Nivelación Física ⋆ Problemas Resueltos

Leyes de Newton

Dirección de Pregrado, Ingeniería UC

Coordinación: Sebastián Urrutia Quiroga
Ayudante: Isidora Nahum Fuentes
Revisor: Francisco Eterovic Barra

Introducción

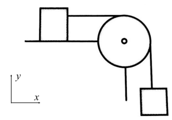
El presente texto corresponde al trabajo realizado por el Equipo de Nivelación de Física durante el primer semestre de 2017. Con el apoyo de la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, este equipo recopiló y resolvió diversos problemas en cuatro tópicos introductorios al curso *Estática y Dinámica*.

La selección de los problemas tienen como objeto facilitar la adaptación de los alumnos a la física de nivel universitario. El orden de los mismos es incremental en dificultad, de acuerdo al criterio del ayudante que elaboró este documento. En el final del mismo se pueden encontrar las fuentes de donde provienen los problemas e imágenes utilizados en la elaboración de este compilado.

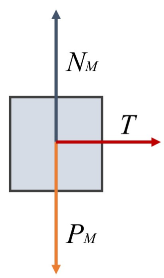
Esperamos que este conjunto de problemas resulte de utilidad para los alumnos, y que contribuya a su proceso educativo en el primer curso de física durante su formación como Ingenieros. Cualquier comentario, favor comunicarse con la Dirección de Pregrado para canalizar las inquietudes a quien corresponda.

Equipo de Nivelación
Primer Semestre de 2017

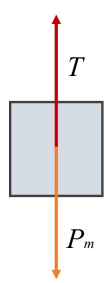
Problema 1.
El sistema de la figura consiste en un bloque de masa M que se mueve de manera horizontal sobre una mesa sin roce. El bloque de masa M está conectada, a través de una cuerda de masa ideal que pasa por una polea, a un bloque de masa m que cuelga y se puede mover de manera vertical. Dibuje el diagrama de fuerzas para cada masa.



Solución:
Para el bloque de masa M existen tres fuerzas, una paralela a la mesa y dos perpendiculares a ella:

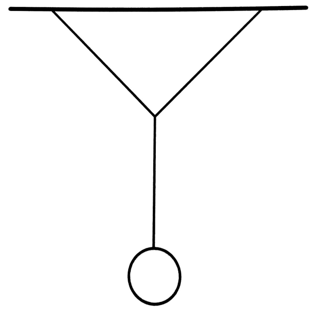


En dirección del eje y está el peso del bloque de masa M, $P_M = Mg$ que sale del bloque y apunta hacia abajo (en dirección al centro de la Tierra), y su fuerza normal, que apunta hacia arriba (perpendicular a la superficie) y su módulo es igual al del peso, es decir, $N_M = P_M$.
En dirección al eje x está la tensión de la cuerda T, que sale del bloque y apunta hacia la polea (sentido de x positivo). Para el bloque de masa m existen dos fuerzas:

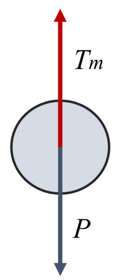


El peso del bloque de masa m es $P_m = mg$ y apunta hacia abajo, es decir, hacia $-y$. La tensión, que sale del bloque con sentido a la polea, tiene la misma magnitud que la tensión en el bloque M debido a que la tensión de una cuerda es la misma en cuaquier punto es esta.

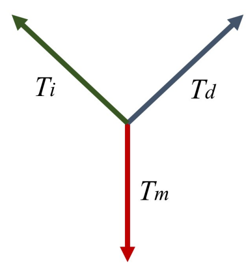
Problema 2.
En la figura, una bola de masa m cuelga sujetada a una cuerda ideal. Esta cuerda, a su vez, está unida a dos cuerdas ideales (no tienen masa ni peso) sujetadas a una superficie horizontal. Dibuje el diagrama de fuerzas de la bola y del punto en donde se unen las cuerdas.



Solución:
El diagrama de fuerzas para la bola de masa m es:

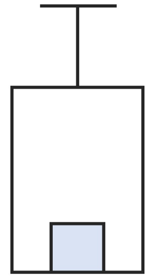


Las únicas dos fuerzas actuando en la bola son su peso, $P = mg$, que apunta hacia abajo, y la tensión T_m de la cuerda que apunta hacia la unión de las cuerdas.

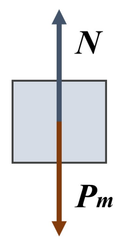


En la interescción de las cuerdas hay tres fuerzas y todas ellas corresponden a la tensión de las cuerdas. Para la cuerda que se une con la pelota tenemos una tensión T_m, que es la misma que la de la bola de masa m, pero esta apunta en dirección a la bola. Además, tenemos las tensiones de las cuerdas sujetadas a la superficie. T_i es la tensión de la cuerda de la izquierda, que apunta hacia su punto de unión con la superficie, y T_d es la tensión de la cuerda de la derecha, que apunta hacia su punto de unión de la superficie.

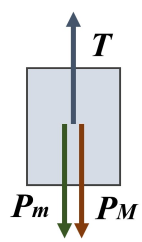
Problema 3.
Un bloque de masa m descansa en el suelo de un ascensor de masa M, el cual cuelga de una cuerda como muestra la figura. Dibuje el diagrama de fuerzas del bloque y del ascensor.



Solución:
En el bloque hay dos fuerzas interactuando, así como muestra la siguiente figura:

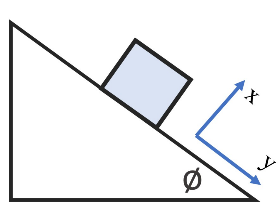


El peso del bloque $P_m = mg$ apunta hacia abajo y la normal apunta hacia arriba, perpendicular a la superficie del suelo del ascensor.
El diagrama de fuerzas del ascensor es

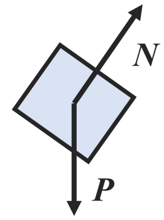


En este caso está la tensión de la cuerda T en dirección de la cuerda hacia arriba y el peso del ascensor, $P_M = Mg$, y el peso del bloque hacia abajo. El bloque de masa m ejerce una fuerza en el suelo del ascensor, por lo tanto, debemos incluir esa fuerza en el diagrama del ascensor.

Problema 4.
Un bloque de masa m se desliza sin roce sobre un plano inclinado de ángulo ϕ con respecto al suelo. Dibuje el diagrama de fuerzas del bloque e indique las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas en el eje x e y.



Solución:
El diagrama de fuerzas del bloque de masa m es:



donde N corresponde a la fuerza normal dada por la interacción entre el plano inclinado y el bloque, es por ello que la normal es perpendicular al plano inclinado. El peso del bloque, P, apunta hacia abajo.
Para las ecuaciones de equilibrio es necesario descomponer el peso por sus componentes en el eje x e Y. Sea P_x el componente en x del peso

$$sen(\phi) = \frac{P_x}{P}$$

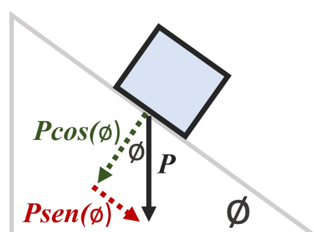
$$Psen(\phi) = P_x$$

Y sea P_y el componente en y del peso

$$cos(\phi) = \frac{P_y}{P}$$

$$Pcos(\phi) = P_y$$

Así como muestra la figura



Sabemos que la fuerza neta en un eje corresponde a la suma de las fuerzas en ese eje. También sabemos que la fuerza neta, $m * a$, de un cuerpo será cero si el objeto está en reposo o a velocidad constante. En el eje y no hay movimiento, por lo tanto, P_y debe ser igual a la normal, N, es decir,

$$N - P_y = 0$$

$$N - Pcos(\phi) = 0$$

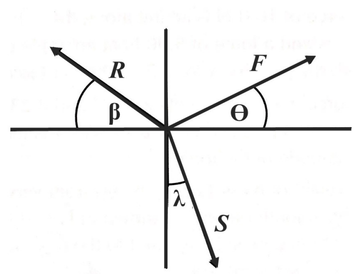
Por otro lado, en el eje x solo hay una fuerza actuando sobre el bloque, la cual corresponde a la componente en x del peso. La ecuación de equilibrio queda

$$P_x = ma$$

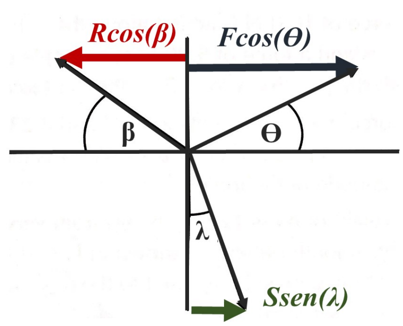
$$Psen(\phi) = ma$$

donde a es la aceleración que experimenta el bloque en el eje x.

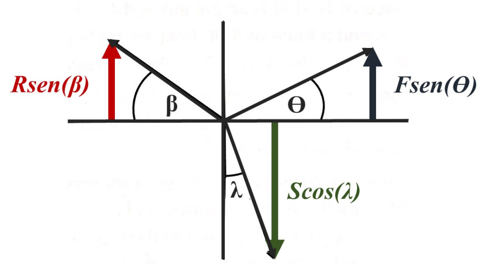
Problema 5.
Encuentre el valor de F y θ para que la fuerza neta en el punto de unión de las fuerzas sea cero.



Solución:
Para que la fuerza neta en el punto de unión sea cero, la fuerza neta en el eje x e y por su parte deben ser cero. La fuerza neta en el eje x debe ser cero, es decir, la suma de la descomposición vectorial en el eje x de todos los vectores de fuerzas debe ser cero:



y la fuerza neta en el eje y también debe ser cero:



Las ecuaciones para la fuerza neta en el eje x e y respectivamente son

$$Fcos(\theta) + Ssen(\lambda) - Rcos(\beta) = 0$$

$$Fsen(\theta) + Rsen(\beta) - Scos(\lambda) = 0$$

que es igual a

$$Fcos(\theta) = -Ssen(\lambda) + Rcos(\beta)$$

$$Fsen(\theta) = -Rsen(\beta) + Scos(\lambda)$$

Al elevar al cuadrado ambas ecuaciones y luego sumarlas queda:

$$F^2 = S^2 + R^2 - 2SR(sen(\lambda)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\lambda))$$

Pero las propiedades de la suma de angulos establecen que $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$ entonces lo anterior queda como

$$F^2 = S^2 + R^2 - 2SRsen(\lambda + \beta)$$
$$F = \sqrt{S^2 + R^2 - 2SRsen(\lambda + \beta)}$$

Para calcular el valor de θ se puede tomar el balance de las fuerzas en el eje x y despejar $cos(\theta)$:

$$cos(\theta) = \frac{Rcos(\beta) - Ssen(\lambda)}{F}$$

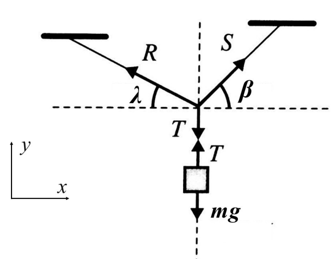
y se aplica la función inversa del coseno, $arccos()$ en ambos lados de la ecuación

$$\theta = arccos\left(\frac{Rcos(\beta) - Ssen(\lambda)}{F}\right)$$

y se reemplaza F por lo que calculamos anteriormente:

$$\theta = arccos\left(\frac{Rcos(\beta) - Ssen(\lambda)}{\sqrt{S^2 + R^2 - 2SRsen(\lambda + \beta)}}\right)$$

Problema 6.
En el sistema de la figura se cuenta con un bloque de masa m igual a $2kg$ que cuelga de una cuerda ideal de tensión T. Esta cuerda esta unida a dos cuerdas ideales sujetadas a una superficie horizontal. Encuentre el valor de S y R para que el sistema se mantenga el equilibrio.



Solución:
Así el sistema tiene que estar en equilibrio, todos sus puntos deben estarlo. El bloque debe estar en equilibrio asi que

$$T = mg$$

En el punto de la intersección, las fuerzas deben estar en equilibrio, es decir, las sumas de las fuerzas en los dos ejes deben ser cero. En el eje x se tiene

$$-Rcos(\lambda) + Scos(\beta) = 0$$

$$Rcos(\lambda) = Scos(\beta) \text{ (1)}$$

donde podemos despejar $S = \dfrac{Rcos(\lambda)}{cos(\beta)}$.
En el eje y el balance de las fuerzas es

$$Rsen(\lambda) + Ssen(\beta) - T = 0 \text{ (2)}$$

Pero $T = mg$ y $S = \dfrac{Rcos(\lambda)}{cos(\beta)}$ asi que al reemplazar estos valores en (2) queda

$$Rsen(\lambda) + \frac{Rsen(\beta)cos(\lambda)}{cos(\beta)} = T$$

$$\frac{R(sen(\lambda)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\lambda))}{cos(\beta)} = mg$$

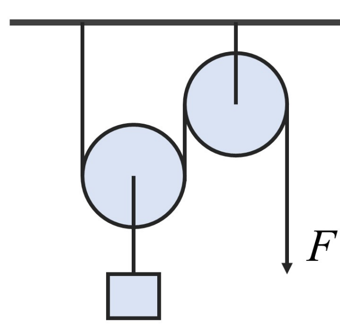
$$\frac{Rsen(\lambda + \beta)}{cos(\beta)} = mg$$

$$R = \frac{mgcos(\beta)}{sen(\lambda + \beta)}$$

Al reemplazar el resultado de R en (1) y luego despejar S queda

$$S = \frac{mgcos(\lambda)}{sen(\lambda + \beta)}$$

Problema 7.
Un bloque de masa M está unido mediante una cuerda ideal de largo fijo al centro de una polea ideal. Una cuerda ideal sujetada desde una superficie horizontal pasa por la polea de la que cuelga el bloque y por otra polea que cuelga desde la superficie horizontal. Determine la fuerza F que se debe ejercer en la cuerda para que el bloque se mantenga fijo, es decir, en equilibrio.



Solución:
La tensión de la cuerda que une a la polea y al bloque es T. Como el bloque debe estar en reposo, su peso debe igualarse con la única fuerza que lo mantiene en el aire, es decir, T. Entonces

$$Mg = T$$

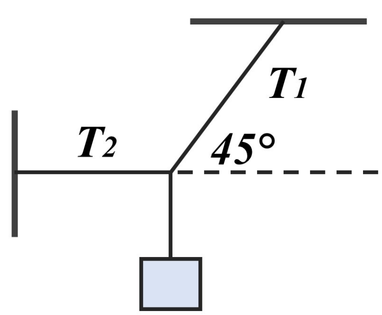
Por su parte, la tensión de la cuerda que pasa por las dos poleas debe ser la misma en todos los puntos de la polea, esta tensión es F. Para que la polea conectada al bloque esté en reposo, las fuezas que actuan sobre él deben estar en equilibrio. Como la polea es sujetada por dos lados por la cuerda, la polea tiene dos fuerzas iguales F hacia arriba y solo T hacia abajo.

$$2F = T$$

$$2F = Mg$$

$$F = \frac{Mg}{2}$$

Problema 8.
En la figura se tiene un bloque de masa m que cuelga de una cuerda ideal. Esta cuerda, a su vez, está unida a una cuerda sujetada desde una superficie horizontal de tensión T_1 y a otra cuerda unida desde una superficie vertical de tensión T_2. Encuentre el valor de la tensión de cada cuerda para que el bloque se encuentre en reposo.



Solución:
Para que el bloque se encuentre en reposo las sumas de las fuerzas actuando sobre el bloque deben ser cero. En el bloque solo actúa su peso y la tensión de la cuerda T_m.

$$mg = T_m$$

En la intersección de cuerdas hay tres cuerdas distintas, asi que no se puede suponer que la tensión será la misma en todas las cuerdas.
El balance de fuerzas en el eje x e y respectivamente son

$$T_1 cos(45°) = T_2 \ (1)$$

$$T_1 sin(45°) = T_m \ (2)$$

Pero $cos(45°) = sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y al reemplazar esto en (2) se tiene que

$$\frac{T_1}{\sqrt{2}} = -T_m$$

$$\frac{T_1}{\sqrt{2}} = -mg$$

$$T_1 = -\sqrt{2}mg$$

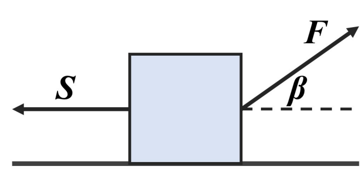
y al reemplazar este nuevo valor de T_1 en (1) queda

$$-\sqrt{2}mgcos(45°) = -T_2$$

Pero $cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces T_2 es

$$T_2 = mg$$

Problema 9.
El sistema de la figura se compone de un bloque de masa M que se tira desde la izquierda con una fuerza horizontal de magnitud S y desde la derecha con una fuerza de magnitud F. La fuerza F forma un ángulo β con la horizontal. Suponiendo que no hay roce entre el bloque y la superficie, determine la magnitud de F para que el sistema esté en reposo.



Solución:
En el eje ordenado actuan la normal, N, la componente en el eje y de F y el peso del bloque, P. En el eje de las abscisas actua la componente de F en el eje x y S. En este caso tenemos que si F_y es menor a P el bloque queda en reposo en el eje y porque la fuerza normal proporciona la fuerza que le falta a F para que el sistema pueda estar en equilibrio y, de esta manera, $F_y + N = P$. Sabemos que las fuerzas en ambos ejes deben sumar cero, entonces quedan las dos ecuaciones

$$Fcos(\beta) = S$$

$$Fsin(\beta) = P - N$$

Al elevar al cuadrado ambas ecuaciones y luegos sumarlas, queda

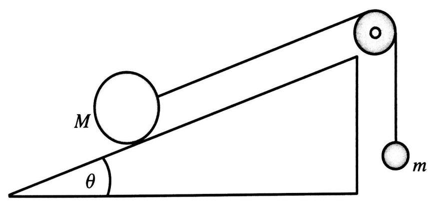
$$F^2(cos^2(\beta) + sin^2(\beta)) = S^2 + P^2 - 2NP + N^2$$

$$F^2 = S^2 + P^2 - 2NP + N^2$$

Al despejar F se tiene que

$$F = \sqrt{S^2 + P^2 - 2NP + N^2}$$

Problema 10.
Una bola de masa M está sobre un plano inclinado sin roce de ángulo θ con respecto a la horizontal. La masa M está unida a una bola de masa m, que cuelga verticalmente, mediante una cuerda ideal que pasa por una polea en el vértice del plano inclinado. Determine el ángulo del plano inlinado para que las bolas estén en equilibrio.

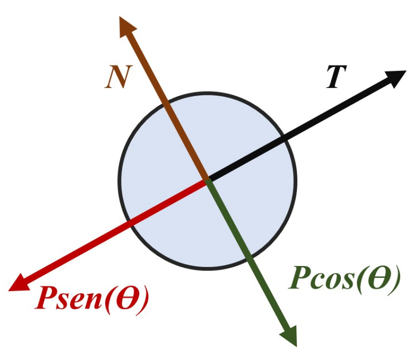


Solución:
Sobre la bola de masa m actuan dos fuerzas: la tensión de la cuerda T y su peso P_m. Para que la bola esté en reposo,

$$T = P_m$$

$$T = mg$$

En la bola de masa M actúa la misma tensión que en la otra bola, su peso P_M y la normal N perpendicular a la superficie. Al descomponer las fuerzas en dos ejes queda



Si la bola de masa M está en reposo entonces

$$N = P_M cos(\theta)$$

$$P_M sin(\theta) = T$$

Como las tensiones son las mismas para cada bola

$$mg = P_M sin(\theta)$$

$$mg = Mgsin(\theta)$$

$$sin(\theta) = \frac{m}{M}$$

$$\theta = arcsin\left(\frac{m}{M}\right)$$

Problema 11.
Una persona de $60kg$ se encuentra arriba de una balanza sobre el suelo de un ascensor. Encuentre el valor que indica la balanza, es decir, la fuerza de reacción que experimenta la persona desde el piso del ascensor, si:
(a) el ascensor se mueve hacia abajo con una velocidad constante.
(b) el ascensor se mueve hacia arriba con aceleración $4m/s^2$.
(c) el ascensor se mueve hacia arriba a una velocidad constante de $3m/s$ y el ascensor desacelera durante 2 segundos para detenerse.
Solución:
Hay dos fuerzas que actúan en todo momento sobre el hombre: la reacción del suelo, es decir, la normal B, y su peso. Estas fuerzas actuan en la misma dirección pero en sentidos opuestos. La fuerza que medirá la balanza es la normal.
(a) La segunda ley de Newton afirma que la fuerza neta sobre un cuerpo es proporcional a su aceleración y apunta en su misma dirección y sentido, es decir, $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$.
En este caso no hay aceleración, entonces, segun la segun ley de Newton, la fuerza neta sobre el hombre es cero:

$$B - mg = 0$$

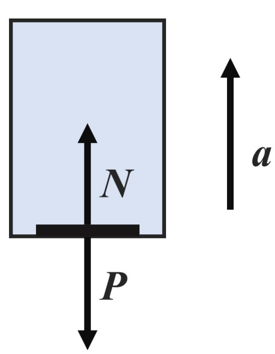
$$B = mg$$

Y suponiendo que $g = 10m/s^2$

$$B = 600N$$

La balanza indicará 600N.

(b)



Ahora hay aceleración y tiene el mismo sentido que la normal, que se podría interpretar como que la fuerza normal es mayor al peso. De esta manera el fuerza neta queda como

$$B - mg = ma$$

$$B = ma + mg$$

Suponiendo que $g = 10m/s^2$ se reemplazan los valores en la ecuación:

$$B = 240N + 600N$$

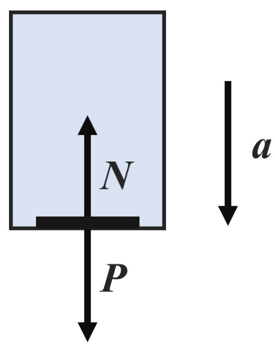
$$B = 840N$$

La balanza indica $840N$, más que cuando el ascensor se encuentra en reposo o velocidad constante.

(c) La aceleración que experimenta el hombre y la balanza es la diferencia de velocidades dividido en el intervalo de tiempo, es decir,

$$a = \frac{0-3}{2} = -1.5m/s^2$$

y su diagrama de cuerpo libre se ve de la siguiente manera:



Como la aceleración apunta hacia abajo, el peso es mayor a la normal y la ecuación de la fuerza neta queda como:

$$mg - B = ma$$

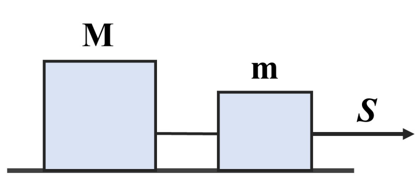
$$B = mg - ma$$

$$B = 600 - 90 = 510N$$

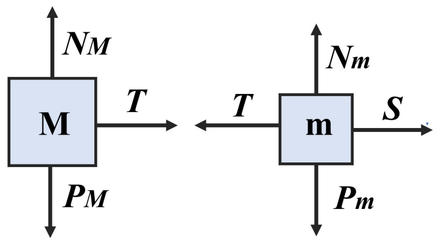
La balanza va a medir $510N$, menos que con velocidad constante.

Problema 12.

En la figura, dos bloques de masas M y m estan unidos por una cuerda ideal y descansan sobre una superficie horizontal sin roce. Si una fuerza de magintud S se le aplica al bloque de masa m horizontalmente, encuentre la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda que une a los bloques.



Solución:
Los diagramas de cuerpo libre para los dos bloques es



Es evidente que la fuerza S solo actua sobre el bloque de masa m.
La fuerza neta actuando sobre el bloque de masa m y M respectivamente es:

$$S - T = ma$$

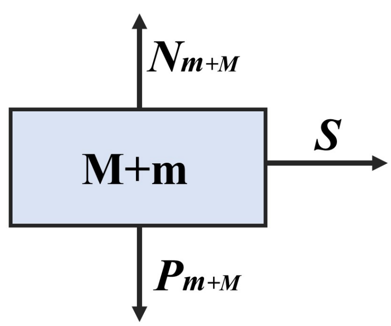
$$T = Ma$$

donde a es la acelerción que experimentan ambos bloques ya que se mueven en la misma dirección y sentido con la misma aceleración por estar unidos. Al sumar las dos ecuaciones queda

$$S = a(M + m)$$

$$a = \frac{S}{M + m}.$$

Para calcular el valor de la tensión se reemplaza la aceleración encontrada en cualquiera de las dos ecuaciones de fuerza neta. De esta manera, $T = \frac{MS}{m + M}$.
Otra manera de resolver el problema es considerar un solo cuerpo de masa $m + M$ con una fuerza neta de S como muestra el hipotético diagrama de fuerzas



Note que las tensiones en este caso son irrelevantes y se consideran como fuerzas internas que se cancelan. Al aplicar la segunda ley de Newton se tiene que

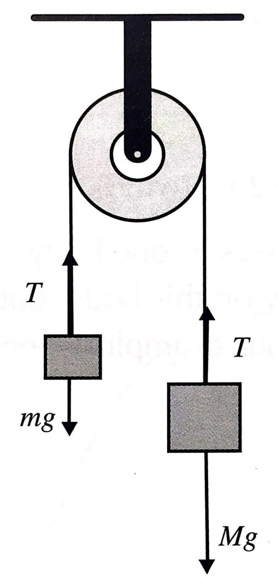
$$S = a(m + M)$$

$$a = \frac{S}{m + M}$$

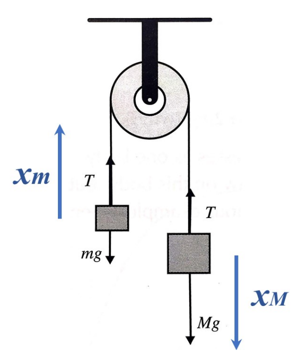
Para encontrar el valor de la tensión se debe separar este bloque hipotético de masa $m + M$ en los bloques individuales, donde la tensión del bloque M es la fuerza neta (la única que actua sobre el bloque y no se cancela).

$$T = Ma = M\frac{S}{M + m}$$

Problema 13.
El sistema de la figura consiste en una maquina de Atwood, en la que dos bloques de masa m y M están unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea, también ideal. La masa M es mayor a la masa m. Si el sistema se deja actuar libremente, determine la aceleración de cada bloque.



Solución:
La intuición nos dice que el bloque de mayor masa se moverá hacia abajo y el de menor masa, hacia arriba. Según la condición de ligadura



el cambio de posición de la masa m será igual al cambio de posición de la masa M pero en el sentido opuesto debido a que la cuerda es rígida y no se extiende ni contrae en ningun momento.

$$x_m = -x_M$$

Al derivar dos veces la condición de ligadura

$$a_m = -a_M$$

De esta manera, se afirma que la aceleración será la misma para ambos bloques en sentidos opuestos.
Al aplicar la segunda ley de Newton para ambos bloques

$$T - mg = ma_m$$

$$T - Mg = Ma_M$$

Para el bloque de la masa m, su tensión es mayor que su peso y su fuerza neta apunta hacia arriba. En el caso del bloque de masa M, su peso es mayor que la tensión que ejerce la cuerda sobre ella, por lo tanto, su fuerza neta apunta hacia abajo.
Al dejar ambas ecuaciones con una misma aceleración queda que

$$T - mg = ma_m$$

$$Mg - T = Ma_m$$

Al sumar ambas ecuaciones se tiene que

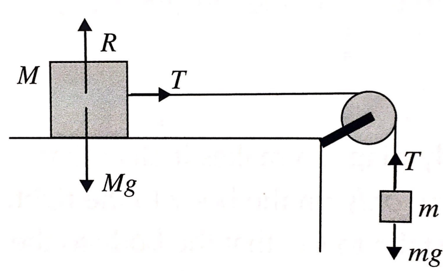
$$g(M - m) = a_m(m + M)$$

$$a_m = \frac{M - m}{m + M} g = -a_M$$

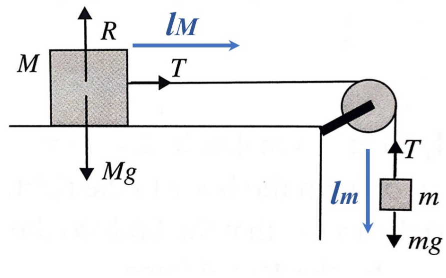
$$a_M = \frac{m - M}{m + M} g$$

Esto muestra claramente que si los dos bloques tienen la misma masa, no habrá aceleración.

Problema 14.
En la figura, un bloque de masa M sobre una superficie horizontal sin roce está conectado a un bloque de masa m, que cuelga verticalmente, por una cuerda que pasa por una polea ideal. El sistema se deja actuar libremente, encuentre la aceleración de cada masa y la tensión de la cuerda.



Solución:
Por la condición de ligadura



se tiene que $l_M = l_m$, donde l es el cambio de posición de un punto de la cuerda. Note que los signos en la condición de ligadura dependen de las coordenadas con las que se elija trabajar, en este caso se eligió x creciente hacia la derecha e y creciente hacia abajo. Al derivar la expresión dos veces queda $a_M = a_m$.
Aplicando la segunda ley de Newton se tienen las siguientes dos ecuaciónes:

$$mg - T = ma_m$$

$$T = Ma_M$$

Al reemplazar la condición de ligadura en una de las ecuaciones queda

$$mg - T = ma_m$$

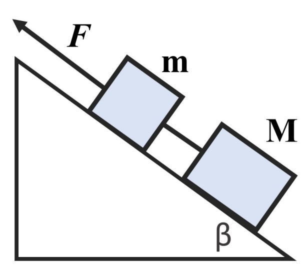
$$T = Ma_m$$

Al sumar las dos ecuaciones y despejar la aceleración se tiene que la aceleración corresponde a

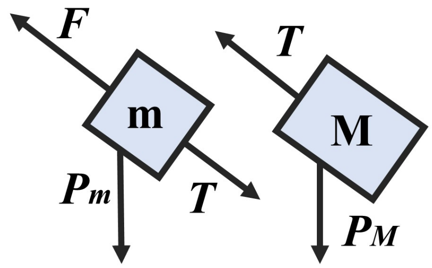
$$a_m = \frac{mg}{m+M} = a_M$$

Al remplazar la aceleración en la ecuación $T = Ma_m = Ma_M$ se obtiene que $T = \dfrac{Mmg}{m+M}$.

Problema 15.
Dos cuerpos de masas m y M están unidos por una cuerda ideal y son empujados hacia arriba por un plano inclinado sin roce de ángulo β con la horizontal. Calcule la tensión de la cuerda entre los dos cuerpos y la magnitud de la fuerza F si:
(a) los cuerpos se mueven a velocidad constante.
(b) los cuerpos suben por el plano inclinado con una aceleración a.



Solución:
El diagrama de fuerzas para ambos casos es



(a) Como la aceleración de los bloques es cero, al aplicar la segunda ley de Newton para el segundo bloque se puede encontrar la tensión.

$$T - P_M sin(\beta) = 0$$
$$T = P_M sin(\beta)$$
$$T = Mgsin(\beta)$$

Las fuerzas paralelas al plano inclinado que actúan sobre el bloque de masa m actúan de la siguiente manera:

$$F - T - P_m sin(\beta) = 0$$
$$F = T + Pmsin(\beta)$$
$$F = P_M sin(\beta) + P_m sin(\beta)$$
$$F = sin(\beta)(P_M + P_m)$$
$$F = sin(\beta)g(M + m)$$

(b) Cuando hay aceleración se ocupa el mismo razonamiento anterior, teniendo en cuenta que la fuerza neta para cada bloque será su respectiva masa por $\overrightarrow{a}$.
La fuerza neta del bloque de masa M es

$$T - P_M sin(\beta) = Ma$$

y al despejar T

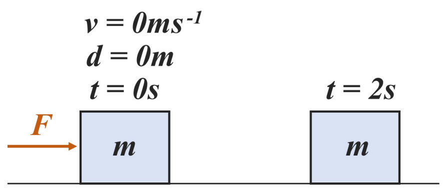
$$T = Ma + P_M sin(\beta)$$
$$T = M(a + gsin(\beta))$$

Al expresar la fuerza neta del bloque de masa m y reemplazar la tensión encontrada se puede despejar F para conocer su valor:

$$F - T - P_m sin(\beta) = ma$$
$$F = T + P_m sin(\beta) + ma$$
$$F = Ma + P_M sin(\beta) + P_m sin(\beta) + ma$$
$$F = Ma + Mgsin(\beta) + mgsin(\beta) + ma$$
$$F = (M + m)(a + gsin(\beta))$$

Problema 16.
Un bloque de masa m se encuentra en reposo sobre una superficie lisa, es decir, no hay roce entre el bloque y la superficie. El bloque está en la posición de origen en el tiempo inicial $t = 0$ cuando se le aplica una fuerza F constante paralela al eje x y a la superficie y se deja de aplicar la fuerza en $t = 2s$.
(a) Determine la posición y velocidad del bloque en $t = 2s$.
(b) Si se le vuelve a aplicar la misma fuerza F en la misma dirección anterior en $t = 5s$, determine la posición y velocidad del bloque en $t = 8s$.

Solución:
(a) El bloque, entre $t = 0$ y $t = 2$ se puede representar con la siguiente figura:



Con la información entregada en el enunciado y la segunda ley de Newton se puede calcular la aceleración que experimenta el bloque. Como solo F actua sobre el bloque, la fuerza neta equivale a F, entonces

$$F_{neta} = F$$

$$ma = F$$

$$a = \frac{F}{m}$$

Para calcular posición y velocidad se utilizarán las ecuaciones deducidas en la pregunta 4 de la sección *Cinemática y su relación con el cálculo.*

$$v(t) = v_0 + at \ (1)$$

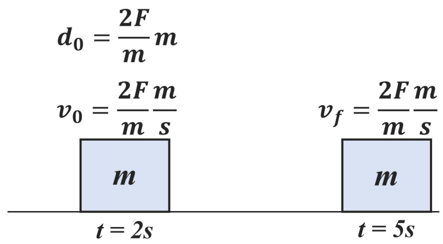
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \ (2)$$

Al reemplazar $t = 2$ en las ecuaciones y se obtiene que

$$v(2) = 2\frac{F}{m}$$

$$x(2) = \frac{2^2 F}{2m} = \frac{2F}{m}$$

(b) El siguiente proceso se compone de dos partes: en la primera el bloque avanza con velocidad constante desde $t = 2$ hasta $t = 5$ debido a que no hay fuerzas en el eje x actuando sobre él. En la segunda parte, de $t = 5$ a $t = 8$, el bloque avanza con la misma aceleración calculada anteriormente debido a que se trata de la misma fuerza F sobre un bloque sin otras fuerzas en el eje x.
La primera parte se visualiza de la siguiente manera:

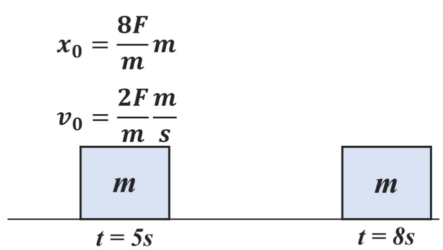


Para esta parte se usa solo la ecuación $v = \frac{x}{t}$ ya que no hay aceleración y la velocidad es constante. De esta manera, su posición en $t = 5$ es

$$x(t) = x_0 + vt$$

$$x(5) = \frac{2F}{m} + 3\frac{2F}{m} = \frac{8F}{m}$$

La segunda parte se ve de la siguiente manera:



Sabiendo que $a = \frac{F}{m}$ y que el tiempo que pasa entre $t = 8$ y $t = 5$ es $3m/s^2$ podemos aplicar las ecuaciones (1) y (2) suponiendo que el tiempo inicial es cero, la posición inicial es $\frac{8F}{m}$ y la velocidad inicial es $\frac{2F}{m}$.

$$v(3) = \frac{2F}{m} + 3\frac{F}{m} = \frac{5F}{m}$$

$$x(3) = \frac{8F}{m} + 3\frac{2F}{m} + \frac{3^2\frac{F}{m}}{2} = \frac{27F}{2m}$$

Problema 17.

Los motores de un buque se averiaron de manera que el buque avanza hacia un arrecife con velocidad constante v. Cuando el buque se encuentra a una distancia $d = \frac{mv^2}{3F}$ del arrecife, se activan los motores inversos que aplican una fuerza de magnitud F en sentido contrario a la velocidad v. La masa del buque es m y puede aguantar impactos a velocidad $\frac{v\sqrt{3}}{2}$ sin derramar petróleo. Determine si el barco alcanza a chocar con el arrecife. Si lo hace, ¿va a derramar petróleo?

Solución:
Si se detemrina que el eje x positivo va en el mismo sentido que la velocidad del buque, la aceleración (o desaceleración) que experimenta el buque es

$$a = -\frac{F}{m}$$

Al aplicar las ecuaciones de movimiento y considerando que el origen de nuestro eje de coordenadas es la posición del buque al instante que se aplica F, se puede obtener la distancia a la cual se detendría el buque si no estuviese el arrecife.

$$V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$0 = v^2 - \frac{2Fx}{m}$$
$$x = \frac{mv^2}{2F} > \frac{mv^2}{3F}$$

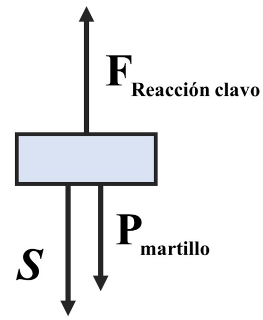
Como la distancia entre el buque y el arrecife es menor que la que necesita el buque para detenerse entonces habrá impacto entre el buque con el arrecife.
Para ver si derrama petróleo o no, se debe calcular la velocidad de impacto del buque con el arrecife.

$$V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$v_{impacto}^2 = v^2 - \frac{2F}{m}\frac{mv^2}{3} = v^2 - \frac{2v^2}{3}$$
$$v_{impacto} = \sqrt{\frac{v^2}{3}} = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{v\sqrt{3}}{3} < \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Debido a que la velocidad de impacto entre el buque y el arrefice es menor a la máxima que puede aguantar el buque sin derramar petróleo, no habrá derrame de petróleo.

Problema 18.
Un martillo de masa m con velocidad inicial v_0 es detenido por un clavo de masa despreciable a una distancia d desde que el martillo toca el clavo. Además, la persona que utiliza el martillo le aplica una fuerza S al martillo en dirección al clavo. Cuando el martillo impacta con el clavo, ambos se mueven con aceleración constante hacia abajo. Determine la magintud de la fuerza de reacción entre el clavo y el martillo.

Solución:
El diagrama de cuerpo libre del martillo cuando golpea al clavo es el siguiente:



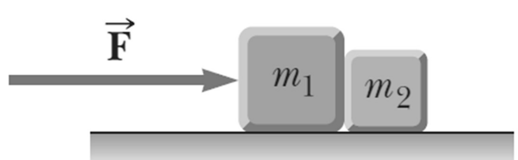
La aceleración que experimenta el martillo mientras se desacelera se puede determinar con las ecuaciones de movimiento de aceleración constante. Note que en el ejercicio se define la coordenada positiva del eje y hacia arriba.

$$V^2 = V_0^2 + 2a(y - y_0)$$
$$0 = v_0^2 - 2ad$$
$$a = \frac{v_0^2}{2d}$$

Note que la posición d tiene sentido negativo ya que el martillo avanza hacia abajo y se definió la coordenada positiva hacia arriba. De esta manera, la aceleración será positiva porque va en la misma dirección del eje y positivo y contraria a la posición debido a que se detiene, es decir, desacelera.
Con la aceleración se puede determinar la fuerza neta del martillo durante el movimiento, la cual es la suma de las fuerzas sobre el martillo.

$$F_{neta} = ma = \frac{mv_0^2}{2d} = F_{reaccion} - S - P_{martillo} = F_{reaccion} - S - mg$$
$$F_{reaccion} = S + mg + \frac{mv_0^2}{2d}$$

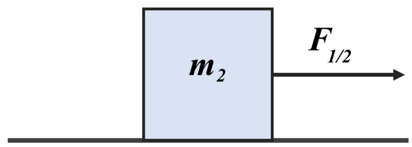
Problema 19.
Se aplica sobre un bloque de masa m_1 una fuerza de magintud F. El bloque de masa m_1 se encuentra junto a un bloque de masa m_2 que es empujado por el bloque de masa m_1. Determine la magnitud de la fuerza de reacción entre los bloques.



Solución:
Si se toman las dos masas como un solo bloque de masa $m_1 + m_2$, se cancelan las fuerzas de reacción porque son de igual magnitud y distinto signo. La aceleración de este nuevo bloque es

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

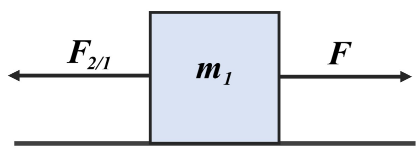
La aceleración del bloque resultante de la suma de los dos bloques es también la aceleración de cada bloque por separado.
Ahora se tienen dos caminos para poder determinar la fuerza de reacción entre los bloques: podemos analizar el comportamiento y diagramas de fuerzas del bloque de masa m_1 o del de masa m_2.
El diagrama de fuerzas del bloque de masa m_2 es



Note que la fuerza F solo actúa sobre el bloque de masa m_1. La fuerza neta sobre el bloque es

$$F_{neta} = F_{1/2} = am_2 = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

El diagrama de fuerzas de la masa m_1 es



Y su fuerza neta es

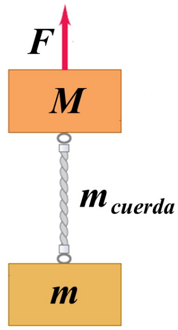
$$F_{neta} = F + F_{2/1} = am_1 = \frac{Fm_1}{m_1 + m_2}$$

$$F_{2/1} = -\frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

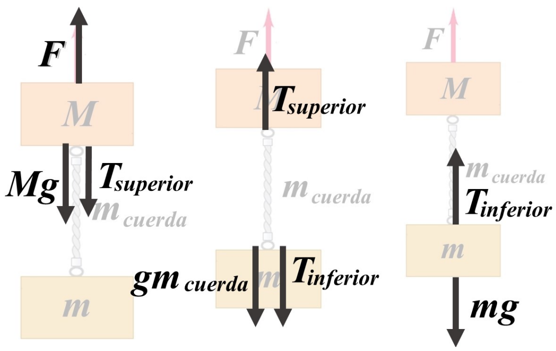
Note que, tal como era de esperarse, las fuerzas de reacción entre los bloques tienen igual magintud pero sentidos opuestos. De esta manera, la magnitud de la fuerza de reacción entre los bloques es

$$F_{reaccion} = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$$

Problema 20.
En la figura, dos bloques de masa m y M están sujetados por una cuerda de masa m_{cuerda}. Se aplica una fuerza F sobre el bloque de masa M hacia arriba, elevando todo el sistema. Indique la aceleración del sistema y la tensión en la parte superior y media de la cuerda.



Solución:
Los diagramas de fuerza de los bloques y la cuerda son



Si se trata todo el sistema como un solo bloque se puede calcular la aceleración del sistema, que será también la aceleración de cada uno de los bloques y del cable por separado.

$$F_{neta} = (m + m_{cuerda} + M)a = F - P = F - g(m + m_{cuerda} + M)$$

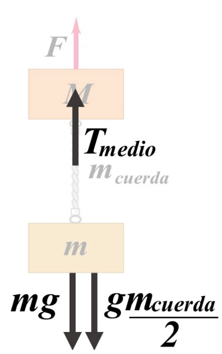
$$a = \frac{F}{(m + m_{cuerda} + M)} - g$$

Para determinar la tensión superior de la cuerda se puede tomar el bloque de masa M y calcular su fuerza neta.

$$F_{neta} = Ma = F - T_{superior} - Mg$$

$$T_{superior} = F - Mg - Ma = F - M(g + a) = F - \frac{MF}{(m + m_{cuerda} + M)} = \frac{F(m + m_{cuerda})}{(m + m_{cuerda} + M)}$$

Para calcular la tensión de la cuerda al medio, se puede tomar como un nuevo sistema hipótetico la mitad inferor de la cuerda más el bloque de masa m.



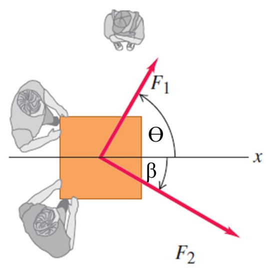
La aceleración de este sistema es el mismo que el calculado anteriormente, asi que la fuerza neta del sistema es

$$F_{neta} = (m + \frac{m_{cuerda}}{2})a = T_{medio} - (m + \frac{m_{cuerda}}{2})g$$

$$T_{medio} = (m + \frac{m_{cuerda}}{2})a + (m + \frac{m_{cuerda}}{2})g = (m + \frac{m_{cuerda}}{2})(a + g)$$

Problema 21.

En la figura, dos adultos y un niño intentan mover un bloque en dirección horizontal, es decir, sobre el eje x. Los adultos ejercen las fuerzas F_1 y F_2. Considere que no hay roce entre la superficie y el bloque. Determine la fuerza mínima F que debe ejercer el niño sobre el bloque para que el bloque efectivamente se mueva solo de manera horizontal.



Solución:

Para que el bloque solo se mueva en dirección horizontal, la suma de las tres fuerzas en el eje y debe ser cero. Para lograr aquello, la fuerza mínima que ejerce el niño debe ser tal que la fuerza neta no tenga componentes en el eje y. De esta manera, se logra movimiento con las componentes en x de F_1 y F_2 y con F se cancelaría el movimiento en el eje y. Por ende, la fuerza mínima que ejerce el niño para que el bloque se mueva en dirección horizontal solo tiene componente en el eje y.

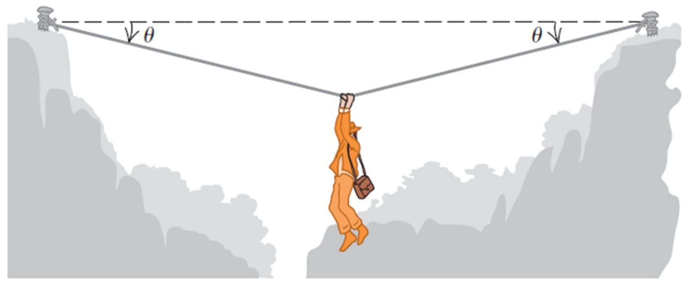
En el eje y entonces queda que

$$F_1 sen(\theta) - F_2 sin(\beta) + F = 0$$

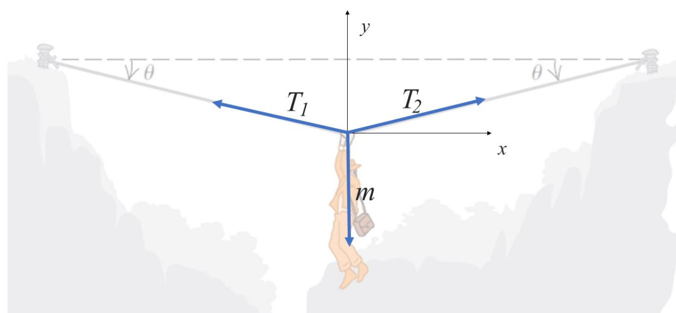
$$F = F_2 sin(\beta) - F_1 sen(\theta)$$

Problema 22.

En la figura, un arqueólogo de masa m piensa en cruzar un risco mediante de una cuerda de masa despreciable. Él estima que cuando este en la mitad va a descansar. La tensión máxima que la cuerda soporta es $\frac{mg\sqrt{3}}{2sin(\theta)}$. Evaluando solo el momento en el que estaría descansando, determine si es seguro para el arqueólogo cruzar el risco utilizando esa cuerda.



Solución:
El diagrama de fuerzas del arquelógo es



Al aplicar la segunda ley de Newton sobre el eje x se obtiene que

$$0 = T_2 cos(\theta) - T_1 cos(\theta)$$

$$T_1 = T_2 \equiv T$$

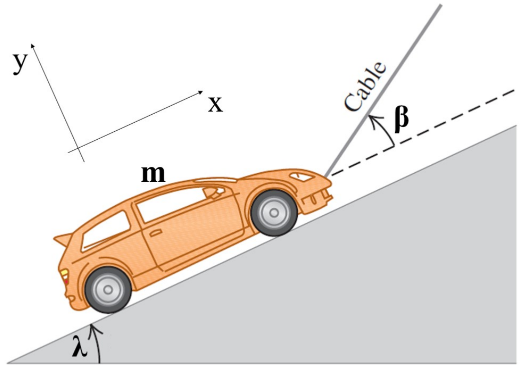
De la misma manera, al aplicarla sobre el eje y se deduce que

$$2T sin(\theta) = mg$$

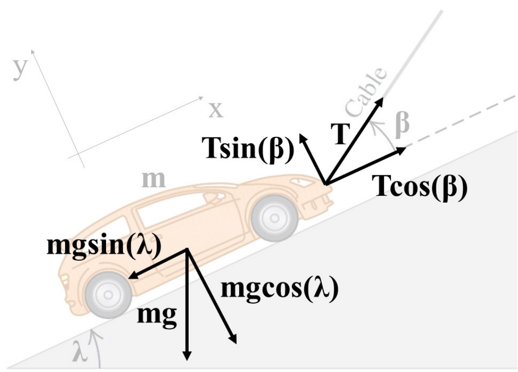
$$T = \frac{mg}{2sin(\theta)} < \frac{mg\sqrt{3}}{2sin(\theta)}$$

Por ende, es seguro para el arqueólogo utilizar la cuerda porque la tensión que generaría es menor al máximo que esta puede soportar.

Problema 23.
En la figura, un auto de masa m se mantiene en reposo y es sostenido sobre una rampa por una cuerda de masa despreciable. Detetermine el valor de la tensión máxima de la cuerda para que el auto no se eleve.



Solución:
El diagrama de fuerzas del auto es



Al aplicar la segunda ley de Newton y descomponerla en los ejes x e y establecidos se obtiene respectivamente

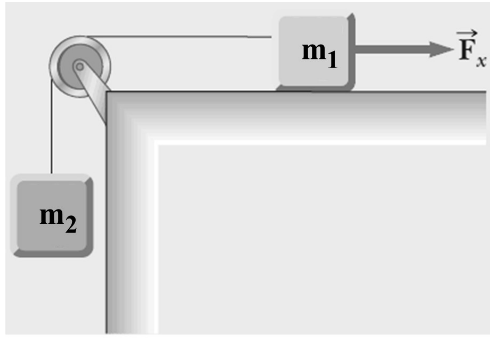
$$Tcos(\beta) = mgsin(\lambda)$$

$$Tsin(\beta) = mgcos(\lambda)$$

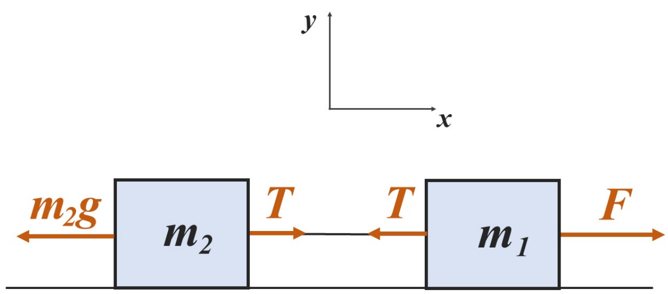
Note que en la descomposición del eje y no hay fuerza normal debido a que la cuerda está ejerciendo fuerza máxima para que el auto no se eleve. Si la tensión fuese menor a la tensión máxima que se va a determinar, entonces habría fuerza normal perpendicular a la superficie para compensar a la fuerza neta y para evitar que el auto se mueva en el eje y.
Al sumar las dos ecuaciones queda que

$$T = mg\frac{cos(\lambda) + sin(\lambda)}{cos(\beta) + sin(\beta)}$$

Problema 24.
En la figura, una fuerza de magnitud F_x actúa sobre un bloque de masa m_1, el cual se encuentra sobre una superficie horizontal sin roce. Este bloque está unido con un bloque de masa m_2, que cuelga verticalmente, mediante una cuerda ideal que pasa por una polea ideal sin roce. Si el bloque de masa m_2 se mueve aceleradamente hacia arriba, determine la tensión de la cuerda.



Solución:
El sistema anterior tiene movimiento en los ejes x e y, pero éste puede ser intepretado como un sistema que solo tiene componentes de movimiento en un solo eje, y es el siguiente:



Para que el bloque de masa m_2 se mueva hacia arriba, la aceleración en nuestra nueva intepretación debe ser $a > 0$, es decir, $F > m_2 g$. Si se toman los bloques y se consideran como uno solo de masa $m_1 + m_2$, se cancelan las tensiones por ser de igual magnitud pero sentidos opuestos y nos queda que la fuerza neta es

$$(m_1 + m_2)a = F - m_2 g$$

Entonces, la aceleración del sistema y de cada bloque por separado es

$$a = \frac{F - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Para determinar la tensión se puede analizar el comportamiento del bloque de masa m_1 o del de masa m_2. Si se elige el de masa m_1 se puede notar que solo actúan la tensión y la fuerza de magnitud F, entonces la fuerza neta del bloque de masa m_1 es

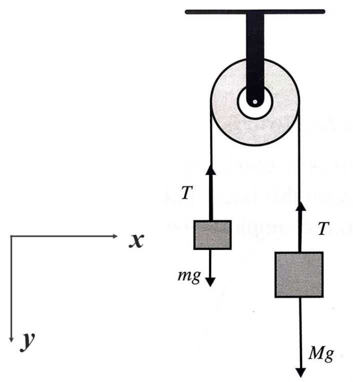
$$m_1 a = F - T$$

Al despejar T y aplicar la aceleración encontrada anteriormente queda que

$$T = F - m_1 a = F - \frac{m_1(F - m_2 g)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(F + m_1 g)}{m_1 + m_2}$$

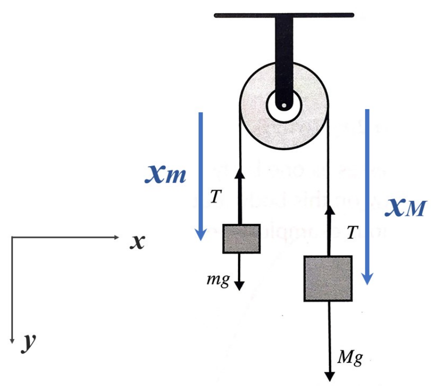
Problema 25.

En la figura, dos bloques de masas m y M tal que $m < M$ cuelgan verticalmente sujetadas por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. Las masas se tienen sujetadas para que el sistema no se mueva. En el tiempo $t = 0s$ se suelta el bloque de masa M y el bloque de masa m se libera con una velocidad inicial hacia abajo de magnitud v_m. Determine cuál es la distancia máxima que alcanza a bajar el bloque se masa m antes de volver a subir.



Solución:

Se empieza con la condición de ligadura. Puede comprobar que si elige el eje y positivo hacia arriba el problema se puede desarrollar igual y llegará al mismo resultado final con distinto signo.



Si el largo de la cuerda es L, entonces

$$L = x_m + x_M$$

Al derivar dos veces queda

$$\ddot{x_m} = -\ddot{x_M} = a_m = -a_M$$

A partir de esto, y del cálculo de las fuerzas netas de cada bloque podemos encontrar a_m para luego aplicarla en las ecuaciones de movimiento. Las fuerzas netas de los bloques son

$$ma_m = mg - T \ (1)$$

$$Ma_M = Mg - T \ (2)$$

Al aplicar la relación entre a_m y a_M en (2) y despejar T queda

$$Ma_1 = T - Mg$$

$$T = M(a_m + g)$$

Al aplicar ésta T en (1) queda

$$ma_m = mg - Ma_m - Mg$$

$$a_m(m + M) = (m - M)g$$

$$a_m = \frac{(m - M)g}{m + M}$$

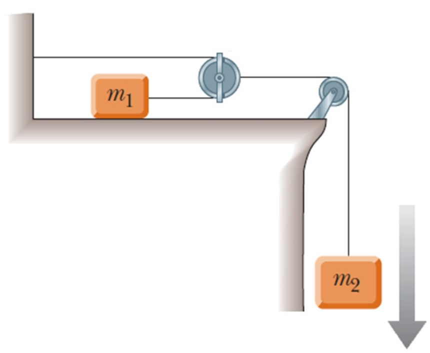
Note que como $m < M$, a_m será negativa, lo cual tiene sentido ya que en nuestro sistema de coordenadas con el eje y positivo hacia abajo, la masa m desacelera cuando se le empuja hacia abajo.
El desplazamiento máximo hacia abajo del bloque de masa m es tal que su velocidad al llegar ahí es cero. Además, si consideramos que el origen de nuestro eje de coordenadas está en la posición inicial del bloque de masa m, queda

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

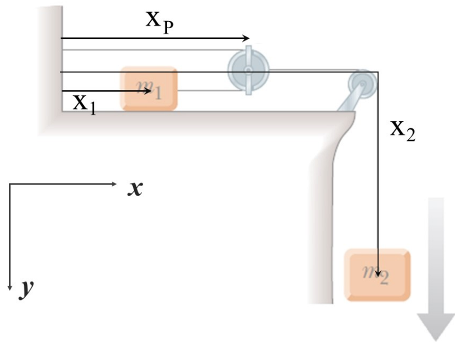
$$0 = v_i^2 + 2ax_f$$

$$x_f = -\frac{v_m^2}{2a_m} = -\frac{v_m^2(m + M)}{2g(m - M)} = \frac{v_m^2(m + M)}{2g(M - m)}$$

Problema 26.
En la figura, un bloque de masa m_1 está sobre una superficie horizontal sin roce y está conectada con un bloque de masa m_2 mediante dos cuerdas ideales y dos poleas. El bloque de m_2 cuelga verticalmente. Determine las tensiones de cada cuerda y la aceleración de cada bloque en términos de g, m_1 y m_2.



Solución:
Para empezar a desarrollar el ejercicio, es importante determinar la condición de ligadura y ver la relación entre las aceleraciones de los bloques.



La condición de ligadura de la cuerda de largo l_1 que está sujeta a la pared es

$$l_1 = x_p + (x_p - x_1) = 2x_p - x_1$$

Al derivar dos veces ambos lados de la ecuación queda

$$\ddot{x}_1 = 2\ddot{x}_p$$

Note que el largo de la cuerda es constante y, por ende, su derivada es cero.
La condición de ligadura de la cuerda unida al bloque de masa m_2 de largo l_2 es

$$l_2 = x_2 - x_p$$

Al derivar dos veces ambos lados de la ecuación y reemplazar lo encontrado anteriomente queda

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_p = \frac{\ddot{x}_1}{2}$$
$$2\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$$

A continuación se aplica la segunda ley de Newton a ambos bloques y a la polea móvil queda

$$m_1\ddot{x}_1 = 2m_1\ddot{x}_2 = T_1 \text{ (1)}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2 \text{ (2)}$$
$$0 = T_2 - 2T_1 \text{ (3)}$$

Llamamos T_1 a la tensión de la cuerda unida al bloque de masa m_1 y T_2 a la tensión de la cuerda unida al bloque de masa m_2.
Note que como se trata de poleas ideales, la masa de las poleas es cero, por ende, su fuerza neta siempre será cero.
Si se aplica (3) a (2) queda que

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - 2T_1$$

Al dividir (1) con la última expresión encontrada (también se puede despejar $\ddot{x}_2$ de (1) y reemplazar en la última expresión encontrada):

$$\frac{2m_1}{m_2} = \frac{T_1}{m_2 g - 2T_1}$$

$$2m_1 g - \frac{4m_1 T_1}{m_2} = T_1$$

$$2m_1 g = \frac{T_1(m_2 + 4m_1}{m_2}$$

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_2 + 4m_1}$$

Y por (3)

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2 g}{m_2 + 4m_1}$$

Al reemplazar T_1 en (1)

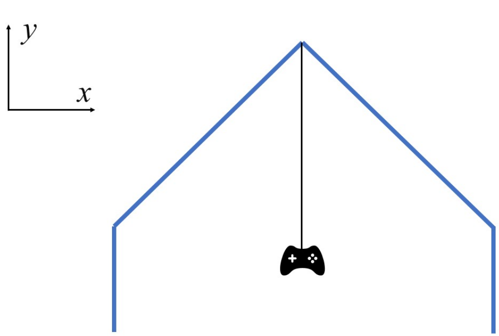
$$T_1 = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 = a_1 = \frac{T_1}{m_1} = \frac{2m_2 g}{m_2 + 4m_1}$$

Y como $2\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$, entonces

$$\ddot{x}_2 = a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + 4m_1}$$

Problema 27.
Un grupo de ingenieros decide enviar un cohete al espacio. Este cohete tiene una masa de M kilogramos y debe alcanzar una velocidad v_f en el menor tiempo posible. Cuando confeccionaron el cohete, los ingenieros no se percataron de que un dispositivo de masa m dentro del cohete cuelga verticalmente de una cuerda que no soporta tensiones mayores a T_{max}. Si la cuerda se rompe el cohete deja de funcionar, pero no hay tiempo de cambiar la cuerda antes de su despegue.
Determine el tiempo mínimo en el que el cohete puede alcanzar la velocidad deseada y el empuje vertical máximo de los motores del cohete para lograrlo tal que la cuerda se rompa. Suponga que la aceleración de gravedad en todo momento es g.



Solución:
La fuerza neta máxima del dispositivo que puede soportar la cuerda es

$$T_{max} - mg = ma$$

Entonces la aceleración máxima que puede alcanzar el dispositivo y, por ende, el cohete es

$$a_{max} = \frac{T_{max} - mg}{m}$$

Con la aceleración máxima se pueden aplicar las ecuaciones de movimiento para aceleración constante y desde ahí, determinar el tiempo mínimo en el que se puede alcanzar v_f si el cohete inicia desde el reposo.

$$v_f = v_i + at$$

$$t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{v_f}{a_{max}} = \frac{v_f m}{T_{max} - mg}$$

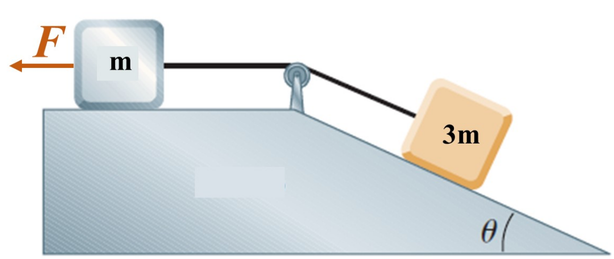
Como la aceleración del dispositivo es la misma que la del cohete, determinar la fuerza neta del cohete de la siguiente manera

$$F - Mg = Ma_{max}$$

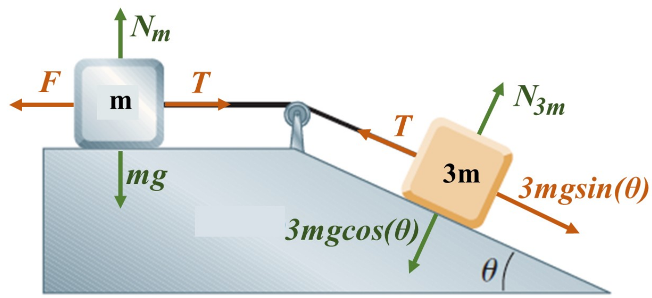
Donde F es la fuerza de empuje que deben ejercer los motores del cohete para elevar el cohete a tal aceleración. Al despejar F y reemplazar la aceleración máxima queda

$$F = M(a_{max} + g) = M\left(\frac{T_{max} - mg}{m} + g\right) = \frac{MT_{max}}{m}$$

Problema 28.
En la figura, un bloque de masa m se encuentra sobre una superficie horizontal sin roce, unida atraves de una cuerda ideal que pasa por una polea ideal a un bloque de masa $3m$. El bloque de masa $3m$ está sobre un plano inclinado sin roce de ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque de masa m es empujado por una fuerza F contraria a la tensión de la cuerda que la sujeta. Determine el ángulo del plano inclinado para que el sistema esté en reposo.



Solución:
Las fuerzas sobre los bloques son las siguientes



Las fuerzas verdes no afectan al movimiento porque se igualan en cada bloque. Las naranjas afectan al movimiento que queremos estudiar en este ejercicio porque son paralelas a la superficie sobre el cual se mueve el bloque. De esta manera, estudiaremos las fuerzas naranjas. Para que no haya movimiento en el eje paralelo a las superficies de los bloques, la aceleración de cada bloque debe ser cero y, por ende, la fuerza neta de cada uno de ellos también debe ser cero.
La fuerza neta en el eje paralelo a la superficie del bloque de masa m es

$$0 = T - F$$

Asimismo, la fuerza neta en el eje paralelo a la superficie del bloque de masa $3m$ es

$$0 = 3mgsin(\theta) - F$$

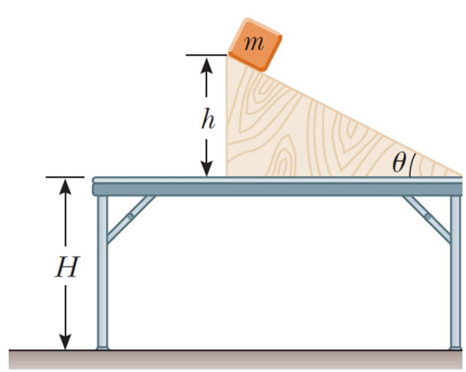
Al sumar ambas ecuaciones queda

$$0 = 3mgsin(\theta) - F$$

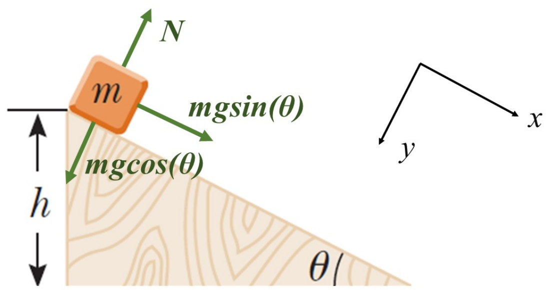
Al despejar θ queda

$$\theta = arcsin\left(\frac{F}{3mg}\right)$$

Problema 29.
Un bloque de masa m se encuentra en el punto más alto de un plano inclinado sin roce de ángulo θ con la horizontal. El punto más alto del plano inclinado está a h metros de la mesa sobre la cual está el plano inclinado. Si el bloque se libera desde el reposo, determine la aceleración del bloque y su velocidad en el punto más bajo del plano inclinado.



Solución:
La únicas fuerzas actuando sobre el sistema son el peso del bloque y su normal. Si se definen las coordenadas tal que el eje x sea paralelo al plano inclinado, las componentes vectoriales de las fuerzas actuando sobre el bloque son



Como no hay movimiento en el eje y, la fuerza neta en ese eje es cero. Por su parte, la fuerza neta en el eje x es

$$mgsin(\theta) = ma$$

$$a = gsin(\theta)$$

Por ende, la aceleración en el eje x es $gsin(\theta)$.
Para calcular la velocidad del bloque al final del plano inclinado se puede ocupar la ecuación de movimiento

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$$

Como el bloque está en reposo al inicio, $v_i^2 = 0$. Para saber cúanto es Δx podemos utilizar la relación

$$sin(\theta) = \frac{h}{\Delta x}$$

$$\Delta x = \frac{h}{sin(\theta)}$$

Al reemplazar estos valores y desarrollar la ecuación de movimiento ecuación queda

$$v_f^2 = 2a\Delta x$$

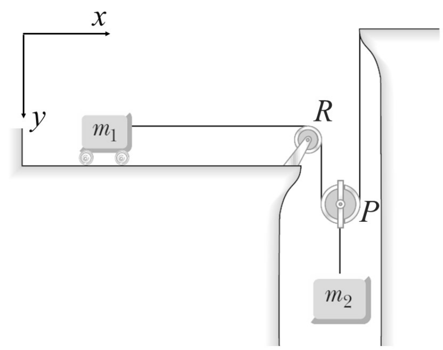
$$v_f^2 = \frac{2gsin(\theta)h}{sin(\theta)} = 2gh$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

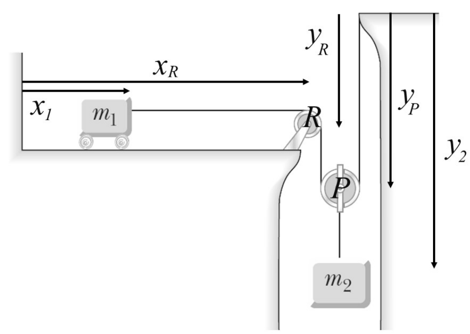
La velocidad con la que llega el bloque al final del plano inclinado en el eje x es $\sqrt{2gh}$.

Problema 30.
El sistema de la figura consiste en un bloque de masa m_1, un bloque de masa m_2, una polea ideal fija R y una polea ideal móvil P. El bloque de masa m_1 está sobre una superficie horizontal sin roce unida a una cuerda ideal que pasa por una polea fija y luego por una móvil para quedar unida, en su otro extremo, a una superficie

horizontal sobre ella. Asimismo, el bloque de masa m_2 cuelga verticalmente sujetado por una cuerda ideal a la polea móvil.
Determine la relación entre las aceleraciones de los bloques.



Solución:
Las distancias de los objetos respecto al origen del eje de coordenadas (definido en la figura del encunciado) es



Si definimos el largo de la cuerda unida al bloque de masa m_1 como L y el largo de la cuerda unida al bloque de masa m_2 como D, las condiciones de ligadura son

$$L = x_R - x_1 + y_P + (y_P - y_R)$$

$$D = y_2 - y_P$$

Como L y D son largos constantes y la polea R está en un lugar fijo y, por ende x_R e y_R no cambian. Al derivar dos veces y reordenar las condiciones de ligadura queda, respectivamente,

$$2\ddot{y_P} = \ddot{x_1}$$

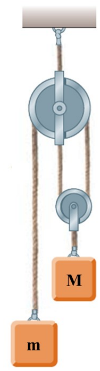
$$\ddot{y_2} = \ddot{y_P}$$

Al reemplazar la última condición en la primera queda

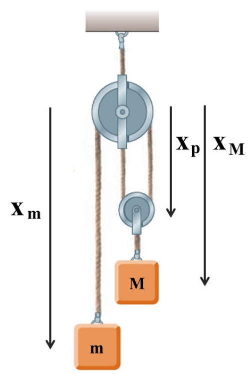
$$2\ddot{y_2} = \ddot{x_1}$$

Entonces la relación entre las aceleraciones de los bloques es $2a_{2y} = a_{1x}$.
Puede comprobar que eligiendo cualquier otro origen del sistema de coordenadas, el resultado será igual. Si se eligen distintos ejes de coordenadas, el resultado tendrá igual magnitud, con signos cambiados.

Problema 31.
En el sistema de la figura, dos bloques de masas M y m cuelgan verticalmente. El bloque de masa m está sujetado por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal fija y luego por una polea ideal móvil hasta quedar atada a la polea fija en su otro extremo. La polea móvil está unida mediante una cuerda ideal al bloque de masa M. Determine la relación entre las aceleraciones de los bloques.



Solución:
Si fijamos como el origen de la coordenada a la polea fija, queda lo siguiente



Si el largo de la cuerda unida al bloque de masa m es L y el largo de la cuerda unida al bloque de masa M es D, entonces se puede definir el largo de las cuerdas como la suma de las distancias desde el origen hasta la polea y los bloques. A este proceso de definición de largos de las cuerdas se le denomina **condiciónes de ligadura**. Las condiciones de ligadura de este ejercicio son

$$L = x_m + 2x_p + x_{sobrepolea}$$

$$D = x_M - x_p + x_{sobrepolea}$$

Note que agregamos $x_{sobrepolea}$, que se refiere a la porción de la cuerda que pasa por la polea. Debido a que la polea no cambia de tamaño, la porción de cuerda que pasa por esta no cambia de largo y, por ende, es constante. Los largos de las cuerdas también son constantes, entonces, al derivar dos veces ambas condiciones queda, respectivamente,

$$2\ddot{x}_p = -\ddot{x}_m$$

$$\ddot{x}_M = \ddot{x}_p$$

Si reemplazamos la segunda ecuación en la primera queda que

$$-2\ddot{x_M} = \ddot{x_m} = a_m = -2a_M$$

A partir de la condición de ligadura se deduce que la aceleración del bloque de masa M será el doble que el de masa m y en sentido contrario.

Problema 32.
En el problema anterior, suponga que $M = 2m$. Determine la aceleración de los dos bloques.

Solución:

En el problema anterior se llegó a la conclusión de que $a_m = -2a_{2m}$. A partir del dibujo podemos determinar la fuerza neta en los bloques y en la polea móvil. Note que la polea es ideal y, por ende, su masa es cero y su fuerza neta siempre será cero.
Llamaremos T_1 a la tensión de la cuerda unida al bloque de masa $2m$ y T_2 a la tensión de la cuerda unida al bloque de masa m.

$$2mg - T_1 = 2ma_{2m} (1)$$

$$mg - T_2 = ma_m (2)$$

$$T_1 = 2T_2 (3)$$

Al aplicar (3) en (1) y la relación entre la aceleraciones de los bloques en (2) queda

$$mg - T_2 = ma_{2m}$$

$$T_2 - mg = 2ma_{2m}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene

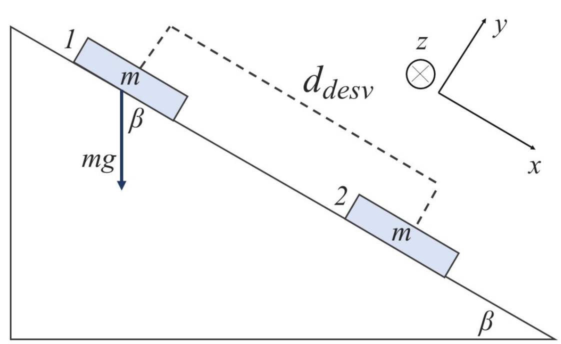
$$0 = 3ma_{2m}$$

$$a_{2m} = 0 = a_m$$

La aceleración de ambos bloques es cero.

Problema 33.
Una estudiante de ingenieria está jugando con una mesa de hockey de aire sin fricción de largo d. Ella se fija que si le imparte al disco de masa m una velocidad v, este llega al otro lado de la mesa con la misma velocidad, pero desviado d_{desv} hacia la derecha. Ella supone que esto se debe a que la mesa está inclinada, determine el ángulo de inclinación de la mesa.
Solución:

El diagrama de fuerzas se ve de la siguiente manera



En primera instancia, se puede determinar el tiempo que se demora en llegar al otro extremo de la mesa. Dado que el movimiento en el eje z es constante, se puede utilizar la formula $v(t) = \frac{d}{t}$, entonces el tiempo de viaje del disco es $t = \frac{d}{v}$.
Además, se puede determinar que la fuerza neta sobre los ejes y y z es cero, pero en el del eje x es

$$ma_x = mgsin(\beta)$$

$$a_x = gsin(\beta)$$

Al movimiento también se le puede aplicar la ecuación de movimiento $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$. Como v_0 en este caso es cero, entonces

$$d_{desv} = \frac{1}{2} a_x t^2$$

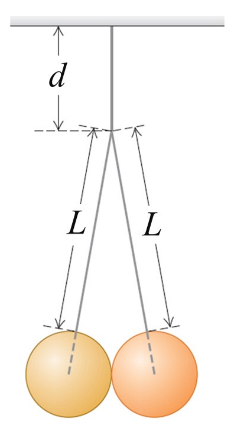
y la reemplazar a_x y t con los valores ya calculados se obtiene que

$$d_{desv} = \frac{1}{2} gsin(\beta) \frac{d^2}{v^2}$$

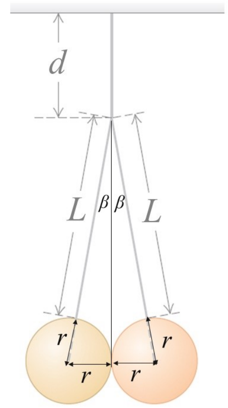
$$sin(\beta) = \frac{2v^2 d_{desv}}{d^2 g}$$

$$\beta = arcsin\left(\frac{2v^2 d_{desv}}{d^2 g}\right)$$

Problema 34.
En la figura, dos esferas lisas idénticas de masa m y r metros de radio cuelgan suspendidas desde un mismo punto por dos cuerdas de largo L. A su vez, las dos cuerdas estan unidas en el otro extremo a un alambre sujetado por una superficie horizontal.
Determine la tensión en las cuerdas y el alambre y la fuerza de reacción entre las esferas.



Solución:



Como las esferas estan en reposo, la fuerza neta de ellas es cero. Al analizar cualquiera de las dos esferas, su fuerza neta es

$$0 = T_1 cos(\beta) - mg$$

$$T_1 = \frac{mg}{cos(\beta)}$$

donde llamamos T_1 a la tensión de las cuerdas (la tension de las cuerdas es igual en ambas).
Si bien no se sabe cúanto es β, podemos deducir $cos(\beta)$ al analizar el triángulo rectángulo que forma la línea vertical entre las esferas, la cuerda y el radio de la esfera. La hipotenusa del tríangulo es $L + r$ y el cateto opuesto al ángulo es r. De esta manera, se puede calcular la medida del lado adyacente al ángulo, el cual sería

$$\sqrt{(L+r)^2 - r^2} = \sqrt{L^2 + 2Lr}$$

Como L y r son constantes en el problema, se puede reemplazar $cos(\beta) = \dfrac{\sqrt{L^2 + 2Lr}}{L + r}$ en la tensión de la cuerda:

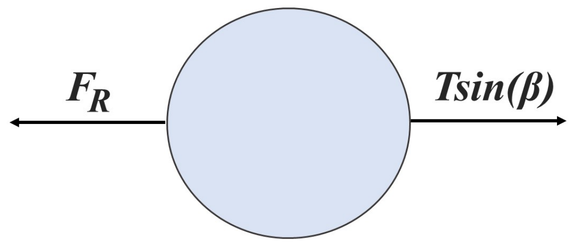
$$T_1 = \frac{mg(L+r)}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}$$

Note que las tensiones de las dos cuerdas son iguales porque tienen el mismo largo y sostienen una esfera de igual masa y radio.
Para calcular la tensión del alambre, se determina la fuerza neta del punto de unión de las cuerdas y el alambre, la cual es cero.

$$0 = T_2 - 2T_1 cos(\beta)$$

$$T_2 = 2T_1 cos(\beta) = 2mg$$

La fuerza de reacción entre las esferas se puede determinar analizando la fuerza neta de una de ellas en el eje horizontal. La fuerza neta en todos los ejes debe ser cero para que las esferas estén en reposo.
Si se analiza la esfera izquierda, las fuerzas que actuan sobre ella en el eje paralelo a la superficie horizontal son



Para que la esfera esté en reposo, su fuerza neta debe ser cero, es decir,

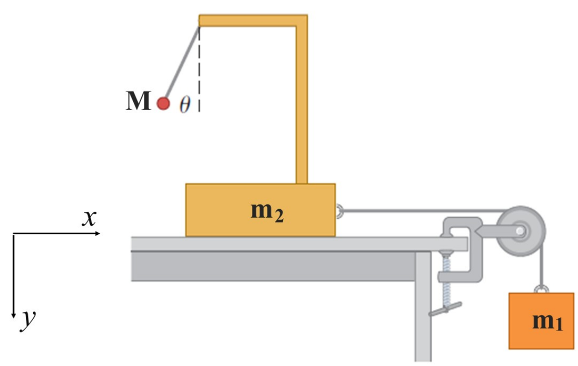
$$Tsin(\beta) - F_R = 0$$

$$F_R = Tsin(\beta)$$

Pero $sin(\beta) = \dfrac{r}{L+r}$, entonces

$$F_R = T\frac{r}{L+r} = \frac{rmg}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}$$

Problema 35.
En la figura, un bloque de masa m_2 está conectado mediante una cuerda ideal, que pasa por una polea ideal, a un bloque de masa m_1. El bloque de masa m_1 cuelga verticalmente mientras que el de masa m_2 está sobre una superficie horizontal sin roce. Sobre el bloque de masa m_2 cuelga una bola de masa M por una cuerda ideal. La cuerda hace un ángulo θ constante con respecto a la vertical. Determine el ángulo en función de m_1 y m_2.



Solución:
La aceleración de la bola será la misma que la de todo el sistema. Por la condición de ligadura, $a_1 = a_2 = a_M \equiv a$. La fuerza neta sobre la bola en los ejes x e y respectivamente son

$$Ma = T_2 sin(\theta)$$

$$0 = Mg - T_2 cos(\theta)$$

donde T_2 llamamos a la tensión de la cuerda que une a la bola con el palo horizontal. Al despejar T_2 de la segunda expresión y aplicarla a la primera queda

$$Ma = \frac{Mgsin(\theta)}{cos(\theta)} = Mgtan(\theta)$$

Y al despejar $tan(\theta)$ queda

$$tan(\theta) = \frac{a}{g}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

El valor de a se puede determinar al analizar las fuerzas netas sobre los bloques.

$$F_{1y} = m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$F_{2x} = m_2 a = T_1$$

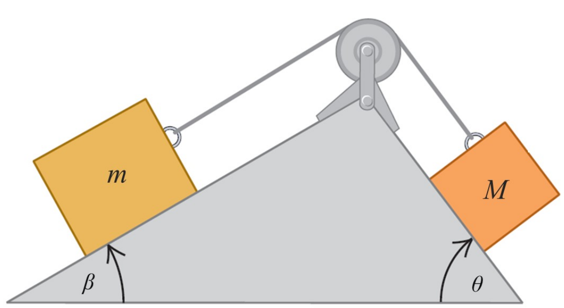
Al despejar T_1 de una de las expresiónes y aplicarla a la otra queda

$$a = \frac{m_1 g}{m_2 + m_1}$$

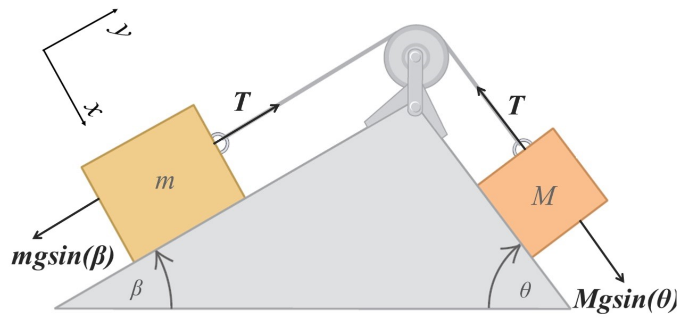
La aceleración se puede reemplazar en la definición de θ determinada anteriormente, de manera que queda

$$\theta = arctan\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Problema 36.
En la figura, dos bloques de masa m y M están sobre un plano inclinado doble de angulos β y θ. Los bloques están unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. Determine la aceleración del sistema.



Solución:
Las fuerzas que afectarán a la aceleración se aprecian en la siguiente figura:



Por la condición de ligadura $a_m = a_M \equiv a$ y de esta manera, la fuerza neta del bloque de masa M en el eje x es

$$Ma = Mgsin(\theta) - T$$

$$T = Mgsin(\theta) - Ma$$

La fuerza neta del bloque de masa m en el eje y es

$$ma = T - mgsin(\beta)$$

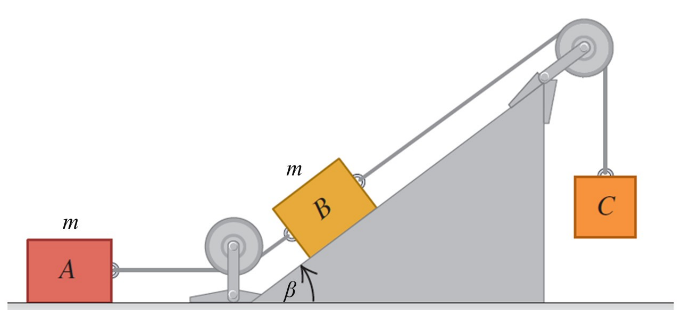
Al reemplazar T en la fuerza neta del bloque de masa m queda

$$Ma = Mgsin(\theta) - ma - mgsin(\beta)$$

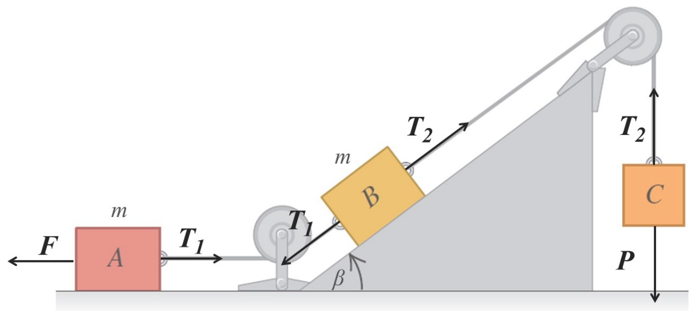
Al despejar a queda

$$a = \frac{Mgsin(\theta) - mgsin(\beta)}{m + M}$$

Problema 37.
En la figura, tres bloques A, B y C estan conectados por dos cuerdas ideales. El bloque A tiene masa m y se encuentra sobre una superficie horizontal sin roce y está unida al bloque B de misma masa que se encuentra sobre un plano inclinado sin roce mediante una cuerda ideal que pasa por una polea inicial. Una fuerza F tira del bloque A. El bloque B está unido al bloque C mediante una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. El bloque ideal cuelga verticalemente y se mueve con velocidad constante. Determine el peso del bloque C.



Solución:
Debido a que el bloque C se mueve verticalmente con velocidad constante, entonces todo el sistema y cada uno de los bloques se mueven con velocidad constante, es decir, la fuerza netas de cada uno de ellos es cero. De esta manera, las fuerzas neta en los ejes iguales a la dirección del movimiento de cada bloque debe ser cero.



Las fuerzas netas serían

$$F_A = 0 = T_1 - F$$

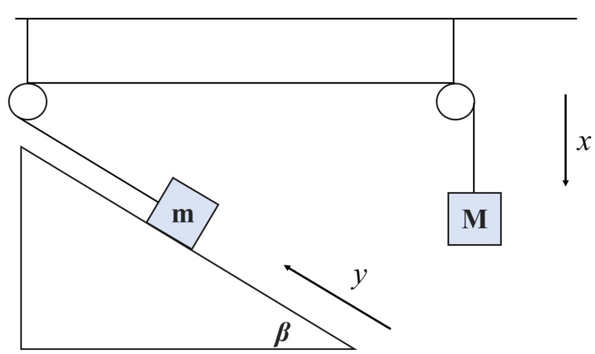
$$F_B = 0 = T_2 - T_1 - mgsin(\beta)$$

$$F_C = 0 = P_C - T_2$$

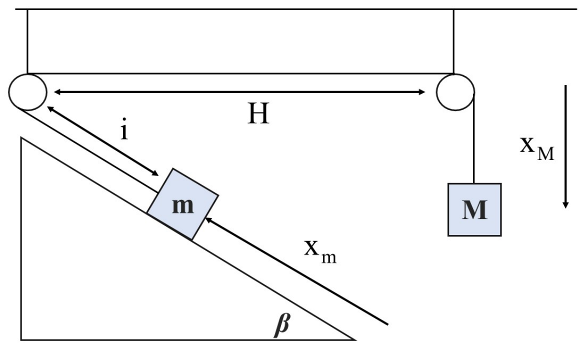
Donde P_C es el peso del bloque C. De la fuerza neta del bloque A podemos deducir que $T_1 = F$ y, por ende, de la fuerza neta del bloque B se deduce que $T_2 = T_1 + mgsin(\beta) = F + mgsin(\beta)$. Además, de la fuerza neta de C, $P_C = T_2$, y, por lo tanto,

$$P_C = F + mgsin(\beta)$$

Problema 38.
Los bloques de la figura están unidos por cuerdas ideales que pasan por poleas ideales. El bloque de masa m se encuentra sobre un plano inclinado sin roce que forma un ángulo β con la horizontal. El bloque se encunetra unido a un bloque de masa M, mediante un sistema de poleas, que cuelga verticalmente. Determine la aceleración de los bloques y la condición para que el bloque de masa M baje.



Solución:
Definimos los ejes imaginarios x e y no perpendiculares para poder determinar la condicion de ligadura.



A partir de esto, si la cuerda mide L metros, la distancia entre las poleas es H metros, y la distancia inicial entre el bloque de masa m es i, la condicion de ligadura sería

$$x + i - y + H = L$$

Al derivar dos veces la condición queda que $\ddot{x} = \ddot{y} \equiv a$.
La fuerza neta sobre el bloque de masa M en el eje x es

$$Ma = Mg - T$$

$$T = Mg - Ma$$

y la fuera neta sobre el bloque de masa m en el eje y es

$$ma = T - mgsin(\beta)$$

Al reemplazar la tensión en la última ecuación queda

$$ma = Mg - Ma - mgsin(\beta)$$

y al despejar a queda

$$a = \frac{Mg - mgsin(\beta)}{M + m}$$

Para que el bloque de masa M baje, la aceleración debe ser positiva, entonces

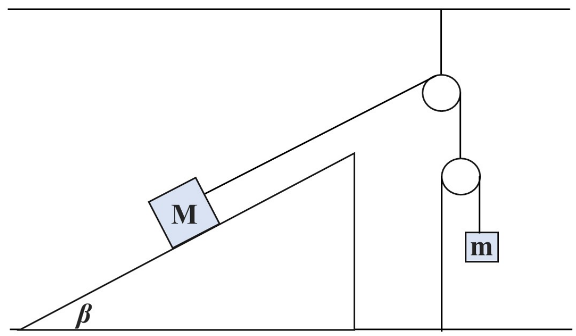
$$a = \frac{Mg - mgsin(\beta)}{M + m} > 0$$

$$Mg - mgsin(\beta) > 0$$

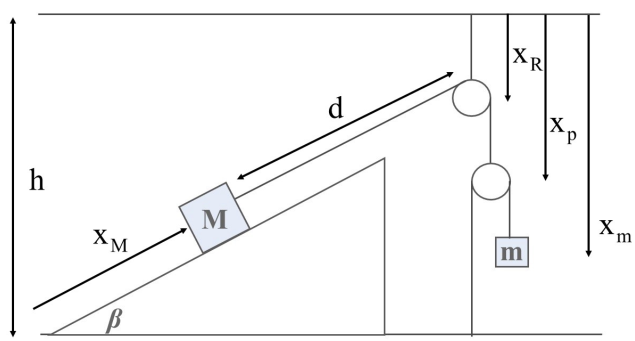
$$M > msin(\beta)$$

De esta manera, M debe ser mayor que $msin(\beta)$ para que la el bloque de masa M baje.

Problema 39.
El sistema de la figura consiste en un sistema de poleas ideales con cuerdas ideales. Un bloque de masa M se encuentra sobre un plano inclinado sin roce que hace un ángulo de β con la horizontal. Otro bloque de masa m cuelga verticalmente y es sujetado por una cuerda ideal que pasa por una polea. Determine la relación entre las aceleraciones de los bloques.



Solución:
Si la distancia inicial entre la polea superior y el bloque de masa M es d y la distancia entre la superficie horizontal superior y la inferior es h, entonces si tomamos un eje imaginario paralelo al plano inclinado y otro eje vertical las distancias queda como en la siguiente figura:



Si la cuerda unida al bloque de masa M mide L metros, entonces la condición de ligadura es

$$L = (x_p - x_R) + (d - x_M)$$

Al derivar esta expresión dos veces queda

$$\ddot{x_p} = \ddot{x_M}$$

ya que el largo de la cuerda no cambia, la polea R no se mueve y la distancia inical d es un dato inicial.
Por otro lado, si la cuerda unida al bloque de masa m mide D metros, la condicion de ligadura de la cuerda es

$$D = (h - x_p) + (x_m - x_p) = h + x_m - 2x_p$$

Al derivar dos veces esa expresión queda

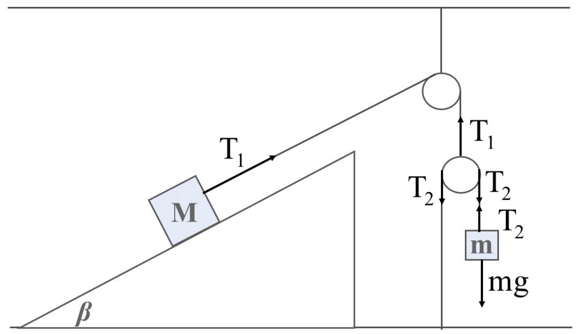
$$2\ddot{x_p} = \ddot{x_m}$$

debido a que el largo de la cuerda no cambia y la distancia entre las superficies tampoco.

De esta manera, la relación entre las aceleraciones de los bloques es

$$2\ddot{x_M} = \ddot{x_m}$$

Problema 40.
En en problema anterior, determine la aceleración de los bloques en términos de β, las masas y la aceleración de gravedad.
Solución:



Las poleas ideales no tienen masa, entonces su fuerza neta siempre será cero y de esta manera

$$0 = 2T_2 - T_1$$

$$2T_2 = T_1$$

En el bloque de masa M la fuerza neta en el eje paralelo al plano inclinado es

$$T_1 - Mgsin(\beta) = M\ddot{x_M}$$

Aplicando la relación entre tensiones queda

$$2T_2 - Mgsin(\beta) = M\ddot{x_M}(1)$$

La fuerza neta sobre el bloque de masa m es

$$mg - T_2 = m\ddot{x_m}$$

Al despejar T_2 y aplicar la relación entre las aceleraciones de los bloques que se sacaron a partir de la condición de ligadura queda

$$T_2 = mg - 2m\ddot{x_M}$$

Al reemplazar T_2 en (1) queda

$$2(mg - 2m\ddot{x_M}) - Mgsin(\beta) = M\ddot{x_M}$$

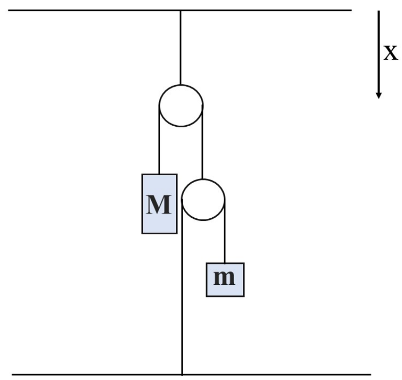
Al despejar $\ddot{x_M}$ queda

$$\ddot{x_M} = \frac{g(2m - Msin(\beta))}{4m + M}$$

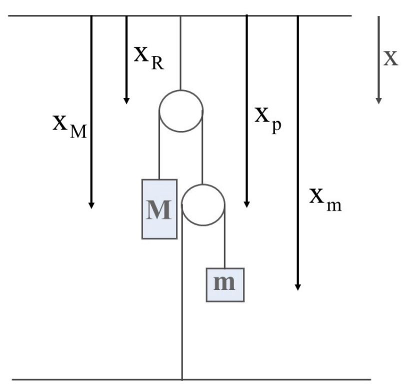
Y como $2\ddot{x_M} = \ddot{x_m}$,

$$\ddot{x_m} = \frac{2g(2m - Msin(\beta))}{4m + M}$$

Problema 41.
En la figura un sistema se compone de poleas y cuerda ideales. Un bloque de masa m cuelga verticalmente atada a una cuerda que pasa por una polea fija y en su otro extremo sostiene a la polea móvil. Una bola de masa M cuelga verticalmente sujetada por una cuerda que pasa por la polea móvil y en su otro extremo está atada a la superficie horizontal inferior. Determine la aceleración del bloque.



Solución:
Las distancias entre los elementos del sistema desde la superficie horizontal superior (el origen del eje x) se representan en la siguiente imagen:



A partir de esto podemos definir las siguientes condiciones de ligadura

$$L = (x_M - x_R) + (x_P - x_R)$$

$$D = (h - x_P) + (x_m - x_P)$$

Donde L y D son los largos de las cuerdas. Al derivar dos veces las condiciones de ligadura queda

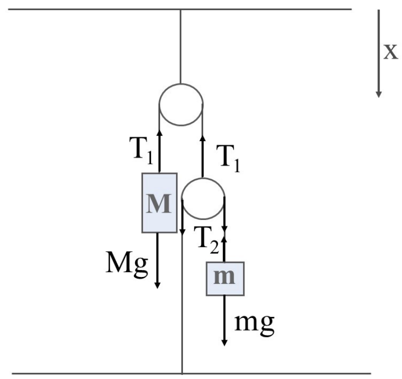
$$\ddot{x_M} = -\ddot{x_P}$$

$$\ddot{x_m} = 2\ddot{x_P}$$

Al unir ambas queda

$$\ddot{x_m} = -2\ddot{x_M}$$

Las fuerzas actuando sobre los elementos del sistema son:



Como la polea es ideal, su fuerza neta es cero y entonces

$$T_1 = 2T_2$$

Las fuerzas netas en el eje x del bloque y la bola son, respectivamente,

$$m\ddot{x_m} = mg - T_1 \; (1)$$

$$M\ddot{x_M} = Mg - T_2 \; (2)$$

Al aplicar la relación entre las aceleraciones de los objetos en (1) y despejar T_1 queda

$$T_1 = mg + 2m\ddot{x_M}$$

Al aplicar la relación entre las tensiones en (2) queda

$$2M\ddot{x_M} = 2Mg - T_1 \; (3)$$

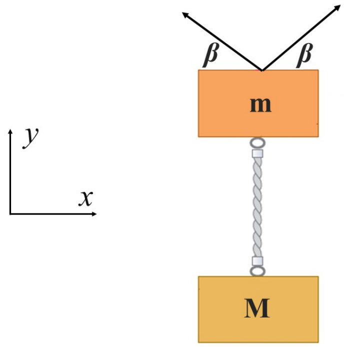
Al reemplzar T_1 despejada anteriormente en (3) queda

$$2M\ddot{x_M} = 2Mg - m(g + 2\ddot{x_M})$$

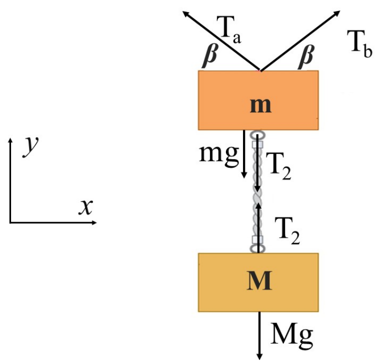
Al despejar la aceleración del bloque de masa M queda

$$\ddot{x_M} = \frac{g(2M - m)}{2(M + m)}$$

Problema 42.
En la figura un bloque de masa m y otro bloque de masa M están unidos por una cuerda ideal. Ambas cuelgan verticalmente y el bloque de masa m está unido a dos cuerdas ideales jaladas con la misma fuerza que forman un ángulo β con la horizontal. Si el sistema sube con una aceleración a, determine la tensión de las cuerdas que sostienen al bloque de masa m.



Solución:
Los diagramas de cuerpo libre para ambos bloques son los siguientes:



Ambos elementos tienen la misma aceleración a, entonces la fuerza neta de la bola y del bloque, respectivamente, es

$$Ma = T_2 - Mg \ (1)$$

$$ma = 2T_1 sin(\beta) - T_2 - mg \ (2)$$

Note que las tensiones superiores son iguales porque el sistema no se mueve de manera horizontal y, por ende, su fuerza neta es cero y $T_a cos(\beta) - T_b cos(\beta) = 0 \rightarrow T_a = T_b \equiv T_1$
Al despejar T_2 de (1) queda

$$T_2 = Ma + Mg$$

Al aplicar esto en (2) queda

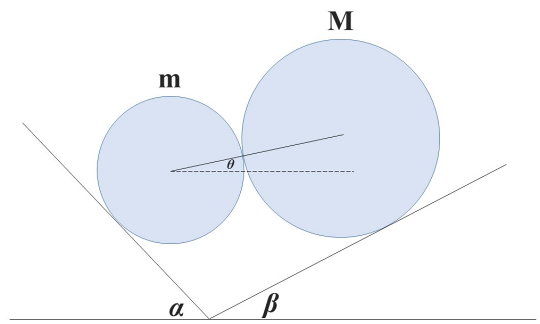
$$ma = 2T_1 sin(\beta) - Ma - Mg - mg$$

Y al despejar T_1,

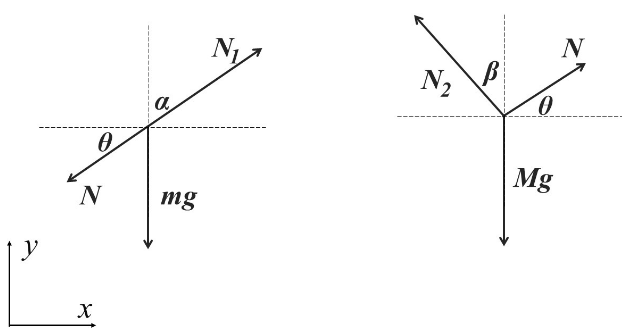
$$T_1 = \frac{(a+g)(M+m)}{2sin(\beta)}$$

Problema 43.
En la figura, dos cilindros se encuentran sobre dos planos inclinados sin roce. El cilindro de la izquierda de

radio R tiene masa m y está sobre un plano inclinado que hace un ángulo α con la horizontal. El otro cilindro tiene masa M, radio r y está sobre un plano inclinado que hace un ángulo β con la horizontal. Si el sistema está en reposo, determine el ángulo θ producido por la recta que une los centros de los cilindros y la horizontal.



Solución:
Los diagramas de fuerza de los cilindros son



Donde N_1 es la normal ejercida por el plano inclinado y el cilindro de masa m, N_2 la normal entre el plano y el cilindro de masa M y N es la fuerza de reacción entre los cilindros.
La fuerza neta en los ejes x e y, respectivamente, del cilindro de masa m es

$$N_1 sin(\alpha) - Ncos(\theta) = 0 \rightarrow N_1 sin(\alpha) = Ncos(\theta)$$

$$N_1 cos(\alpha) - Nsin(\theta) - mg = 0 \rightarrow N_1 cos(\alpha) = Nsin(\theta) + mg$$

Al dividir estas expresiones queda

$$tan(\alpha) = \frac{Ncos(\theta)}{mg + Nsin(\theta)}$$

Al despejar N queda

$$N = \frac{mgtan(\alpha)}{cos(\theta) - sin(\theta)tan(\alpha)}$$

Se hace el mismo procedimiento con el cilindro de masa M, las fuerzas netas en los ejes x e y son

$$-N_2 sin(\beta) + N cos(\theta) = 0 \rightarrow N_1 sin(\beta) = N cos(\theta)$$

$$N_2 cos(\beta) - Mg + N sin(\theta) = 0 \rightarrow N_1 cos(\beta) = Mg - N sin(\theta)$$

Dividiendo ambas ecuaciones y despejando N queda

$$N = \frac{Mg tan(\beta)}{cos(\theta) + sin(\theta) tan(\beta)}$$

De esta manera, se pueden igualar ambas N

$$\frac{mg tan(\alpha)}{cos(\theta) - sin(\theta) tan(\alpha)} = \frac{Mg tan(\beta)}{cos(\theta) + sin(\theta) tan(\beta)}$$

Lo que sigue es solo álgebra. La expresión se desarrolla de la siguiente manera:

$$m tan(\alpha) cos(\theta) + m tan(\alpha) tan(\beta) sin(\theta) = M tan(\beta) cos(\theta) - M tan(\beta) sin(\theta) tan(\alpha)$$

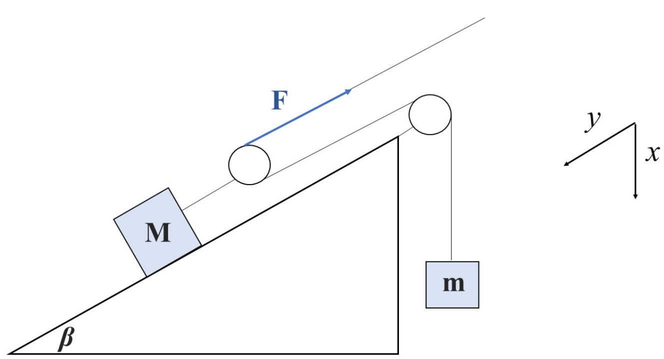
Al dividir ambos lados por $cos(\theta)$ queda

$$m tan(\alpha) + m tan(\alpha) tan(\beta) tan(\theta) = M tan(\beta) - M tan(\beta) tan(\theta) tan(\alpha)$$

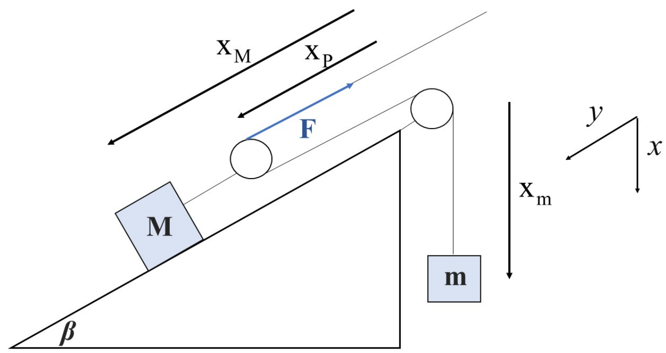
$$tan(\theta) = \frac{M tan(\beta) - m tan(\alpha)}{tan(\alpha) tan(\beta)(m + M)}$$

$$\theta = \left(\frac{M tan(\beta) - m tan(\alpha)}{tan(\alpha) tan(\beta)(m + M)} \right)$$

Problema 44.
Las cuerdas y poleas de la figura son ideales. El sistema consiste en un bloque de masa M unido a una polea móvil por una cuerda. Otro bloque de masa m cuelga verticalmente y esta unida a una cuerda que pasa por una polea fija, luego por la polea móvil y en extremo se ejerce una fuerza de magnitudd F. Si el plano inclinado hace un ángulo β con la horizontal, determine la aceleración de los bloques.



Solución:
Para hacer la condición de ligura definimos las distancias entre los objetos y un origen:



Como la polea móvil está directamente unida al bloque de masa M podemos establecer que

$$\ddot{x_M} = \ddot{x_p}$$

La condición de ligadura de la cuerda unida al bloque de masa m, suponiendo que la cuerda mide L metros, es

$$L = x_m + 2x_p$$

Al derivar dos veces la expresión queda

$$\ddot{x_m} = -2\ddot{x_p}$$

Al unir las tres aceleraciones queda

$$\ddot{x_m} = -2\ddot{x_M}$$

Como la polea móvil es ideal y no tiene masa, su fuerza neta es cero y, por ende, $2F = T$ ya que la fuerza F es la misma en toda la cuerda debido a que la cuerda es ideal.
La fuerza neta en el eje y del bloque de masa M es

$$M\ddot{x_M} = Mgsin(\beta) - T$$

Al aplicar la relación entre T y F en la ecuación queda

$$M\ddot{x_M} = Mgsin(\beta) - 2F(1)$$

La fuerza neta en el eje x del bloque de masa m es

$$m\ddot{x_m} = mg - F$$

Al aplicar la relación entre las aceleraciones de los bloques en la ecuación queda

$$-2m\ddot{x_M} = mg - F \rightarrow F = mg + 2m\ddot{x_M}(2)$$

Al reemplazar (2) en (1) queda

$$M\ddot{x_M} = Mgsin(\beta) - 2(mg + 2m\ddot{x_M})$$

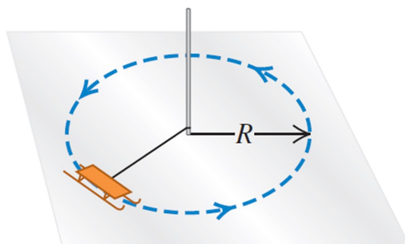
Y al despejar $\ddot{x_M}$

$$\ddot{x_M} = \frac{g(Msin(\beta) - 2m)}{M + 4m}$$

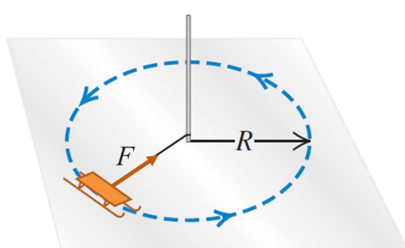
Y como $\ddot{x_m} = -2\ddot{x_M}$,

$$\ddot{x_m} = \frac{2g(2m - Msin(\beta))}{M + 4m}$$

Problema 45.
Un trineo de masa m descansa sobre hielo sin fricción y está unido a un poste mediante una cuerda sin masa de R metros. Un niño empuja el trineo y el trineo da vuelta uniformemente alrededor del poste. Si el trineo da f vueltas alrededor del poste en un segundo, calcule la fuerza F que la cuerda ejerce sobre el trineo.



Solución:
Al ser un movimiento uniforme, el trineo no experimenta aceleración en dirección tangencial al movimiento sino que solo radial. La aceleración radial, tambien llamada centrípeta, la denominaremos como a_{rad}. La fuerza neta del trineo también es radial ya que tiene la misma dirección y sentido que su única aceleración (a_{rad}).



Para resolver esta pregunta se utilizarán las coordenadas polares, un resumen de estas estan en la pregunta 12 de la parte de este texto *Cinemática y su relación con el cálculo.*

$$a(t) = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2]\hat{\rho} + [\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}]\hat{\theta}$$

Como se trata de movimiento uniforme circular, el trineo no acelera en dirección tangencial al movimiento, es decir, la coordenada $\hat{\theta}$. Además, en el movimiento el radio es constante, entonces $\ddot{\rho} = 0$ asi que la aceleración de este movimiento es solo

$$a(t) = -\rho\dot{\theta}^2$$

Note que le signo negativo se explica porque la aceleración va hacia el centro del círculo generado por el movimiento. En el caso del trineo, ρ será reemplazado por R, el radio constante del movimiento.
La velocidad angular $\dot{\theta}$ es

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

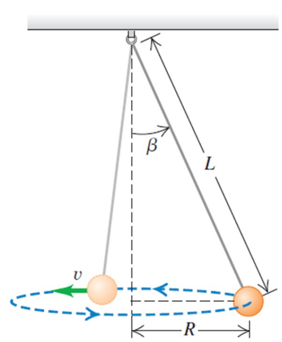
donde T es el periodo del movimiento y f la frecuencia. En el caso del trineo la velocidad angular es $2\pi f$.
De esta manera, la aceleración queda como

$$a_{rad} = -R(2\pi f)^2$$

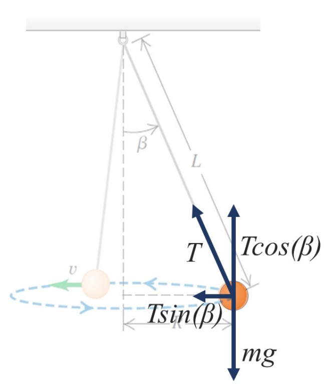
Y entonces la fuerza neta sobre el trineo es

$$F_{neta} = a_{rad}m = -R(2\pi f)^2 m$$

Problema 46.
En la figura se representa un péndulo a base de una lenteja de masa m en el extremo de una cuerda de largo L. La lenteja se mueve de manera circular sobre una superficie horizontal sin roce a velocidad v constante, es decir, el movimiento es uniforme. La cuerda forma un angulo β con una línea imaginaria vertical perpendicular al piso. Determine la tensión de la cuerda y el periodo del movimiento de la lenteja en términos de β.



Solución:
El diagrama de cuerpo libre de la lenteja es



Podemos observar que la componente horizontal de la tensón es la fuerza que produce el movimiento circular. La lenteja solo se mueve de manera horizontal y no vertical, de manera que podemos escribir las componentes de la fuerza neta de la siguiente manera:

$$0 = Tcos(\beta) - mg$$

$$ma_{rad} = -Tsin(\beta)$$

De la primera ecuación se obtiene que la tensión de la cuerda es

$$T = \frac{mg}{cos(\beta)}$$

y al sustituir este valor en la segunda ecuación se obtiene que

$$a_{rad} = -\frac{Tsin(\beta)}{m} = -\frac{mg}{cos(\beta)}\frac{sin(\beta)}{m} = -gtan(\beta)$$

El movimiento de la lenteja es similar al del ejercicio anterior, es decir, su radio es constante y no existe componente de aceleración en el eje $\hat{\theta}$ asi que, en coordenadas polares, la aceleración de la lenteja es en dirección radial $\hat{\rho}$ y es

$$a_{rad} = -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

donde ρ es el radio, que en este caso es $Lsin(\beta)$ y la velocidad angular por definición es $\hat{\theta} = \frac{2\pi}{P}$ donde P es el periodo. Entonces

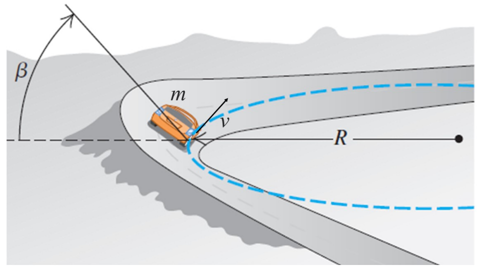
$$a_{rad} = \frac{-\rho 4\pi^2}{P^2} = \frac{-Lsin(\beta)4\pi^2}{P^2}$$

$$P^2 = \frac{-Lsin(\beta)4\pi^2}{a} = \frac{-Lsin(\beta)4\pi^2}{-gtan(\beta)} = \frac{Lcos(\beta)4\pi^2}{g}$$

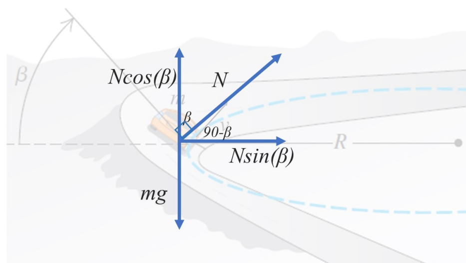
$$P = \sqrt{\frac{Lcos(\beta)4\pi^2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{Lcos(\beta)}{g}}$$

Problema 47.

Un problema común con las carreteras que tienen curvas cerradas durante el invierno (no hay fricción entre los neumáticos de los automoviles y el suelo) es que, aunque el conductor intente doblar los neumáticos, el auto no gira y se desliza por el camino sin cambiar su dirección, generando graves accidentes. A un ingeniero se le ocurre implementar una carretera de la forma representada en la figura, tal que el suelo esté inclinado para que el auto no dependa de la torsión de los neumáticos para cambiar de dirección, sino que se cambie por la fuerza centrípeta. De esta manera, un conductor podrá mantener el radio R con el que da vuelta en la curva sobre hielo sin fricción. Determine el ángulo que debe tener la inclinación para que un auto con velocidad constante v pueda tomar la curva sin peligro.



Solución:
El diagrama de fuerzas sobre el auto es



Al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

$$0 = Ncos(\beta) - mg$$

$$ma_{rad} = -Nsin(\beta)$$

De la primera ecuación se obtiene la normal

$$N = \frac{mg}{cos(\beta)}$$

y al aplicar este resultado en la segunda ecuación

$$a = \frac{-Nsin(\beta)}{m} = \frac{-mg}{cos(\beta)}\frac{sin(\beta)}{m} = -gtan(\beta)$$

En la pregunta 12 de la parte de este texto *Cinemática y su relación con el cálculo* se deduce que, en coordenadas polares, la velocidad y aceleración de un objeto es

$$v(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$a(t) = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2]\hat{\rho} + [\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}]\hat{\theta}$$

Pero el radio no cambia y la velocidad es constante asi que no existe componente en $\hat{\theta}$ de la aceleración, quedando entonces

$$v(t) = \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$a_{rad} = -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

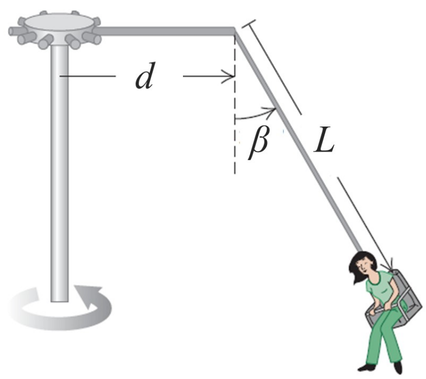
De la ecuación de $v(t)$ se desprende que en el ejercicio $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$. Si reemplazamos esto en la ecuación de a_{rad} se obtiene

$$a_{rad} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} = \frac{-Rv^2}{R^2}\hat{\rho} = \frac{-v^2}{R}\hat{\rho} = -gtan(\beta)\hat{\rho}$$

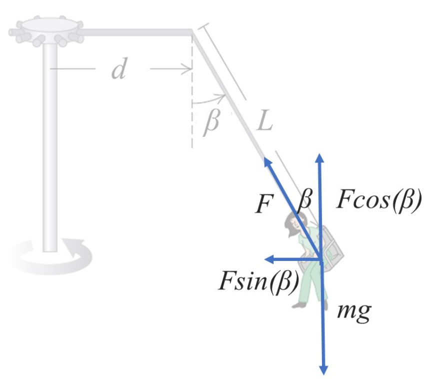
$$tan(\beta) = \frac{v^2}{gR}$$

$$\beta = arctan\left(\frac{v^2}{gR}\right)$$

Problema 48.
En un parque de diversiones hay un columpio gigante que consiste en una barra vertical unida a otras barras horizontales de las cuales cuelgan los columpios, como en la figura. La cuerda que sostiene a los columpios mide L y distancia entre la barra vertical y el punto del cual cuelga el columpio es d. Calcule el periodo del columpio.



Solución:
El diagrama de fuerzas de un niño de masa m en el columpio es



Utilizando coordenadas cilíndricas, la fuerza neta en la coordenada z (paralela a la barra vertical) es

$$0 = Fcos(\beta) - mg$$

de donde se puede despejar F como

$$F = \frac{mg}{cos(\beta)}$$

Por su parte, la fuerza neta en la coordenada $\hat{\rho}$ es

$$ma = -Fsin(\beta)$$

Si se despeja la aceleración de la última ecuación y se reemplaza F por se obtiene que $a = -gtan(\beta)$.
La aceleración por definición en coordenadas polares es

$$a(t) = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2]\hat{\rho} + [\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}]\hat{\theta}$$

pero debido a que se trata de un sistema circular uniforme, es decir, no hay componente en $\hat{\theta}$ y el radio del movimiento no cambia, la aceleración es $a = -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho}$ donde ρ es la distancia entre el niño y la barra y $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ con T periodo.
Al reemplazar esto último e igualarlo a la aceleración deducida con la segunda ley de Newton queda que

$$a = -gtan(\beta) = -(d + Lsin(\beta))\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{(d + Lsin(\beta))4\pi^2}{gtan(\beta)}}$$

Problema 49.
Debido a la destrucción nuclear en el planeta Tierra, los seres humanos se ven forzados a vivir en el espacio exterior. Uno de los problemas a la hora de diseñar las estaciones espaciales es la falta de gravedad, y por ende, falta de una fuerza que permita a los seres humanos caminar en la estación para no perder la musculatura. A una alumna de ingeniería, después de pasar por su nivelación, se le ocurre hacer una estación espacial giratoria uniforme y así utilizar la aceleración centrípeta para simular aceleración de gravedad. Si se desea que el perímetro de la estación sea de 628,3 metros, ¿cuántas vueltas por minuto debiese dar la estación para simular una gravedad terrestre?
Solución:
Del perímetro se puede deducir el radio de la estación espacial:

$$628,3 = 2\pi r$$

$$r = \frac{628,3}{2\pi} = 100m$$

Por definición, la aceleración de la estación con velocidad tangencial constante y radio constante es

$$a = -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho} = -g = -9,81ms^{-2}$$

También se sabe que la velocidad angular, en este caso, es $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ y al reemplazar esto en la aceleración queda

$$a = 100\frac{4\pi^2}{T^2} = 9,81$$

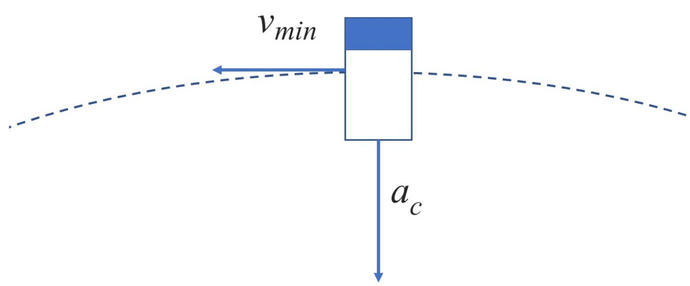
$$T^2 = \frac{400\pi^2}{9,81} = 402s$$

$$T = 20s$$

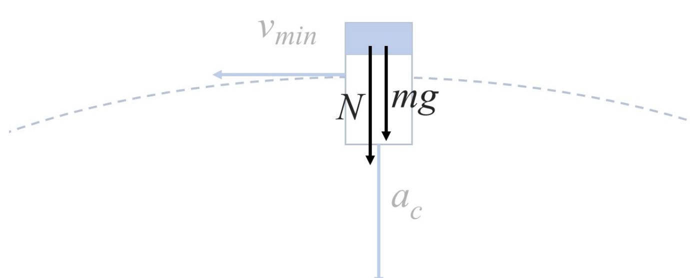
La estación se demoraría 20 segundos en dar una vuelta alrededor de su eje central. Para calcular las vueltas por minuto se utiliza la regla de tres, quedando entonces

$$\frac{(60\frac{s}{min})(1vuelta)}{20s} = 3\frac{vueltas}{min}$$

Problema 50.
Un mago pretende impresionar a su audiencia afirmando que puede desafiar a la gravedad. Para probar su punto, ata a una cubeta llena de agua una cuerda y hace girar la cubeta de manera vertical. El público se impacta porque de la cubeta no se derramó ni una gota de agua. El mago, que estudió ingeniería, sabe que este truco no es más que física. Él había hecho los cálculos previos para determinar que, si su cuerda mide L, la velocidad mínima a la que podía girar la cubeta era v_{min}. Determine v_{min} suponiendo que la aceleración de gravedad es g.



Solución:
El diagrama del agua, suponiendo que tiene masa m, es el siguiente



donde N es la fuerza que ejerce el fondo de la cubeta sobre el agua. Aplicando la segunda ley de Newton

$$ma\hat{\rho} = -n - mg$$

Si la cubeta va con la velocidad mínima posible, entonces la normal ejercida sobre el agua por la cubeta es cero, ya que con esa normal el agua está a punto de soltarse del extremo de la cubeta. Teniendo en cuenta esto, se tiene que

$$a = -g$$

Sabemos también que por definición, para movimientos circulares uniformes la aceleración se reduce a una aceleración con componente radial de radio constante, por ende, la aceleración es

$$a = -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

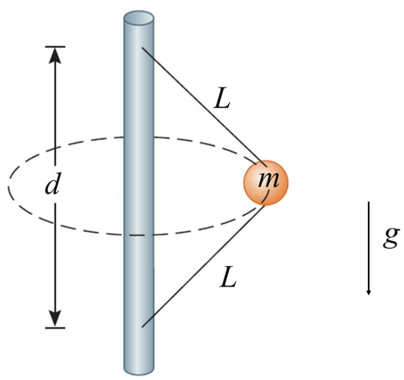
La velocidad tangencial del movimiento en coordenadas polares se representa como $v(t) = \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$, despejando $\dot{\theta}$ se tiene que $\dot{\theta} = \frac{v}{L}$. Aplicando este resultado a la aceleración:

$$a = -\frac{Lv^2}{L^2} = -\frac{v^2}{L} = -g$$

Al despejar v de la última expresión

$$v = \sqrt{gL}$$

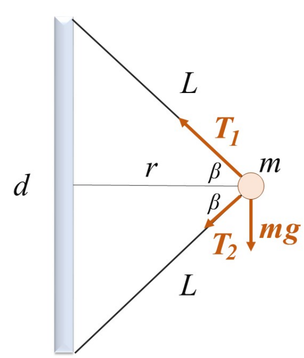
Problema 51.
En la figura, una partícula de masa m está unida a una barra vertical mediante dos cuerdas. La partícula gira con velocidad constante v alrededor de la barra. Ambas cuerdas miden L metros y la distancia entre la unión de las cuerdas en la barra es d metros. Determine la tensión de la cuerda superior e inferior.



Solución:
Si llamamos β al ángulo entre la cuerda y la horizontal, T_1 a la tensión de la cuerda superior y T_2 a la tensión de la cuerda inferior, la fuerza neta en el eje ρ es

$$ma = m(-r\dot{\theta}^2) = -T_1cos(\beta) - T_2cos(\beta)$$

donde r es el radio del movimiento circular.



Por el teorema de Pitágoras, $r = \sqrt{L^2 - \frac{d^2}{4}}$, el cual no cambia. Además, analizando la figura notamos que $cos(\beta) = \frac{r}{L}$. También sabemos que $v = \dot{\theta} r$, entonces $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$. Al reemplazar esto en la expresión anterior queda

$$-\frac{T_1 r}{L} - \frac{T_2 r}{L} = -\frac{mv^2}{r} (1)$$

En el eje z, paralelo a la barra, la fuerza neta debe ser cero porque la partícula no cambia en dirección del eje z, por ende, su fuerza neta es

$$0 = T_1 sin(\beta) - T_2 sin(\beta) - mg$$

Y al despejar T_2 queda

$$T_2 = T_1 - \frac{2Lmg}{d}$$

Si reemplazamos T_2 en (1) y lo desarrollamos queda

$$\frac{T_1 r}{L} + \frac{r}{L}\left(T_1 - \frac{2Lmg}{d}\right) = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{2T_1 r}{L} = \frac{mv^2}{r} + \frac{2mgr}{d}$$

$$T_1 = \frac{mv^2 L}{2r^2} + \frac{mgL}{d}$$

Al reemplazar $r = \sqrt{L^2 - \frac{d^2}{4}}$ en la expresión anterior queda

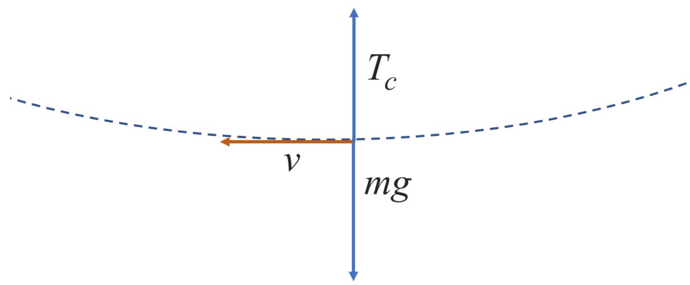
$$T_1 = \frac{2mv^2 L}{4L^2 - d^2} + \frac{mgL}{d}$$

Y como se dedujo anteriormente $T_2 = T_1 - \frac{2Lmg}{d}$, entonces

$$T_2 = \frac{2mv^2 L}{4L^2 - d^2} + \frac{mgL}{d} - \frac{2Lmg}{d} = \frac{2mv^2 L}{4L^2 - d^2} - \frac{mgL}{d}$$

Problema 52.
Un niño se balancea en una soga sin masa siguiendo una trayectoria similar a la de un péndulo. La cuerda mide mide L metros y el niño de masa m. Determine la velocidad en el punto más bajo del columpio si la tensión de la cuerda en ese momento es T_c.
Solución:

Este movimiento se puede analizar como un movimiento circular de radio constante L. Sobre el niño solo hay dos fuerzas actuando, su peso y la tensión de la cuerda.



La fuerza neta en el eje $\hat{\rho}$ del movimiento es

$$ma = m(-\rho\dot{\theta}^2) = mg - T_c$$

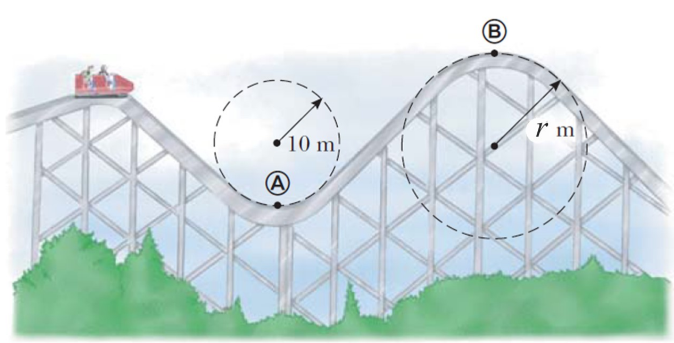
Pero $v = \dot{\theta}\rho$, entonces

$$\frac{v^2}{\rho} = T_c - mg$$

Como ρ es el radio, y el radio del movimiento es L, queda

$$\frac{v^2}{L} = T_c - mg$$
$$v = \sqrt{T_c L - mgL}$$

Problema 53.
En la figura, un carro de montaña rusa de masa m pasa por el punto B, el cual describe un tramo circular de radio r metros. Determine la velocidad máxima con la que puede pasar el carro por B sin separarse del riel de la montaña rusa.



Solución:
Las fuerzas que actuan en todo momento sobre el carro son su peso y la normal, por ende, la fuerza neta del eje $\hat{\rho}$ (radial) del carro en el punto B es

$$ma = m(-\rho\dot{\theta}^2) = N - mg$$

Pero $\dot{\theta} = \frac{v}{\rho}$ y como el radio del círculo es r,

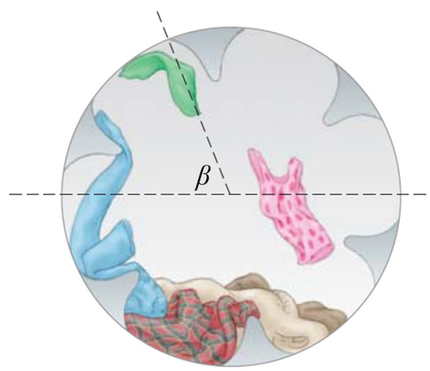
$$\frac{mv^2}{r} = mg - N$$

La velocidad máxima con la que puede pasar el carro por el punto B de la montaña rusa sin soltarse del riel sucede cuando la normal es cero. De esta manera, el carro apenas roza el riel pero no se despega de él.

$$\frac{mv^2}{r} = mg - N$$

$$v = \sqrt{gr}$$

Problema 54.
Una secadora de ropa gira sin roce en un plano vertical. La secadora está diseñada para que la ropa se suelte de sus paredes cuando la ropa hace un ángulo β con la horizontal. Si el radio de la secadora es R metros, determine la frecuencia de giro de la secadora.



Solución:
Para calcular la frecuencia de giro se puede utilizar la relación entre las dos defninciones de la velocidad angular:

$$\dot{\theta} = 2\pi f \text{ y } \dot{\theta} = \frac{v}{r}$$

$$2\pi f = \frac{v}{r}$$

$$f = \frac{v}{2r\pi}$$

donde f es la frecuencia, v es la velocidad tangencial y r es el radio. La única variable que falta de la ecuación es la velocidad y para ello se calculará la fuerza neta sobre la ropa en ese punto.
Sobre la ropa, en todo momento, estan actuando 2 fuerzas principales: el peso y la normal. Para que la ropa se desprenda de las paredes de la secadora, la normal debe ser cero. La fuerza neta en el eje polar radial $\hat{\rho}$ es

$$ma = -N - mgsin(\beta)$$

Al sustituir la aceleración por $-R\dot{\theta}^2$, ya que $a_{\hat{\rho}} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ pero $\ddot{\rho} = 0$ y $\rho = R$, $\dot{\theta}$ por $\frac{v}{R}$ y la normal igualada a cero queda

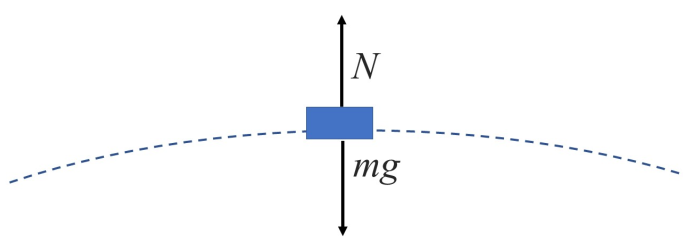
$$mgsin(\beta) = \frac{mv^2}{R}$$

$$v = \sqrt{rgsin(\beta)}$$

Al reemplzar esto en la ecuación de frecuencia

$$f = \frac{v}{2r\pi} = \frac{\sqrt{Rgsin(\beta)}}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gsin(\beta)}{R}}$$

Problema 55.
Con el fin de que los conductores disminuyan la velocidad cuando pasan frente a su casa diseña los lomos de toro. De esta manera, existirá una velocidad máxima con la cual los automóviles podrán pasar por el lomo sin que sus neumáticos pierdan contacto con el camino. Si el lomo de toro es una fracción de una curva de radio circular R, determine la velocidad máxima con la cual podrán pasar los automóviles en su punto más alto sin desprenderse del suelo y analice cualitativamente su respuesta.
Solución:



Cuando el automovil está en el punto máximo del lomo, la fuerza neta en el eje ρ es

$$ma = m(-\rho\dot{\theta}^2) = N - mg$$

donde m es la masa de cualquier automóvil. Para que el auto apenas no se deprenda del lomo su fuerza normal debe ser la mínima, es decir, cero. De esta manera, la fuerza neta queda de la siguiente manera:

$$-m\rho\dot{\theta}^2 = -mg$$

$$\rho\dot{\theta}^2 = g$$

Para obtener la velocidad tangencial, podemos utilizar la relación entre la velocidad angular y la velocidad tangencial $\dot{\theta}\rho = v$. Al reemplazar $\dot{\theta} = \frac{v}{\rho}$ y ρ en este caso es R. Al reemplazar estas dos variables queda

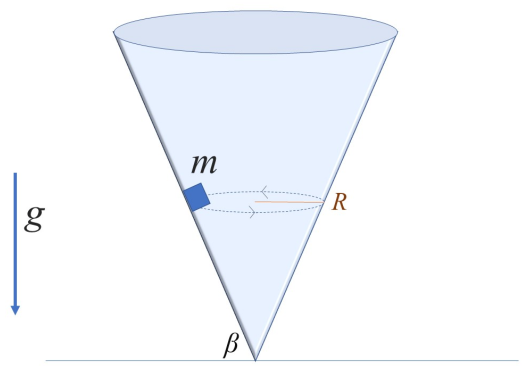
$$\rho\dot{\theta}^2 = g = R\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

Al despejar la velocidad queda

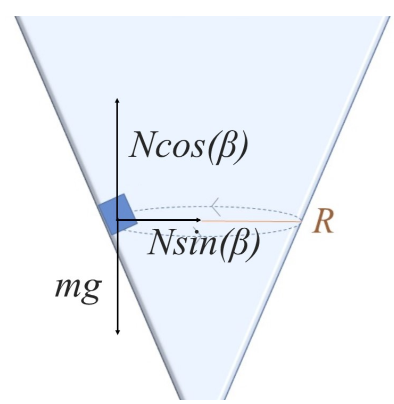
$$v = \sqrt{gR}$$

Podemos notar que este resultado no depende de la masa del automovil así que la velocidad máxima será la misma para todo automóvil. Además, la velocidad máxima depende únicamente del radio de la curva, por ende, si se desea disminuir más la velocidad de un automóvil que se acerca al lomo, y que no quiere que su auto se eleve del suelo, debe construir un lomo más pequeño con un radio menor.

Problema 56.
En la figura, un cubo de masa m da vueltas dentro de un cono sin roce, manteniendo siempre el mismo radio R de giro. El cono hace un ángulo *beta* con la horizontal. Determine la rapidez constante y el periodo de giro del cubo.



Solución:
Para resolver el problema se utilizarán coordenadas cilíndricas ya que facilita el trabajo. Las fuerzas que siempre están actuando sobre el cubo son la normal y su peso. Al descomponer las fuerzas en los ejes deseados queda lo siguiente:



Como el cubo no sube ni baja en el cono, la fuerza neta en el eje vertical z debe ser cero. En el eje $\hat{\rho}$ hay fuerza neta y esta es $ma_{\hat{\rho}}$ donde $a_{\hat{\rho}}$ es $\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$, pero como el radio ρ no cambia en el movimiento, la aceleración solo es $-\rho\dot{\theta}^2$. De esta manera, las fuerzas netas en ambos ejes son

$$F_z = 0 = Ncos(\beta) - mg$$

$$F_{\hat{\rho}} = ma = -m\rho\dot{\theta}^2 = -Nsin(\beta)$$

Pero $v = \rho\dot{\theta}$ asi que quedaría

$$F_z = 0 = Ncos(\beta) - mg$$

$$F_{\hat{\rho}} = ma = -\frac{mv^2}{\rho} = -Nsin(\beta)$$

Al despejar la normal $N = \dfrac{mg}{cos(\beta)}$ de la primera ecuación y aplicarla al la segunda quedaría

$$\frac{mv^2}{\rho} = \frac{mgsin(\beta)}{cos(\beta)} = mgtan(\beta)$$

Y al despejar v de la ecuación y reemplazar el dato ρ por el radio R queda

$$v = \sqrt{Rgtan(\beta)}$$

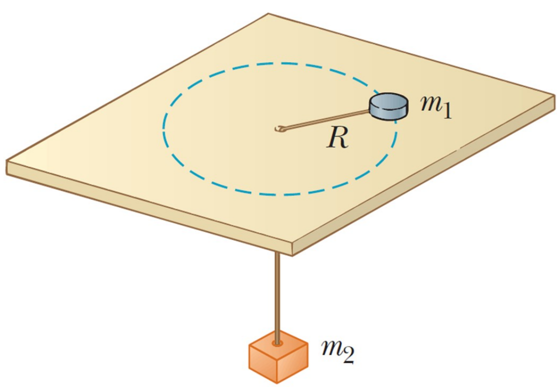
Para determinar el periodo utilizamos las dos definiciones de velocidad angular $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$$

donde T es el periodo. Al despejar T y luego aplicar la velocidad determinada anteriormente queda

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{gtan(\beta)}}$$

Problema 57.
En la figura, un disco de masa m_1 está unido a una cuerda y realiza un movimiento circular uniforme manteniendo un radio de R metros sobre una superficie horizontal sin roce. La cuerda pasa por un agujero pequeño en medio de la superficie y en su otro extremo está unida a un bloque de masa m_2 que está en reposo colgando verticalmente. Determine la tensión de la cuerda y la velocidad del disco.



Solución:
La fuerza neta sobre el bloque en el eje vertical es

$$T - m_2g = 0$$

Entonces $T = m_2g$. La fuerza neta en el eje $\hat{\rho}$ del disco es

$$m_1 a = -m_1 R\dot{\theta}^2 = -T$$

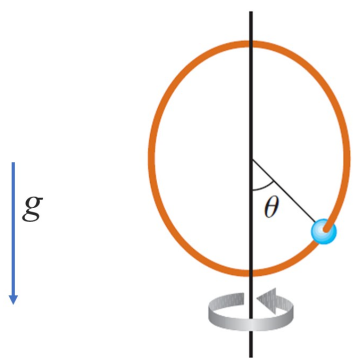
Pero $\dot{\theta} = \dfrac{v}{R}$, entonces

$$\frac{m_1 v^2}{R} = T = m_2 g$$

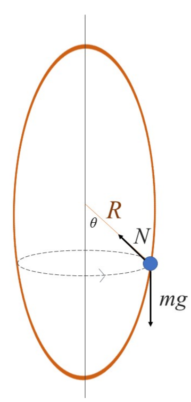
De esta manera, al despejar la velocidad queda

$$v = \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}}$$

Problema 58.
En la figura, una cuenca de masa m se desliza sin roce por un alambre circular que siempre está en un plano vertical. La cuenca está unida al centro del alambre mediante una cuerda ideal de largo R. El circulo gira de manera continua con un periodo constante T alrededor de un eje vertical. Determine a qué ángulo la cuenca gira en un solo plano horizontal, es decir, no se desliza por el alambre y determine si hay más de un ángulo para un determinado largo de la cuerda y periodo del círculo.



Solución:
Las fuerzas actuando sobre la cuenca son la normal (entre el alambre y la cuerda) y el peso de la cuenca.



El ejercico se puede resolver con coordenadas cilíndricas. Para que la cuenca no se deslice por el alambre, la fuerza neta en el eje z debe ser cero.

$$Ncos(\theta) - mg = 0$$

donde entonces

$$N = \frac{mg}{cos(\theta)}$$

Por otra parte, en el eje $\hat{\rho}$ se tiene que la fuerza neta es

$$ma = -Nsin(\theta)$$

pero la aceleración en $\hat{\rho}$ es $\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ pero ρ no cambia para que la cuenca gire en un solo plano horizontal asi que $\ddot{\rho} = 0$. En el movimiento circular, la cuenca daría vueltas alrededor de un circulo de radio $\rho = Rsin(\theta)$. Además, $\dot{\theta} = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{Rsin(\theta)}$. Al reemplazar ρ y $\dot{\theta}$ queda

$$ma = -\frac{mv^2}{\rho} = -\frac{mv^2}{Rsin(\theta)} = -Nsin(\theta)$$

De esta manera, al reemplazar N en la última expresión queda

$$\frac{v^2}{Rsin(\theta)} = \frac{gsin(\theta)}{cos(\theta)} (1)$$

Pero sabemos que $v = \rho\dot{\theta}$ y que $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ donde T es el periodo. La velocidad entonces es

$$v = \frac{2\pi Rsin(\theta)}{T}$$

Al reemplzar esto último en (1) queda

$$\frac{4\pi^2 Rsin(\theta)}{T^2} = \frac{gsin(\theta)}{cos(\theta)}$$

La igualdad se cumple si $sin(\theta) = 0$ asi que en cualquier caso y con cualquier largo de cuerda y periodo, si θ es igual a 0 o a π, la cuenca gira en un solo plano horizontal.
Al despejar $cos(\theta)$ queda

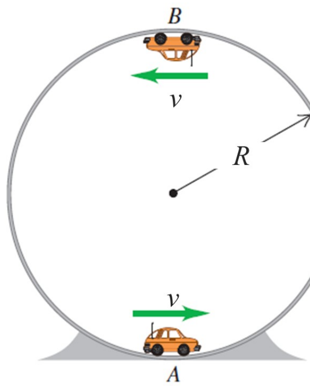
$$cos(\theta) = \frac{gT^2}{4\pi^2 R} \leq 1$$

Entonces habrá otra solución

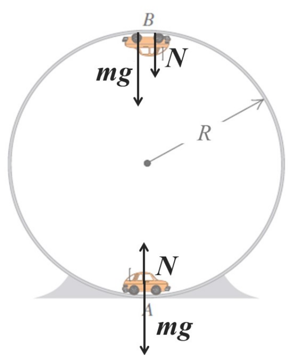
$$\theta = \arccos\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 R}\right)$$

solo si $gT^2 \leq 4\pi R$ ya que $cos(\theta) \leq 1$

Problema 59.
El carro de masa m de la figura se mueve con rapidez constante v por dentro de un cilindro hueco de radio R. Determine el valor de la normal ejercida por el cilindro sobre el carro cuando el carro está en el punto A y cuando está en el punto B.



Solución:
La fuerzas que actuan sobre el carro en los puntos A y B se ven en la siguiente figura.



Note que en estos puntos la normal y el peso son radiales, por ende, se puede analizar el eje $\hat{\rho}$ para determinar las normales. El eje $\hat{\rho}$ es radial y sale del centro del círculo, por ende, la fuerza neta en el punto A y B es respectivamente

$$ma = mg - N_A$$

$$ma = -N_B - mg$$

Pero la aceleración en $\hat{\rho}$ es $\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ pero como el radio del movimiento es constante, $\ddot{\rho} = 0$ y $a = -\rho\dot{\theta}^2 = -R\dot{\theta}^2$. Además $v = \rho\dot{\theta} = R\dot{\theta}$ y al aplicar esto a la aceleración queda que $a = \dfrac{-v^2}{R}$.
La fuerza neta al aplicar esto es

$$\frac{-v^2m}{R} = mg - N_A$$

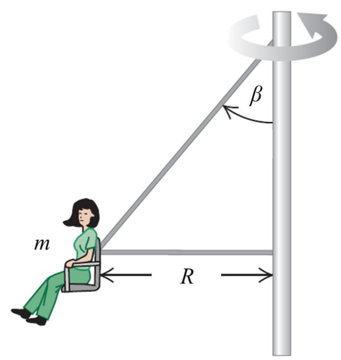
$$\frac{-v^2m}{R} = -N_B - mg$$

Y, de esta manera,

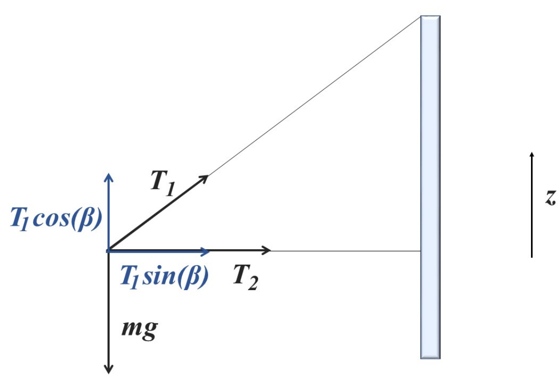
$$N_A = mg + \frac{mv^2}{R}$$

$$N_B = \frac{mv^2}{R} - mg$$

Problema 60.
El juego de las sillas voladoras consiste en un palo vertical que sostiene a una silla mediante dos cuerdas ideales. Si el ángulo entre la cuerda superior y el palo siempre es β, la distancia entre la silla y el palo es R, la persona y la silla en conjunto masan m y se demora T segundos en completar una vuelta, determine las tensiones de las cuerdas.



Solución:
Las fuerzas actuando sobre la persona y la silla son la tensión de la cuerda unida en el extremo superior de palo T_1, la tensión de la cuerda horizontal T_2 y el peso mg.



En el eje $\hat{z}$ la fuerza neta debe ser cero asi que

$$0 = T_1 cos(\beta) - mg$$

$$T_1 = \frac{mg}{cos(\beta)}$$

En el eje $\hat{\rho}$ se tiene que la aceleración es $a = -R\dot{\theta}^2 = -\dfrac{v^2}{R}$ ya que $v = \dot{\theta}R$. De esta manera, la fuerza neta en este eje es

$$ma = -\frac{mv^2}{R} = -T_1 sin(\beta) - T_2$$

$$T_2 = \frac{mv^2}{R} - T_1 sin(\beta)$$

Pero $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$ asi que $v = \frac{2\pi R}{T}$ y T_2 queda como

$$T_2 = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} - mgtan(\beta)$$

Referencias

Los ejercicios e imágenes se obtuvieron de las siguientes fuentes:

1. YOUNG & FREEDMAN, *Física Universitaria - Volumen 1*, Duodécima edición, Editorial Pearson Education
2. SERWAY & JEWETT, *Física para ciencia e ingeniería - Volumen 1, Séptima edición, Editorial Cengage Learning*