz: } 3 = 1 + (4 - 1) \cdot t_M$$

$$t_M = 2/3$$

Mivel az N segédpont ugyanilyen arányban metszi a D-C oldalt, ezért a $t_N = t_M = 2/3$ egyenlőség szintén fennáll (feltéve, hogy a szakaszok kezdőpontjait azonos oldalon vesszük fel). A következő lépésben a segédpontok magasságértékeit kiszámolhatjuk:

$$Z_M = Z_A + (Z_B - Z_A) \cdot t_M \quad Z_M = 4 + (6 - 4) \cdot 2/3 = 16/3$$

$$Z_N = Z_D + (Z_C - Z_D) \cdot t_N \quad Z_N = 2 + (1 - 2) \cdot 2/3 = 4/3$$

A második irányú lineáris interpolációt az M és N pontok között végezzük el. Ezek x -értéke lesz azonos, így a t arányértéket az y koordinátákból számoljuk:

$$y_P = y_M + (y_N - y_M) \cdot t_P \quad \text{azaz: } 3 = 5 + (2 - 5) \cdot t_P$$

$$t_P = 2/3$$

Végül a P pont magasságértékét is kiszámítjuk:

$$z_P = z_M + (z_N - z_M) \cdot t_P \quad z_P = 16/3 + (4/3 - 16/3) \cdot 2/3 = 8/3$$

Többi rácspont számítása – a nagyfokú szabályosság miatt – gyorsan megoldható, részben a már kiszámított adatok újra-felhasználhatósága miatt (pl.: a t aránytényezők az egész adatmezőben csak 2-2 értéket vehetnek fel irányonként adott esetben).

A TIN-háló és a grid-modell közti különbség szemléltetését szolgálja a feladatnak az a része, hogy számoljuk ki a DBC-háromszögre mint térbeli síkra is a P pont z -értékét. Az eredmény ($z_P=3$) alapján egyértelmű, hogy más a két módszer!

További gyakorlatok:

1. Milyen felületforma az ABCD négyzet közti térrész?
2. Lehetne-e itt a $z = b_0 + b_1x + b_2y$ formulát használni síkillesztéshez?
3. Egy térbeli síkot meghatározó három pont a következő: A(-0,5; 1,5; 2); B(1; 3; 6); C(2,5; -1; 4).
Számítsa ki a $z=5$ magasságú pontok x, y koordinátáit az AB és BC oldalon lineáris interpolációval!
Adja meg az így kapott szintvonal egyenletét $y=a+bx$ formában!
4. Egy térbeli síkot meghatározó három pont a következő: A(-1; 2; 3); B(1; 6; 9); C(6; 3; 6).
Számítsa ki a $z=5$ magasságú pontok x, y koordinátáit az AB és BC oldalon lineáris interpolációval!
Adja meg az így kapott szintvonal egyenletét $y=a+bx$ formában!

TRENDSÍKOK, AVAGY POLINOMIÁLIS KÖZELÍTÉS SÍKKAL

Előfordulhat a geotudományok térképi ábrázolásakor, hogy a megfigyelt jelenséget egyszerű térbeli síknak tekintjük, viszont több mint három helyről van róla megfigyelt adatunk. Ilyen lehet például egy területen dokumentált kavicsterasz-maradványok (folyóvízi errózióhoz kapcsolódó morfológiai elemek) különböző magasságú előfordulása alapján meghatározható tektonikus kibillenés iránya és mértéke. A kibillentést egy azimutiránnyal és egy dőlésszöggel adjuk meg – csakúgy mint a síkokat általában. Természetesen háromnál több pontra nem tudunk illeszkedő (determinisztikus) síkot szerkeszteni! Ilyenkor egy trendsíkot határozzunk meg az adatainkból (36. ábra).

Polinomiális közelítés (síkillesztés n pontra)

Az elsőrendű trend-sík általános képlete:

$$z_{x,y} = b_0 + b_1x + b_2y$$

Az elsőrendű trend-felületet (síkot) egy elsőrendű kétváltozós polinommal közelítjük a legkisebb négyzetek módszerével (n=kontrollpontok száma).

A normál egyenletek:

$$\begin{aligned} \sum z &= b_0n + b_1\sum x + b_2\sum y \\ \sum xz &= b_0\sum x + b_1\sum x^2 + b_2\sum xy \\ \sum yz &= b_0\sum y + b_1\sum xy + b_2\sum y^2 \end{aligned}$$

Ugyanez mátrix alakban:

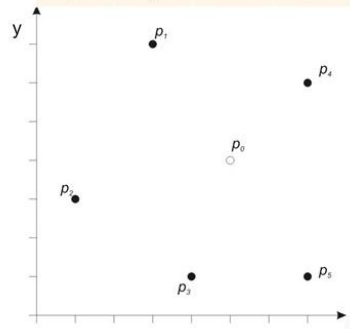
$$\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum xy \\ \sum y & \sum xy & \sum y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum z \\ \sum xz \\ \sum yz \end{bmatrix}$$

„b” oszlop mátrix elemeit keressük

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z}$$

p=kontrollpontok sorszáma (=n)

p	x	y	z(x,y)
1	3	7	21
2	1	3	11
3	4	1	10
4	7	6	15
5	7	1	11
0	5	4	?



36. ábra Trendsík szerkesztése.

A trendsík egyenlete nem különbözik a korábban alkalmazott formulától ($z_{x,y}=b_0+b_1x+b_2y$). A **b** együtthatók kiszámításához azonban minden adatpont szükséges; ennek feltételét a normálegyenletek biztosítják (36. ábra). Számítástechnikai szempontból ez a módszer csak annyiban bonyolultabb a síkillesztésnél (l.: korábbi fejezet), hogy az alapadatok koordinátáit (x, y) és értékeit (z), a koordináták négyzetét (x^2 , y^2), a koordináták és értékek szorzatát (xz, yz), és a koordináták szorzatát (xy) összesíteni kell. Ezt a geoinformatikai rendszerek nagyon gyorsan el tudják végezni, és emiatt maga a módszer is rendkívül gyors nagy adatmennyiség esetén is.

A 36-os ábra feladatának megoldásához tehát első lépésben a táblázat adatait kell összesíteni, majd behelyettesítve a megfelelő értékeket a normálegyenletekbe, kiszámítani a b_0 , b_1 és b_2 együtthatók értékét:

$$\Sigma z = b_0 \cdot n + b_1 \cdot \Sigma x + b_2 \cdot \Sigma y \quad 68 = b_0 \cdot 5 + b_1 \cdot 22 + b_2 \cdot 18$$

$$\Sigma x \cdot z = b_0 \cdot \Sigma x + b_1 \cdot \Sigma x^2 + b_2 \cdot \Sigma x \cdot y \quad 296 = b_0 \cdot 22 + b_1 \cdot 124 + b_2 \cdot 77$$

$$\Sigma y \cdot z = b_0 \cdot \Sigma y + b_1 \cdot \Sigma x \cdot y + b_2 \cdot \Sigma y^2 \quad 291 = b_0 \cdot 18 + b_1 \cdot 77 + b_2 \cdot 96$$

Az együtthatók kiszámításához ez esetben is a Gauss-elimináció módszere a legpraktikusabb. A számítás eredményei ($b_0=8,2593$; $b_1=0,0021$; $b_2=1,48$) felhasználhatók a P-pont értékének kiszámításához:

$$z_p = b_0 + b_1 \cdot x_p + b_2 \cdot y_p \quad z_p = 8,2593 + 0,0021 \cdot 5 + 1,48 \cdot 4 \quad z_p = 14,1936$$

Ezzel a formulával tehát a trendsík bármely pontján kiszámolhatjuk két változó ismeretében a harmadikat. Ez alkalmas lehet pl. metszetvonal készítéséhez is, ha a két változó nem az x, y koordináta, hanem pl.: az x és a z (x-tengellyel párhuzamos függőleges szelvény).

Dőlésirány és dőlésszög-számítás

A sík α dőlésirány és δ dőlésszög paramétereinek kiszámításához szintén az együtthatókat használjuk fel. A sík dőlésirányát és dőlésszögét a gradiens (nabla) vektorral adjuk meg amelynek komponenseit a 2D-s, vagy 3D-s függvényként értelmezett formula változó szerinti parciális deriváltjával számítjuk ki. Ha a dőlésirányra vagyunk csak kíváncsiak, akkor a z-t függvényértéknek tekintjük.

$$f_{(x,y)} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y$$

A függvény x-szerinti, és y-szerinti parciális deriváltjával a 2D-s gradiens vektor x, illetve y irányú összetevőjét kapjuk meg. Ez kijelöli a sík legnagyobb meredekségének irányát.

$$f(x,y)/\partial x = 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1$$

$$f(x,y)/\partial y = 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2$$

A dőlés iránya a legnagyobb meredekség irányával ellentétes, tehát az α kiszámításakor az együtthatók előjelét megváltoztatjuk ($\Delta x = -b_1$; $\Delta y = -b_2$) Geoinformatikai rendszerekben, illetve adatbázis kezelő programokban az atan2 függvényt használhatjuk az α azimutérték kiszámításához. Ha papíron számolunk, akkor nem használhatjuk ezt a függvényt; helyette a szokásos tangens függvényt használjuk, azonban ügyelni kell arra, hogy melyik síknegyedbe esik a gradiens vektor. Az α érték helyett ez esetben egy α' -szögértéket számolunk ki

$$\tan \alpha' = \Delta x / \Delta y$$

Adott esetben a megoldásból látható, hogy α' -re $0,08^\circ$ jött ki, de mivel a dőlésirány a 3. síknegyed felé mutat (mindkét együttható értéke negatív) ehhez még 180° -ot hozzá kell

adni, hogy α -t megkapjuk ($\alpha=180,08^\circ$). Az eredmény tehát egy csaknem pontosan délies irányú dőlés!

Ha a δ dőlésszöveget szeretnénk kiszámítani, akkor az eredeti egyenlet átrendezésével, a z-t is változónak tekintjük.

$$f(x,y,z)=b_0+b_1 \cdot x+b_2 \cdot y-z$$

A függvény x-szerinti, y-szerinti és z-szerinti parciális deriváltjával a 3D-s gradiens vektor x, y és z irányú összetevőjét kapjuk meg. Ez a sík legnagyobb meredekségének irányát és a meredekségének szögét is megadja.

$$f(x,y,z)/\partial x=0+b_1 \cdot 1+b_2 \cdot 0-0 =b_1$$

$$f(x,y,z)/\partial y=0+b_1 \cdot 0+b_2 \cdot 1-0 =b_2$$

$$f(x,y,z)/\partial z=0+b_1 \cdot 0+b_2 \cdot 0-1 =-1$$

A grad $f(x,y,z)$ gradiens vektor tehát: $[b_1; b_2; -1]$. A gradiens vektort ∇ (nabla) vektornak, vagy a sík „normálisának” is nevezik. A dőlésszöveget a vektorkomponensekből a Pitagorasz-tétel és szögfüggvények segítségével számítjuk ki.

$$\operatorname{tg} \delta' = -1/r \quad \text{ahol } r \text{ a 2D grad } f(x,y) \text{ hossza}$$

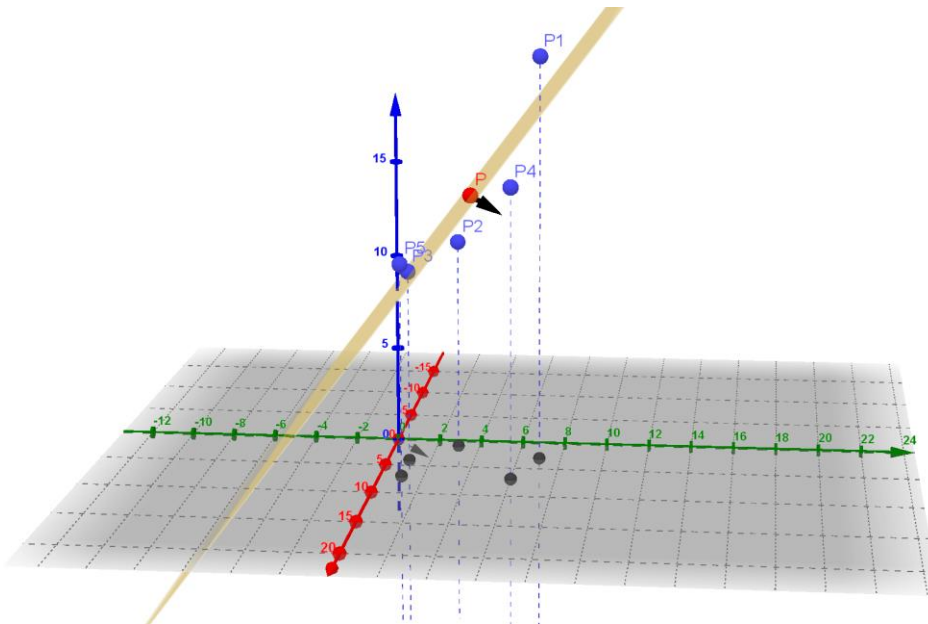
$$\delta = 90 + \delta'$$

A dőlésszög adott esetben tehát: $\delta = 55,9^\circ$

A 36-os ábrán szereplő feladat eredményeként megadhatjuk tehát a trendsíkot dőlésirány/dőlésszög formában is a P (5; 4; 14,1936) ponton. Ilyen megadási formában a geotudományok többnyire az egész fokértékekre kerekített adatokkal dolgoznak (pl.: 180/56), és a térképeken is csak ilyen formában találkozunk velük.

Hibaszámitás

A hibaszámítás a sztochasztikus módszerek esetében fontos „befejező” lépése a műveleteknek. E nélkül a kapott érték (pl.: a modellezett trendsík) elfogadhatóságát nem lehet felbecsülni. A hibát a kontrollpontokon mért és a modellezett függvény által a kontrollpont helyén becsült értékek összehasonlításával tudjuk vizsgálni. A térbeli ábrázolás alapján azonban már szabad szemmel is érzékelhető, hogy mely pontokon nagyobb, és hol kisebb a kontrollpontok eltérése a síktól (37. ábra).



37. ábra A trendsík elhelyezkedése a 36. ábra feladatában megadott pontokra vonatkoztatva. Az ábra az x-tengely pozitív irányából mutatja az alakzatokat perspektív nézetben.

Pontosabb képet a számítások elvégzésével kaphatunk (38. ábra). Mivel a trendsík számítás módszere miatt a hiba átlaga zérus, ezért pl. a szórást mint statisztikai paramétert használhatjuk fel a modell pontosságának vizsgálatára (adott feladat esetében a hibaértékek szórása $D=1,92$).

	P1	P2	P3	P4	P5
z	21	11	10	15	11
becsült z	18.632	12.704	9.749	17.160	9.755
hiba	2.368	-1.704	0.251	-2.160	1.245

38. ábra A 36. ábra feladatában megadott kontrollpontok eredeti és a trendsík függvényével számított z-értékek összehasonlítása.

A gyakorlati alkalmazásokban (pl. GIS szoftver) a kiszámított hibaértékeket is eltároljuk a háttéradatbázisban, ami lehetővé teszi ú. n. hibaterképek szerkesztését. A hibaterképen nem az eredeti kontrollpont z-értéket, hanem a kontrollponton tapasztalt hiba mértékét jelenítjük meg a térképi adatábrázolás eszközeivel.

Másik gyakori módszer az ellenőrzésére a keresztvalidáció (cross validation). Ez egy iterációs művelet, amelynek során minden ciklusban kivesszünk az adatmezőből egy értéket és anélkül számítjuk ki a modellt, majd a kihagyott kontrollpont helyén összehasonlítjuk az eredeti és a modellezett értéket. Ezt a módszert bármelyik interpolációra alkalmazhatjuk, legyen az sztochasztikus vagy determinisztikus, lokális, vagy globális. Ennek eredményeiből is szerkeszthetünk hibaterképet, de ez a választott interpoláció „erősségét” mutatja a többi módszerhez képest.

LOKÁLIS INTERPOLÁCIÓK

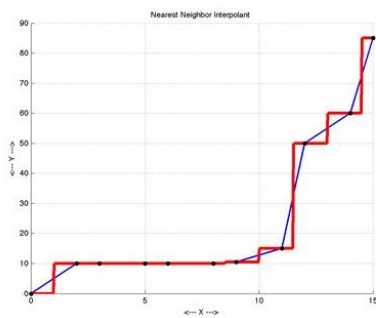
Lokális interpolációs módszerek a kontrollpontoknak csak egy részét használják fel egy adott helyre vonatkozó becslés előállításához. A kiválasztás a keresett értékű helytől való távolság alapján történik. Ez értelmezhető 1D (grafikon), 2D (felület) és 3D (skalártér) esetében is.

Legközelebbi szomszédok módszere (*nearest neighbor*)

A lokális interpolációk legegyszerűbb módja, amikor a helyhez legközelebbi kontrollpont értékét rendeljük a keresett ponthoz. Ez a legközelebbi szomszédok (*nearest neighbor*) módszer (39. ábra).

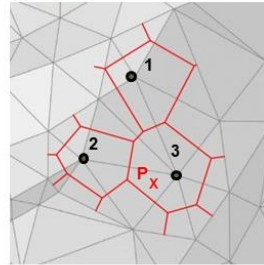
Legközelebbi szomszédok módszere (Nearest neighbor)

1D (diagram)



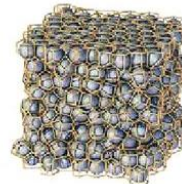
A keresett x-értéken a függvény a legközelebbi kontrollpont értékét veszi fel.

2D (felület)



Amelyik voronoi poligonban van a keresett pont, az ahhoz tartozó kontrollpont értékét veszi fel.
 $Z_P = Z_3$

3D Voronoi poliéderek



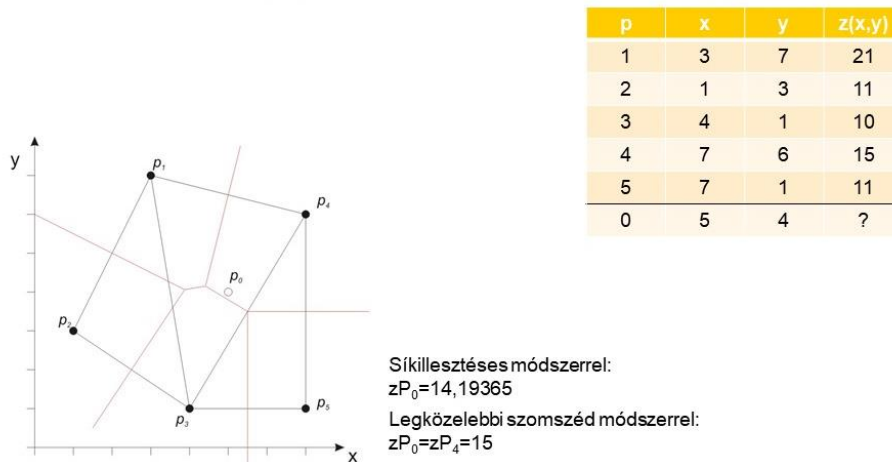
Amelyik voronoi poliéderben van a keresett pont, az ahhoz tartozó kontrollpont értékét veszi fel.

39. ábra A legközelebbi szomszédok módszere 1–3D-ban.

A legközelebbi szomszéd (*nearest neighbor*) módszer lehet mind topológiai, mind koordinátaalapú módszer, attól függően, hogy milyen típusú adatrendszerben dolgozunk. Előbbi esetben a geoinformatikai rendszerben a kontrollpontokhoz tartozó alakzatokat is tároljuk az adatbázisban és az interpoláció során felhasználjuk ezek geometriáját. Ezek az alakzatok a voronoi sokszögek/poliéderek. Ezen alakzatokra igaz az állítás, hogy a belső pontjai közelebb vannak a kérdéses ponthoz, mint az összes többi ponthoz. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező alakzatok konvexek és folytonosan töltik ki a síkot/teret. Az alakzat oldalai merőlegesek a körülvevő pontot a többi ponttal összekötő egyenesekre és felezik azokat. A poligonhálót (2D-eset) szokták thiesen-poligonoknak is nevezni.

Ha a keresett pont értékén kívül nincs szükség más információra az interpoláció során, akkor nem szükséges az alakzatot létrehozni, hanem elég csak a távolságot kiszámítani a keresett hely és a kontrollpontok között, majd az eredmények közül kiválasztani a legkisebbet. Ez a módszer egy változó esetén (pl. magasság modellezésre) nagyon durva közelítés, de sokváltozós függvények esetén gyors és hatékony lehet (pl.: színes rászterképek – RGB – felbontásának módosításakor).

A legközelebbi szomszéd (nearest neighbor) 2D



40. ábra Legközelebbi szomszédok módszerének alkalmazása a 36. ábra feladatában is felhasznált pontokra.

A természetes szomszédok (*natural neighbor*) módszer

A módszer Robert Sibson nevéhez kötik, aki először publikálta 1982-ben. Elméletileg 1D-ben és 3D-ben is alkalmazható, de legfőbb alkalmazási területe a domborzatmodellezés volt már a kezdetekkor is. A 2D-s (2,5D-s) felhasználás során szükség van a kontrollpontok köré szerkesztett voronoi sokszögháló adataira (pl. egy adott sokszög területére). Ezért első lépésként létre kell hozni ezeket az alakzatokat. Ezt követően a keresett hely mint pont köré is szerkesztünk egy voronoi poligont, majd ezzel az alakzattal elmetsszük az eredeti poligonfelosztást és kiszámoljuk, hogy melyik poligonból mekkora területet hasított ki a keresett pont köré szerkesztett alakzat. A keresett pont értékének számításakor aszerint súlyozzuk a környező kontrollpontokat, hogy mekkora arányt képvisel a területük az új poligonban (l. 41. és 42. ábra). A kimetszett területek aránya határozza meg tehát a területi súlytényezőt (ω).

A 41. ábra feladata ugyanazokat a kontrollpontokat használja, mint a korábbi két fejezetben a trendsík, illetve a legközelebbi szomszédok módszerénél megoldott feladatok, így összehasonlítható, hogy a keresett pont becsült értéke hogyan változik az interpolációs módszertől függően.

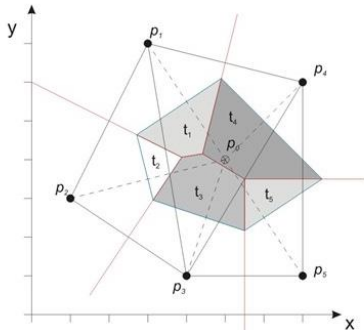
A natural neighbor

A natural neighbor módszer egy topológiai módszer, ami 2D-ben a voronoi-thiessen poligonokra épül.

Feladat:

1. Szerkeszd meg a Delaunay-háromszögeket az öt ismert pontra.
2. Szerkeszd meg a voronoi sokszögeket.
3. Kösd össze a P0 pontot az ismert pontokkal.
4. Szerkeszd meg P0 köré a voronoi sokszöget.

p_i	x	y	$f(x,y)$
1	3	7	21
2	1	3	11
3	4	1	10
4	7	6	15
5	7	1	11
0	5	4	?



Különböző interpolációs módszerekkel számolt z-érték a p_0 pontban:

Síkillesztéses módszerrel:
 $z_{P_0}=14,19365$
 Legközelebbi szomszéd módszerrel:
 $z_{P_0}=z_{P_4}=15$

5. Számítsd ki a kimetszett poligonok területét!

41. ábra A természetes szomszédok (natural neighbor) módszer alkalmazásának lépései (1-4 lépés).

A t_i területnagyságok (előző dia feladatához):

i	t_i	$f(x,y)$
1	1,9821	21
2	0,8573	11
3	2,9079	10
4	3,8174	15
5	1,3333	11
$z_{P_0} = ?$		

$n=5$

z-érték

A keresett pont z-értéke:

$$z_{P_0} = \sum_{i=1}^n \omega_i z_i$$

Ahol z_{P_0} a számított függvény érték. Az ω_i a területi súlytényező az adott ponton, z_i az ismert függvényérték (azaz $f(x,y)$) az adott ponton és n a szomszédos pontok száma.

$$\omega_i = \frac{t_i}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

5. ...a kimetszett területrészek nagyságát a táblázat 2. oszlopa tartalmazza.
6. Alkalmazd a területek arányát (ω) a képlet szerint a súlyozott függvényérték (z) kiszámításához.

Eredmény:
 $z_{P_0}=13,04132$

42. ábra A természetes szomszédok (natural neighbor) módszer alkalmazásának lépései (5-6 lépés).

A 42. ábra táblázatának három oszlopa az érintett kontrollpont számát, a kontrollponthoz tartozó poligonból kimetszett t -területet és a ponthoz tartozó z -értéket mutatja. A keresett helyhez tartozó poligon területe (azaz a részterületek összesítése, $\sum t_i=10,898$) és az egyes részterületek arányából számítható a súlytényező (ω_i), amit az adott kontrollpont

z-értékével (függvényértékével) szorzunk. E szorzatok összege adja a keresett pont becült függvényértékét ($z_p=13,04132$).

Súlyozás reciprok távolságokkal (*inverse distance weighting*)

A módszert Donald Shephard (Harward University) 1968-ban dolgozta ki térinformatikai célokra. Elterjedését rugalmassága és könnyű algoritmizálása nagyban segítette. Ezzel a módszerrel elvileg minden rendelkezésre álló adatot felhasználunk (l.: globális módszerek), de gyakoribb, hogy nagy adatmennyiség esetén a felhasznált kontrollpontok távolsága, vagy(és) száma limitált. A szakirodalom „Shephard-féle módszernek” (Shephard’s method) is nevezi, de leggyakrabban csak IDW-módszerként említik.

Számításakor az ismert pontok keresett értékű helytől való távolságát számítjuk ki először, majd e távolságok valamilyen hatványra emelt értékének (pl.: leggyakrabban a távolság négyzetének) reciprokát használjuk fel az ismeretlen pont értékének kiszámításakor (43. ábra). A TIN háló szabályos rácsháló-modellbe (*grid*) történő gyors átszámításakor használható.

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^s z_i \frac{1}{d_i^k}}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{d_i^k}}$$

z_0 a becült z érték az ismeretlen ponton
 z_i a z érték az i-edik kontrollpontban
 d_i az i-edik kontrollpont távolsága a ismeretlen ponttól
 k súlytényező
 s a felhasznált kontrollpontok száma

43. ábra Az IDW módszer képlete.

k:=2

	x	y	z(x,y)	d_i	d_i^k	$1/d_i^k$	z_i^*/d_i^k
1	3	7	21	$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$	13	0.0769231	1.6153846
2	1	3	11	$\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}$	17	0.0588235	0.647058824
3	4	1	10	...	10	0.1	1
4	7	6	15	...	8	0.125	1.875
5	7	1	11	...	13	0.0769231	0.846153846
Σ :						?	?

Folytasd a táblázat kitöltését és add meg a P_0 pontban ($x_0=5, y_0=4$) a z-értéket!

Eredmény:
 $z_{P_0}=13,67149$

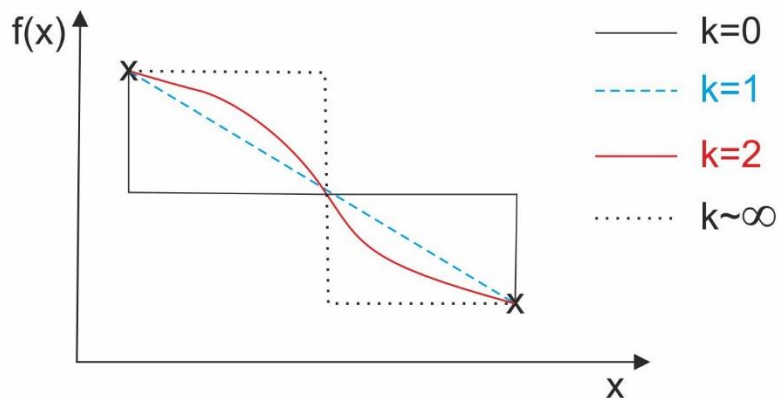
44. ábra Az IDW alkalmazása a korábbi feladatokból ismert 5 pontra $k=2$ súlytényezővel.

A módszer egy táblázatkezelő segítségével is könnyen alkalmazható (44. ábra). Az ábrán látható műveleti sorrend lényege, hogy Pitagorasz-tétel alapján feltöltjük a táblázat oszlopait, majd summázzuk az utolsó két oszlop értékeit és ezeket behelyettesítve a képletbe, megkapjuk a keresett pont z-jét. Így egy egyszerű és gyors algoritmussal ki lehet számolni a koordinátákat tartalmazó táblázatból a rácsháló csomópontjait. Térinformatikai programokban a táblázatkezelő és a térképi megjelenítő modul

összekapcsolásával már a módszer publikálásának idején is kísérleteztek, ma pedig nélkülözhetetlen része a GIS programoknak.

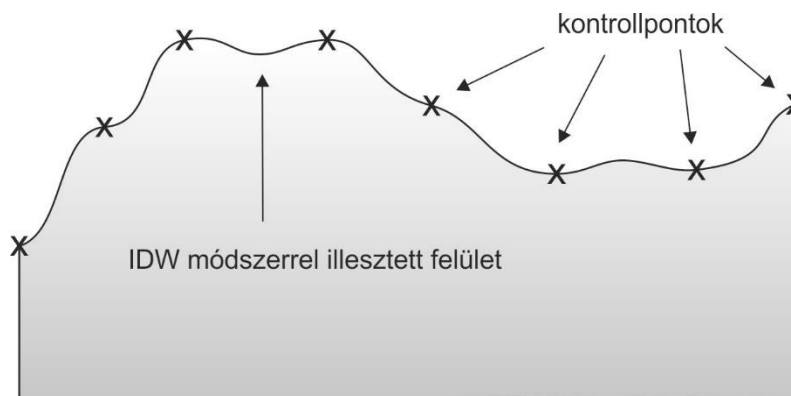
A k súlytényező meghatározza a különböző távolságban lévő pontok szerepét (45. ábra):

- $k=0$ esetén a kontrollpontok átlagértéket kapja minden közbenső pont.
- $k=1$ érték azt jelenti, hogy az összes pontból a távolságukkal fordított arányban vesszük figyelembe az adatokat.
- Ha $k \leq 2$ akkor a távoli pontoknak van nagyobb szerepük, ahogy k értéke nő, úgy nő a súlya a közeli pontoknak.
- Ha $k \rightarrow \infty$ az interpoláció a legközelebbi szomszédok módszerével lesz megegyező.



45. ábra A k súlytényező értékének szerepe az IDW módszernél.

A súlyozás miatt a kapott eredmény jobb, mint a TIN-háromszögekre történő síkillesztés. Viszont nem ad jó becslési értéket a tagolt területeken (46. ábra). Ennek oka, hogy az adatmezőben szereplő kontrollpontok maximum és minimum értékénél mindig kisebb, illetve nagyobb lesz a becslt hely értéke (pl.: hegycsúcsok „lelapítása”, gödrök „feltöltése”).



46. ábra Az IDW módszer tagolt területeken nem jól adja vissza a valódi morfológiát.

GYAKORLÓFELADATOK VEGYES KVANTITATÍV MÓDSZEREKHEZ

A következő fejezet olyan feladattípusokat tartalmaz, amelyek a geotudományokban előforduló gyakori számítási és modellezési feladatokat szimulálják kevés és egyszerű adattal.

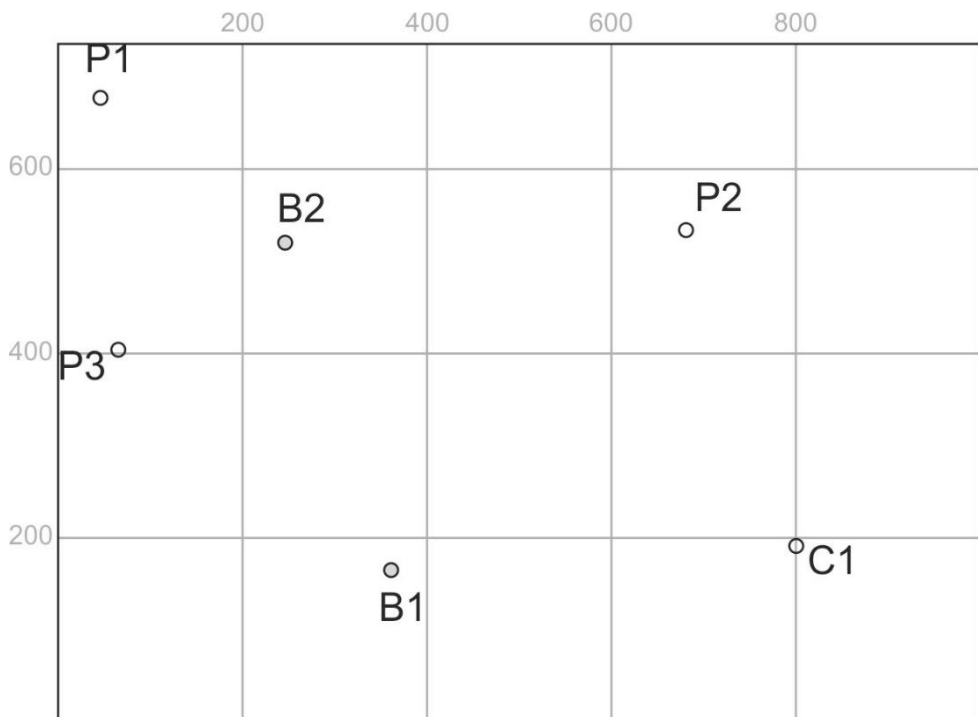
1. feladat

Adott három fúrás, amelyekben a homokkő réteg tetejét a $P_1=60$ m; $P_2=150$ m; $P_3=75$ m felszíntől számított mélységben érték el. A kutatófúrások és kérdéses pontok koordinátáit a táblázat (47. ábra) tartalmazza.

	x	y	z
P1	46	680	200
P2	676	530	200
P3	67	405	200
B1	361	165	200
B2	246	520	200
C1	800	191	200

47. ábra Az 1-es feladathoz tartozó pontok koordinátái

- Milyen mélyen található a homokkő a B2 pont alatt, ha a vidék teljesen sík?
- Számold ki B1 és C1 pontokon várható mélységekre is. Miért adhatunk ezeken a pontokon becslést? Indokold!
- Szerkeszd meg a 48-as ábra térképén a homokkő 150-es mélységvonalát!



48. ábra Az 1-es feladat pontjainak térképi ábrázolása.

Az 1-es feladat megoldása:

A homokkő réteg egyszerű síknak fogható fel. A sík térbeli helyzetét megadja a három ponton mért mélység. A feladat megoldására több módszer adott:

- I.) Pontérték számítása lineáris interpolációval
- II.) Sík illesztése 3 pontra polinommal
- III.) Trend felület illesztés 3 pontra

A módszer szabadon választható, de a számítási idők között nagy különbség lehet!

Leggyosabb a **“síknak illesztése 3 pontra polinommal”** módszer adott esetben.

Felírjuk minden ismert pontra a keresett polinom egyenletét:

$b_0 + b_1 x_{P1} + b_2 y_{P1} = f(x_{P1}, y_{P1})$	$b_0 + b_1 46 + b_2 680 = 60$	Célszerű a függvényértékek a homokkő mélységét tekinteni, mivel a feladat ennek kiszámítása.
$b_0 + b_1 x_{P2} + b_2 y_{P2} = f(x_{P2}, y_{P2})$ behelyettesítve:	$b_0 + b_1 676 + b_2 530 = 150$	
$b_0 + b_1 x_{P3} + b_2 y_{P3} = f(x_{P3}, y_{P3})$	$b_0 + b_1 67 + b_2 405 = 75$	

Kiszámítjuk a b-együtthatókat a következő módszerek valamelyikével:

- a) az egyenletrendszer megoldásával
- b) Gauss-eliminációval
- c) mátrix determinánsának meghatározásával

eredmények:

$b_0 = 84,1375661$
$b_1 = 0,13227513$
$b_2 = -0,0444444$

Az együtthatók ismeretében megoldjuk az egyenletet B2, B1 és C1 pontokon az ismert x,y koordináták behelyettesítésével:

$b_0 + b_1 x_{B2} + b_2 y_{B2} = f(x_{B2}, y_{B2})$ azaz: $b_0 + b_1 246 + b_2 520 = f(x_{B2}, y_{B2})$ $f(x_{B2}, y_{B2}) = 93,56614$

$b_0 + b_1 x_{B1} + b_2 y_{B1} = f(x_{B1}, y_{B1})$ azaz: $b_0 + b_1 361 + b_2 165 = f(x_{B1}, y_{B1})$ $f(x_{B1}, y_{B1}) = 124,5556$

$b_0 + b_1 x_{C1} + b_2 y_{C1} = f(x_{C1}, y_{C1})$ azaz: $b_0 + b_1 800 + b_2 191 = f(x_{C1}, y_{C1})$ $f(x_{C1}, y_{C1}) = 181,4688$

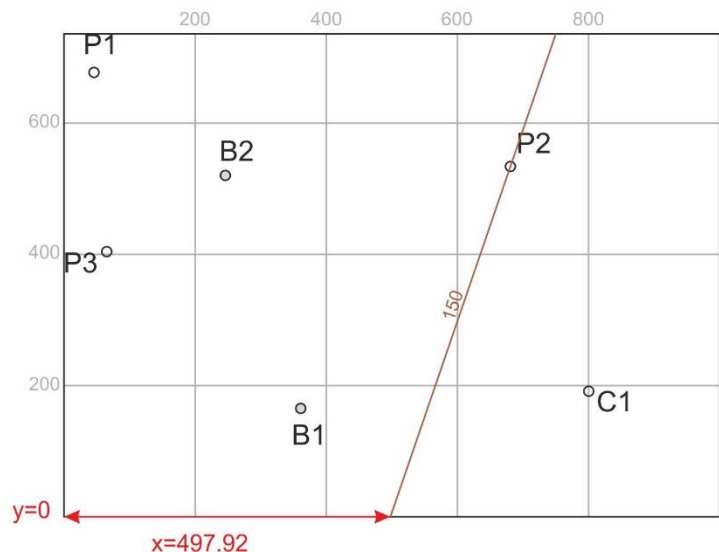
A 150-es mélységvonal átmegy P2 ponton. Keressünk legalább egy másik pontot a térképen, amelyen ez a mélységvonal átmegy. Az együtthatók és a függvényérték ismeretében felírjuk a mélységvonal egyenletét tetszőleges x,y pontra:

$b_0 + b_1 x + b_2 y = 150$

Kiválasztunk a térképen egy tetszőleges x vagy y koordinátát, amit a képletbe helyettesíthetünk. Adott esetben célszerű pl. az y=0 értéket választani.

$84,1375661 + 0,13227513 * x = 150$

$x = 497.92$



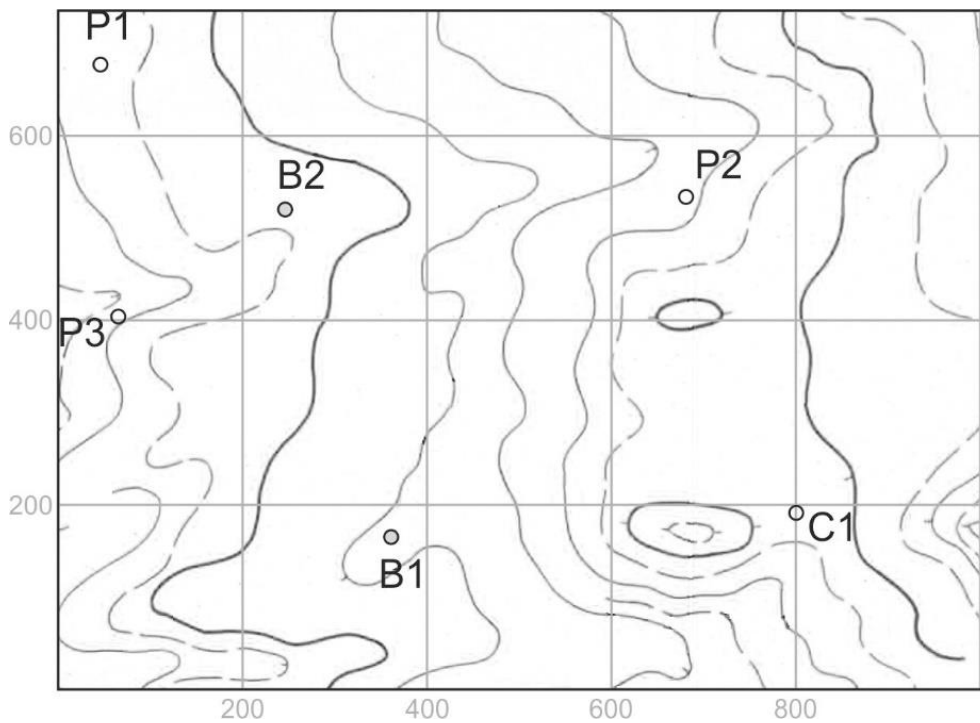
2. feladat

Adott négy fúrás, amelyekben a homokkő réteg tetejét a $P_1=60$ m; $P_2=150$ m; $P_3=75$ m; $C_1=210$ m felszíntől számított mélységben érték el. A kutatófúrások és kérdéses pontok koordinátáit a táblázat (49. ábra) tartalmazza.

	x	y	z
P1	46	680	193
P2	676	530	228
P3	67	405	189
B1	361	165	211
B2	246	520	196
C1	800	191	236

49. ábra A 2-es feladathoz tartozó pontok koordinátái.

Milyen mélyen található a homokkő a B₁ pont alatt?



50. ábra A 2-es feladathoz tartozó térkép. Csak a feladat megértése szempontjából van szerepe, a számításokhoz nem kell használni!

3. feladat

A völgyoldalban négy ponton mérték a felszín alatti víz mélységét (K₁-K₄). Milyen mélyen van a víz a felszín alatt a P (x=3844; y=5714) pontban? Számítsd ki IDW (súlyozás reciprok távolságokkal) módszerrel. A súlytényező legyen k=2. A vízszint adatokat a kutakban az 51-ábra táblázata tartalmazza.

kút	x	y	M mélység
K1	4788	4608	2
K2	2840	5409	26
K3	3353	6371	21
K4	4680	5913	15

51. ábra A 3-as feladathoz tartozó kutak koordinátái a vízmélység adatokkal.



52. ábra A 3-as feladathoz tartozó térkép. Csak a feladat megértése szempontjából van szerepe, a számításokhoz nem kell használni!

A 2-es feladat megoldása:

A homokkő réteg egyszerű síknak fogható fel. A sík térbeli helyzetét a négy ponton mért mélység már nem adja meg egyértelműen. A síkot közelítő módszerrel kell kiszámítani (pl.: trendfelület illesztése n-pontra legkisebb négyzetek módszerével).

A sík egyenlete az adott esetben is felírható polinomként: $b_0 + b_1x + b_2y = f(x, y)$

A választott síkillesztéses módszer esetén függvényértéknek a homokkő tengerszint feletti magasságát kell tekinteni, mivel a megadott mélységek egy szabálytalan topográfiahoz vannak viszonyítva.

$$\begin{aligned} f(x_{P1}, y_{P1}) &= Z_{P1} = 193 - 60 = 133 \\ f(x_{P2}, y_{P2}) &= Z_{P2} = 228 - 150 = 78 \\ f(x_{P3}, y_{P3}) &= Z_{P3} = 189 - 75 = 114 \\ f(x_{C1}, y_{C1}) &= Z_{C1} = 236 - 210 = 26 \end{aligned}$$

Polinomiális közelítés (globális 2D sztochasztikus módszer)

Felírjuk a Gauss-féle normálegyenleteket ($z=f(x,y)$ és nem a topográfiai magasság!):

$$\begin{aligned} b_0 + b_1x + b_2y &= Sz & b_0 + b_1 \cdot 1589 + b_2 \cdot 1806 &= 351 \\ b_0 + b_1x + b_2y &= Sxz & b_0 + b_1 \cdot 1589 + b_2 \cdot 1103581 + b_2 \cdot 569495 &= 87284 \\ b_0 + b_1x + b_2y &= Syz & b_0 + b_1 \cdot 1806 + b_2 \cdot 569495 + b_2 \cdot 943806 &= 182916 \end{aligned}$$

Kiszámítjuk az a-együtthatókat a következő módszerek valamelyikével:

- az egyenletrendszer megoldásával
- Gauss-eliminációval
- mátrix determinánsának meghatározásával

eredmények:

$$\begin{aligned} b_0 &= 74,720889 \\ b_1 &= -0,079469 \\ b_2 &= 0,0987785 \end{aligned}$$

Az együtthatók ismeretében megoldjuk az egyenletet B1 ponton az ismert x,y koordináták behelyettesítésével:

$$b_0 + b_1x_{B1} + b_2y_{B1} = f(x_{B1}, y_{B1}) \quad \text{azaz: } b_0 + b_1 \cdot 361 + b_2 \cdot 165 = f(x_{B1}, y_{B1}) \quad f(x_{B1}, y_{B1}) = 62,33075$$

A függvényérték a tengerszint feletti magasság. A homokkő mélysége a B1-ponton (m_{B1}) a ponton mért tengerszint feletti magasság és a függvényérték különbsége:

$$m_{B1} = Z_{B1} - f(x_{B1}, y_{B1}) \quad \text{azaz: } 211 - 62,33075 = \mathbf{148,66925}$$

A 3-as feladat megoldása:

A felszín alatti víztükör nem modellezhető egyszerű sikként.

IDW interpoláció (lokális 2D sztochasztikus módszer)

Felírjuk az idw módszer képletét:

ahol a $z=f(x,y)$ függvényérték adott esetben a felszín alatti víz mélysége.

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^s z_i \frac{1}{d_i^k}}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{d_i^k}}$$

Kiszámoljuk a tervezett kút és a K1-4 kutak közti távolságokat, a távolságok négyzetének ($k=2$) a reciprokát és ennek z-vel való szorzatát pontonként:

P pontonkénti távolsága			
	dist (d)	1/d ²	z*(1/d ²)
K1	1.4541	0.47295	0.945907
K2	1.0493	0.90823	23.61402
K3	0.8202	1.48648	31.21609
K4	0.8594	1.3541	20.31152
			0
		4.22177	76.08754

A nagy számok miatt célszerű lehet a méterben megkapott távolságokat kilométerre átszámítani. A számolás pontossága így legalább 3 tizedesjegy legyen!

Az összesített értékek behelyettesítésével megoldjuk az egyenletet:

$$f(x_p, y_p) = 76,0875/4,2218 = \mathbf{18,02}$$

További gyakorlatok:

1. Egy szabályos rácsháló (grid) négy pontja a következő: $A(1,5,4)$; $B(4,5,6)$; $C(4,2,1)$; $D(1,2,2)$. Számítsa ki a $P(3,3)$ pont z -értékét bilineáris interpolációval!
2. Adott három térbeli pont, amelyek egy térbeli síkot határoznak meg. A pontok x,y,z koordinátái rendre: $P_1(-1,4,2)$; $P_2(0,-1,-1)$; $P_3(4,2,3)$.
 - Számítsa ki a sík egyenletének együtthatóit!
 - Határozza meg az $A(2,2,...)$ pont z értékét!
 - Határozza meg a $z=2$ szintvonal metszéspontjait az x és y tengelyen!
 - Adja meg a sík dőlésirányát és dőlésszögét!
3. Adott egy térbeli sík, amit egy vízszintes egyenessel és egy ponttal határozunk meg. Előbbi a $z=2$ szintvonal egyenese, aminek egyenlete: $y=5/2-5x/6$. Utóbbi az $x=3$, $y=2,8$ és $z=4$ koordinátákkal megadott A pont.
 - Számítsa ki a sík egyenletének együtthatóit!
 - Határozza meg a sík magasságát (z -értékét) az origóban!
 - Adja meg a sík dőlésirányát és dőlésszögét!
4. Adott két egymással és az x,y síkkal párhuzamos egyenes, amelyek különböző z magasságban futnak (tehát szintvonalak). A $z=0$ magasságon futó egyenes egyenlete $y=8/3-x/3$ és a $z=1$ magasságon futóé $y=-2/3-x/3$.
 - Számítsa ki a két szintvonalra illeszkedő térbeli sík egyenletének együtthatóit!
 - Határozza meg az $A(1,-3,...)$ pont z értékét!
 - Adja meg a sík dőlésirányát és dőlésszögét!
5. Adott egy $140/17$ dőlésiránnyal és dőlésszöggel jellemezhető sík az $A(637425; 292343; 171)$ EOVS koordinátájú ponton.
 - Adja meg a sík gradiens (nabla) vektorát!
 - Számítsa ki a térbeli sík egyenletének együtthatóit!
 - Határozza meg a $B(637486; 292381; 181)$ ponton a sík mélységét!

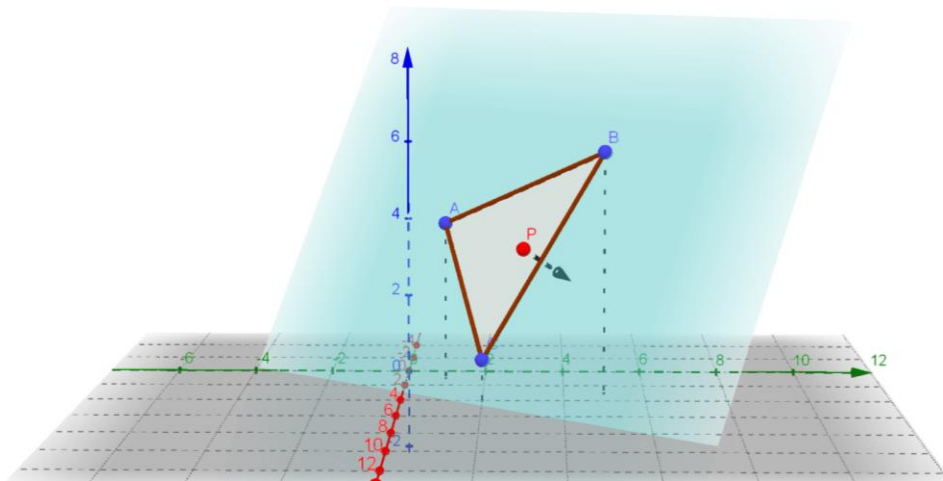
Geometriai módszerek

A geotudományok térképeit ma már számítógépes programok segítségével geoadatbázisok felhasználásával készítik (Albert, 2018). Az alkalmazott térinformatikai programokban (pl. ArcGIS, QGIS, SAGA) többek között az előző fejezetben ismertetett algebrai módszereket implementálták olyan feladatokhoz, amelyek az adatokból közvetlenül – függvények segítségével – adnak becslést az ismeretlen értékű pontokra. Ezeket implicit módszereknek nevezzük (Maxelon és tsai., 2009). Segítségükkel láthatjuk és láttathatjuk a geoszférák folytonos jelenségeit térben, vagy izovonalas térképeken a geotermikus gradiens-térképektől kezdve a domborzati térképeken át a légnyomás/hőmérséklet térképekig.

A függvényekkel végzett műveletek egy része a felületek közti térbeli viszonyok vizsgálatát célozza. A felületek közötti térrész vastagsága és a felületek egymással való metszése az, ami a leginkább vizsgálatra érdemes a geotudományokban. Ilyen lehet pl. két geológiai réteg, vagy akár két léghöri nyomástopográfiai felszín közötti köztes térrész vizsgálata, vagy a geológiai rétegek és a domborzat metszetszámításának számítása. Ezek a műveletek – bár lineáris egyenletrendszerekkel megoldhatók – számolásigényesek, így célszerűbb a geometria és nem az algebra felől megközelíteni a gyakorlatok során. A következő fejezetek ennek megfelelően elsősorban a térbeli felületek és síkok térképi ábrázolását és a velük végzett műveletek geometriai megoldását mutatják be.

SÍK DŐLÉSÉNEK ÁBRÁZOLÁSA

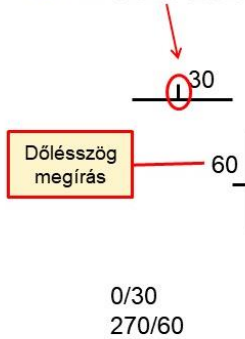
A legegyszerűbb geometriájú térbeli objektum a sík, amit geometriailag leggyakrabban 3 térbeli ponttal, vagy egy ponttal és egy irányvektorral adunk meg (l. korábbi fejezetek és 53. ábra). Térképen egy egyszerű sík ábrázolása szintén két módon valósulhat meg (54. ábra): 1) a sík irányát és dőlését jelző pontszerű jellel, 2) szintvonalakkal.



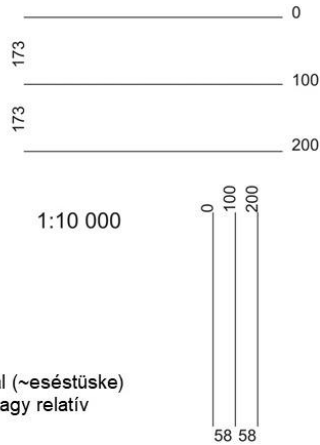
53. ábra Három ponttal (A,B,C) megadott sík, és ugyanennek P ponton felvett normálvektora $[-1,4; 1,2; -1]$.

Sík dőlésének ábrázolása térképen

1. dőléstüskével



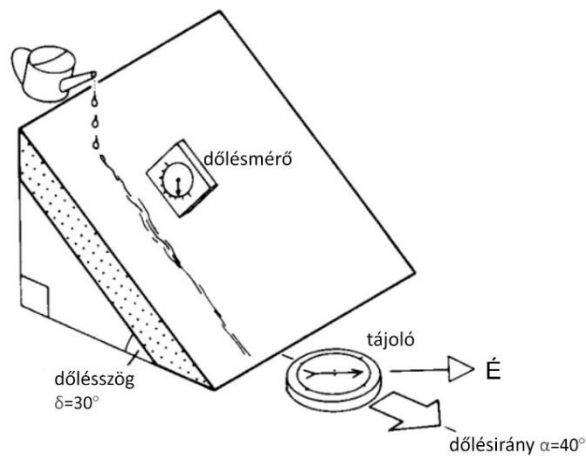
2. szintvonalakkal



Szintvonal: abszolút magasságot rendelünk hozzá
Dőléstüske: a legnagyobb lejtés irányába mutató rövid vonal (~eséstüske)
Csapásvonal: olyan szintvonal, aminek nincs magassága (vagy relatív magassága van)

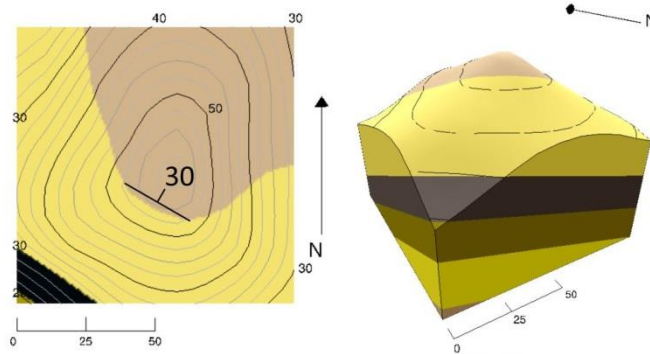
54 ábra Egyszerű sík szokásos térképi ábrázolása: irányvektor jele (balra), szintvonalak (jobbra). Utóbbi esetben a térkép méretarányát is ismernünk kell a dőlésszög értelmezéséhez.

A sík normálvektora (gradiense) és a sík α dőlésiránya egymással ellentétes, ugyanis a dőlés mindig a legnagyobb lejtés irányába mutat, míg a gradiens vektor vízszintes komponense (grad $f(x,y)$ l. korábbi fejezetek) a legnagyobb emelkedés irányába. A dőlésirányt, mint a legnagyobb lejtés irányát Richard J. Lisle 1988-óta több kiadást is megért geológiai gyakorlókönyvének egyik ábrája jól szemlélteti a víz lefolyási irányával (55. ábra).



55. ábra A sík dőlésiránya az, amerre a síknak legnagyobb a lejtőszöge (Lisle 2004 után módosítva).

A sík δ dőlésszöge a vízszintes siktól való eltérést adja meg fokokban; ez szintén az 55. ábráról olvasható le. A hazai gyakorlatban a geológiai térképeken és adatbázisokban a térbeli síkokat a dőlésirányukkal és dőlésszögükkel adjuk meg. Az 55. ábrán látható réteg esetében tehát pl.: 40/30 jelölést alkalmazunk, ami azt jelenti, hogy 40° azimut irányban a vízszintestől 30° dőlése van a rétegnek (56. ábra).



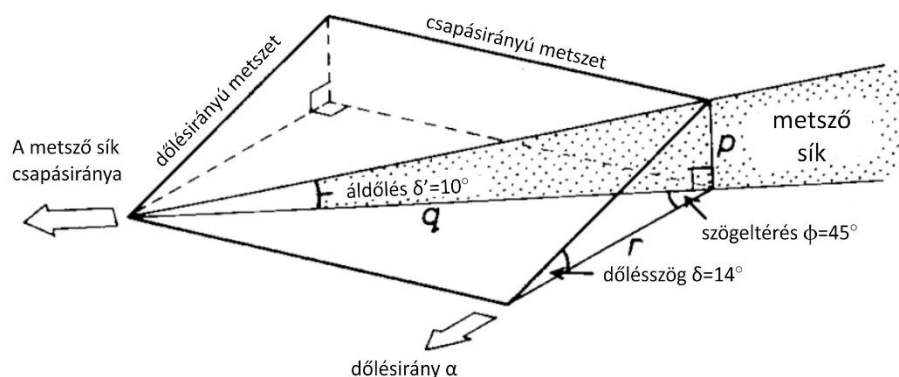
56. ábra Egy 40/30 dőlésű geológiai rétegsor térképi és 3D-s megjelenítése a VisibleGeology internetes applikáció segítségével.

Vízszintes és függőleges metszetek és a látszólagos dőlés

A vízszintes és függőleges metszetek antropocentrikus, kitüntetett helyzetű síkok, hiszen a természetben sok jelenséget a talpuk alatt, és a szemünk előtt látunk, így jó vonatkoztatási rendszert képeznek, ha meg akarunk érteni egy térbeli jelenséget. Ennek ellenére ez a két szemszög a valóságban ritkán láttat teljes mértékben vízszintes, illetve függőleges metszetet. E probléma az ábrázolásakor kiküszöbölhető, ha a jelenségeket matematikai módszerekkel visszük fel a vízszintes vagy függőleges síkra, amelyek így szabályos térbeli metszetét adják a modellezett objektumnak.

Maga a térképi nézet is lehet egy metszősík a térbeli objektumok ábrázolásakor, ha a térkép leképezési síkja el metszi az ábrázolandó objektumot (pl. egy általános dőlésű síkot). A másik kitüntetett helyzet, a függőleges metszet, már a 18. században is elterjedt volt a földtudományi jelenségek értelmezésekor.

Az ábrázolás során a térbeli sík (objektum) és a leképező sík metszévonalát szerkesztjük meg. A szintvonalak a vízszintes metszetek vonalát reprezentálják (l. előző fejezet) és értékükkel adjuk meg, hogy mely magassági síkhoz tartoznak. A függőleges metszeteknél azonban csak egy metszévonalat szokás ábrázolni. A síkként értelmezhető térbeli jelenség és a függőleges metszősík viszonyát alapvetően a gradiens vektoraik által bezárt szögek határozzák meg. **Ha a gradiens vektorok egy irányba mutatnak, vagy ellentétesek, akkor a függőleges metszősík csapásirányú, míg ha a vektorok 90, vagy 270 fokos szöget zárnak be, akkor dőlésirányú a metszet.** Első esetben a metszet síkjában az ábrázolt sík egy vízszintes vonalként jelenik meg, míg a második esetben a sík maximális δ dőlésszöge olvasható le. A köztes helyzetekben a látszólagos dőlésszög (áldőlés) olvasható le a metszetről (57. ábra).



57. ábra A függőleges metszetek és az ábrázolt sík általános összefüggései. A metszősíkon csak dőlésirányú esetben látható a valódi dőlésszög; minden egyéb esetben áldőlést tapasztalunk (Lisle, 2004 után módosítva).

Az 57-es ábra jelölését alkalmazva felírható három egyenlet, amelyek átrendezésével az áldőlés számítására használt egyszerű szögfüggvényeket tartalmazó képlet felírható:

$$\operatorname{tg} \delta = p/r$$

$$\operatorname{tg} \delta' = p/q$$

$$\cos \phi = r/q$$

Mivel

$$p/r \cdot r/q = p/q$$

ezért:

$$\operatorname{tg} \delta \cdot \cos \phi = \operatorname{tg} \delta'$$

Az ábrán látható adatokkal:

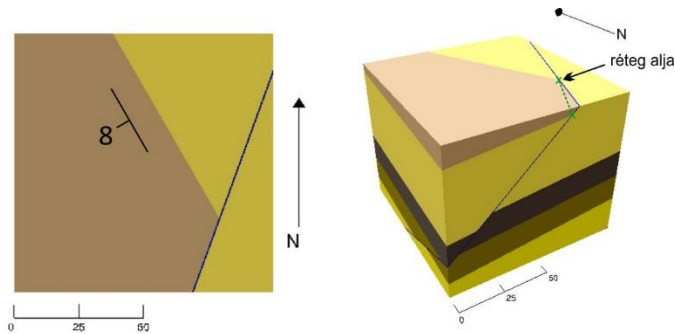
$$\operatorname{tg} 14^\circ \cdot \cos 45^\circ = \operatorname{tg} \delta' \quad \text{tehát: } \delta' = 10^\circ$$

Két sík metszésvonalának szerkesztése

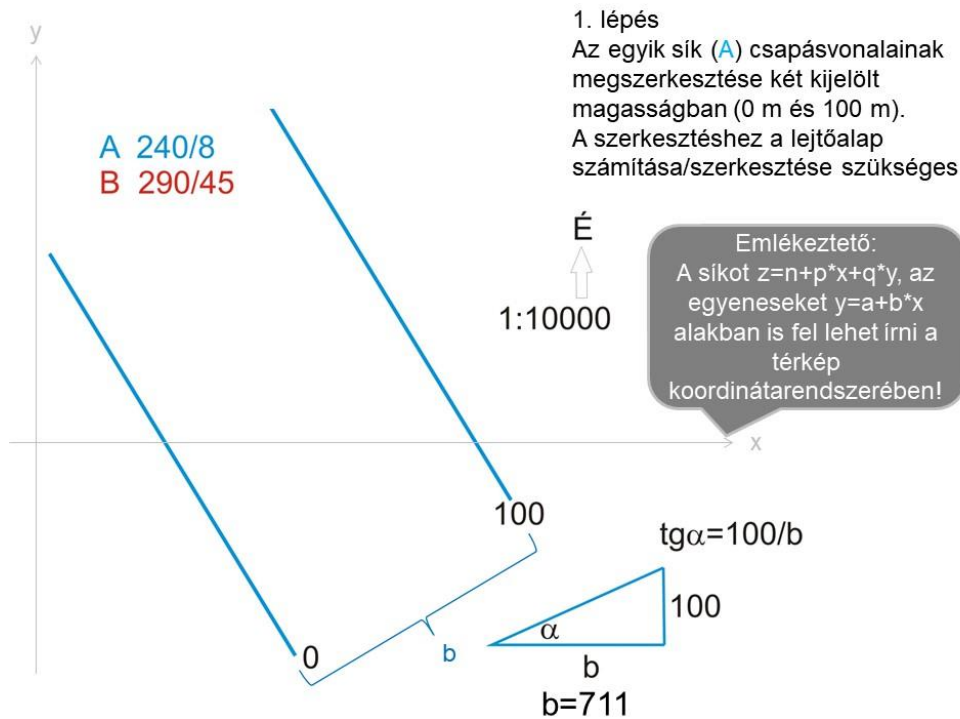
Az általános helyzetű térbeli síkok egymáshoz való viszonyának elemzése azzal kezdődik, hogy a síkok párhuzamosságát, illetve metszésvonalát vizsgáljuk. A szerkesztést egyszerűbb esetekben térképen (papíron) is el lehet végezni. Az alábbi feladatsorban szemléltetett egyszerű eset lépésekre bontva segíti a térképszerkesztéskor alkalmazott műveletek geometriai alapjainak megértését.

Két térbeli sík metszete egy térbeli egyenes, amit két térbeli ponttal adhatunk meg. A térbeli pontokat meg tudjuk szerkeszteni térképen a síkok dőlésadatai (dőlésirány és

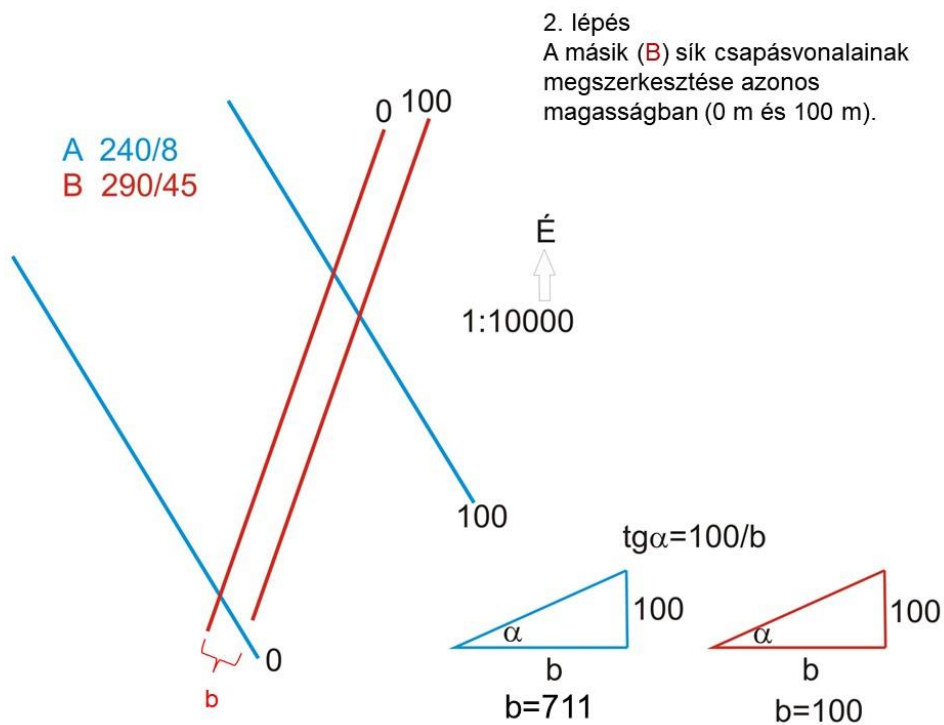
dőlésszög) és a térkép méretaránya ismeretében. A szerkesztéshez a síkok szintvonalas ábrázolását használjuk fel, de a jobb megértést segíti, ha térben is elképzeljük (58. ábra). A térképen ilyenkor a domborzat szintvonalai mellett a geológiai sík ú. n. **szerkezeti szintvonalait** is fel kell tüntetnünk. Az 59-61 ábra feladatai egy délnyugatias irányban kis szöggel dőlő réteglap és egy északnyugatias dőlésű vető síkjának metszetsíkjának szerkesztését mutatják be 1:10 000 méretarányú térképen.



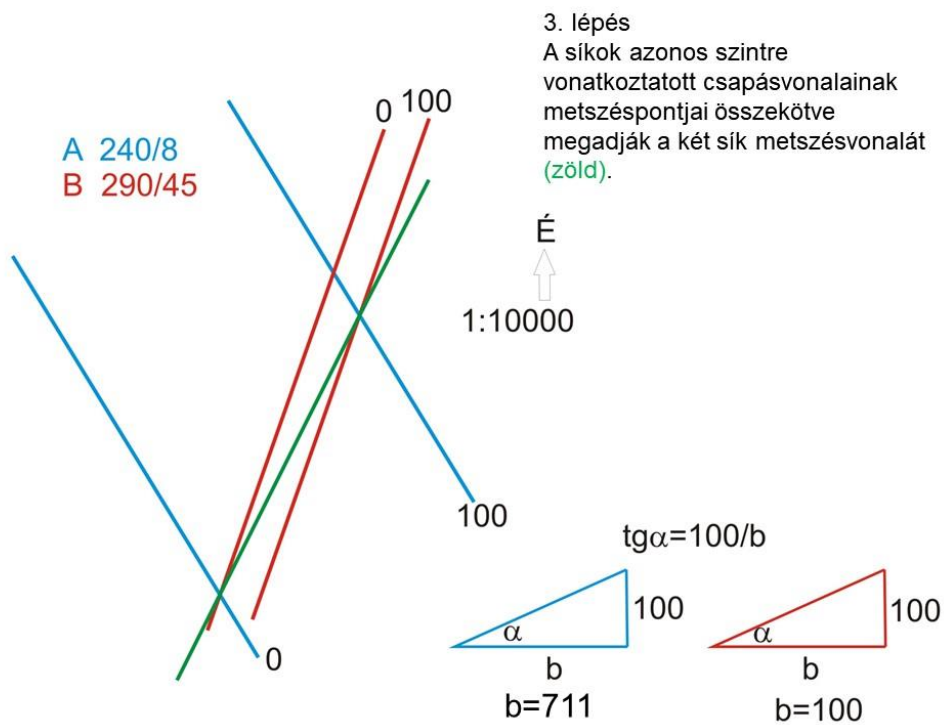
58. ábra Egy 240/8 dőlésű rétegsor és egy 290/45 dőlésű vető “találkozásának” térképi és 3D-nézete. A két sík metszetsíkját két jól azonosítható térbeli pont jelöli ki.



59. ábra A réteglap síkjának szerkesztése szintvonalakkal.



60. ábra A vető síkjának szerkesztése szintvonalakkal.

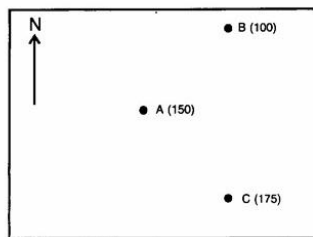


61. ábra A két szintvonalakkal szerkesztett sík térbeli metszésvonalának szerkesztése.

Szerkesztések egy sík három ismert pontjából

E művelet során tulajdonképpen a síkillesztés és a TIN háló alapján történő szintvonal szerkesztés módszerét alkalmazzuk. Itt azonban a cél többnyire az, hogy a síkról információt nyerjünk (pl. a sík dőlésirányát és dőlésszögét), vagy metszéspontokat keressünk egy másik síkkal (l. előző fejezet). Emiatt nem szükséges, hogy a térkép teljes felületét betöltsük szintvonalakkal. Gyakran a földtudományi terepi munkák során is szükség van ilyen szerkesztési műveletekre, hiszen a megismert geometria segíti a célzott észlelést. A térbeli geometriai alakzatokkal való műveletek ismerete azonban nem csak geológusoknak, hanem a téradatokat feldolgozó geoinformatikusoknak is hasznosak.

Sík dőlése és iránya három pont alapján



Feladat:

Egy sík három pontja ismert. A pontok egymáshoz viszonyított helyzete térkép alapján ismert (x, y), z-t (pl. tengerszint feletti magasságát) megadtuk.

Határozd meg a sík dőlését geometriai módszerrel és szögleolvasással!

Földtani térképek analóg szerkesztésekor (pl. terepen, kéziratban) ez az ún. **háromszög-”probléma”**

62. ábra Terepi problémafelvetés: mi a sík dőlése a három észlelési pont alapján?

A 62-es ábra „háromszög problémája” terepen is megoldható, ha ismerem a sík szintvonalait a térképen. A szintvonal irányának meghatározásához pedig nem kell más, mint két azonos magasságon levő pont a síkon (63. ábra).

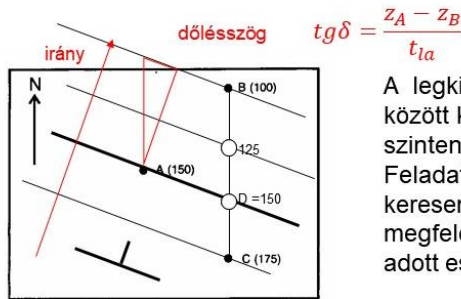
A lineáris interpolációnál használt egyszerű aránypárt célszerű használni itt is, amely a háromszögek hasonlósági tétele alapján két ismert, eltérő magasságú pont között megadja a keresett magassági érték helyét az egyik ismert ponttól való távolságában (t_{sz}).

$$t_{sz} = (z_1 - z_{sz}) \cdot t / \Delta h$$

A z_1 a kezdőpont magassági értéke, a z_{sz} a keresett szintvonal magassági értéke, t a két ismert pont távolsága és Δh a két ismert pont magasságkülönbsége.

Mivel a ”háromszög probléma” megoldásakor a térképen dolgozunk, t távolságot értelemszerűen a térképről mérjük le, és a kapott t_{sz} távolságértéket ugyanebben a mértékegységben kapjuk meg. Célszerű milliméterben számolni!

A háromszög-”probléma” geometriai megoldása



A legkisebb és legnagyobb z-jú pontok között kell lennie a középsővel egy szinten levő pontnak.

Feladat: **lineáris interpoláció** [azaz keresem az A pont z-értéknek (150) megfelelő szintvonalat B és C-között]; adott esetben D-t

Bármilyen adott magasságú pont távolságának (t_{sz}) számítása az egyik interpolációs végponttól:

$$t_{sz} = (z_1 - z_{sz}) * \frac{t_{1-2}}{(z_1 - z_2)}$$

Ahol z_{sz} a keresett szintvonal magassága, t_{1-2} az interpolációs szakasz hossza és z_1, z_2 az interpolációs szakasz kezdő és végpontjának magasságai.

A és D egyenese a keresett 150-es szintvonal

Szerkesszük meg a párhuzamos szintvonalakat! Ebből:

- **dőlésirányt** szögmérővel mérjük,
- **dőlésszöget** a már ismert módon számoljuk!

63. ábra A három pont alapján történő szintvonal szerkesztés térképen lineáris interpolációval.

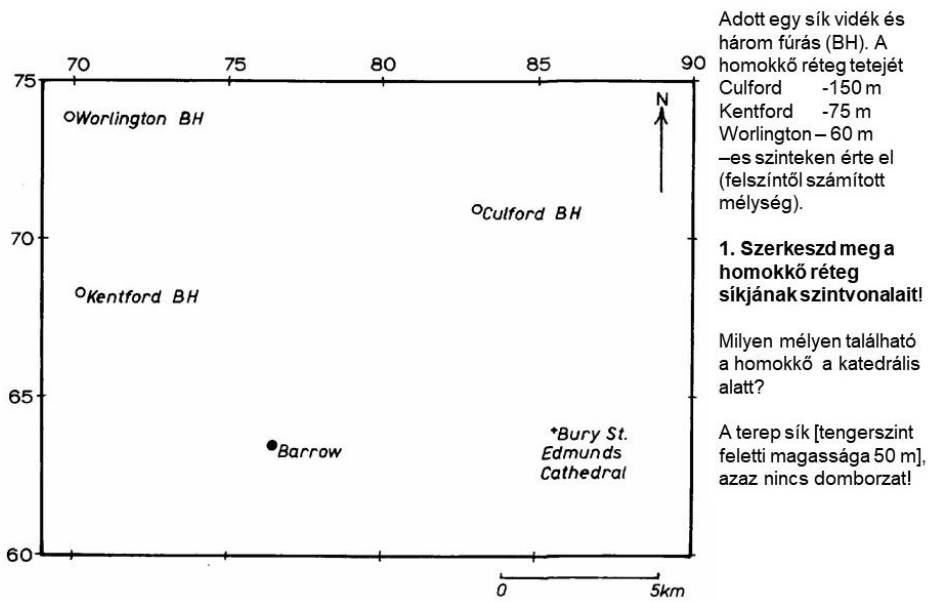
A megszerkesztett szintvonal már jelzi a sík csapásirányát, és az eredeti pontok magassáadataiból tudjuk, hogy a csapásirány szögmérővel megállapított azimut értékéhez képest levonni, vagy hozzáadni kell 90 fokot, hogy megkapjuk a sík α dőlésirányát. A **dőlésirány felé ugyanis mindig az alacsonyabb z-értékű pontok esnek** (a 63-as ábrán a B-pont).

A sík dőlésszögét térképről több szintvonal megszerkesztésével tudjuk megállapítani. A sík szintvonalai párhuzamos egyenközű egyenesek, amelyek egymástól való távolsága a lejtőalap. Két tetszőleges z-értékű szintvonal között lement lejtőalap (t_{la}) és a szintvonalak magasságkülönbsége Δh megadja a sík δ dőlésszögét (lejtőszögét) is:

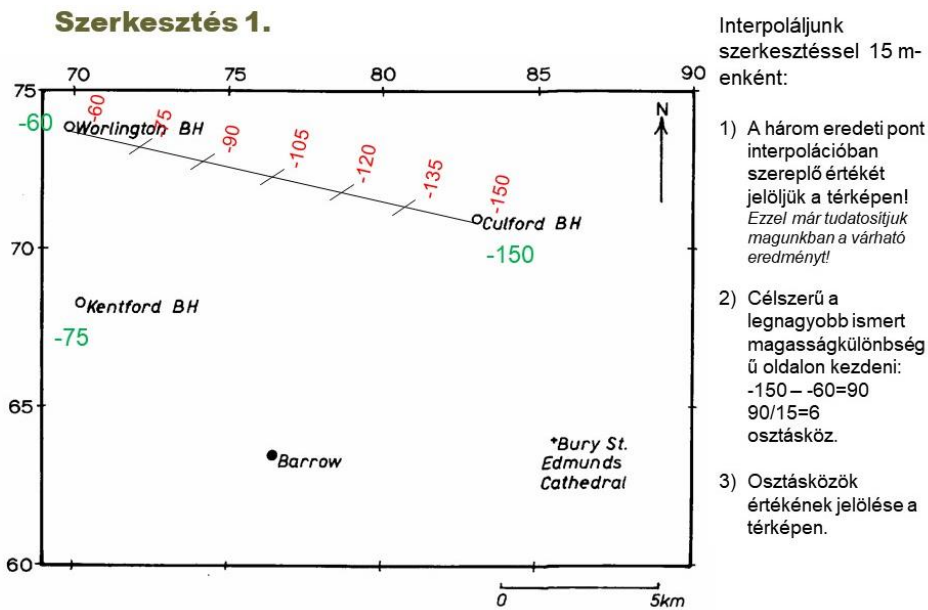
$$tg \delta = \Delta h / t_{la}$$

Mivel a feltételezett geometriai objektum, amit térképen ábrázolunk egy síklap, ezért a három pont által behatárolt területen kívül is dolgozunk a térképen; esetenként ez szükséges is a pontosabb szerkesztéshez, vagy adatleolvasáshoz. Utóbbira ad példát a 64–66 ábra feladata, amely két lépésben vezet le egy térképes szintvonal szerkesztés menetét. A feladat Lisle 2004-es kiadású könyvének gyakorlatát követi.

Sík szerkesztése három pont alapján, z-érték leolvasás

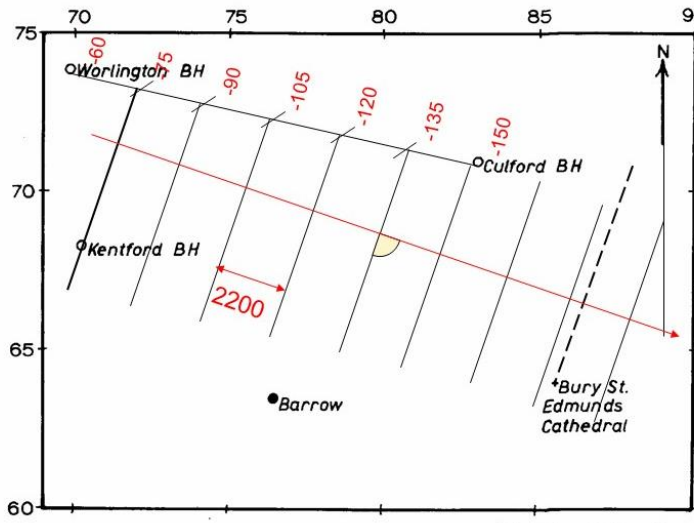


64. ábra Sík szerkesztése térképen három pont alapján, és z-érték leolvasása



65. ábra Z-értékek jelölése a három ponton és lineáris interpoláció.

Szerkesztés 2. [-60 és -150 között interpoláltunk 15 m-enként]



Eredmény:
Dőlésirány: 110
Dőlésszög: 0,38

Katedrális alatt melyik szintvonal van?
-182

0 5km

A számított pont -75 m-en Kentforddal azonos mélységben van, tehát összeköthető szintvonalal!

Az összes többi szintvonal ezzel párhuzamosan szerkeszthető!
Dőlésirány α merőleges a szintvonalakra, és azimut-értékként adjuk meg!
Iránya a növekvő mélység felé mutat!

A méretarány alapján a szintvonalak távolságát (t =lejtőalap) kiszámoljuk.

A távolság t és a magasságkülönbség h alapján a dőlésszöget δ is kiszámoljuk.

$$\operatorname{tg} \delta = h/t$$

Lineáris interpolációval meghatározzuk a Katedrális alatti pont mélységét.

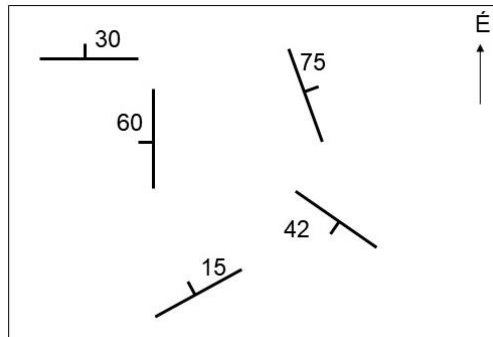
66. ábra Szintvonalak szerkesztése térképen és értékleolvasás (lineáris becslés).

Gyakorlófeladatok síkok ábrázolására

1 feladat

Ábrázold az alábbi döléseket dőléstüskével (megoldás a jobb oldalon)!

- 0/30
- 270/60
- 70/75
- 215/42
- 332/15



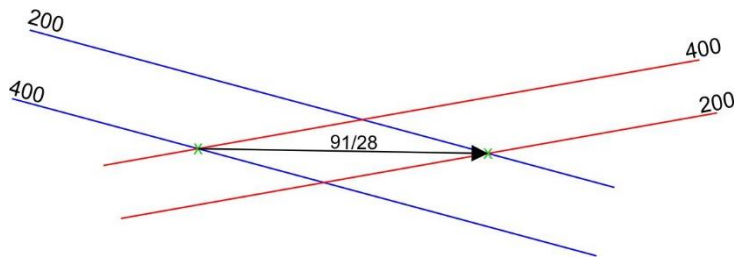
2. feladat

Két vetősík metszi egymást. A síkok adatai a következők: A: 15/65; B: 170/70

- Szerkeszd meg a síkok metszévonalát!

- Mi a metszésvonal (mint térbeli egyenes) dőlésiránya és dőlésszöge?

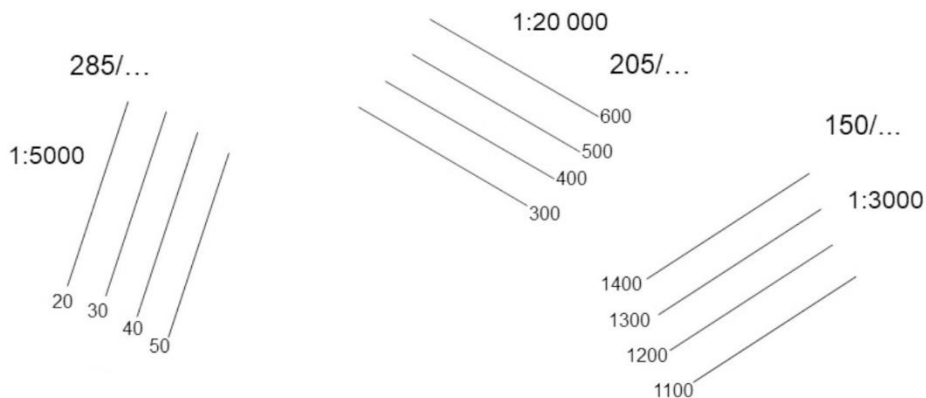
Dolgozz 1:10 000 méretarányban és a csapásvonalakat jelöld 200 m-es szintkülönbségenként (a meredek síkok miatt)



67. ábra A 2. Feladat megoldása

3. feladat

Számítsd ki a térképek alapján a megadott dőlésiránnyal ábrázolt síkok dőlésszögét! A képen a szintvonalak távolságát tekintsük 1 cm-nek!



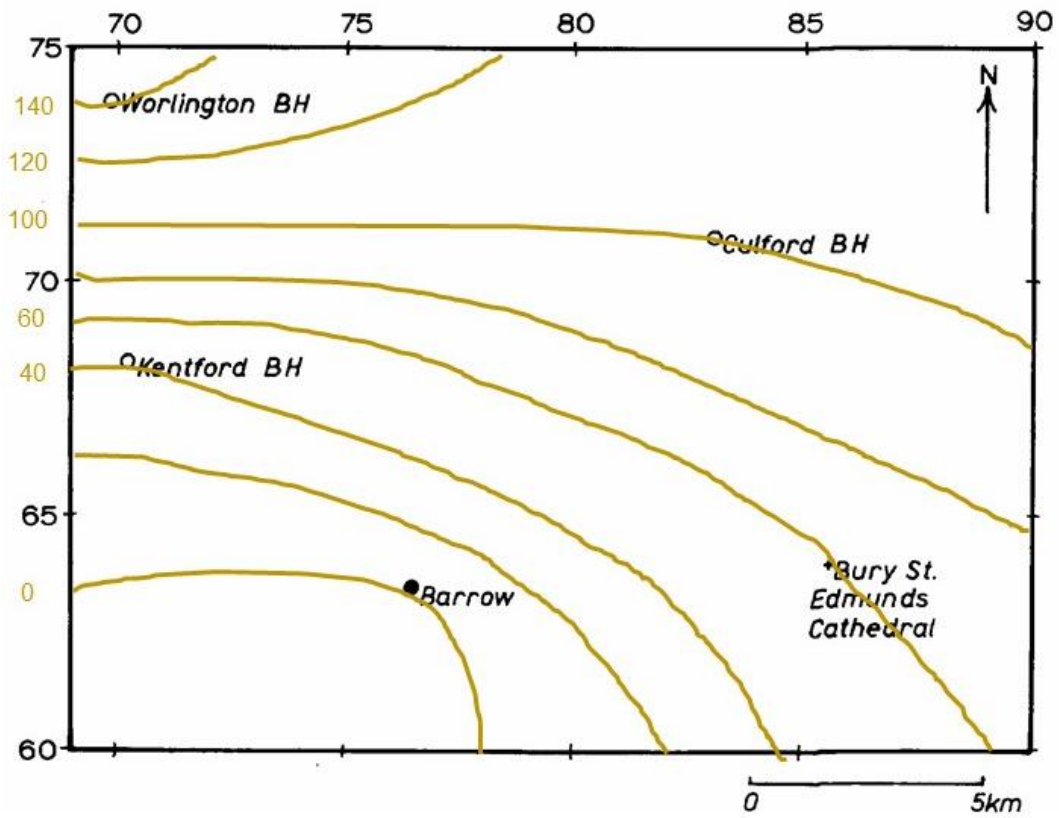
Megoldás: 285/11; 205/27; 150/73.

4. feladat

Adott egy szelíd domborzatú terület és három fúrás (l.: 67. ábra). Ezek a homokkő tetejét a felszíntől különböző mélységekben érték el: Culford: -300m; Kentford: -200m; Worlington - 100m. A fúrások „z” koordinátái az alábbiak: Culford: +100m; Kentford: + 40m; Worlington +140m. Ezt az ábráról is le lehet olvasni!

- Szerkeszd meg a homokkő réteg dőlését!
- Milyen mélyen található a homokkő a katedrális alatt?

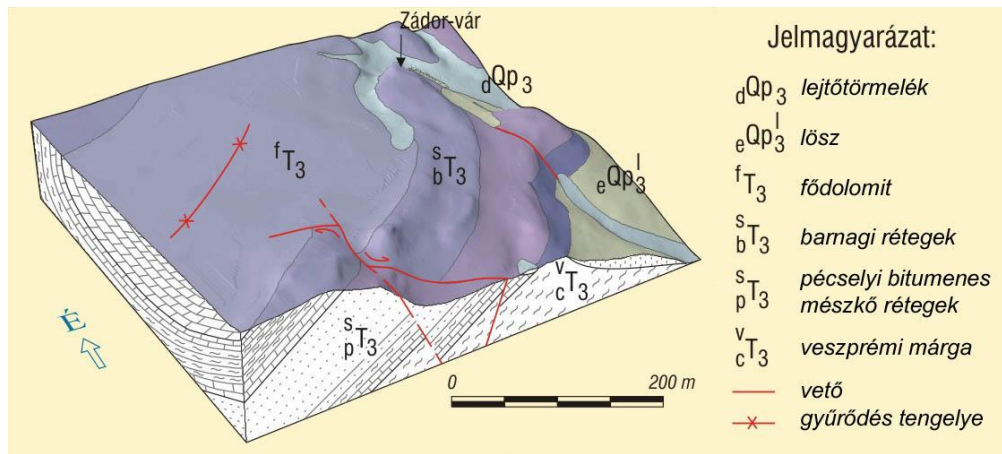
- Milyen mélységben érné el egy barrowi fúrás a homokkővet, ha Barrow tengerszinten van?



68. ábra Gyakorló feladat sík szerkesztésére három pont alapján, térképen.

SZERKESZTÉSI MÓDSZEREK GEOLÓGIAI TÉRKÉPEKEN

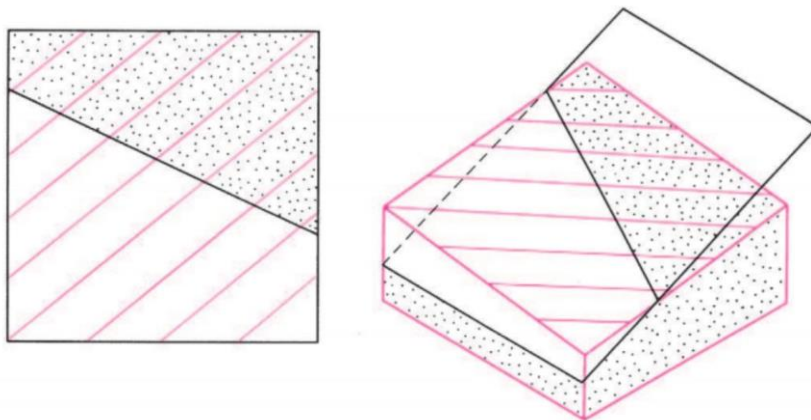
A geológiai térképek felületek térbeli kapcsolatait jelenítik meg: felületek határolják a rétegeket, kőzetesteket, felületek mentén jönnek létre a törések, amelyek mentén a kőzetek elmozdulnak egymás mellett, és felület a felszíni domborzat is, amely elmettszi a felszín alatti található bonyolult geológiai struktúrát (69. ábra). A felületekkel való műveletek ezért a geológiai térképek szerkesztésekor gyakran alkalmazott műveletek közé tartoznak, de más földtudomány területén is előfordulnak. A szerkesztési eljárás megértéséhez – mivel nem csak számokkal dolgozik az ember - gyakorlásra és térlátásra van szükség. E szemlélet alapjaiba vezetnek be a következő fejezet feladatai.



69. ábra A Zádor-vár környékének 3D tömszelvénye és geológiai térképe (Albert, 2002)

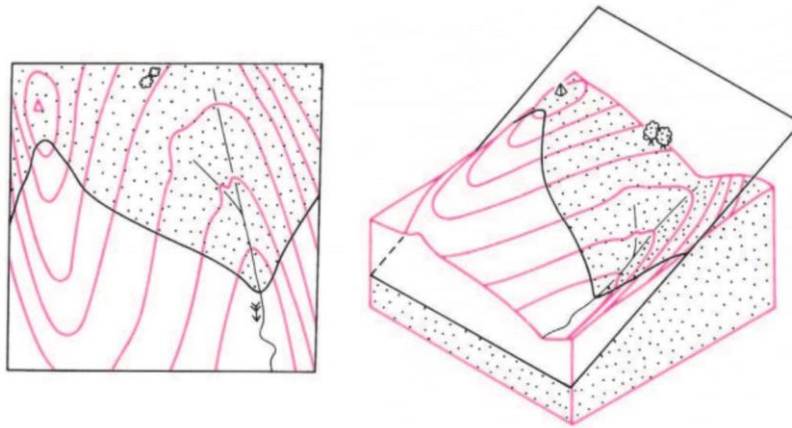
Képződményhatárok követése tagolt morfológián

A térképen a domborzat szintvonalai mellett a ritkán látjuk a geológiai sík szintvonalait is, viszont a két sík metszésvonalát a térkép határozottan feltünteti (70. ábra).

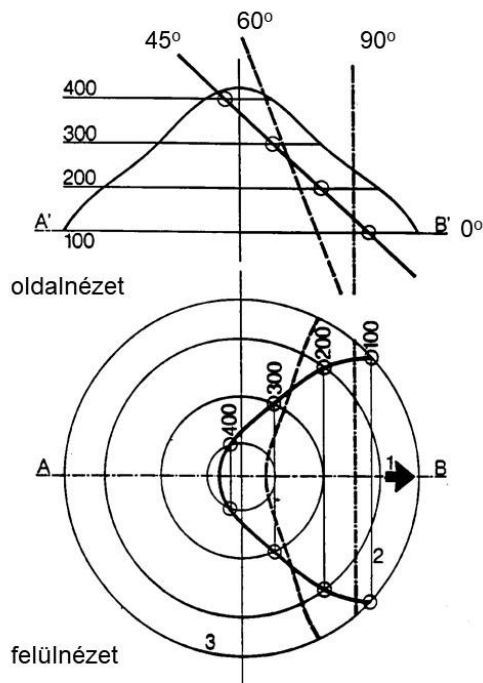


70. ábra A topográfiai és geológiai sík metszetvonalának idealizált egyszerű helyzete térképen (balra) és tömszelvényen (jobbra) (Lisle 2004).

A képződményhatár/vető síkja a földtani térképen általában hajladozó vonal mentén jelenik meg, ami nagy méretarányban, a domborzat morfológiájához igazodik. Tagolt morfológián a vonal bonyolultabb, egyszerű morfológián simább lefutású lesz (71. ábra). Az ábrázolt sík meredeksége szintén befolyásolja a metszetsíkvonal lefutásának bonyolultságát: azonos topográfiai viszonyok mellett minél meredekebb a sík, annál egyszerűbb lesz a metszetsíkvonal (72. ábra).



71. ábra A topográfiai és geológiai sík metszetsíkvonalának általános lefutású helyzete térképen (balra) és tömbszelvényen (jobbra) (Lisle 2004 nyomán).



Vegyünk egy egyszerű kerek dombot.

Messük el különböző dőlésszögű síkokkal!

Figyeld meg, hogy futnak a metszetsíkvonalak, ha a dőlésszög:

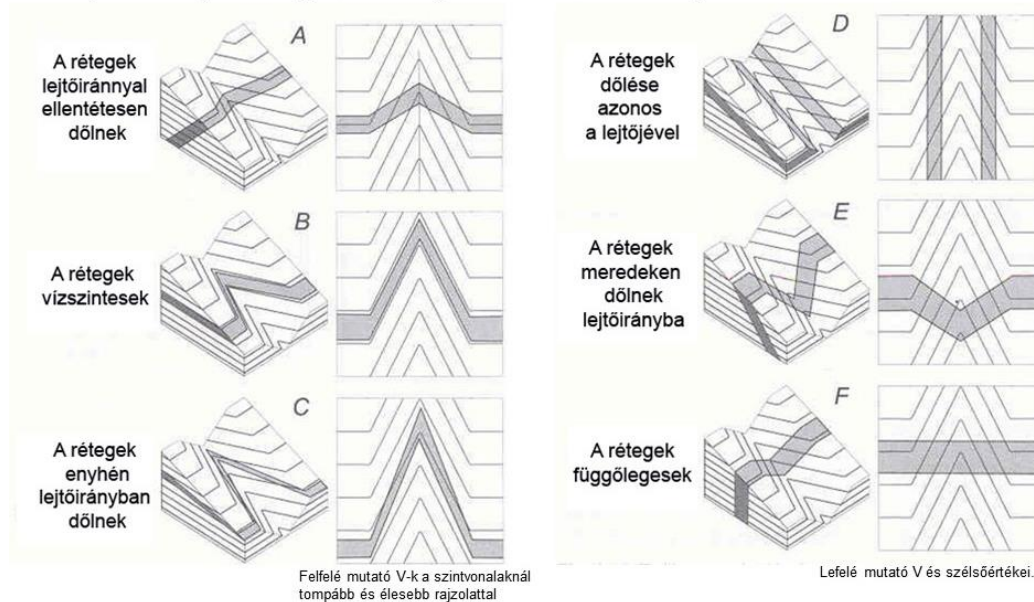
- 0°,
- 45°
- 60°,
- 90°?

72. ábra Különböző dőlésű síkok és a topográfia metszetének lefutásának változása a sík meredekségétől függően.

A metszetsvonalak rajzolata egy jól megfogható szabályszerűséget követ, ami a domborzat pozitív és negatív formaelemeitől (hegyhátak és völgyek), illetve a terep általános dőlésirányának és a geológiai sík dőlésszögnek egymáshoz való viszonyától függ. Ezt a metszetsvonal jellegzetes rajzolata alapján V-szabálynak nevezzük (73. ábra).

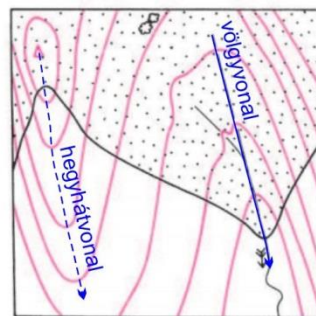
Réteg és domborzat metszetsvonal

A „V-szabály”: a völgyekben kirajzolódó formák a rétegek dőlésére utalnak.



73. ábra A V-szabály értelmezése negatív formaelemen. Pozitív formaelemeken a szabály a fordított.

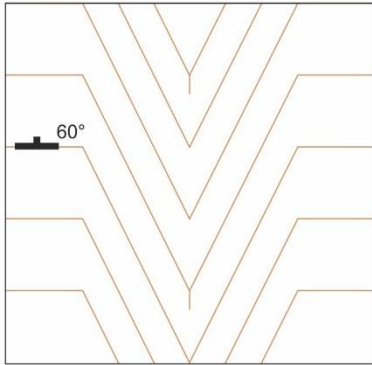
A V-szabály ahhoz is iránymutatást ad, hogy a metszetsvonal rajzolata a domborzati formaelemek idomvonalain milyen módon törik meg. Alapelveként követendő, hogy az idomváz vonalain (hegyhátvonal és völgyvonal) a metszetsvonal rajzolata tükör szimmetrikusan (de nem élesen) törik meg (74. ábra).



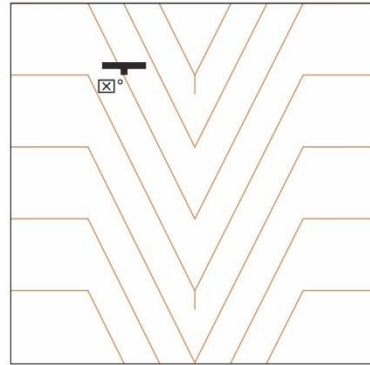
74. ábra A metszetsvonal és az idomváz vonalainak viszonya.

Gyakorló feladat

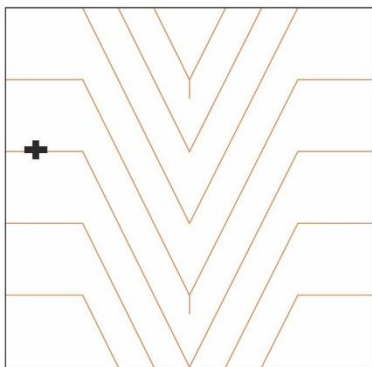
Az alábbi 1:1000 térképeken az alapszintköz 10 m. A dőlésjelek segítségével ábrázold a rétegeket a térképen!



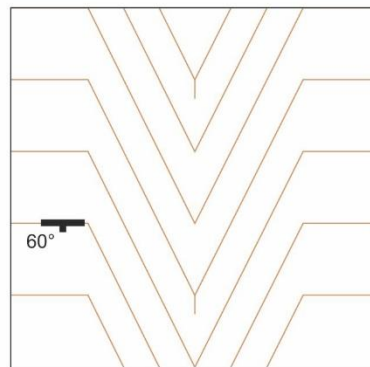
1. A rétegek a lejtőiránnyal ellentétesen dőlnek.



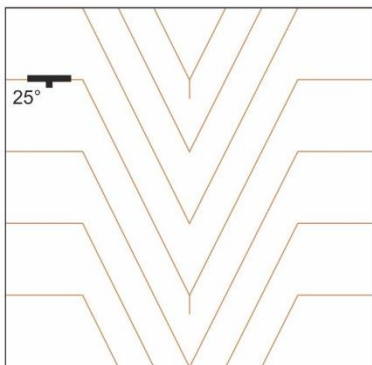
4. A rétegek és a lejtő dőlése azonos ($x=...?$).



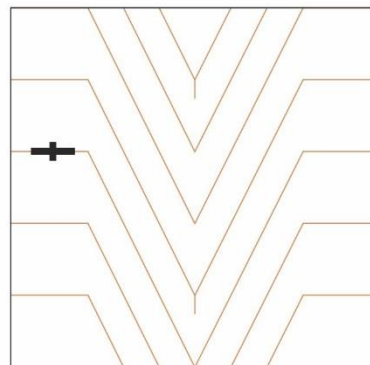
2. A rétegek vízszintesek.



5. A rétegek meredeken dőlnek lejtőirányban.



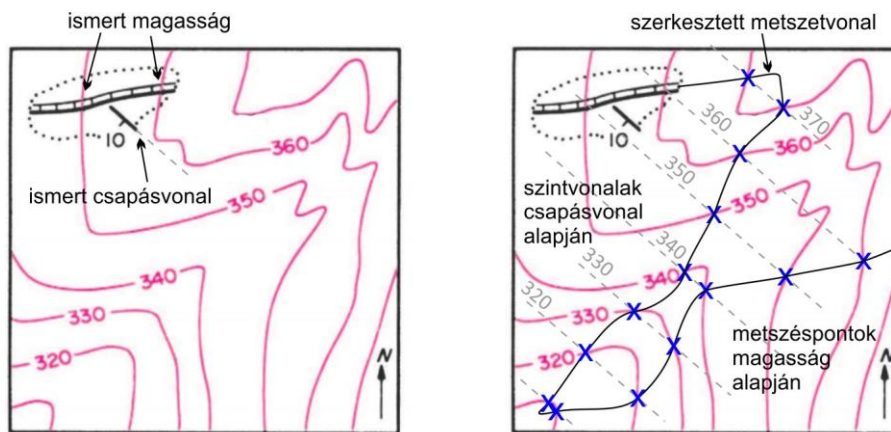
3. A rétegek enyhén lejtőirányban dőlnek.



6. A rétegek függőlegesek.

Dőlés meghatározása térkép alapján

A térkép sok esetben segítségünkre van a dőlésirány és dőlésszög meghatározásában akkor is, ha csupán néhány terepi észlelésen kívül nincs rajta más. Ez akkor alkalmazható leghatékonyabban, ha nagy méretarányú térképen egy-egy részlete a geológiai síknak már fel van térképezve, de a terület többi részén ismeretlen. A rendelkezésre álló részlet vagy a metsztvonal kis szakasza (75. ábra), vagy egy pontszerű mérési adat a sík dőlésirányával és dőlésszögével.



75. ábra Szerkezeti szintvonalak és metsztvonal szerkesztése részlet alapján (Lisle 2004 alapján módosítva).

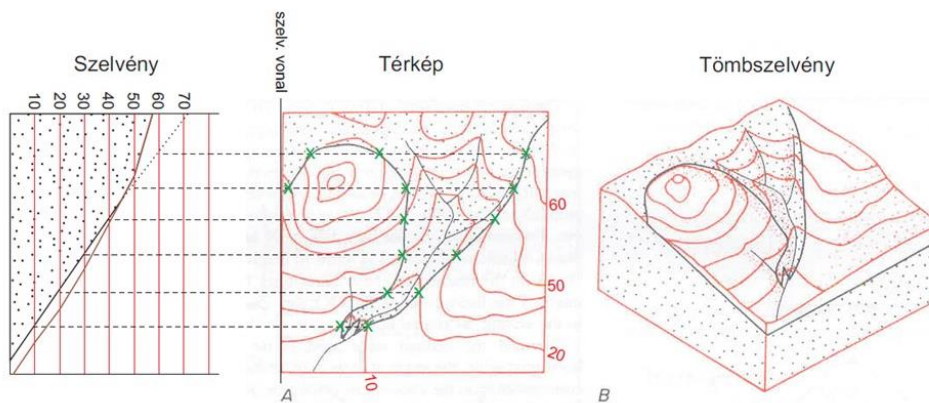
A 75. ábra baloldalán látható részlet elég ahhoz, hogy a szerkesztést elvégezzük, hiszen a kibukkanó képződményhatár két topográfiai szintvonalat is elmetasz és mérés alapján a dőlés irányát is tudjuk (dőlésjel). A szerkesztés első lépése a dőléstüske és a két ismert magasság alapján megszerkeszteni a 350 és 360-as magasságú szerkezeti szintvonalakat. Következő lépésben a velük párhuzamos többi szintvonalat is megszerkesztjük ügyelve arra, hogy a magassági értéket számmal is jelöljük. Harmadik lépés, a szerkezeti és topográfiai szintvonalak azonos magasságú pontjainak kijelölése; ezek a metszéspontok kiadják a két felület metsztvonalát. Utolsó lépésként a metsztvonal ismert pontjainak felhasználásával megrajzoljuk a térképen a metsztvonal lefutását ügyelve arra, hogy az idomvonalakon a v-szabálynak megfelelően járjunk el. A dőlésszög a méretarány alapján két szerkezeti szintvonal közti távolságból számítható (l. még korábbi fejezet).

Geológiai metszet szerkesztése

Dőlésszöget a méretarány ismeretében szerkeszteni is tudjuk, nem csak számolni. Az ilyen megközelítés segít a terület térbeli elrendezésének megismerésében, mivel a szerkesztés során nem csak vízszintes (térképi) nézetben látjuk a geológiai sík és topográfiai felszín relációját, hanem függőleges metszetben is. A geológiai metszet szükségességét már a 19. században szerkesztett geológiai térképeken is felismerték (l.: William Smith-féle 1815-ös

térkép Anglia és Wales geológiájáról¹). Azóta a geológiai térképek járulékos elemeként szinte kötelező jelleggel szerepel a függőleges metszet, hiszen ennek segítségével lehet csak térben értelmezni a térképen ábrázolt geológiai képződmények kapcsolatát.

A 76. ábra három nézetben mutatja a geológiai sík és a felszín viszonyát: tömbszelvényként, térképi nézetben és függőleges metszetben (más néven *szelvényben*). Utóbbi a térképi nézet baloldali szegélye mentén vágja el a képződményeket (szelv. vonal) és úgy van elhelyezve, hogy a térképen jelölt metszéspontokat összekötve kapott szerkezeti szintvonalak egyben vetítési vonalak is legyenek. Fontos, hogy a függőleges és vízszintes méretarány azonos legyen, különben a szelvényen a geológiai sík dőlésszöge is torzul! Az ábra a szerkesztés menetét is ismerteti.



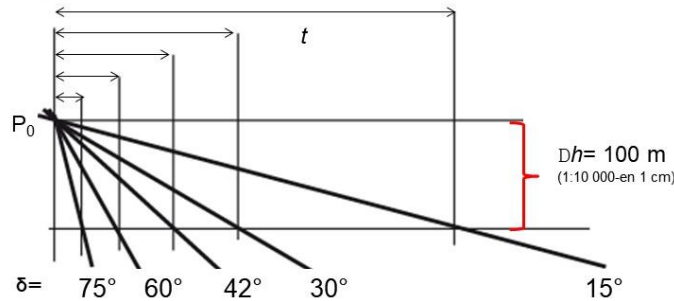
1. Megszerkesztjük a domborzat függőleges metszetét a szelvény vonalában.
2. Megjelöljük a térképen a szintvonal és a képződményhatár metszéspontjait.
3. Rávetítjük a szintvonal és a képződményhatár metszéspontjait a szelvény megfelelő magasságvonalára (a levegőben is!).
4. A függőleges metszeten megszerkesztjük a rétegdőlést.

76. ábra Dőlésszög szerkesztése szerkezeti szintvonalak segítségével függőleges dőlésirányú metszeten.

A δ dőlésszög és a szerkezeti szintvonalak közti kapcsolatot mutatja be a 77. ábra. A szerkesztés lépései a 76. ábrán bemutatott munkamentettől abban különböznek, hogy adott esetben nem a térképből indulunk ki, hanem a szelvényre felvitt dőlésadatból, amiből a térképre felszerkeszthető szerkezeti szintvonalak távolságát (lejtőalap) kapjuk meg. A két munkamentet tehát egymás fordítottja: egyik esetben a térkép az adott és a dőlésszög szerkesztendő (76. ábra), második esetben a dőlés adott és a szintvonal szerkesztendő (77. ábra). Ahogy az elsőnél, úgy a második esetben is fontos, hogy a függőleges metszet és a térkép méretaránya azonos legyen!

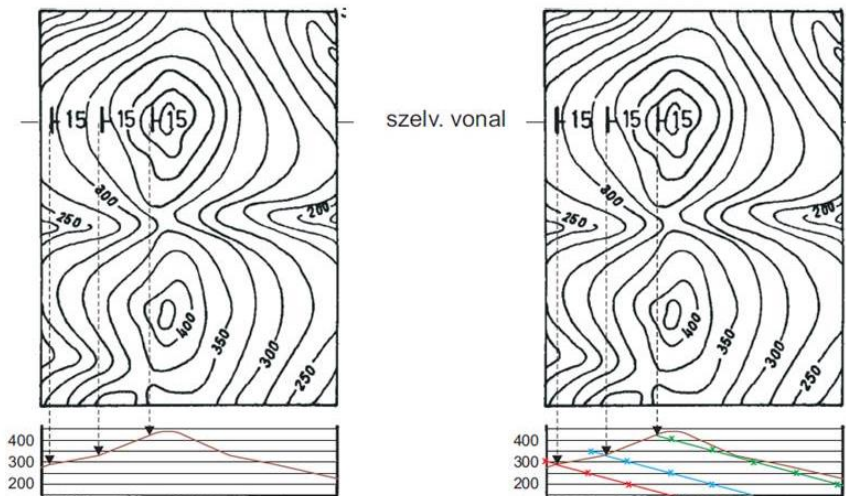
¹ Smith, W. (1815). *A Memoir to the Map and Delineation of the Strata of England and Wales with Part of Scotland*. John Cary.

1. Megszerkesztjük két szintvonal közötti magasságkülönbség (Dh) függőleges metszetét a méretarány szerint. (pl. 100 m-es szintvonalköz szerkesztése 1:10 000-es méretarányban 1 cm a diagramon).
2. A felső szintvonal egy pontjától (P_0) felmérjük a dőlésszögeket (δ) és elmetsszük az alsó szintvonalat.
3. Az alsó szintvonal metszéspontját rávetítjük a felső szintvonalra.
4. Leolvassuk a metszéspont és a szögek felmérési pontja közti (t) távolságot. Ez lesz a lejtőalap (azaz a szerkezeti szintvonalak közti távolság).



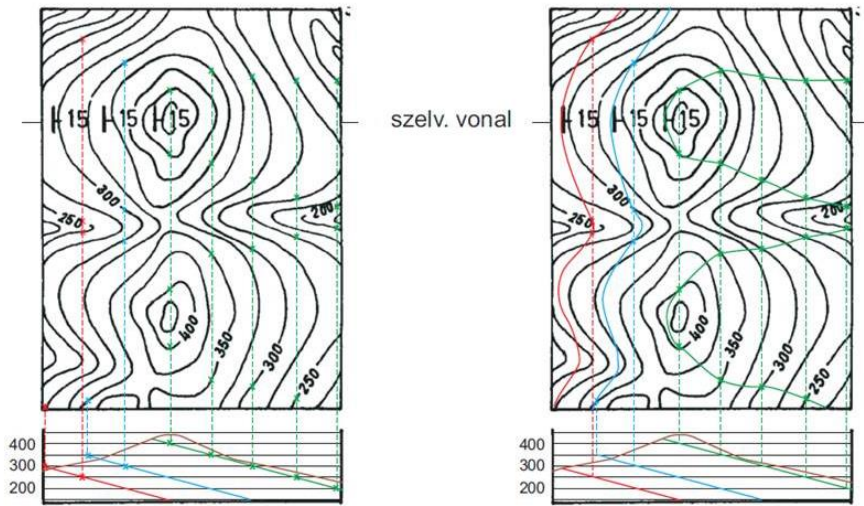
77. ábra A geológiai sík dőlése és a térképen ábrázolt szerkezeti szintvonalak sűrűsége közötti összefüggés szemléltetése méretarányhelyes függőleges metszeten.

A metszetszerkesztés két irányban is alkalmazható műveleti sorát akkor is felhasználhatjuk szelvény és térkép szerkesztésére, ha a térképen nem látszanak a felszín és a geológiai sík metszévonalai. E művelet során csupán a dőléstűske iránya és a dőlésszög ad támpontot (l. 78, 79. ábra).



1. Megszerkesztjük a domborzat függőleges metszetét a szelvény vonalában.
2. Rávetítjük az észlelési pontokat a domborzat metszetére.
3. A függőleges metszeten megszerkesztjük a rétegdőléseket.
4. Megkeressük a metszeten a rétegek és a szintvonalak metszéspontjait (a levegőben is!).

78. ábra Képződményhatár szerkesztésének lépései pontszerű dőlésadatokból (1–4. lépés).

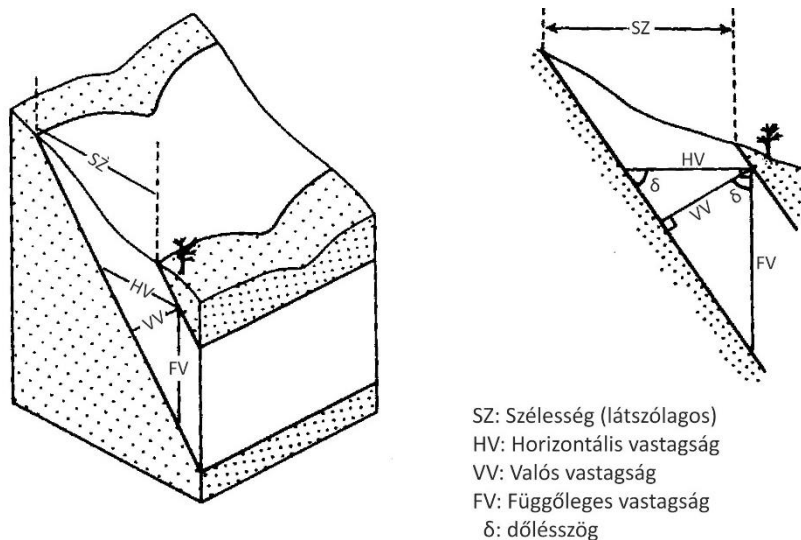


5. Rávetítjük a függőleges metszetről a metszéspontokat a térképre és megjelöljük az azonos magasságú szintvonalak metszéspontjait.

6. Összekötjük a metszéspontokat a térképen.

79. ábra Képződményhatár szerkesztésének lépései pontszerű dőlésadatokból (5–6. lépés).

Ezekben az esetekben (76–79. ábrák) a szerkesztett geológia metszet dőlésirányú volt, azaz a szelvényről le lehetett olvasni/fel lehetett szerkeszteni a geológiai sík δ dőlését. Ha a szelvényen, vagy a térképen két geológiai sík metszetsvonala is látszik (pl. egy réteg alja és teteje), akkor a két sík közötti réteg vastagságát is le lehet olvasni. A rétegvastagságot három módon adják meg geológiai célú adatbázisokban (80. ábra): horizontális vastagság; függőleges vastagság és valódi vastagság. Ezen felül a térképről leolvasható szélesség (elterjedés) is megadható jellemző paraméter.



SZ: Szélesség (látszólagos)
 HV: Horizontális vastagság
 VV: Valós vastagság
 FV: Függőleges vastagság
 δ : dőlésszög

80. ábra Rétegvastagság lehetséges megadási módozatai (Lisle, 2004 nyomán).

A valódi vastagság a dőlésszög és a horizontális, vagy a függőleges vastagság méretarány szerint átszámított valódi értékéből kiszámítható:

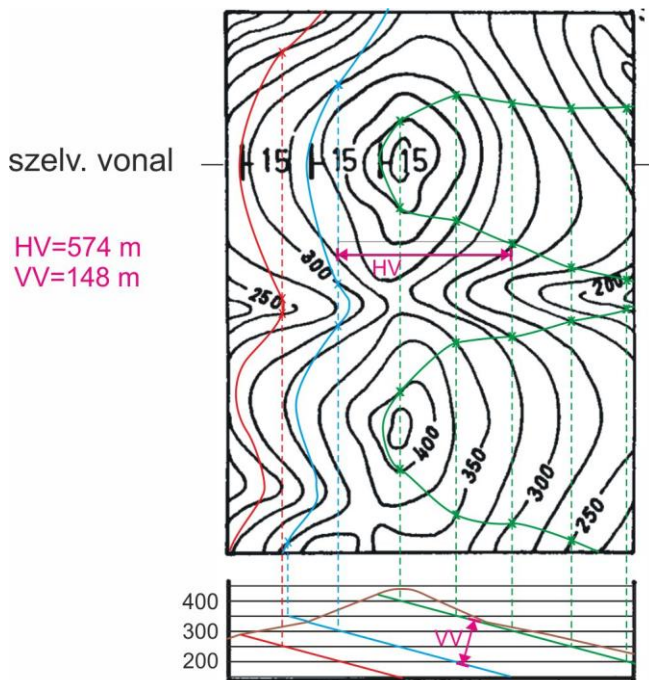
$$\sin\delta \cdot HV=VV$$

vagy

$$\cos\delta \cdot FV=VV$$

A 78-79-es ábra feladatának térképén és dőlésirányú metszetén jól szemléltethető a különböző vastagságok (81. ábra). Az ábrán megadott értékek ellenőrizhetők a térképről leolvasott adatokkal is.

$$\sin 15^\circ \cdot 574=148$$



81. ábra A rétegvastagság alternatív értékei és térbeli összefüggései a 78-79-es feladat esetében: HV=horizontális vastagság; VV=valódi vastagság.

A függőleges vastagság könnyen leolvasható a megszerkesztett szerkezeti szintvonalak segítségével. Ha a keresett vastagságú réteg közvetlenül a topográfiai felszín alatt van, akkor metszéspontokat keresünk a réteg alsó síkjának szerkezeti szintvonalai és a topográfiai szintvonalak között majd kivonjuk egymásból a két szintvonal értékét ($FV=z_{ht}-z_{hsz}$). Ha a réteg egy másik geológiai sík alatt helyezkedik el, akkor ugyanez az eljárási mód, de a topográfiai szintvonalak helyett a réteg felső határának szerkezeti szintvonalával keressük a metszéspontokat. Az így szerkesztett izovonalas térképet vastagságtérképnek nevezzük, és azt mutatja meg, hogy egy geológiai képződménynek mi a függőleges vastagsága egy adott pontban (l.: következő fejezet 5. feladat).

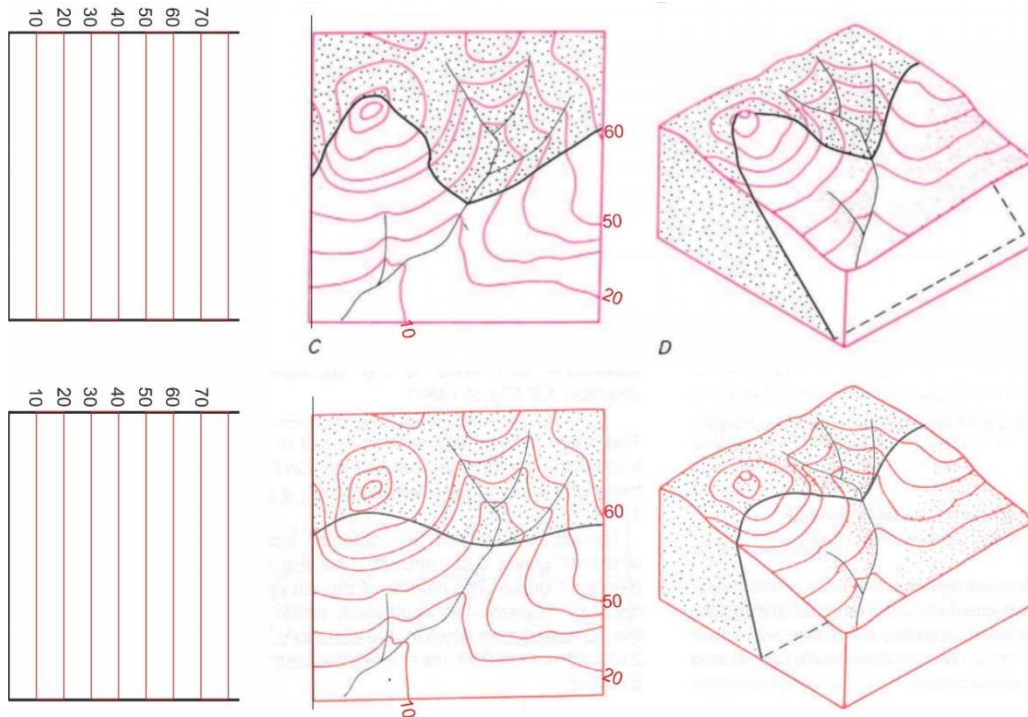
A geológiai metszet készítése kettős célt szolgál: egyrészt segíti a térképszerkesztést azzal, hogy a szerkezeti szintvonalak távolsága (a geológiai síkhoz tartozó lejtőalap) vetítési vonalakként szolgálnak, másrészt segít a térképen ábrázolt jelenségek jobb megértésében.

A fejezetben eddig bemutatott módszerek a geológiai sík dőlésirányában készültek. Többnyire azonban a függőleges metszetek iránya nem esik egybe a geológiai térképen ábrázolt képződményhatárok, vagy törések dőlésirányával, így a metszeten áldőlést kell szerkesztenünk a korábban ismertetett módon.

Gyakorlófeladatok

1. feladat

A térképről leolvasható képződményhatárból szerkesszük meg a réteghatár dőlésirányú szelvényét, adjuk meg döléseket (dőlésirány/dőlésszög)! A 76-os ábrához hasonló módon a függőleges metszet vonala a térkép baloldali szegélyvonalára.

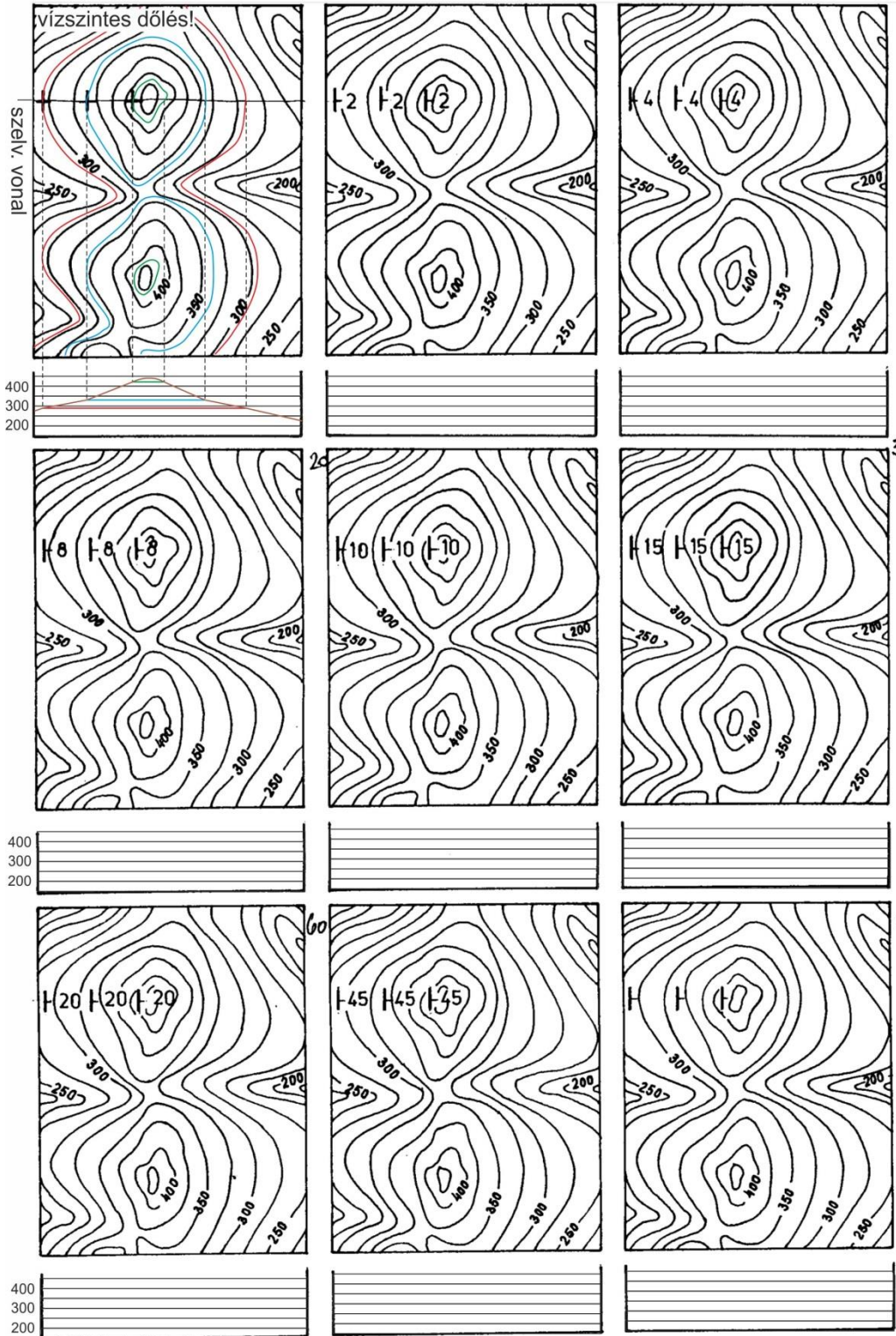


A szelvényeken nincs túlmagásítás és a térképek északi tájolásúak!

82. ábra Gyakorlatok dőlésszög szerkesztéséhez szerkezeti szintvonalak segítségével függőleges dőlésirányú metszeten (Lisle, 2004. nyomán módosítva).

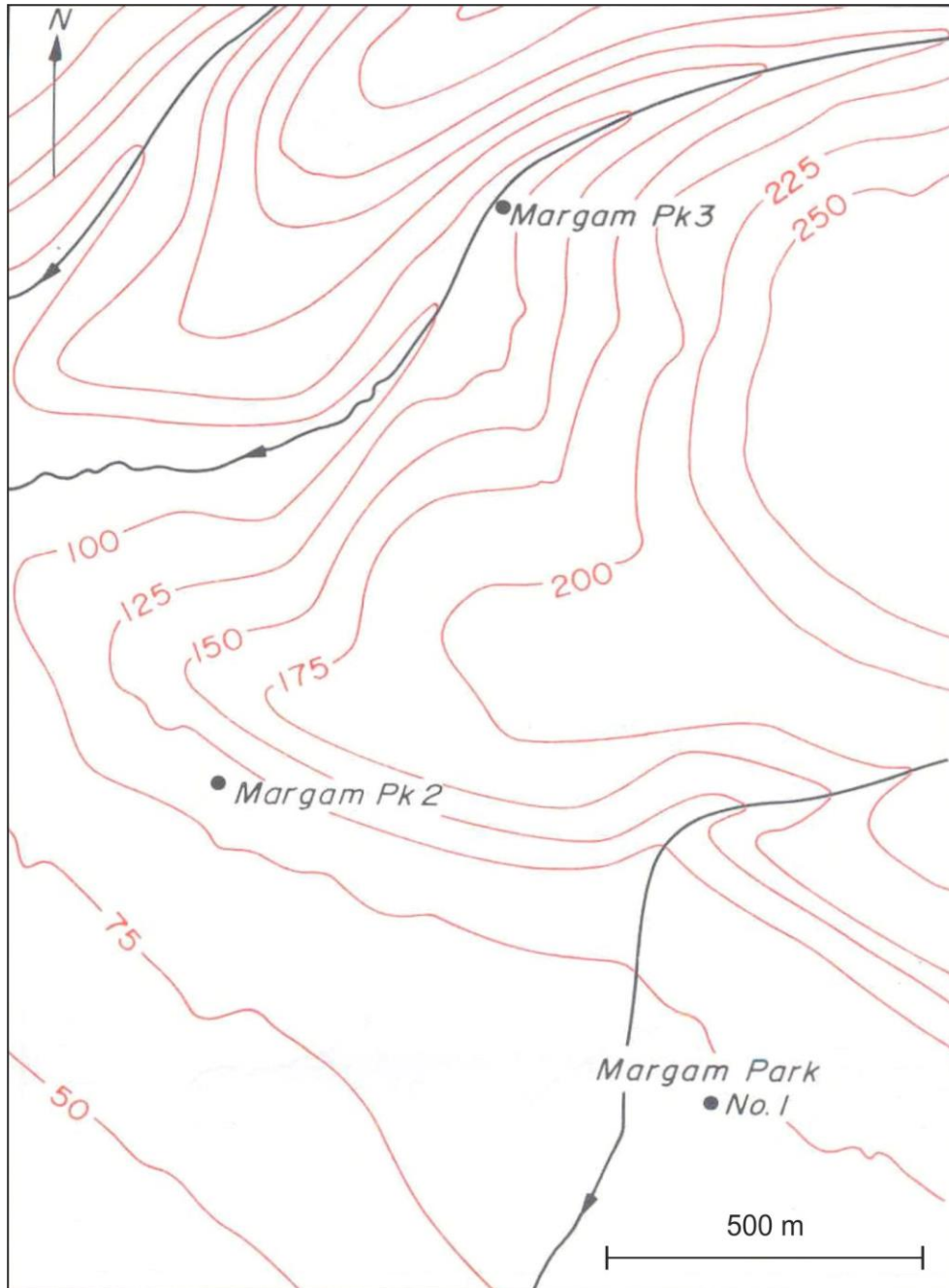
2. feladat

Szerkeszd meg a képződményhatárok lefutását a térképeken!
 Rajzold meg a dőlésirányú szelvényt (réteghatár + domborzat) - a szelvényvonal mindenhol u.a.!



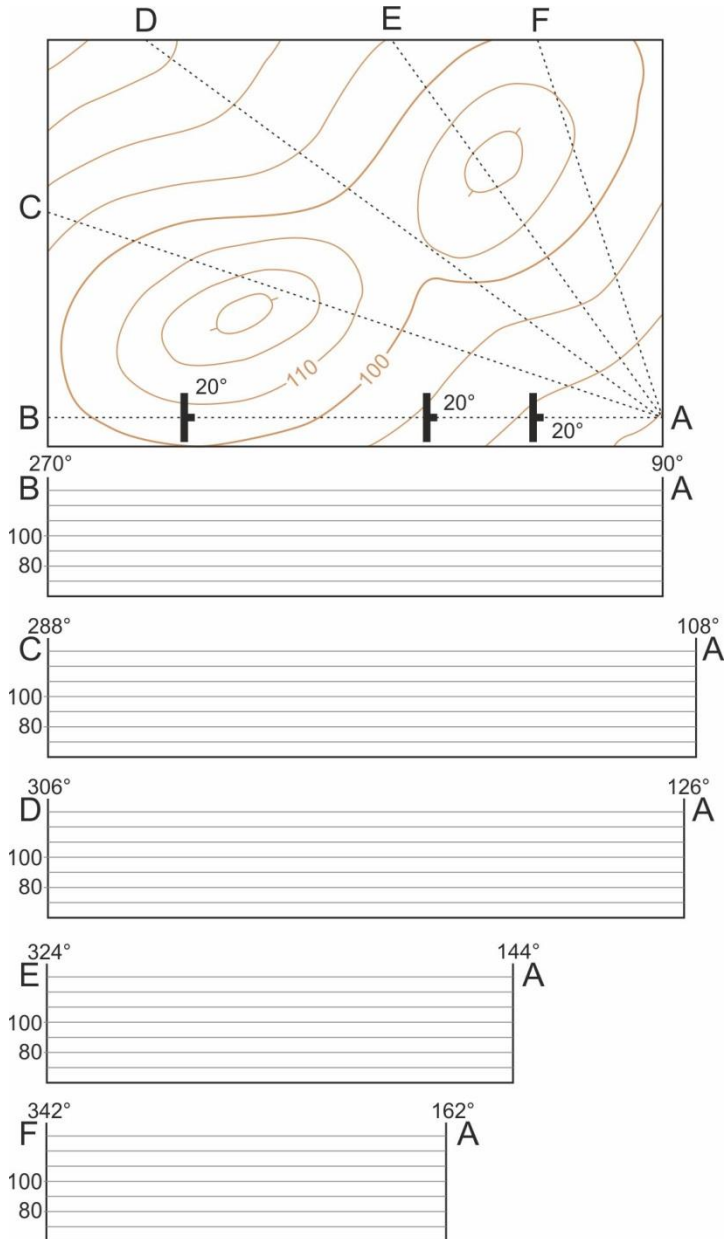
3. feladat

Egy homokkőréteg alját z_{ha} a következő tengerszint alatti mélységben érték el a kutatófúrások: Margam No1: $z_{ha} = -110\text{m}$; Margam Pk2: $z_{ha} = -150\text{m}$; Margam Pk3: $z_{ha} = -470\text{m}$. A rétegsorból ismert, hogy homokkőréteg felső határa 620 m-rel az alja fölött található (FV=620m). Szerkeszd meg a homokkőréteg tetejének kibukkanását! Számold ki a rétegdőlést! Számold ki a valódi rétegvastagságot! Kibukkan-e a homokkőréteg alja a térkép területén?



4. feladat

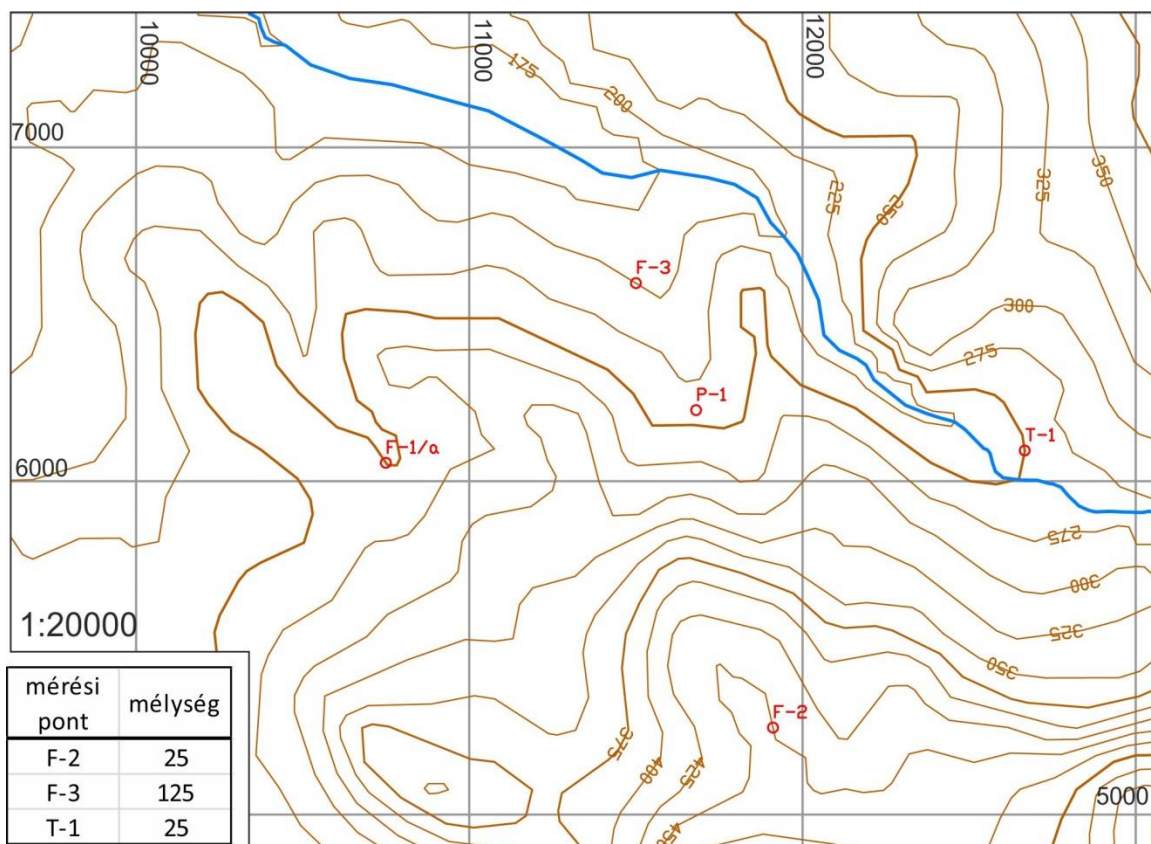
Az alábbi térképen az alapszintköz 10 m és a vertikális metszetek méretaránya megegyezik a térkép méretarányával (~1:5000). A dőlésjelek segítségével ábrázold a rétegeket a térképen, majd szerkessz különböző irányú függőleges metszeteket! A metszeteken az áldólést képlettel számold!



5. feladat

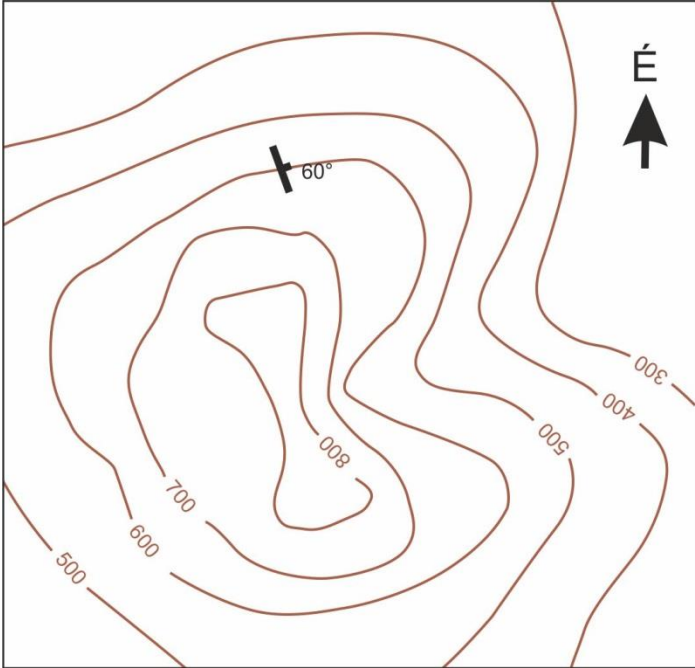
A térképen ábrázolt területen kétféle kőzet fordul elő: az idősebb homokkő és a fiatalabb mészkő. Három fúrásban megmérték a képződményhatár felszínétől számított mélységét (l. táblázat), amiből kiderült, hogy a rétegek kibillentett helyzetűek. A réteghatárt mint szabályos síkot feltételezve:

- határozd meg a rétegdőlés irányát és dőlésszögét,
- szerkeszd meg a képződmény-határt a térképen, és jelöld meg, hogy melyik a homokkő és melyik a mészkő!
- szerkeszd meg fiatalabb képződmény vastagságtérképét 25 m-enként 100 m-es vastagságig!

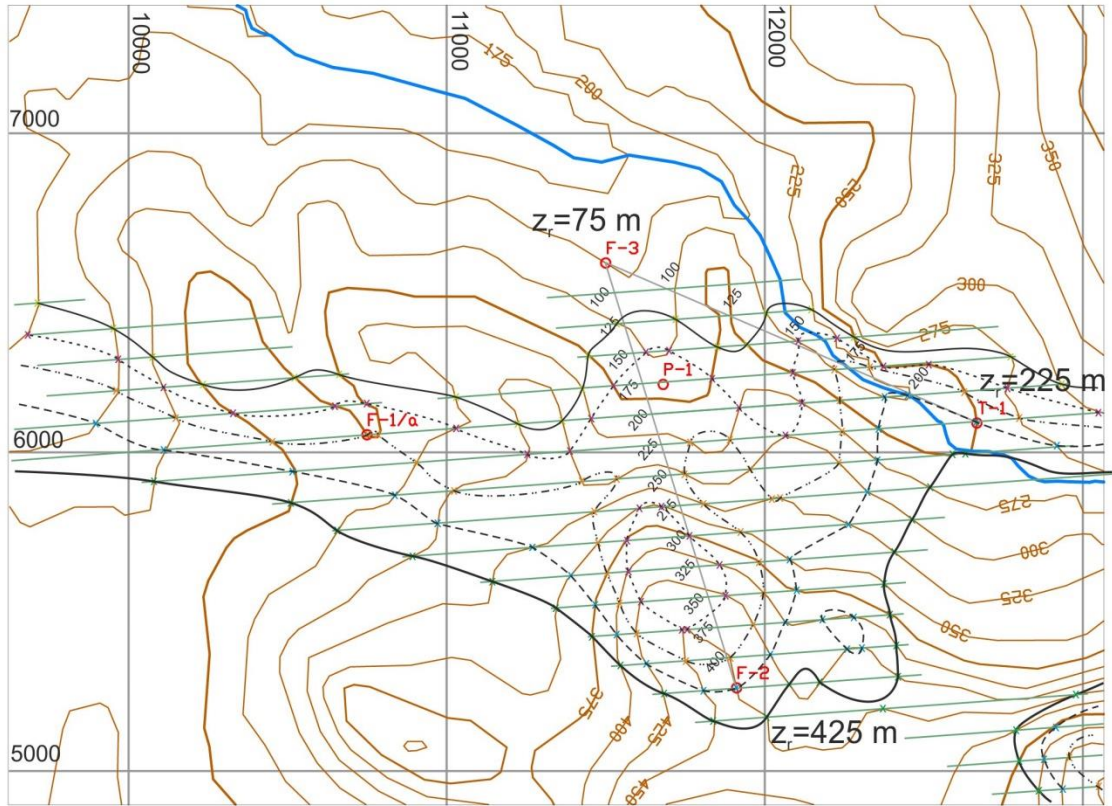


6. feladat

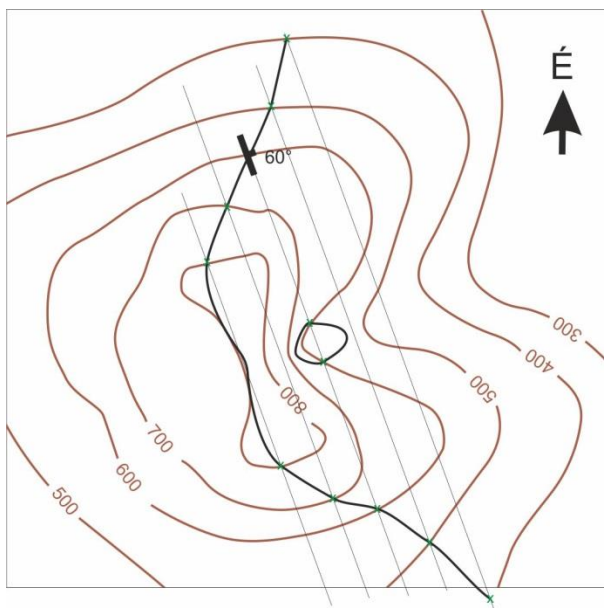
A dőlésadat (70/60) alapján szerkeszd meg a képződményhatárt! A térkép méretaránya 1:100000.



Megoldások az 5. és 6. feladathoz



83. ábra Az 5. gyakorlófeladat megoldása. A geológiai sík (réteghatár) dőlése: $365/15$.



84. ábra A 6. gyakorlófeladat megoldása.

Irodalmi források

- Albert G. 2017: Tematikus térképek és geoinformatika a geotudományokban. Lektorált digitális oktatási segédanyag, Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest 380 p.
- Albert G. 2018: 3D geológiai modellek fejlesztése térinformatikai szemlélettel. Beau Bassin: GlobeEdit, 2018. 168 p. (ISBN:978-620-2-48749-8)
- Albert G. 2002: A pécselyi Zádor-vár környékének földtani felépítése – In Budai et al. (2002.) Geológiai kirándulások I. – A Balaton felvidék, Balatonfelvidéki Nemzeti Park Igazgatósága, Veszprém. p. 110.
- Cockett R: Visible geology - <http://app.visiblegeology.com/>
- Elek I. 2006: Bevezetés a geoinformatikába – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.
- Erol, B. 2011: An automated height transformation using precise geoid models - Scientific Research and Essays Vol. 6(6), pp. 1351–1363
- Halász G., Huba A. 2003: Műszaki mérések. Műegyetemi Kiadó 2003.
- Jessel, M. 2001. Three-dimensional geological modelling of potential-field data. *Computers & Geosciences*, 27:455–465. doi.org/10.1016/S0098-3004(00)00142-4
- Kaufmann, O. and Martin, T. 2008. 3D geological modelling from boreholes, cross-sections and geological maps, application over former natural gas storages in coal mines. *Computers & Geosciences*, 34:278–290. doi.org/10.1016/j.cageo.2007.09.005
- Kidner, D., Dorey, M., Smith, D. 1999: What's the point? Interpolation and extrapolation with a regular grid DEM. – IV International Conference on GeoComputation, Fredericksburg, VA, USA – http://www.geocomputation.org/1999/082/gc_082.htm (elérés: 2018. május 22.)
- Lancaster, P. & Salkauskas, K. 1986: Curve and Surface Fitting – An Introduction, Academic Press, 280 p.
- Lisle R. J. 2004: Geological Structures and Maps: A Practical Guide - Third edition, Elsevier, 106 p.
- Maxelon, M., Renard, P., Courrioux, G., Braendli, M. and Mancktelow, N. 2009: A workflow to facilitate three-dimensional geometrical modelling of complex poly-deformed geological units. *Computers & Geosciences*, 35:644-658. doi: 10.1016/j.cageo.2008.06.005
- Nagyfelbontású digitális domborzat modell az ország teljes területére (ELK-DDM-5) 2006 https://www.geoshop.hu/images/static/ELK-DDM-5_Termek_ismerteto.pdf (elérés: 2018. május 22.)

Olea, R.A. 1999: Geostatistics for Engineers and Earth Scientists, Kluwer Academic Publishers, 303 p.

Peterson, S. 1998: Computing Constrained Delaunay Triangulations In the plane - Minnesota Center for Industrial Mathematics
http://www.geom.uiuc.edu/~samuelp/del_project.html (elérés: 2018. május 22.)

Samet H. 1990: The design and analysis of spatial data structures – Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1990.

Shepard, D. 1968: A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data, ACM '68: Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference, ACM, pages 517-524.

Sibson, R. 1981. A brief description of natural neighbour interpolation. *Interpreting multivariate data*.

Ábrajegyzék

1. ábra A tematikus térképek ötféle csoportosítása	6
2. ábra A geotudományok esetében a kvantitatív adatokat leginkább izovonalakkal ábrázolják, de előfordul, hogy a térképeket adattartományok szerint színezik (l.: az ábrázolt morfológiai térkép).....	7
3. ábra Az interpoláció célja a geoinformatikában.	8
4. ábra Az interpolációs módszerek dimenziói.....	8
5. ábra A kvantitatív adatok Bertin-féle vizuális változói földtudományi térképeken.....	9
6. ábra Példa a kvantitatív adatokra földtudományi térképeken.	10
7. ábra Az interpolációs módszerek típusai az alkalmazott módszerek szerint csoportosítva	10
8. ábra Az interpolációs módszerek csoportosítása a felhasznált kontrolpontok alapján. Balra: 1D-s (lineáris) függvény illesztése. Jobbra: keresési sugár (R) az x pont meghatározására felhasználható pontok keresésére egy 2D-s interpolációnál.	11
9. ábra A globális interpolációs módszerek.	11
10. ábra A lokális interpolációs módszerek	12
11. ábra Az interpolációs módszerek csoportosítása visszatérő érték szerint.	12
12. ábra A gyakori interpolációs módszerek csoportosítása.	13
13. ábra Az interpolációs módszerek térinformatikai szempontú csoportosítása.	14

14. ábra Egydimenziós polinomiális függvény öt kontrollponttal. A módszer – bár egzakt és determinisztikus – nem adja vissza azt a szemmel is követhető csökkenést az origótól távolodva, amire számítanánk.....	15
15. ábra Térképi nézet (2D): Az X pont értékének becslése négy y-irányban, majd ezek adataiból egy x-irányban elvégzett harmadfokú polinom meghatározásával.....	16
16. ábra Grafikon nézet: 1D-s adatmezőben (pl.: a grid egy irányában) felvett értékekre számított harmadfokú spline polinomok $S(x)$ láncolata.....	16
17. ábra A polinomiális interpoláció és egy hozzá kapcsolódó feladat. N valós szám, az adatmező mérete (0 és pozitív egész értéket vehet fel).	17
18. ábra Az előző ábra feladatának megoldása Gauss-eliminációval, egyenletrendszerrel, vagy mátrixok szorzásával jön ki. Utóbbihoz ad segítséget a jelenlegi ábra.	18
19. ábra A polinomiális interpoláció nem egzakt sztochasztikus módszere, más néven a legkisebb négyzetek módszere.	18
20. ábra A Gauss-Markov tétel, ami a legkisebb-négyzetek módszerének alapja.	19
21. ábra Szakaszos lineáris interpoláció 1D-ben.	20
22. ábra Gyakorló feladat 1D interpolációra.....	21
23. ábra A feladathoz tartozó terület térképe a három mintavételi ponttal.....	22
24. ábra A feladat megoldása polinomiális interpolációval, determinisztikus módszerrel... ..	22
25. ábra A feladat megoldása szakaszos lineáris interpolációval.	23
26. ábra A feladat megoldása legkisebb négyzetek módszerével.....	23
27. ábra Lineáris interpoláció 3D-ben	25
28. ábra Szintvonal helyének meghatározása egy térbeli háromszögben.	26
29. ábra Pont és zárt alakzat topológiai viszonyainak meghatározása.....	27
30. ábra Pontérték számítása lineáris interpolációval segédpontok használatával.....	28
31. ábra Sík illesztésének determinisztikus módszere.	29
32. ábra A 31-ábra feladatához tartozó egyenletrendszer megoldása Gauss-eliminációval. Az ábrán az együtthatók szorzatának (A) és a függvényértékek (z) mátrixával végzett közös műveletek láthatók a levezetés 2. lépésétől, amikor már a 2. és 3. sorból kivontuk az elsőt.	30
33. ábra Műveleti sorrendek összehasonlítása a háromszögekben belüli pontérték-számításkor. A baloldalon a lineáris interpoláció módszere segédpontok felhasználásával, jobboldalon a sík egyenletének felhasználásával terveztük a feldolgozási műveletek sorrendjét.	31

34. ábra A Delaunay-háromszögelés és egy lehetséges munkamenet a háromszögek keresésére.	32
35. ábra Bilineáris interpoláció rácspontok számításához.	33
36. ábra Trendsík szerkesztése.	35
37. ábra A trendsík elhelyezkedése a 36. ábra feladatában megadott pontokra vonatkoztatva. Az ábra az x-tengely pozitív irányából mutatja az alakzatokat perspektív nézetben.	38
38. ábra A 36. ábra feladatában megadott kontrollpontok eredeti és a trendsík függvényével számított z-értékek összehasonlítása.	38
39. ábra A legközelebbi szomszédok módszere 1–3D-ban.	39
40. ábra Legközelebbi szomszédok módszerének alkalmazása a 36. ábra feladatában is felhasznált pontokra.	40
41. ábra A természetes szomszédok (natural neighbor) módszer alkalmazásának lépései (1–4 lépés).	41
42. ábra A természetes szomszédok (natural neighbor) módszer alkalmazásának lépései (5–6 lépés).	41
43. ábra Az IDW módszer képlete.	42
44. ábra Az IDW alkalmazása a korábbi feladatokból ismert 5 pontra $k=2$ súlytényezővel.	42
45. ábra A k súlytényező értékének szerepe az IDW módszernél.	43
46. ábra Az IDW módszer tagolt területeken nem jól adja vissza a valódi morfológiát.	43
47. ábra Az 1-es feladathoz tartozó pontok koordinátái.	44
48. ábra Az 1-es feladat pontjainak térképi ábrázolása.	44
49. ábra A 2-es feladathoz tartozó pontok koordinátái.	46
50. ábra A 2-es feladathoz tartozó térkép. Csak a feladat megértése szempontjából van szerepe, a számításokhoz nem kell használni!	46
51. ábra A 3-as feladathoz tartozó kutak koordinátái a vízmélység adatokkal.	47
52. ábra A 3-as feladathoz tartozó térkép. Csak a feladat megértése szempontjából van szerepe, a számításokhoz nem kell használni!	47
53. ábra Három ponttal (A,B,C) megadott sík, és ugyanennek P ponton felvett normálvektora $[-1,4; 1,2; -1]$	50
54. ábra Egyszerű sík szokásos térképi ábrázolása: irányvektor jele (balra), szintvonalak (jobbra). Utóbbi esetben a térkép méretarányát is ismernünk kell a dőlésszög értelmezéséhez.	51

55. ábra A sík dőlésiránya az, amerre a síknak legnagyobb a lejtőszöge (Lisle 2004 után módosítva).....	51
56. ábra Egy 40/30 dőlésű geológiai rétegsor térképi és 3D-s megjelenítése a VisibleGeology internetes applikáció segítségével.	52
57. ábra A függőleges metszetek és az ábrázolt sík általános összefüggései. A metszősíkon csak dőlésirányú esetben látható a valódi dőlésszög; minden egyéb esetben áldőlést tapasztalunk (Lisle, 2004 után módosítva).....	53
58. ábra Egy 240/8 dőlésű rétegsor és egy 290/45 dőlésű vető “találkozásának” térképi és 3D-s nézete. A két sík metszétvonalát két jól azonosítható térbeli pont jelöli ki.	54
59. ábra A réteglap síkjának szerkesztése szintvonalakkal.	54
60. ábra A vető síkjának szerkesztése szintvonalakkal.....	55
61. ábra A két szintvonalakkal szerkesztett sík térbeli metszétvonalának szerkesztése.....	55
62. ábra Terepi problémafelvetés: mi a sík dőlése a három észlelési pont alapján?	56
63. ábra A három pont alapján történő szintvonal szerkesztés térképen lineáris interpolációval.....	57
64. ábra Sík szerkesztése térképen három pont alapján, és z-érték leolvasása	58
65. ábra Z-értékek jelölése a három ponton és lineáris interpoláció.	58
66. ábra Szintvonalak szerkesztése térképen és értékleolvasás (lineáris becslés).....	59
67. ábra A 2. Feladat megoldása	60
68. ábra Gyakorló feladat sík szerkesztésére három pont alapján, térképen.	61
69. ábra A Zádor-vár környékének 3D tömbszelvénye és geológiai térképe (Albert, 2002)	62
70. ábra A topográfiai és geológiai sík metszétvonalának idealizált egyszerű helyzete térképen (balra) és tömbszelvényen (jobbra) (Lisle 2004).	62
71. ábra A topográfiai és geológiai sík metszétvonalának általános lefutású helyzete térképen (balra) és tömbszelvényen (jobbra) (Lisle 2004 nyomán).	63
72. ábra Különböző dőlésű síkok és a topográfia metszétének lefutásának változása a sík meredekségétől függően.	63
73. ábra A V-szabály értelmezése negatív formaelemen. Pozitív formaelemeken a szabály a fordított.	64
74. ábra A metszétvonal és az idomváz vonalainak viszonya.	64
75. ábra Szerkezeti szintvonalak és metszétvonal szerkesztése részlet alapján (Lisle 2004 alapján módosítva).....	66
76. ábra Dőlésszög szerkesztése szerkezeti szintvonalak segítségével függőleges dőlésirányú metszeten.	67

77. ábra A geológiai sík dőlése és a térképen ábrázolt szerkezeti szintvonalak sűrűsége közötti összefüggés szemléltetése méretarányhelyes függőleges metszeten.	68
78. ábra Képződményhatár szerkesztésének lépései pontszerű dőlésadatokból (1–4. lépés).	68
79. ábra Képződményhatár szerkesztésének lépései pontszerű dőlésadatokból (5–6. lépés).	69
80. ábra Rétegvastagság lehetséges megadási módozatai (Lisle, 2004 nyomán).	69
81. ábra A rétegvastagság alternatív értékei és térbeli összefüggései a 78-79-es feladat esetében: HV=horizontális vastagság; VV=valódi vastagság.	70
82. ábra Gyakorlatok dőlésszög szerkesztéséhez szerkezeti szintvonalak segítségével függőleges dőlésirányú metszeten (Lisle, 2004. nyomán módosítva).	71
83. ábra Az 5. gyakorlófeladat megoldása. A geológiai sík (réteghatár) dőlése: 365/15.....	77
84. ábra A 6. gyakorlófeladat megoldása.	77