

5 Ortskurven

5.1 Begriff der Ortskurve

Zeigerbild und Ortskurve

Durch ein Zeigerbild wird ein bestimmter Betriebszustand eines Wechselstromnetzes bei konstanten Parametern (Amplituden und Frequenz der einspeisenden sinusförmigen Quellspannungen und Quellströme, Netzparameter R , L , M und C) durch komplexe Effektivwerte von Strömen und Spannungen beschrieben.

Komplexe Widerstände und komplexe Leitwerte von Wechselstromschaltungen lassen sich ebenfalls durch Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene darstellen, wenn die Frequenz und die Netzparameter konstant sind.

Mit variablen Parametern ändern sich die Zeigerbilder mit komplexen Effektivwerten und entsprechend die Zeigerbilder für komplexe Widerstände und komplexe Leitwerte. Wird nur die Änderung einer bestimmten Größe des Wechselstromnetzes infolge der Änderung eines Parameters untersucht, dann entsteht für diese Größe eine Menge von Zeigern. Die Zeigerspitzen werden verbunden, die Kurve der Zeigerspitzen wird Ortskurve genannt.

Jede Ortskurve wird mit reellen Parametern p versehen. Im Ortskurvenpunkt für $p = 1$ endet der Zeiger, der dem Ausgangszustand der untersuchten Größe entspricht. Zu den Ortskurvenpunkten für $p \neq 1$ gehören die Zeiger, die den geänderten Anteil der untersuchten Größe bezogen auf den Ausgangszustand berücksichtigen.

Durch Ortskurven lassen sich also verschiedene Betriebszustände eines Wechselstromnetzes, d. h. bei geänderten Parametern, in einem Bild erfassen.

Beispiele:

1. Ortskurve des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung eines variablen ohmschen Widerstandes $R_r = p \cdot R_{r0}$ mit dem Parameter $0 \leq p < \infty$ und einer konstanten Induktivität L_r bei konstanter Kreisfrequenz ω :

Die Ortskurvengleichung lautet

$$\underline{Z} = j \omega L_r + p \cdot R_{r0}$$

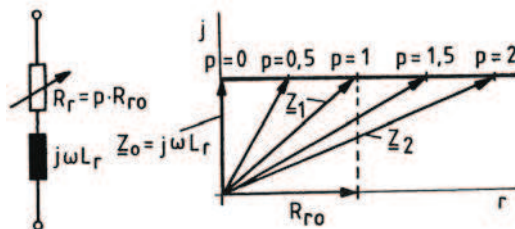


Bild 5.1

Ortskurve des komplexen Widerstandes der R/L-Reihenschaltung bei variablem ohmschen Widerstand

2. Ortskurve des bezogenen komplexen Widerstandes des Reihenschwingkreises mit

$$\frac{Z_r}{R_r} = 1 + j \cdot Q_r \cdot v_r$$

und des bezogenen komplexen Leitwerts des Parallelschwingkreises mit

$$\frac{Y_p}{G_p} = 1 + j \cdot Q_p \cdot v_p$$

bei veränderlicher Frequenz f .

Bei der Behandlung der Bandbreite bei 45°-Verstimmung wurden jeweils drei Ortskurvenpunkte berechnet (siehe Abschnitt 4.5, Bilder 4.94 und 4.105).

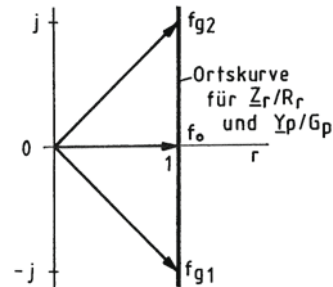


Bild 5.2 Ortskurve des bezogenen komplexen Widerstandes und des bezogenen Leitwerts eines Schwingkreises

Die zu untersuchende Größe, für die die Ortskurve entwickelt werden soll, kann der komplexe Effektivwert eines Stroms oder einer Spannung, ein komplexer Widerstand oder ein komplexer Leitwert, ein Spannungsverhältnis oder ein Stromverhältnis, ein Frequenzgang und ähnliches sein.

Allgemeine Ortskurvengleichung

Die allgemeine Form der Ortskurvengleichung lautet

$$\underline{Q} = \frac{\underline{A} + p \cdot \underline{B} + p^2 \cdot \underline{C} + p^3 \cdot \underline{D} + \dots}{\underline{A}' + p \cdot \underline{B}' + p^2 \cdot \underline{C}' + p^3 \cdot \underline{D}' + \dots}, \quad (5.1)$$

wobei p ein reeller Parameter und \underline{A} , \underline{A}' , \underline{B} , \underline{B}' , \underline{C} , \underline{C}' , \underline{D} , \underline{D}' , ... komplexe Größen sind.

(Anmerkung:

Die mit einem Strich versehenen komplexen Größen sollen selbstverständlich keine differenzierten Größen sein. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden bei den folgenden Ortskurvengleichungen keine Striche mehr verwendet).

Beispiel:

Für das angegebene Beispiel 1 ist

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \underline{Z} = j\omega L_r + p \cdot R_{r0} \\ \text{mit } \underline{A} &= j\omega L_r \quad \underline{B} = R_{r0} \quad \underline{C} = \underline{D} = \dots = 0 \\ \underline{A}' &= 1 \quad \text{und} \quad \underline{B}' = \underline{C}' = \underline{D}' = \dots = 0 \end{aligned}$$

Ermittlung der Ortskurve

Jeder Punkt der Ortskurve könnte für ein gewähltes p errechnet und in der Gaußschen Zahlenebene eingetragen werden. Die Punkte verbunden ergeben die Ortskurve. Bei Ortskurven höherer Ordnung bleibt auch nichts anderes übrig, als die Ortskurve auf diese Weise zu ermitteln, weil sie nicht konstruiert werden kann.

Sind die Ortskurven einfach wie Geraden, Kreise und Parabeln oder handelt es sich um überlagerte einfache Ortskurven, dann sollten die Ortskurven nach Konstruktionsanleitungen konstruiert werden. Beispielsweise wäre die punktweise Ermittlung eines Kreises als

Ortskurve zu aufwendig und ungenau. Einfacher und genauer lässt sich ein Kreis durch Bestimmung der Mittelpunktslage und des Radius zeichnen.

Bei der Überlagerung von einfachen Ortskurven werden zunächst die einfachen Ortskurven konstruiert und anschließend die Zeiger für gleiche Parameter p überlagert. Bei der Ermittlung einer Ortskurve sollte nach folgenden Schritten vorgegangen werden:

1. Ermittlung der Gleichung für die Größe, für die die Ortskurve ermittelt werden soll.
2. Einführung des Parameters p in den variablen Teil der Größe, wodurch sich die Ortskurvengleichung ergibt.
3. Konstruktion der Ortskurve, falls es sich um eine einfache Ortskurve oder um überlagerte einfache Ortskurven handelt.

Gerade: $\underline{G} = \underline{A} + p \cdot \underline{B}$

Kreis durch den Nullpunkt: $\underline{K} = \frac{1}{\underline{G}} = \frac{1}{\underline{A} + p \cdot \underline{B}}$

Kreis in allgemeiner Lage: $\underline{K} = \frac{\underline{A} + p \cdot \underline{B}}{\underline{C} + p \cdot \underline{D}} = \underline{L} + \frac{1}{\underline{E} + p \cdot \underline{F}}$

Parabel: $\underline{P} = \underline{A} + p \cdot \underline{B} + p^2 \cdot \underline{C}$

zirkuläre Kubik: $\underline{O} = \frac{\underline{A} + p \cdot \underline{B} + p^2 \cdot \underline{C}}{\underline{D} + p \cdot \underline{E}} = \underline{R} + p \cdot \underline{S} + \frac{1}{\underline{F} + p \cdot \underline{E}}$

(das ist die Überlagerung eines Kreises mit einer Geraden)

oder

Berechnung der einzelnen Ortskurvenpunkte bei Variation des reellen Parameters p . Hierbei genügen meist einige Ortskurvenpunkte für ganze p , um den Verlauf der Ortskurve zu erkennen. Zwischenwerte der Ortskurve für gebrochene p -Werte lassen sich nachträglich errechnen und in das Ortskurvenbild eintragen.

5.2 Ortskurve „Gerade“

Gleichung in allgemeiner Form und Darstellung

$$\underline{G} = \underline{A} + p \cdot \underline{B} \quad (5.2)$$

$$\text{mit } -\infty < p < \infty$$

speziell:

$$\underline{G} = \underline{A} + \left(p - \frac{1}{p}\right) \cdot \underline{B} \quad (5.3)$$

$$\text{mit } 0 < p < \infty$$

Die Ortskurve geht durch die Spitze des Zeigers \underline{A} mit $p = 0$ (speziell: $p = 1$) und verläuft parallel zum Zeiger \underline{B} .

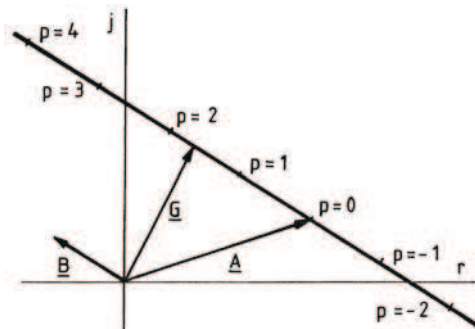


Bild 5.3 Ortskurve „Gerade“ $\underline{G} = \underline{A} + p \cdot \underline{B}$

Konstruktionsanleitung

Zuerst werden die Zeiger A und B gezeichnet, dann wird parallel zum Zeiger B eine Gerade gezeichnet und schließlich werden mit der Länge des Zeigers B die Parameter $p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ eingetragen.

Kann der Parameter p nur Null und positive Zahlen annehmen, dann besteht die Ortskurve aus einer entsprechenden Teilgeraden. Bevor die Ortskurve gezeichnet wird, sollte überprüft werden, ob der Parameter auch negativ werden kann.

Beispiel 1:

Ortskurve des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung zweier Spulen, bei der die eine Spule veränderlich ist:

$$R_{r1} = 500\Omega \quad R_{r2} = 200 \dots 2000\Omega$$

$$L_{r1} = 1\text{mH} \quad L_{r2} = 2 \dots 20\text{mH} \quad \text{bei } f = 50\text{kHz}$$

$$\underline{Z} = R_{r1} + j\omega L_{r1} + R_{r2} + j\omega L_{r2}$$

mit $R_{r2} = p \cdot R_{r0} \quad R_{r0} = 200\Omega$

$$L_{r2} = p \cdot L_{r0} \quad L_{r0} = 2\text{mH}$$

$$p = 1 \dots 10$$

$$\underline{Z} = R_{r1} + j\omega L_{r1} + p \cdot (R_{r0} + j\omega L_{r0})$$

wobei $\underline{A} = R_{r1} + j\omega L_{r1}$ und $\underline{B} = R_{r0} + j\omega L_{r0}$

$$\underline{Z} = 500\Omega + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\text{H} +$$

$$+ p \cdot (200\Omega + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\text{H})$$

$$\underline{Z} = (500 + j \cdot 314)\Omega + p \cdot (200 + j \cdot 628)\Omega$$

mit $p = 1, \dots, 10$

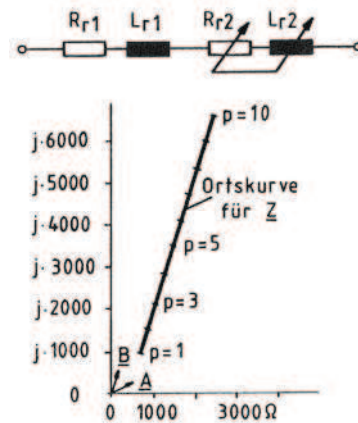


Bild 5.4 Schaltbild und Ortskurve der Reihenschaltung einer konstanten und einer veränderlichen Spule

Beispiel 2:

Ortskurve der Spannung über der Reihenschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer variablen Kapazität bei konstantem Strom:

$$\underline{U} = (R_r + j \cdot X_r) \cdot \underline{I} = \left(R_r - j \cdot \frac{1}{\omega C_r} \right) \cdot \underline{I}$$

Die Spannung nimmt mit größer werdender Kapazität ab bzw. mit größer werdendem Blindanteil des komplexen Widerstandes zu:

$$\underline{U} = R_r \cdot \underline{I} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot p \cdot C_{r0}} \cdot \underline{I}$$

mit $C_r = p \cdot C_{r0}$

Um auf die allgemeine Form der Geradengleichung zu kommen, muss ein Parameter p^* eingeführt werden, der reziprok zu p ist:

$$\underline{U} = R_r \cdot \underline{I} + p^* \cdot j \cdot X_{r0} \cdot \underline{I} = R_r \cdot \underline{I} + p^* \cdot \left(-\frac{j \cdot \underline{I}}{\omega \cdot C_{r0}} \right)$$

mit $p^* = \frac{1}{p}$ und $X_r = p^* \cdot X_{r0} = p^* \cdot \frac{-1}{\omega \cdot C_{r0}}$

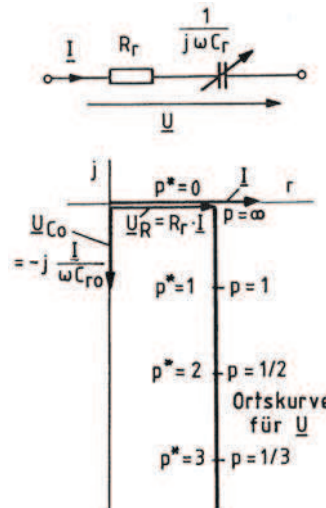


Bild 5.5 Ortskurve der Spannung am Kondensator bei variabler Kapazität

Die Ortskurve für die Spannung am Kondensator beginnt auf der reellen Achse bei der ohmschen Spannung $\underline{U}_R = R_r \cdot \underline{I}$ und verläuft parallel zur negativen imaginären Achse. Als Parameter können sowohl p als auch p^* verwendet werden, die nur positive Zahlen annehmen, weil negative Kapazitäten ausgeschlossen sind.

Die Ortskurve für die Spannung an der Reihenschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer variablen Induktivität beginnt auf der reellen Achse bei \underline{U}_R und verläuft parallel zur positiven imaginären Achse.

Entsprechendes gilt für die Ströme durch die Blindwiderstände von Parallelschaltungen von R_p und variablen L_p bzw. C_p , wenn die anliegende Spannung konstant ist.

Beispiel 3: Ortskurven

des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung eines variablen ohmschen Widerstandes, einer konstanten Induktivität, einer konstanten Kapazität bei konstanter Frequenz und des komplexen Leitwerts der Parallelschaltung eines variablen ohmschen Widerstandes, einer konstanten Induktivität, einer konstanten Kapazität bei konstanter Frequenz:

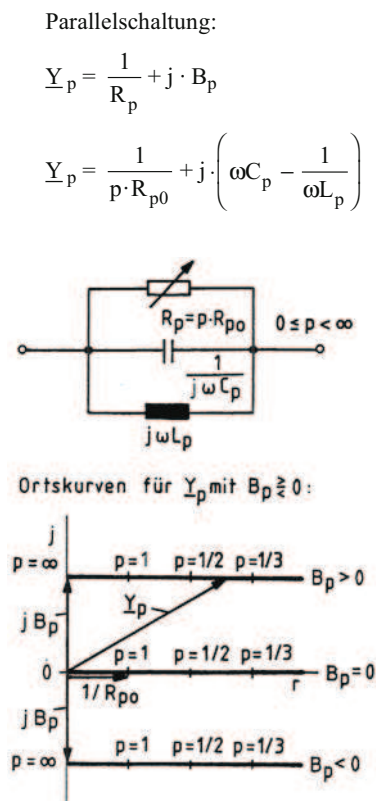
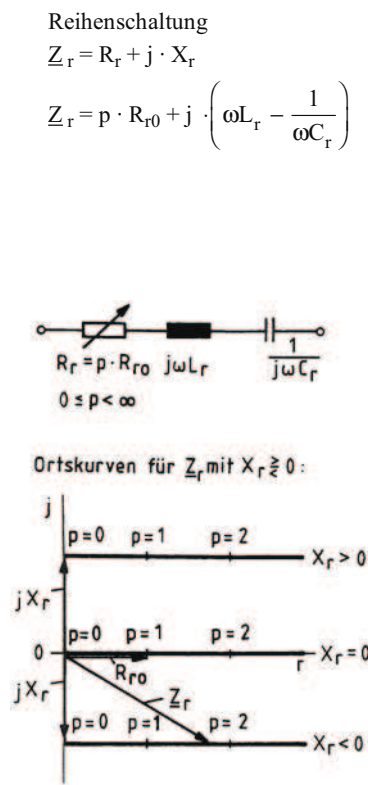


Bild 5.6 Ortskurven von Schwingkreisen mit variablem ohmschen Widerstand

Beispiel 4:

Ortskurven des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung und des komplexen Leitwerts der Parallelschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer variablen Induktivität oder einer variablen Kapazität bei konstanter Frequenz:

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_r = R_r + j \cdot X_r = R_r + p \cdot j \cdot X_{r0}$$

mit $X_r = p \cdot X_{r0}$ und $0 \leq p < \infty$

Parallelschaltung:

$$\underline{Y}_p = G_p + j \cdot B_p = G_p + p \cdot j \cdot B_{p0}$$

mit $B_p = p \cdot B_{p0}$ und $0 \leq p < \infty$

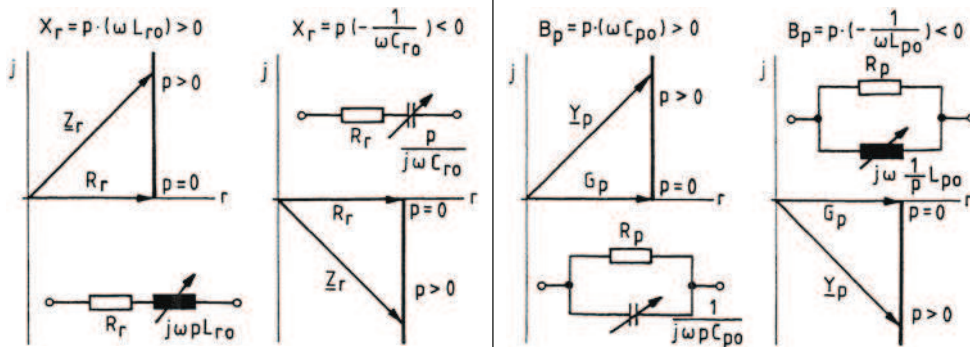


Bild 5.7 Ortskurven des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung und des komplexen Leitwerts der Parallelschaltung von ohmschen Widerständen und veränderlichen Blindwiderständen

Beispiel 5:

Ortskurven des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung und des komplexen Leitwerts der Parallelschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer konstanten Induktivität oder Kapazität bei variabler Frequenz $\omega = p \cdot \omega_0$ mit $0 \leq p < \infty$:

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_r = R_r + j \cdot X_r$$

$$\underline{Z}_r = R_r + j \omega L_r \quad \underline{Z}_r = R_r - j \cdot \frac{1}{\omega C_r}$$

$$\underline{Z}_r = R_r + j p \omega_0 L_r \quad \underline{Z}_r = R_r - j \cdot \frac{1}{p \omega_0 C_r}$$

Parallelschaltung:

$$\underline{Y}_p = G_p + j \cdot B_p$$

$$\underline{Y}_p = G_p + j \omega C_p \quad \underline{Y}_p = G_p - j \cdot \frac{1}{\omega L_p}$$

$$\underline{Y}_p = G_p + j p \omega_0 C_p \quad \underline{Y}_p = G_p - j \cdot \frac{1}{p \omega_0 L_p}$$

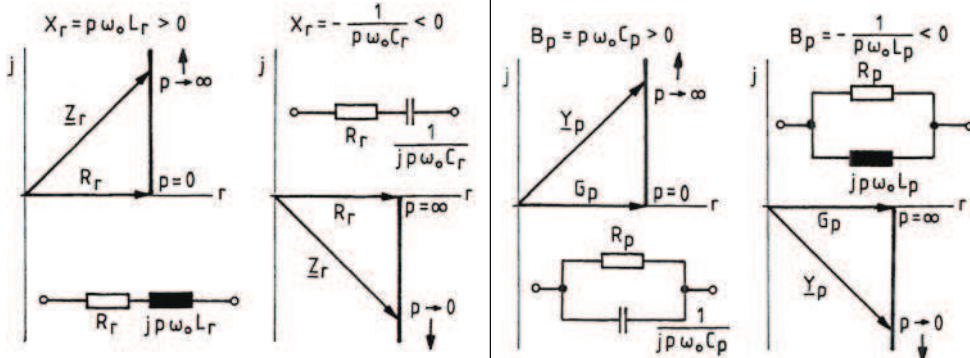


Bild 5.8 Ortskurven des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung und des komplexen Leitwerts der Parallelschaltung von ohmschen Widerständen und konstanten Induktivitäten oder Kapazitäten bei veränderlicher Frequenz

Beispiel 6:

Ortskurven des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung und des komplexen Leitwerts der Parallelschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes, einer konstanten Induktivität und einer konstanten Kapazität bei variabler Frequenz $\omega = p \cdot \omega_0$ mit $0 < p < \infty$:

Die Kreisfrequenz ω muss auf die Resonanzkreisfrequenz ω_0 des Reihen- bzw. Parallelschwingkreises bezogen werden, damit der variable Imaginärteil Null werden kann.

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_r = R_r + j \cdot X_r$$

$$\underline{Z}_r = R_r + j \cdot \left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r} \right)$$

$$\underline{Z}_r = R_r + j \cdot \left(p \omega_0 L_r - \frac{1}{p \omega_0 C_r} \right)$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r C_r}}$$

$$\underline{Z}_r = R_r + j \cdot X_{kr} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

mit dem Kennwiderstand

$$X_{kr} = \omega_0 L_r = \frac{1}{\omega_0 C_r} = \sqrt{\frac{L_r}{C_r}}$$

(vgl. Abschnitt 4.5.1, Gl. 4.115)

Parallelschaltung:

$$\underline{Y}_p = G_p + j \cdot B_p$$

$$\underline{Y}_p = G_p + j \cdot \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right)$$

$$\underline{Y}_p = G_p + j \cdot \left(p \omega_0 C_p - \frac{1}{p \omega_0 L_p} \right)$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_p L_p}}$$

$$\underline{Y}_p = G_p + j \cdot B_{kp} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

mit dem Kennleitwert:

$$B_{kp} = \omega_0 C_p = \frac{1}{\omega_0 L_p} = \sqrt{\frac{C_p}{L_p}}$$

(vgl. Abschnitt 4.5.2, Gl. 4.139)

Der Parameter p entspricht also dem Parameter x in den Gleichungen 4.116 und 4.140:

$$X_r = X_{kr} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right) = X_{kr} \cdot v_r$$

$$B_p = B_{kp} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right) = B_{kp} \cdot v_p$$

Bei Resonanzkreisfrequenz ω_0 ist der komplexe Widerstand \underline{Z}_r gleich dem ohmschen Widerstand R_r und der komplexe Leitwert \underline{Y}_p gleich dem ohmschen Leitwert G_p . Bei höheren Frequenzen ω als ω_0 sind die Imaginärteile positiv, bei niedrigeren Frequenzen ω als ω_0 sind die Imaginärteile negativ:

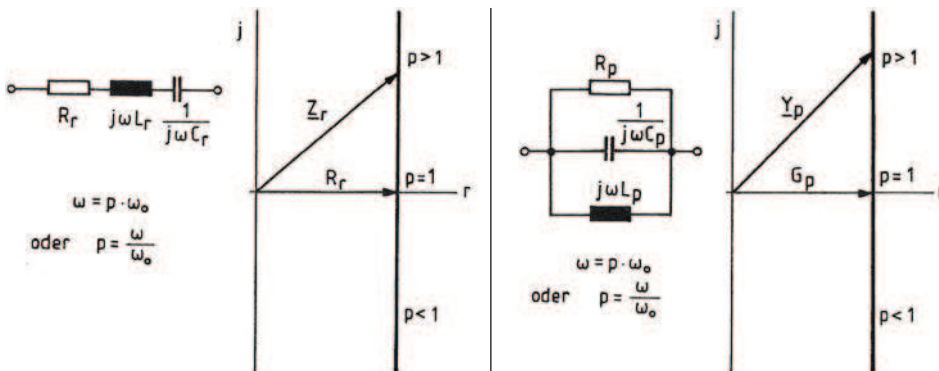


Bild 5.9 Ortskurven des komplexen Widerstandes des Reihenschwingkreises und des komplexen Leitwerts des Parallelschwingkreises bei veränderlicher Frequenz

5.3 Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“

Gerade und Kreis durch den Nullpunkt

Die Ortskurve des veränderlichen komplexen Widerstandes \underline{Z}_r einer Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen und des veränderlichen komplexen Leitwertes \underline{Y}_p einer Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen sind Geraden mit der Ortskurvengleichung

$$\underline{G} = \underline{A} + p \cdot \underline{B} \quad \text{bzw.} \quad \underline{G} = \underline{A} + \left(p - \frac{1}{p} \right) \cdot \underline{B}.$$

Der veränderliche komplexe Leitwert \underline{Y}_r der Reihenschaltung und der veränderliche komplexe Widerstand \underline{Z}_p der Parallelschaltung bedeutet mit

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p}$$

eine Inversion der Geraden, der so genannten *Nennergeraden* (\underline{G} steht im Nenner):

$$\underline{K} = \frac{1}{\underline{G}} = \frac{1}{\underline{A} + p \cdot \underline{B}} \quad \text{mit} \quad -\infty < p < \infty \quad (5.4)$$

und speziell

$$\underline{K} = \frac{1}{\underline{G}} = \frac{1}{\underline{A} + \left(p - \frac{1}{p} \right) \cdot \underline{B}} \quad \text{mit} \quad 0 < p < \infty. \quad (5.5)$$

Die Ortskurve, die durch die Kehrwertbildung (Inversion) der Geradenzeiger entsteht, ist ein Kreis durch den Nullpunkt, wie im folgenden nachgewiesen werden soll.

Nachweis für die Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“

Die Ortskurvengleichung

$$\underline{K} = \frac{1}{\underline{A} + p \cdot \underline{B}}$$

besteht aus den Zeigern $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$, $\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$ und $\underline{K} = K \cdot e^{j\kappa}$.

\underline{K} ist der Kreiszeiger, der im Koordinatenursprung beginnt und mit dem variablen Parameter p in den entsprechenden Kreispunkten endet.

Werden Zähler und Nenner durch \underline{A} dividiert, dann ergibt sich

$$\underline{K} = \frac{\frac{1}{\underline{A}}}{1 + p \cdot \frac{\underline{B}}{\underline{A}}} = \frac{\underline{K}_0}{1 + p \cdot \underline{C}}$$

$$\text{mit} \quad \underline{C} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{B}{A} \cdot e^{j(\beta-\alpha)} = C \cdot e^{j\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \beta - \alpha$$

$$\text{und} \quad \underline{K}_0 = \frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{A \cdot e^{j\alpha}} = \frac{1}{A} \cdot e^{-j\alpha} = K_0 \cdot e^{j(-\alpha)}.$$

\underline{K}_0 ist der Kreiszeiger für $p = 0$, wie aus der Kreisgleichung zu ersehen ist. Er liegt auf dem Strahl vom Koordinatenursprung mit dem Winkel $-\alpha$ und hat den Betrag $1/A$. Wird der Nenner $1 + p\underline{C}$ auf die linke Seite gebracht, dann ergibt sich eine Gleichung von drei Zeigern:

$$\underline{K} + p\underline{C} \cdot \underline{K} = \underline{K}_0$$

oder

$$\underline{K} + \underline{D} = \underline{K}_0$$

$$\text{mit} \quad \underline{D} = p \cdot \underline{C} \cdot \underline{K} = D \cdot e^{j\delta} = D \cdot e^{j(\delta+2\pi)}$$

$$\text{und} \quad p\underline{C} = \frac{D}{\underline{K}} = \frac{D}{K} \cdot e^{j(\delta-\kappa)}$$

$$p\underline{C} = pC \cdot e^{j\gamma} = pC \cdot e^{j(\beta-\alpha)}$$

$$\text{wobei} \quad \gamma = \delta - \kappa$$

$$\text{bzw.} \quad \kappa + \gamma = \delta = \delta + 2\pi$$

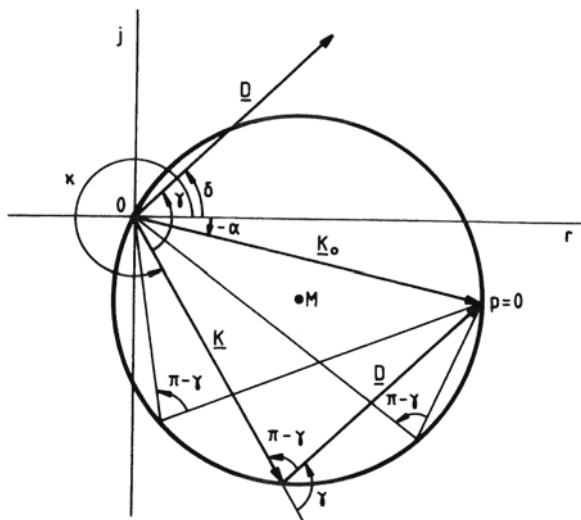


Bild 5.10

Kreis durch den Nullpunkt:
Ortskurvengleichung und Darstellung

Die drei Zeiger \underline{K} , \underline{D} und \underline{K}_0 bilden ein geschlossenes Dreieck. Wird der Parameter p variiert, dann ändern sich die beiden Zeiger \underline{K} und \underline{D} , der Zeiger \underline{K}_0 bleibt unverändert.

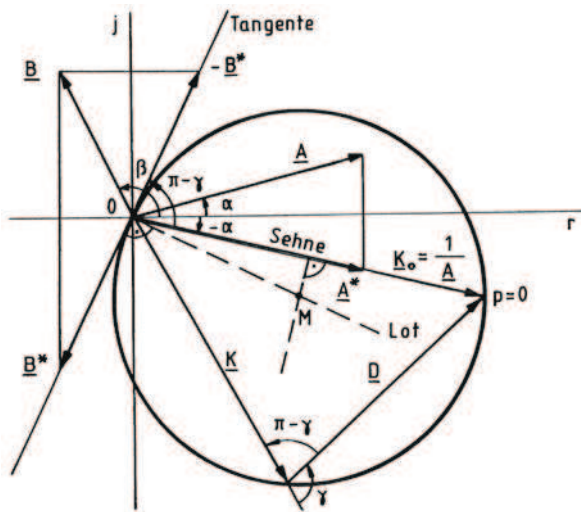
Der Winkel γ , der zwischen den Zeigern \underline{D} und \underline{K} liegt, bleibt bei Variation des Parameters p ebenfalls unverändert, weil er durch β und α feststeht.

Sind von einem Dreieck eine Seite $K_0 = 1/A$ und der gegenüberliegende Winkel $\pi - \gamma$ bei Variation der beiden übrigen Seiten K und D konstant, dann liegt das Dreieck in einem Kreis, denn über einer Sehne K_0 eines Kreises bleibt der gegenüberliegende Peripheriewinkel $\pi - \gamma$ konstant.

Herleitung der Konstruktionsvorschrift

Ein Kreis, der durch den Koordinatenursprung verläuft, ist allein durch die Lage des Mittelpunktes M bestimmt, denn der Radius ist dann durch die Strecke MO festgelegt. Aus den gegebenen Zeigern \underline{A} und \underline{B} der Ortskurvengleichung muss also die Lage des Kreismittpunktes eindeutig ermittelt werden können:

Der Mittelpunkt M ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf dem Kreiszeiger $\underline{K}_0 = 1/\underline{A}$ und des Lotes auf der Kreistangente im Koordinatenursprung, die mit der Richtung des konjugiert komplexen Zeigers \underline{B}^* und des negativen konjugiert komplexen Zeigers $-\underline{B}^*$ übereinstimmt.

**Bild 5.11**

Herleitung der Konstruktionsvorschrift der Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“

Aus dem Zeiger \underline{A} lässt sich der konjugiert komplexe Zeiger \underline{A}^* durch Spiegelung an der reellen Achse ermitteln. Damit liegt die Gerade fest, auf der der Kreiszeiger \underline{K}_0 liegt, denn die Zeiger \underline{A}^* und $\underline{K}_0 = 1/\underline{A}$ haben die gleiche Richtung. Auf dieser Geraden wird im Abstand $0,5/A = 1/(2A)$ die Senkrechte, die Mittelsenkrechte auf \underline{K}_0 , gezeichnet.

Aus dem Zeiger \underline{B} kann ebenfalls durch Spiegelung an der reellen Achse der konjugiert komplexe Zeiger \underline{B}^* bestimmt werden. Dieser liegt auf der Tangente, auf der im Koordinatenursprung die Senkrechte zu bilden ist.

Dass die Zeiger \underline{B}^* bzw. $-\underline{B}^*$ auf der Kreistangente im Koordinatenursprung liegen, muss noch nachgewiesen werden:

Bei einem Kreis ist der Peripheriewinkel $\pi - \gamma$ gleich dem Sehnen-Tangenten-Winkel, der zwischen der Sehne \underline{K}_0 und der Tangente liegt. Zwischen der Tangente und der reellen Achse tritt damit der Winkel $(\pi - \gamma) - \alpha$ auf, der gleich dem Argument des negativen konjugiert komplexen Zeigers $-\underline{B}^*$ ist:

$$(\pi - \gamma) - \alpha = \pi - (\gamma + \alpha)$$

$$\text{mit } \gamma = \beta - \alpha \quad \text{bzw.} \quad \beta = \gamma + \alpha$$

$$(\pi - \gamma) - \alpha = \pi - \beta$$

$$-\underline{B}^* = -B \cdot e^{-j\beta} = B \cdot e^{j(\pi - \beta)} \quad \text{mit} \quad e^{j\pi} = -1.$$

Die konjugiert komplexen Zeiger \underline{A}^* und \underline{B}^* , die das Zeichnen des Kreises ermöglichen, bilden die gespiegelte Nennergerade

$$\underline{G}^* = \underline{A}^* + p \cdot \underline{B}^* \quad (5.6)$$

Diese verläuft parallel zum Zeiger \underline{B}^* , so dass auch auf der gespiegelten Nennergeraden die Senkrechte gezeichnet werden kann, um den Mittelpunkt zu erhalten.

Die gespiegelte Nennergerade muss gezeichnet werden, weil mit ihrer Hilfe die Parameter p auf dem Kreis gefunden und eingetragen werden können. Für einen bestimmten Parameter p haben der Zeiger an den Kreis \underline{K} und der Zeiger an die gespiegelte Nennergerade \underline{G}^* die gleiche Richtung, wie folgende Gleichung zeigt:

$$\underline{K} = K \cdot e^{j\kappa} = \frac{1}{\underline{G}} = \frac{1}{G \cdot e^{-j\kappa}} = \frac{G}{G^2} \cdot e^{j\kappa} = \frac{1}{G^2} \cdot \underline{G}^* \quad (5.7)$$

Die beiden Zeiger \underline{K} und \underline{G}^* für einen gleichen Parameter p unterscheiden sich nur durch ihren Betrag, also durch ihre Länge. Punkte des Kreises \underline{K} und der konjugiert komplexen Nennergeraden \underline{G}^* mit gleichen p -Werten liegen deshalb jeweils auf einer Geraden, die durch den Koordinatenursprung geht. Die p -Werte auf dem Kreis werden also mit Hilfe eines Lineals ermittelt, das an den Koordinatenursprung 0 und an die Punkte der Geraden \underline{G}^* angelegt wird. Die Parameterwerte der Geraden \underline{G}^* werden dann jeweils auf den Kreis übertragen.

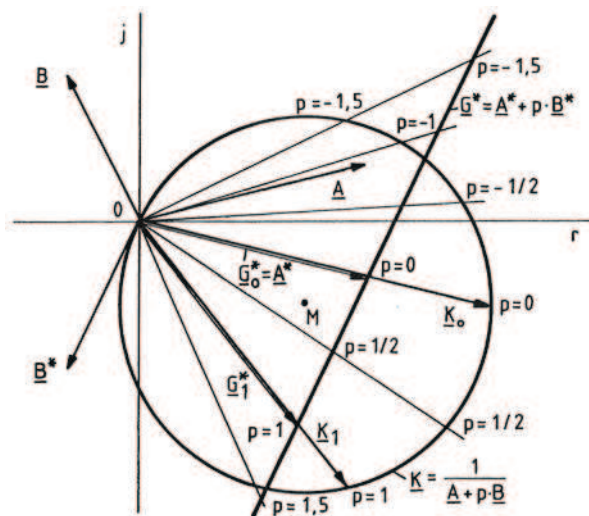


Bild 5.12

Ermittlung der Parameterwerte auf der Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“ mit Hilfe der konjugiert komplexen Nennergeraden

Die Geraden durch den Koordinatenursprung zur Bestimmung der p -Werte des Kreises sind im Bild 5.12 nur zum besseren Verständnis der Zusammenhänge eingetragen. Sie werden selbstverständlich bei den Ortskurvenkonstruktionen weggelassen, damit das Ortskurvenbild übersichtlich bleibt. Die auf den Kreis zu übertragenden p -Werte werden auf dem Kreis nur markiert.

Konstruktionsanleitung für die Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“

Bei der Konstruktion der Ortskurve eines Kreises, der durch den Koordinatenursprung verläuft, sollte nach Erkennen der Ortskurvengleichung

$$\underline{K} = \frac{1}{\underline{A} + p \cdot \underline{B}} = \frac{1}{\underline{G}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{K} = \frac{1}{\underline{A} + \left(p - \frac{1}{p}\right) \cdot \underline{B}} = \frac{1}{\underline{G}}$$

nach folgenden Schritten vorgegangen werden (siehe Bild 5.13):

Nachdem auf der reellen und imaginären Achse gleiche Maßstäbe gewählt sind, kann mit der Konstruktion begonnen werden.

1. Zeichnen der Nennergeraden $\underline{G} = \underline{A} + p \cdot \underline{B}$.
2. Spiegelung der Nennergeraden an der reellen Achse ergibt $\underline{G}^* = \underline{A}^* + p \cdot \underline{B}^*$.
3. Zeichnen der Senkrechten auf der gespiegelten Nennergeraden \underline{G}^* , die durch den Nullpunkt verläuft.
4. Berechnen von $1/(2A)$, Festlegen des Maßstabs für $1/(2A)$ und Zeichnen der Senkrechten auf \underline{A}^* im Abstand $1/(2A)$. Die Festlegung der Länge von $1/(2A)$ bestimmt die Größe des Kreises.
5. Schnittpunkt der beiden Senkrechten ergibt den Mittelpunkt M des Kreises. Zeichnen des Kreises mit dem Radius $M0$.
6. Bezifferung des Kreises mit den Parameterwerten p entsprechend der gespiegelten Nennergeraden \underline{G}^* .

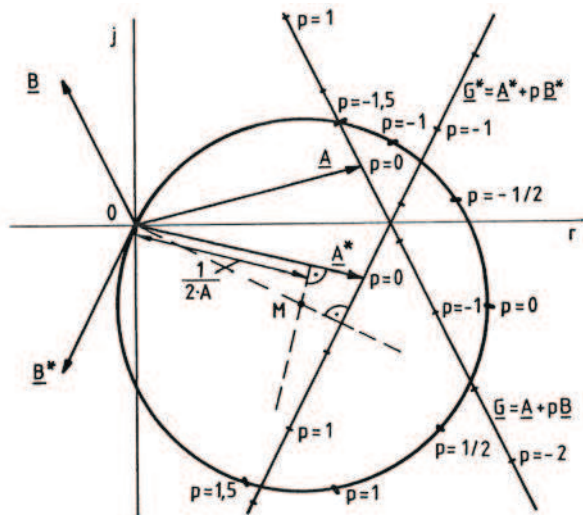


Bild 5.13
Konstruktion der Ortskurve
„Kreis durch den Nullpunkt“

Beispiel 1:

Ortskurve des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung zweier Spulen, bei der die eine Spule veränderlich ist:

$$R_{r1} = 23\Omega \quad R_{r2} = 0 \dots 36\Omega \quad \text{mit} \quad R_{r0} = 12\Omega$$

$$X_{r1} = 10\Omega \quad X_{r2} = 0 \dots 66\Omega \quad X_{r0} = 22\Omega \quad \text{d. h.} \quad p = 0 \dots 3$$

Die Gleichung der Nennergeraden lautet:

$$\underline{Z} = R_{r1} + jX_{r1} + p \cdot (R_{r0} + jX_{r0}) = (23 + j \cdot 10)\Omega + p \cdot (12 + j \cdot 22)\Omega$$

Die Inversion der Nennergerade ergibt die Kreisgleichung:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_{r1} + j \cdot X_{r1} + p \cdot (R_{r0} + j \cdot X_{r0})} = \frac{1}{(23 + j \cdot 10)\Omega + p \cdot (12 + j \cdot 22)\Omega}$$

Dabei ist

$$\underline{A} = (23 + j \cdot 10)\Omega$$

$$A = \sqrt{23^2 + 10^2}\Omega = 25\Omega$$

und $1/(2A) = 20\text{mS} \hat{=} 2\text{cm}$.

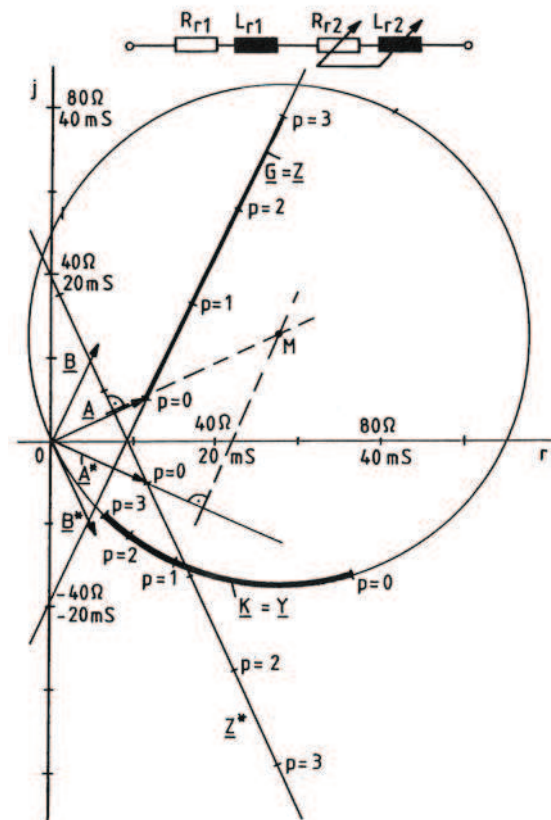


Bild 5.14

Schaltung und Ortskurven der Reihenschaltung einer konstanten und einer veränderlichen Spule

Sowohl die Ortskurve des komplexen Widerstands als auch die des komplexen Leitwerts ist nur für positive Parameter sinnvoll.

Die Ortskurvenpunkte des komplexen Leitwerts lassen sich rechnerisch kontrollieren:

$$p = 0 \quad \underline{Z}_0 = (23 + j \cdot 10)\Omega$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{(23 + j \cdot 10)\Omega} \cdot \frac{(23 - j \cdot 10)\Omega}{(23 - j \cdot 10)\Omega} = \frac{(23 - j \cdot 10)\Omega}{629 \Omega^2} = (36,6 - j \cdot 15,9)\text{mS}$$

$$\begin{aligned}
 p=1 \quad \underline{Z}_1 &= (23 + j \cdot 10)\Omega + 1 \cdot (12 + j \cdot 22)\Omega = (35 + j \cdot 32)\Omega \\
 \underline{Y}_1 &= \frac{1}{(35 + j \cdot 32)\Omega} \cdot \frac{(35 - j \cdot 32)\Omega}{(35 - j \cdot 32)\Omega} = \frac{(35 - j \cdot 32)\Omega}{2249 \Omega^2} = (15,6 - j \cdot 14,2)\text{mS} \\
 p=2 \quad \underline{Z}_2 &= (23 + j \cdot 10)\Omega + 2 \cdot (12 + j \cdot 22)\Omega = (47 + j \cdot 54)\Omega \\
 \underline{Y}_2 &= \frac{1}{(47 + j \cdot 54)\Omega} \cdot \frac{(47 - j \cdot 54)\Omega}{(47 - j \cdot 54)\Omega} = \frac{(47 - j \cdot 54)\Omega}{5125 \Omega^2} = (9,2 - j \cdot 10,5)\text{mS} \\
 p=3 \quad \underline{Z}_3 &= (23 + j \cdot 10)\Omega + 3 \cdot (12 + j \cdot 22)\Omega = (59 + j \cdot 76)\Omega \\
 \underline{Y}_3 &= \frac{1}{(59 + j \cdot 76)\Omega} \cdot \frac{(59 - j \cdot 76)\Omega}{(59 - j \cdot 76)\Omega} = \frac{(59 - j \cdot 76)\Omega}{9257 \Omega^2} = (6,4 - j \cdot 8,2)\text{mS}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Ortskurve des Stroms durch die Reihenschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer variablen Kapazität bei konstanter Spannung:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R_r + j \cdot X_r}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R_r - j \cdot \frac{1}{\omega C_r}}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R_r - j \cdot \frac{1}{\omega p C_{r0}}}$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\frac{R_r}{\underline{U}} - j \cdot \frac{1}{p \cdot \omega C_{r0} \underline{U}}}$$

oder

$$\underline{I} = \frac{1}{\frac{R_r}{\underline{U}} - j \cdot p^* \cdot \frac{1}{\omega C_{r0} \underline{U}}}$$

$$\text{mit } C_r = p \cdot C_{r0} = \frac{1}{p^*} \cdot C_{r0}$$

Dabei sind

$$\underline{A} = \frac{R_r}{\underline{U}}, \underline{B} = -j \cdot \frac{1}{\omega C_{r0} \underline{U}}$$

und

$$\frac{1}{2A} = \frac{U}{2R_r}$$

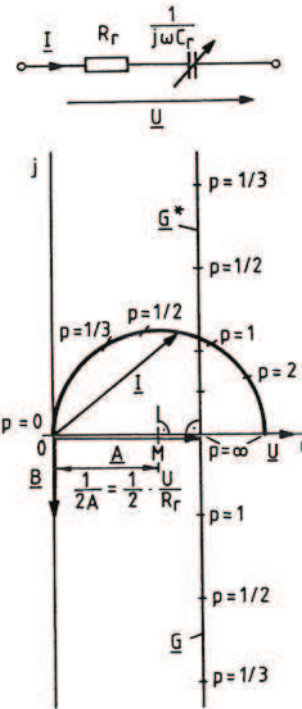


Bild 5.15 Ortskurve des Stroms durch den Kondensator bei variabler Kapazität

Bei $p = 0$ ist der kapazitive Widerstand unendlich groß, so dass der Strom Null ist. Wird die Kapazität sehr groß, dann ist der kapazitive Widerstand vernachlässigbar klein; bei $p = \infty$ ist der Strom nur noch durch den ohmschen Widerstand R_r begrenzt.

(vgl. mit Beispiel 2 der Ortskurve „Gerade“)

Beispiel 3:

Ortskurven

des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung eines variablen ohmschen Widerstandes, einer konstanten Induktivität, einer konstanten Kapazität bei konstanter Frequenz und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung eines variablen ohmschen Widerstandes, einer konstanten Induktivität, einer konstanten Kapazität bei konstanter Frequenz:

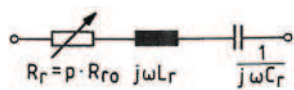
(vgl. mit Beispiel 3 der Ortskurve „Gerade“)

Reihenschaltung

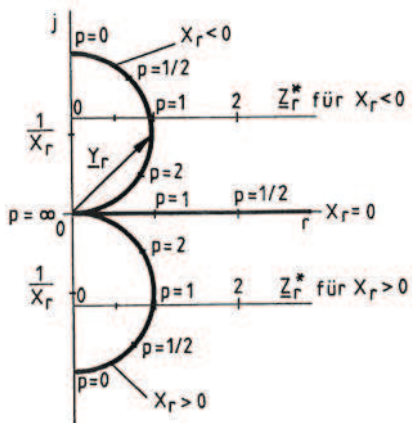
$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{R_r + j \cdot X_r}$$

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{p \cdot R_{r0} + j \cdot \left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r} \right)}$$

mit $\underline{A} = j \cdot X_r$ und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2X_r}$



Ortskurven für \underline{Y}_r mit $X_r \gtrless 0$:

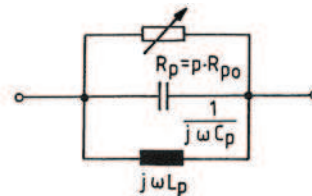


Parallelschaltung:

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j \cdot B_p}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\frac{1}{p \cdot R_{p0}} + j \cdot \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right)}$$

mit $\underline{A} = j \cdot B_p$ und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2B_p}$



Ortskurven für \underline{Z}_p mit $B_p \gtrless 0$:

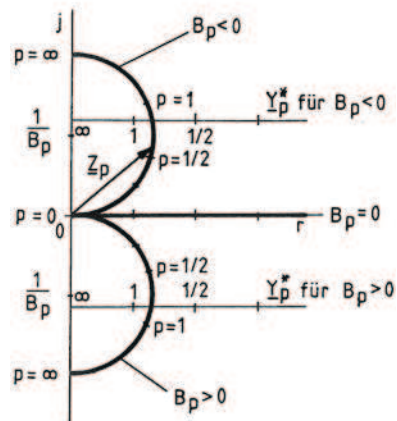


Bild 5.16 Ortskurven von Schwingkreisen mit variablem ohmschen Widerstand

Beispiel 4:

Ortskurven des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer variablen Induktivität oder einer variablen Kapazität bei konstanter Frequenz:

(vgl. mit Beispiel 4 der Ortskurve „Gerade“)

Reihenschaltung

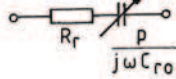
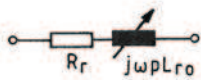
$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{R_r + j \cdot X_r} = \frac{1}{R_r + p \cdot j \cdot X_{r0}}$$

mit $X_r = p \cdot X_{r0}$ und $0 \leq p < \infty$

und $\underline{A} = R_r$ und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2R_r}$

$$X_r = p \cdot (\omega L_{r0}) > 0$$

$$X_r = p \cdot \left(-\frac{1}{\omega C_{r0}}\right) < 0$$



Parallelschaltung:

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{1}{G_p + j \cdot B_p} = \frac{1}{G_p + p \cdot j \cdot B_{p0}}$$

mit $B_p = p \cdot B_{p0}$ und $0 \leq p < \infty$

und $\underline{A} = G_p$ und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2G_p} = \frac{R_p}{2}$

$$B_p = p \cdot (\omega C_{p0}) > 0$$

$$B_p = p \cdot \left(-\frac{1}{\omega L_{p0}}\right) < 0$$

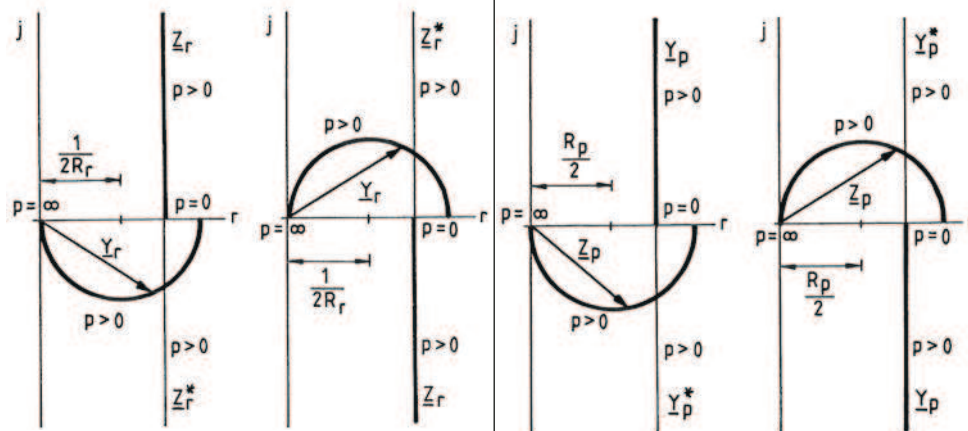
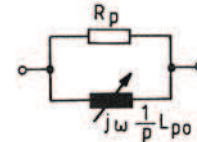
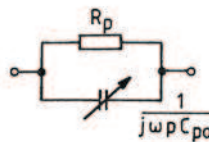


Bild 5.17 Ortskurven des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung von ohmschen Widerständen und veränderlichen Blindwiderständen

Beispiel 5:

Ortskurven des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes und einer konstanten Induktivität oder Kapazität bei variabler Frequenz $\omega = p \cdot \omega_0$ mit $0 < p < \infty$:

(vgl. mit Beispiel 5 der Ortskurve „Gerade“)

Reihenschaltung

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{R_r + j \cdot X_r}$$

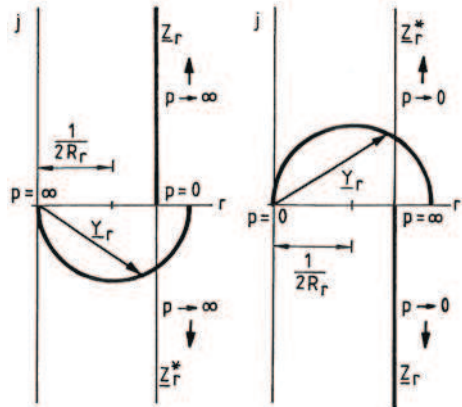
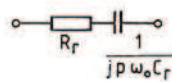
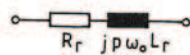
$$\underline{Y}_r = \frac{1}{R_r + j\omega L_r} \quad \underline{Y}_r = \frac{1}{R_r - j \cdot \frac{1}{\omega C_r}}$$

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{R_r + jp\omega_0 L_r} \quad \underline{Y}_r = \frac{1}{R_r - j \frac{1}{p\omega_0 C_r}}$$

mit $\underline{A} = R_r$ und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2R_r}$

$$X_r = p \omega_0 L_r > 0$$

$$X_r = -\frac{1}{p \omega_0 C_r} < 0$$



Parallelschaltung:

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{1}{G_p + j \cdot B_p}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{G_p + j\omega C_p} \quad \underline{Z}_p = \frac{1}{G_p - j \frac{1}{\omega L_p}}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{G_p + jp\omega_0 C_p} \quad \underline{Z}_p = \frac{1}{G_p - j \frac{1}{p\omega_0 L_p}}$$

mit $\underline{A} = G_p$ und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2G_p} = \frac{R_p}{2}$

$$B_p = p \omega_0 C_p > 0$$

$$B_p = -\frac{1}{p \omega_0 L_p} < 0$$

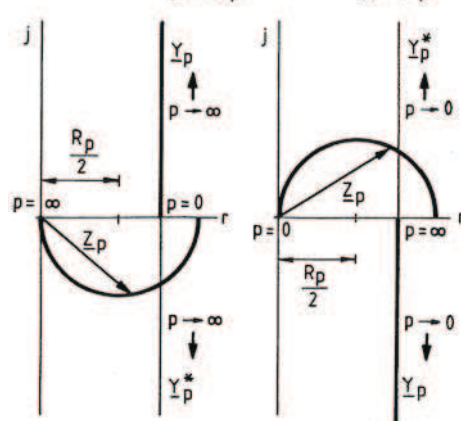
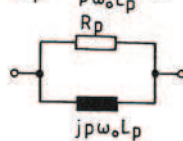
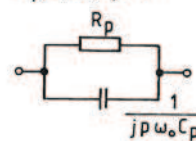


Bild 5.18 Ortskurven des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung von ohmschen Widerständen und konstanten Induktivitäten oder Kapazitäten bei veränderlicher Frequenz

Beispiel 6:

Ortskurven des komplexen Leitwerts der Reihenschaltung und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung eines konstanten ohmschen Widerstandes, einer konstanten Induktivität und einer konstanten Kapazität bei variabler Frequenz $\omega = p \cdot \omega_0$ mit $0 < p < \infty$: (vgl. mit Beispiel 6 der Ortskurve „Gerade“)

Die Kreisfrequenz ω muss auf die Resonanzkreisfrequenz ω_0 des Reihen- bzw. Parallelschwingkreises bezogen werden, damit der variable Imaginärteil Null werden kann.

Reihenschaltung

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{R_r + j \cdot X_r}$$

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{R_r + j \cdot \left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r} \right)}$$

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{R_r + j \cdot \left(p \omega_0 L_r - \frac{1}{p \omega_0 C_r} \right)}$$

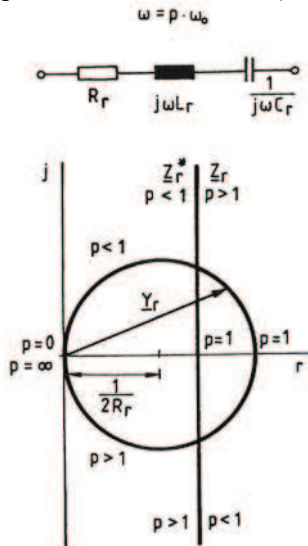
mit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r C_r}}$

$$\underline{Y}_r = \frac{1}{R_r + j \cdot X_{kr} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right)}$$

mit dem Kennwiderstand

$$X_{kr} = \omega_0 L_r = \frac{1}{\omega_0 C_r} = \sqrt{\frac{L_r}{C_r}}$$

(vgl. Abschnitt 4.5.1, Gl. 4.115)



Parallelschaltung:

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{1}{G_p + j \cdot B_p}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{G_p + j \cdot \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right)}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{G_p + j \cdot \left(p \omega_0 C_p - \frac{1}{p \omega_0 L_p} \right)}$$

mit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_p L_p}}$

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{G_p + j \cdot B_{kp} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right)}$$

mit dem Kennleitwert

$$B_{kp} = \omega_0 C_p = \frac{1}{\omega_0 L_p} = \sqrt{\frac{C_p}{L_p}}$$

(vgl. Abschnitt 4.5.2, Gl. 4.139)

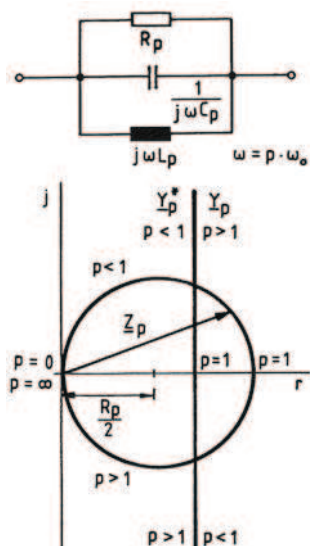


Bild 5.19 Ortskurven des komplexen Leitwerts des Reihenschwingkreises und des komplexen Widerstandes des Parallelschwingkreises bei variabler Frequenz

Der Parameter p entspricht also dem Parameter x in den Gleichungen 4.116 und 4.140:

$$X_r = X_{kr} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right) = X_{kr} \cdot v_r \quad \left| \quad B_p = B_{kp} \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right) = B_{kp} \cdot v_p \right.$$

Bei Resonanzkreisfrequenz ω_0 ist der komplexe Leitwert $\underline{Y}_r = 1/\underline{Z}_r = 1/R_r$ und der komplexe Widerstand $\underline{Z}_p = 1/\underline{Y}_p = 1/G_p = R_p$.

Für die Konstruktion der Kreise sind jeweils die Abschnitte $1/(2A)$ zu ermitteln:

$$\underline{A} = R_r \quad \text{und} \quad \frac{1}{2A} = \frac{1}{2R_r} \quad \left| \quad \underline{A} = G_p \quad \text{und} \quad \frac{1}{2A} = \frac{1}{2G_p} = \frac{R_p}{2} \right.$$

Beispiel 7:

Ortskurve des Spannungsverhältnisses $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ in Abhängigkeit von der Frequenz für die gezeichnete RC-Schaltung:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{R_{Cp} + j\omega C_p}}{\frac{1}{R_{Cp} + j\omega C_p} + R}$$

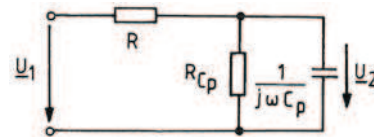


Bild 5.20 RC-Schaltung des Beispiels 7

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + R \cdot \left(\frac{1}{R_{Cp} + j\omega C_p} \right)}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_{Cp}} + j\omega R C_p} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_{Cp}} \right) + jp\omega_0 R C_p} \quad \text{mit} \quad \omega = p \cdot \omega_0$$

Wird die Bezugsfrequenz $\omega_0 = 1/(R C_p)$ gewählt und das Verhältnis der Widerstände $r = R/R_{Cp}$ variiert, dann lautet die Gleichung für die Ortskurve:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{(1+r) + jp}$$

mit $\underline{A} = 1+r$

und $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2(1+r)}$

Die Ortskurven sind Halbkreise, deren Mittelpunkt auf der reellen Achse verschoben sind. Im Bild 5.21 sind die beiden Ortskurven

für $r = 1$ d. h. $R = R_{Cp}$
 und $r = 0$ d. h. $R_{Cp} \rightarrow \infty$
 dargestellt.

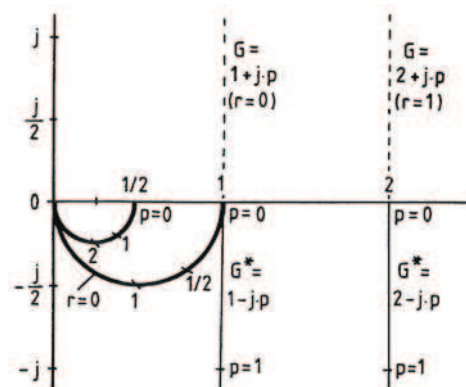


Bild 5.21 Ortskurve einer RC-Schaltung im Beispiel 7

Beispiel 8:

Ortskurve des Spannungsverhältnisses $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ in Abhängigkeit von der Frequenz für die gezeichnete RC-Schaltung nach Wien:

(vgl. mit Beispiel 5 des Abschnitts 4.4)

Gegeben sind:

$$R_r = 5\text{k}\Omega \quad C_r = 2\text{nF}$$

$$R_p = 10\text{k}\Omega \quad C_p = 1\text{nF}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C_p}}{\frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C_p} + R_r + \frac{1}{j\omega C_r}}$$

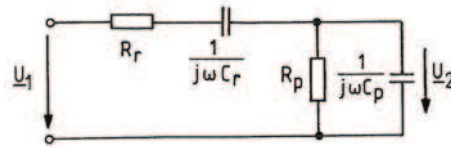


Bild 5.22 RC-Schaltung des Beispiels 8

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \left(R_r + \frac{1}{j\omega C_r} \right) \left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r} \right) + j \cdot \left(\omega R_r C_p - \frac{1}{\omega R_p C_r} \right)}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r} \right) + j \cdot \left(p\omega_0 R_r C_p - \frac{1}{p\omega_0 R_p C_r} \right)} \quad \text{mit } \omega = p \cdot \omega_0$$

Die Ortskurvengleichung ist vom gleichen Typ wie die Gleichungen für den Reihen- und Parallelschwingskreis (siehe Beispiel 6). Die Bezugsfrequenz ω_0 wird errechnet, indem der Imaginärteil der Nennergeraden mit $p = 1$ Null gesetzt wird:

$$\omega_0 R_r C_p = \frac{1}{\omega_0 R_p C_r}$$

oder

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_r C_r R_p C_p}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{F} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-9} \text{F}}} = 100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}$$

Mit

$$\omega_0 R_r C_p = 100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-9} \text{F} = 0,5$$

und

$$\frac{1}{\omega_0 R_p C_r} = \frac{1}{100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{F}} = 0,5$$

lautet dann die Ortskurvengleichung mit Zahlenwerten

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + j \cdot \left(p \cdot 0,5 - \frac{0,5}{p} \right)} = \frac{1}{2 + j \cdot 0,5 \cdot \left(p - \frac{1}{p} \right)}$$

Für den Mittelpunkt des Kreises ist $\underline{A} = A = 2$ und $1/(2A) = 1/4$.

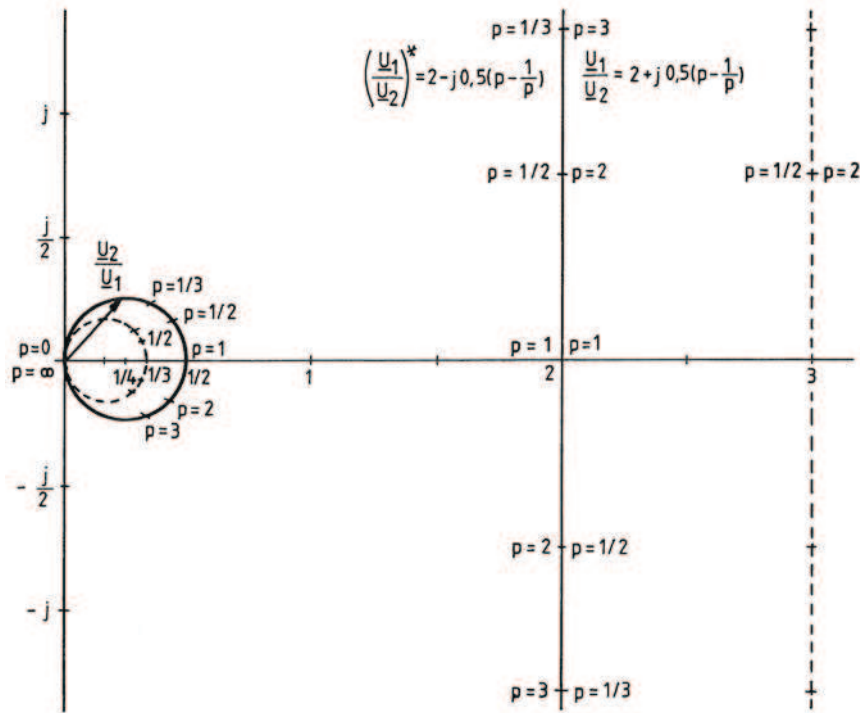


Bild 5.23 Ortskurve der RC-Schaltung nach Wien

Die konstruierten Ortskurvenpunkte können rechnerisch kontrolliert werden, z.B. für $p = 1/2$:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{2 + j \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)} = \frac{1}{2 - j \cdot 0,75} \cdot \frac{2 + j \cdot 0,75}{2 + j \cdot 0,75} = 0,44 + j \cdot 0,16$$

Sind wie im Beispiel 5 (3. Teil) des Abschnitts 4.4 die ohmschen Widerstände und die Kapazitäten gleich ($R_r = R_p$, $C_r = C_p$), dann stellt $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ ein Kreis mit dem Durchmesser $1/A = 1/3$ dar, der im Bild 5.23 gestrichelt eingetragen ist. Bei $\omega = \omega_0$ ist der Betrag $|\underline{U}_2/\underline{U}_1| = 1/3$.

Da die Kreise sehr klein sind und sich deshalb die Zahlenwerte nur ungenau ablesen lassen, sollten die Kreise vergrößert werden, indem für $1/(2A)$ eine größere Länge gewählt wird. Dieser Maßstab gilt dann nur für die Kreise.

5.4 Ortskurve „Kreis in allgemeiner Lage“

Ortskurvengleichung und Herleitung der Konstruktionsvorschrift

Die Konstruktion der Ortskurve eines Kreises, der nicht durch den Koordinatenursprung verläuft und der Ortskurvengleichung

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + p \cdot \underline{B}}{\underline{C} + p \cdot \underline{D}} = \underline{L} + \frac{1}{\underline{E} + p \cdot \underline{F}} \quad (5.8)$$

genügt, wird mit Hilfe der Konstruktion der Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“ (siehe Abschnitt 5.3) vorgenommen.

Zunächst wird die Ortskurvengleichung durch Division in eine Gleichung $1/(\underline{E} + p\underline{F})$ überführt, wobei noch ein Verschiebezeiger \underline{L} entsteht:

$$\begin{aligned} \underline{K} &= (p\underline{B} + \underline{A}) : (p\underline{D} + \underline{C}) = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} + \left(\underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} \right) \cdot \frac{1}{\underline{C} + p\underline{D}} \\ &\quad - \frac{\left(p\underline{B} + \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} \right)}{\underline{C} + p\underline{D}} \\ \text{Rest: } \underline{N} &= \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} \\ \underline{K} &= \underline{L} + \frac{\underline{N}}{\underline{C} + p\underline{D}} = \underline{L} + \frac{1}{\frac{\underline{C}}{\underline{N}} + p \frac{\underline{D}}{\underline{N}}} = \underline{L} + \frac{1}{\underline{E} + p\underline{F}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Um die Konstruktionsvorschrift für die Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“ anwenden zu können, muss zunächst der Zeiger

$$\underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} = N \cdot e^{j\nu} \quad (5.10)$$

errechnet werden, der die Ortskurvengleichung $1/(\underline{E} + p\underline{F})$ mitbestimmt. Dann kann die Ortskurve „Kreis durch den Nullpunkt“ mit der Parametrierung konstruiert werden. Schließlich müsste nach obiger Gleichung jeder Zeiger an den Kreis mit \underline{L} addiert werden, d. h. der Kreis müsste insgesamt verschoben werden. Praktischer ist es, wenn der Kreis durch den Nullpunkt unverändert bleibt und der Koordinatenursprung um $-\underline{L}$ verschoben wird.

Konstruktionsanleitung für die Ortskurve „Kreis in allgemeiner Lage“

Nach Erkennen der Ortskurvengleichung

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + p \cdot \underline{B}}{\underline{C} + p \cdot \underline{D}} = \underline{L} + \frac{1}{\underline{E} + p \cdot \underline{F}}$$

sollte bei der Konstruktion der Ortskurve nach folgenden Schritten vorgegangen werden:

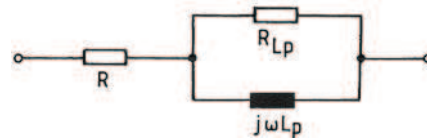
1. Errechnen des Zeigers $\underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} = N \cdot e^{j\nu}$
2. Errechnen und Zeichnen der Nennergeraden $\underline{G} = \frac{\underline{C}}{\underline{N}} + p \cdot \frac{\underline{D}}{\underline{N}} = \underline{E} + p \cdot \underline{F}$
3. Spiegelung der Nennergeraden an der reellen Achse ergibt $\underline{G}^* = \underline{E}^* + p \cdot \underline{F}^*$

4. Zeichnen der Senkrechten auf der gespiegelten Nennergeraden \underline{G}^* , die durch den Nullpunkt verläuft.
5. Berechnen von $1/(2E) = N/(2C)$, Festlegen des Maßstabs für $1/(2E)$ und Zeichnen der Senkrechten auf \underline{E}^* im Abstand $1/(2E)$. Die Festlegung der Länge von $1/(2E)$ bestimmt die Größe des Kreises.
6. Schnittpunkt der beiden Senkrechten ergibt den Mittelpunkt M des Kreises. Zeichnen des Kreises mit dem Radius $M0$.
7. Bezifferung des Kreises mit den Parameterwerten p entsprechend der gespiegelten Nennergeraden \underline{G}^* .
8. Errechnen des Zeigers $-\underline{L} = -\frac{B}{D}$ und Verschieben des Koordinatenursprungs um $-\underline{L}$.

Beispiel 1:

Ortskurve des komplexen Widerstandes der Reihenschaltung einer verlustbehafteten Spule (Ersatzschaltung Parallelschaltung) und eines ohmschen Widerstandes bei variabler Frequenz

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{R_{Lp}} + \frac{1}{j\omega L_p}} \quad \text{mit } \omega = p \cdot \omega_0$$



$$\underline{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{R_{Lp}} - j \cdot \frac{1}{p \cdot \omega_0 \cdot L_p}}$$

Beispiel 5.24 RL-Schaltung des Beispiels 1

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{\frac{1}{R_{Lp}} - j \cdot p^* \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot L_p}} = \underline{L} + \frac{1}{\underline{E} + p^* \cdot \underline{F}} \quad \text{mit } p^* = \frac{1}{p}$$

Der Vergleich mit der allgemeinen Form der Ortskurvengleichung ergibt:

$$\underline{L} = R, \quad \underline{E} = 1/R_{Lp} \quad \text{und} \quad \underline{F} = -j/\omega_0 L_p,$$

so dass das Errechnen des Zeigers \underline{N} entfallen kann.

Zu den einzelnen Schritten der Konstruktion:

Zu 1. entfällt

Zu 2. $\underline{G} = \frac{1}{R_{Lp}} - j \cdot p^* \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot L_p}$

Zu 3. $\underline{G}^* = \frac{1}{R_{Lp}} + j \cdot p^* \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot L_p}$

Zu 4. siehe Bild 5.25

Zu 5. $\frac{1}{2E} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{R_{Lp}}} = \frac{R_{Lp}}{2}$

Zu 6. und 7. siehe Bild 5.25

Zu 8. $-\underline{L} = -R$

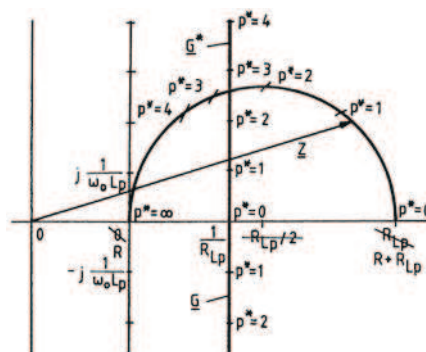


Bild 5.25 Ortskurve der RL-Schaltung des Beispiels 1

Beispiel 2:

Ortskurve des Spannungsverhältnisses $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ in Abhängigkeit von der Frequenz für die gezeichnete symmetrische X-Schaltung (Allpassglied)

Mit

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_C + \underline{U}_R$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_C - \underline{U}_R$$

ergibt sich

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_R}{\underline{U}_C + \underline{U}_R} = \frac{\left(\frac{1}{j\omega C} - R\right) \cdot \underline{I}}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right) \cdot \underline{I}}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j \cdot p\omega_0 RC}{1 + j \cdot p\omega_0 RC}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - p \cdot j}{1 + p \cdot j} = \frac{A + p \cdot B}{C + p \cdot D}$$

mit $\omega = p \cdot \omega_0$ und $\omega_0 = \frac{1}{R \cdot C}$

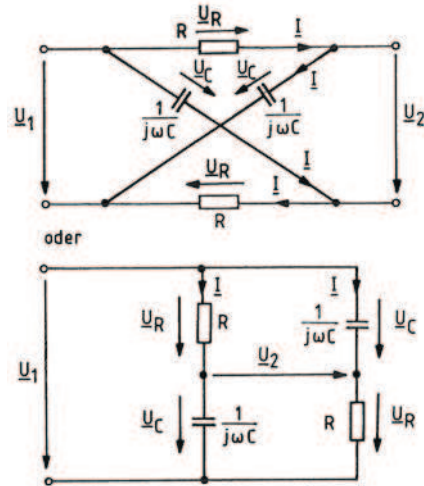


Bild 5.26 Symmetrische X-Schaltung des Beispiels 2

Die Ortskurve wird nach folgenden Schritten konstruiert:

Zu 1. $\underline{N} = \underline{A} - \frac{B \cdot C}{D}$

$$\underline{N} = 1 - \frac{-j \cdot 1}{j} = 2$$

Zu 2. $\underline{G} = \frac{C}{\underline{N}} + p \frac{D}{\underline{N}} = \underline{E} + p \underline{F}$

$$\underline{G} = \frac{1}{2} + p \frac{j}{2}$$

Zu 3. $\underline{G}^* = \frac{1}{2} - p \frac{j}{2}$

Zu 4. siehe Bild 5.27

Zu 5. $\frac{\underline{N}}{2C} = \frac{1}{2E} = 1$

Zu 6. und 7. siehe Bild 5.27

Zu 8. $-\underline{L} = -\frac{B}{D} = -\frac{-j}{j} = 1$

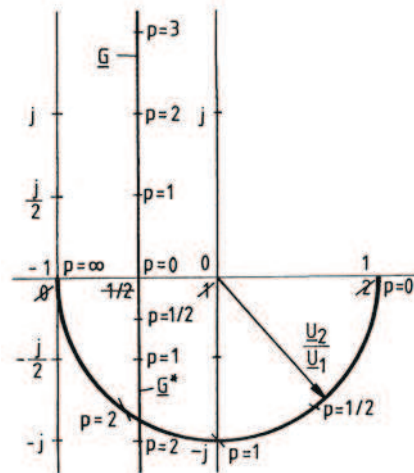


Bild 5.27 Ortskurve der symmetrischen X-Schaltung des Beispiels 2

Zwei Ortskurvenpunkte können einfach kontrolliert werden:

Für $p = 0$ ($\omega = 0$) haben die beiden Kondensatoren einen unendlichen Widerstand, so dass die Eingangsspannung gleich der Ausgangsspannung ist, d. h. $\underline{U}_2/\underline{U}_1 = 1$.

Für $p = \infty$ ($\omega = \infty$) sind die beiden Kondensatoren kurzgeschlossen. Dadurch entsteht ein Umpoler, d. h. die Ausgangsspannung ist umgekehrt gerichtet wie die Eingangsspannung:

$$\underline{U}_2/\underline{U}_1 = -1.$$

5.5 Ortskurven höherer Ordnung

Ortskurve „Parabel“

Die Ortskurvengleichung für die Parabel lautet

$$\underline{P} = \underline{A} + p \cdot \underline{B} + p^2 \cdot \underline{C}. \quad (5.11)$$

Sie kann entweder aus der Geraden $\underline{A} + p \cdot \underline{B}$ und dem Anteil $p^2 \cdot \underline{C}$ oder aus der Geraden $\underline{A} + p^2 \cdot \underline{C}$ und dem Anteil $p \cdot \underline{B}$ durch Überlagerung der Zeiger zusammengesetzt werden, wie im Bild 5.28 erläutert ist.

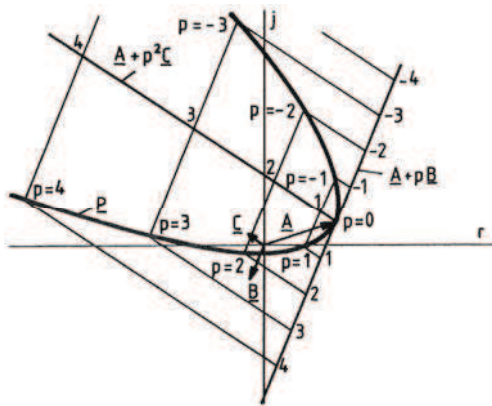


Bild 5.28
Konstruktion der Ortskurve „Parabel“

Beispiel:

Ortskurve für das Spannungsverhältnis $\underline{U}_C/\underline{U}$ des an einer Spannungsquelle angeschlossenen Reihenschwingkreises bei variabler Frequenz

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = \frac{R_r + j\omega L_r + \frac{1}{j\omega C_r}}{\frac{1}{j\omega C_r}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = j\omega C_r R_r - \omega^2 L_r C_r + 1$$

mit $\omega = p \cdot \omega_0$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = 1 + p \cdot j\omega_0 C_r R_r - p^2 \omega_0^2 L_r C_r.$$

Mit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r C_r}}$ und $\frac{1}{\omega_0 C_r R_r} = \frac{X_{kr}}{R_r} = Q_r$ (vgl. Gl. 4.118)

ist

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = 1 + p \cdot j \cdot \frac{1}{Q_r} - p^2.$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Ortskurvengleichung ergibt sich:

$$\underline{A} = 1, \quad \underline{B} = \frac{j}{Q_r} \quad \text{und} \quad \underline{C} = -1.$$

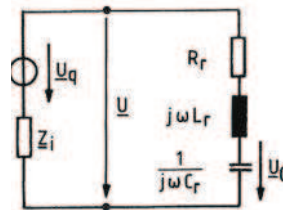


Bild 5.29 Schaltung für das Beispiel einer Parabel-Ortskurve

Wird die Güte des Resonanzkreises wie im Beispiel des Abschnitts 4.5.1 (siehe Bild 4.95) $Q_r = 2$ gewählt, dann lautet die Ortskurvengleichung

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = 1 + p \cdot \frac{j}{2} - p^2 = 1 - p^2 + j \cdot \frac{p}{2},$$

deren Ortskurve im Bild 5.30 dargestellt ist.

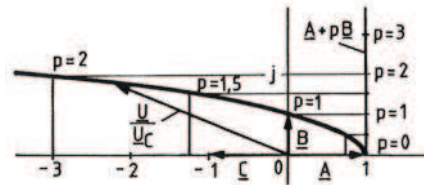


Bild 5.30 Beispiel einer Parabel-Ortskurve

Bei Resonanz des Reihenschwingkreises ist

$\omega = \omega_0$, also $p = 1$, und das Spannungsverhältnis ist imaginär:

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = j \cdot \frac{1}{Q_r} = \frac{j}{2} \quad \text{mit} \quad \frac{\underline{U}}{\underline{U}_C} = \frac{1}{Q_r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = Q_r \quad (\text{vgl. Gl. 4.125}).$$

Wie im Abschnitt 4.5.1 im Bild 4.96 (siehe S.105) zu sehen ist, wird in den Resonanzkurven das Spannungsverhältnis U_C/U dargestellt. Die zugehörige Ortskurvengleichung

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{1}{1 + p \cdot \frac{j}{Q_r} - p^2} = \frac{1}{1 + p \cdot \frac{j}{2} - p^2}$$

gehört nicht zu den „einfachen“ Ortskurven und müsste Punkt für Punkt ermittelt werden, indem verschiedene p -Werte in die Ortskurvengleichung eingesetzt werden, die komplexen Größen jeweils berechnet und in die Gaußsche Zahlenebene gezeichnet werden.

Wie im Bild 5.31 gezeigt, kann die Ortskurve aber auch durch Inversion der Parabel ermittelt werden, indem die Zeiger für bestimmte Parameter invertiert werden. Dabei werden die Längen der Parabelzeiger abgegriffen und der Kehrwert der Beträge jeweils auf dem Strahl mit umgekehrten Winkel angetragen.

Die dadurch entstehende Ortskurve enthält nicht nur die Beträge des Spannungsverhältnisses wie die Resonanzkurve im Bild 4.96, sondern auch die Phasenlage der beiden Spannungszeiger zueinander. Um die Beträge der Ortskurve mit den Resonanzkurven im Bild 4.96 vergleichen zu können, muss die Identität $p = x$ beachtet werden.

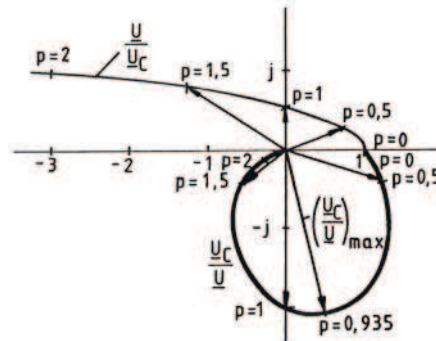


Bild 5.31 Inversion der Parabel

Mit der Gl. (4.130) lässt sich auch der Parameterwert errechnen, bei der die Kondensatorspannung ihr Maximum hat:

$$p = x = x_c = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_r^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = 0,935.$$

Der Ortskurvenpunkt kann dann mit der Ortskurvengleichung berechnet werden:

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{1}{1 - p^2 + j \cdot p/2}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{1}{1 - 0,935^2 + j \cdot 0,468} = 0,533 - j \cdot 1,996 = 2,066 \cdot e^{-j 75^\circ}$$

Ortskurve „Zirkulare Kubik“

Die allgemeine Ortskurvengleichung der zirkulären Kubik

$$\underline{Q} = \frac{\underline{A} + p \cdot \underline{B} + p^2 \cdot \underline{C}}{\underline{D} + p \cdot \underline{E}} \quad (5.12)$$

kann durch Division in die Summe einer Geradengleichung und einer Kreisgleichung überführt werden:

$$\begin{aligned} (p^2 \underline{C} + p \underline{B} + \underline{A}) : (p \underline{E} + \underline{D}) &= p \frac{\underline{C}}{\underline{E}} + \frac{\underline{B} - \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}}}{\underline{E}} + \left[\underline{A} - \frac{\underline{D}}{\underline{E}} \left(\underline{B} - \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}} \right) \right] \cdot \frac{1}{\underline{D} + p \underline{E}} \\ &= \frac{- \left(p^2 \underline{C} + p \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}} \right)}{p \left(\underline{B} - \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}} \right) + \underline{A}} \\ &\quad - \frac{\left[p \left(\underline{B} - \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}} \right) + \frac{\underline{D}}{\underline{E}} \left(\underline{B} - \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}} \right) \right]}{\text{Rest : } \underline{A} - \frac{\underline{D}}{\underline{E}} \left(\underline{B} - \frac{\underline{C} \underline{D}}{\underline{E}} \right)} \\ \underline{Q} &= \underline{R} + p \cdot \underline{S} + \frac{\underline{F}}{\underline{D} + p \cdot \underline{E}} = \underline{R} + p \cdot \underline{S} + \frac{1}{\frac{\underline{D}}{\underline{F}} + p \cdot \frac{\underline{E}}{\underline{F}}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Wird also die Ortskurvengleichung in der allgemeinen Form (Gl. 5.12) erkannt, dann muss diese zuerst in die Summenform der beiden Ortskurvengleichungen (Gl. 5.13) überführt werden, ehe die Konstruktion erfolgen kann.

Dann werden der Kreis durch den Nullpunkt nach der Anleitung im Abschnitt 5.3 und die Gerade (siehe Abschnitt 5.2) getrennt konstruiert.

Anschließend werden für gleiche Parameterwerte die jeweiligen beiden Zeiger durch Addition der Realteile und Imaginärteile überlagert.

Beispiel:

Ortskurven für den komplexen Leitwert und den komplexen Widerstand des Praktischen Parallel-Resonanzkreises in Abhängigkeit von der Frequenz (Schaltbild siehe Bild 5.32 oder Bild 4.108, S. 119).

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= j\omega C_r + \frac{1}{R_{Lr} + j\omega L_r} = \frac{1 + j\omega R_{Lr} C_r - \omega^2 L_r C_r}{R_{Lr} + j\omega L_r} \\ \underline{Y} &= p \cdot j\omega_0 C_r + \frac{1}{R_{Lr} + p \cdot j\omega_0 L_r} = \frac{1 + p \cdot j\omega_0 R_{Lr} C_r - p^2 \omega_0^2 L_r C_r}{R_{Lr} + p \cdot j\omega_0 L_r} \quad \text{mit } \omega = p \cdot \omega_0 \end{aligned}$$

Die rechte Seite obiger Gleichung entspricht der allgemeinen Form der Ortskurvengleichung der zirkulären Kubik (Gl. 5.12). Die Division kann entfallen, weil die Summe der Geradengleichung und einer Kreisgleichung sofort aus der Schaltung (Bild 5.32) abgelesen werden kann (linke Seite obiger Gleichung).

Als Bezugsfrequenz ω_0 sollte die Resonanzfrequenz gewählt werden, die nach der Gl. (4.155) berechnet werden kann:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_r C_r} - \left(\frac{R_{Lr}}{L_r}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{0,05\text{H} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}\text{F}} - \left(\frac{100\Omega}{0,05\text{H}}\right)^2} = 2000\text{s}^{-1}.$$

Die Ortskurvengleichung in Zahlenwerten lautet dann

$$\underline{Y} = p \cdot j \cdot 2 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} + \frac{1}{100\Omega + p \cdot j \cdot 2 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 0,05\text{Vs/A}}$$

$$\underline{Y} = p \cdot j \cdot 5 \text{ mS} + \frac{1}{100\Omega + p \cdot j \cdot 100\Omega}$$

Die Gerade ist identisch mit der positiven imaginären Achse, und der Kreis durch den Nullpunkt hat den Mittelpunkt bei $1/(2A) = 1/(200\Omega) = 5\text{mS}$. Die Ortskurve für den komplexen Leitwert ergibt sich durch Überlagerung der Zeiger mit jeweils gleichem Parameterwert (siehe Bild 5.32).

Aus der Ortskurve für den komplexen Leitwert $\underline{Y} = Y \cdot e^{-j\varphi}$ lassen sich Betrag und Argument für die p-Werte ablesen und die entsprechenden komplexen Widerstände $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$ berechnen und in die Gaußsche Zahlenebene einzeichnen:

p	1	0	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	∞
Y	mS	10	7,5	6,1	5,0	4,2	4,1	6,4	∞
$-\varphi$	Grad	0	-11	-8	0	+15	+42	+71	+90
Z = 1/Y	Ω	100	133	164	200	238	244	156	0
φ	Grad	0	+11	+8	0	-15	-42	-71	-90

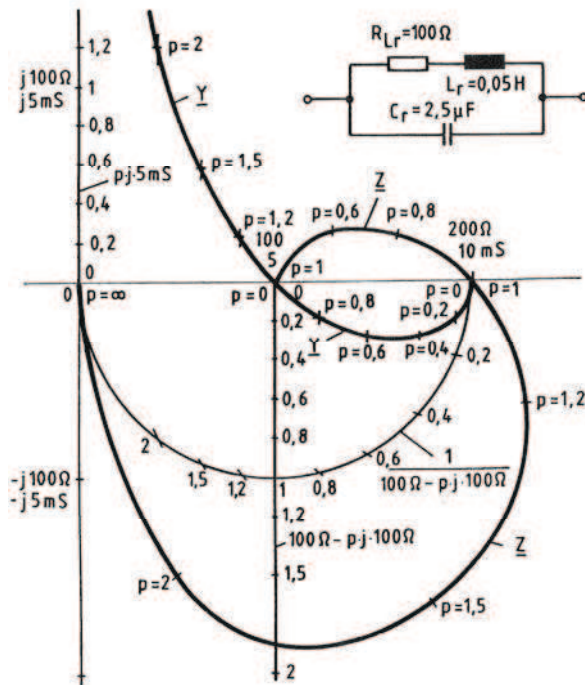


Bild 5.32
Ortskurven des komplexen Leitwerts und komplexen Widerstands des Praktischen Parallel-Resonanzkreises

Die Ortskurve für den frequenzabhängigen komplexen Widerstand \underline{Z} kann natürlich nicht genau sein, weil sie über abgelesene \underline{Y} -Werte ermittelt wurde. Deshalb soll die „nicht einfache“ Ortskurve punktweise mit der Ortskurvengleichung errechnet werden. Nach Gl. 4.158 lautet die Formel für den komplexen Widerstand des Praktischen Parallel-Resonanzkreises mit $\omega = p \cdot \omega_0$:

$$\underline{Z} = \frac{R_{Lr} + j\omega L_r}{1 + j\omega R_{Lr} C_r - \omega^2 L_r C_r} = \frac{R_{Lr} + p \cdot j\omega_0 L_r}{1 + p \cdot j\omega_0 R_{Lr} C_r - p^2 \omega_0^2 L_r C_r}$$

und mit Zahlenwerten

$$\underline{Z} = \frac{100\Omega + p \cdot j \cdot 100\Omega}{(1 - p^2 \cdot 0,5) + p \cdot j \cdot 0,5}$$

Für $p = 0,6$ ergibt sich beispielsweise

$$\underline{Z}_{0,6} = \frac{100\Omega + j \cdot 60\Omega}{0,82 + j \cdot 0,3} = \frac{116,6\Omega \cdot e^{j31^\circ}}{0,873 \cdot e^{j20,1^\circ}} = 133,6\Omega \cdot e^{j10,9^\circ}$$

Die auf diese Weise berechneten Widerstandswerte sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

p	1	0	0,6	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0
Z	Ω	100	133,6	162,3	200	235,9	237,1	158,1
φ	Grad	0	10,9	8,2	0	-14,8	-43,2	-71,6

Übungsaufgaben zu den Abschnitten 5.1 bis 5.5

- 5.1 Für die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands $R_r = 200\Omega$ und einer variablen Induktivität $L_r = 100 \dots 300\text{mH}$ sind
1. die Ortskurve für die Spannung bei konstantem Strom $I = 10\text{mA}$ bei $f = 200\text{Hz}$ und
 2. die Ortskurve für den Strom bei konstanter Spannung $U = 10\text{V}$ bei $f = 200\text{Hz}$ zu ermitteln.
 3. Kontrollieren Sie rechnerisch die Ortskurvenpunkte des Stroms für die Induktivitäten $L_r = 100, 200$ und 300mH .
- 5.2 Mit Hilfe von Ortskurven soll die Frequenzabhängigkeit der komplexen Widerstände und Leitwerte der Reihenschaltung und Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes und einer Kapazität untersucht werden.
1. Entwickeln Sie die Ortskurven des komplexen Widerstandes und komplexen Leitwertes der Reihenschaltung von $R_r = 17,3\Omega$ und $C_r = 318\mu\text{F}$.
 2. Ermitteln Sie anschließend die Ortskurven des komplexen Leitwertes und des komplexen Widerstandes der Parallelschaltung von $R_p = 23,1\Omega$ und $C_p = 79,6\mu\text{F}$. Die Bezugsfrequenz f_0 soll so gewählt werden, dass für $p = 1$ die Reihenschaltung und die Parallelschaltung äquivalent sind. Es ist also zu untersuchen, ob die Bedingungsgleichung für Äquivalenz bei einer bestimmten Frequenz erfüllbar ist.
 3. Kontrollieren Sie anhand der Ortskurve, ob die Scheinwiderstände und Scheinleitwerte für $p = 1$ gleich sind.
- 5.3 1. Für den Reihen- und Parallelschwingkreis sollen die Ortskurven für den komplexen Widerstand und den komplexen Leitwert bei Variation der Frequenz ermittelt werden. Die ohmschen Widerstände, die Induktivitäten und Kapazitäten der Reihen- und Parallelschaltung sollen gleich sein:
- $$R_r = R_p = 200\Omega \quad L_r = L_p = 0,04\text{H} \quad C_r = C_p = 1\mu\text{F}$$
2. Lesen Sie aus der Ortskurve für den komplexen Leitwert des Reihenschwingkreises die Strom-Resonanzkurve ab.
- 5.4 Für die Reihen- und Parallelschaltungen von Induktivität/ohmscher Widerstand und Kapazität/ohmscher Widerstand sind die Ortskurven für die Verhältnisse der Teilspannungen zur Gesamtspannung bzw. Teilströme zum Gesamtstrom in Abhängigkeit von der Frequenz zu entwickeln, wobei die Bezugsfrequenz jeweils festgelegt ist:
- $$\omega_0 = R_r/L_r, R_p/L_p, 1/R_p C_p, 1/R_r C_r.$$
- 5.5 An den Eingang des gezeichneten Vierpols wird eine sinusförmige Spannung mit veränderlicher Frequenz angelegt.

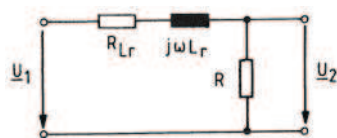


Bild 5.33
Übungsaufgabe 5.5

1. Stellen Sie die Gleichung für das Spannungsverhältnis U_2/U_1 in Abhängigkeit von R_{Lr} , L_r , R und ω auf.
2. Konstruieren Sie die Ortskurve des Spannungsverhältnis in Abhängigkeit von $\omega = p \cdot \omega_0$, nachdem Sie die Gleichung mit $R = R_{Lr}$ und $\omega_0 = R/L_r$ vereinfacht haben. Geben Sie mindestens fünf Ortskurvenpunkte mit den entsprechenden p -Werten an.
3. Ergänzen Sie die Ortskurve durch entsprechende Ortskurven für $R_{Lr}/R = 0, 1/2$ und 2 .
4. Ermitteln Sie aus der Ortskurvenschar für $p = 1$ die Funktion

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = f\left(\frac{R_{Lr}}{R} \right)$$

und stellen Sie sie dar.

- 5.6 Die Ortskurve des Spannungsverhältnis $\underline{U}_R/\underline{U}$ des Reihenschwingkreises bei variabler Frequenz $\omega = p \cdot \omega_0$ ist zu ermitteln.
Deuten Sie die Ortskurvenpunkte für $p = 0, 1$ und ∞ .

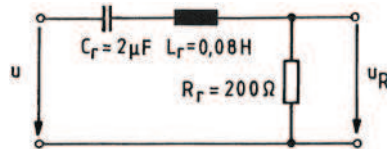


Bild 5.34
Übungsaufgabe 5.6

- 5.7 Für die gezeichnete Schaltung ist die Ortskurve für $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ in Abhängigkeit von der Frequenz zu konstruieren.
1. Leiten Sie zunächst die Ortskurvengleichung allgemein und dann mit den Zahlenwerten her.
 2. Konstruieren Sie die Ortskurve mit den Ortskurvenpunkten $p = 0, 1/3, 1/2, 1, 2, 3$ und ∞ .
 3. Erklären Sie den Ortskurvenpunkt für $p = 1$.

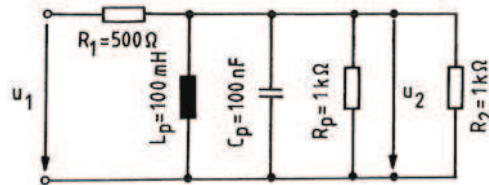


Bild 5.35
Übungsaufgabe 5.7

- 5.8 1. Entwickeln Sie die Ortskurve für den komplexen Leitwert \underline{Y} der skizzierten Schaltung im Frequenzbereich
 $\omega = 100\text{s}^{-1} \dots 1000\text{s}^{-1}$
in Schritten von 100s^{-1} .

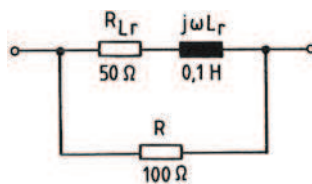


Bild 5.36
Übungsaufgabe 5.8

2. Kontrollieren Sie rechnerisch die Ortskurvenpunkte für $\omega = 0, \omega = 500\text{s}^{-1}$ und $\omega = \infty$.
3. Ermitteln Sie aus der Ortskurve den Graphen der Funktion $Y = f(\omega)$ und stellen Sie ihn dar.
Tragen Sie den Wert ein, den die Kurve für hohe Kreisfrequenzen anstrebt (Asymptote).

- 5.9 1. Für einen Reihenschwingkreis mit der Güte $Q_r = 2$, angeschlossen an eine Wechselspannungsquelle, ist die Ortskurve des Spannungsverhältnisses $\underline{U}_L/\underline{U}$ in Abhängigkeit von der Frequenz zu entwickeln.

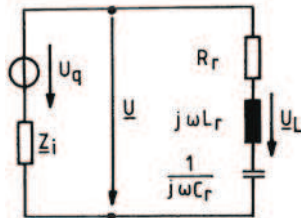


Bild 5.37
Übungsaufgabe 5.9

2. Anschließend ist durch Inversion der Zeiger die Ortskurve des Spannungsverhältnisses $\underline{U}_L/\underline{U}$ zu ermitteln. Die Ortskurvenpunkte für $p = 0, 1/2, 2/3, 1, 2$ und ∞ sind rechnerisch zu kontrollieren.
3. Schließlich sind die Beträge U_L/U für die unter 2. angegebenen Parameterwerte mit Hilfe der Formeln des Abschnitts 4.5.1 zu kontrollieren. Das Maximum des Spannungsverhältnisses ist zu berechnen. Die Ergebnisse sind mit der Resonanzkurve (Bild 4.95) zu vergleichen.
- 5.10 1. Konstruieren Sie die Ortskurve des komplexen Leitwerts der skizzierten Schaltung in einem Frequenzbereich $\omega = 10000\text{s}^{-1} \dots 100000\text{s}^{-1}$ im Abstand von 10000s^{-1} , indem Sie einfache Ortskurven überlagern.

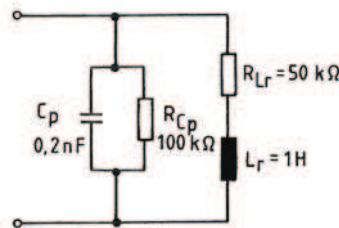


Bild 5.38
Übungsaufgabe 5.10

2. Lesen Sie aus der Ortskurve die Frequenz ω ab, bei der der komplexe Leitwert reell ist. Weisen Sie die abgelesene Frequenz und den reellen Leitwert rechnerisch nach.
- 5.11 1. Bei welchen Kreisfrequenzen ω ist der komplexe Widerstand der Schaltung reell?

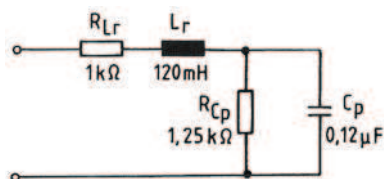


Bild 5.39
Übungsaufgabe 5.11

2. Entwickeln Sie die Ortskurve des komplexen Widerstandes durch Überlagerung einfacher Ortskurven, indem Sie eine der Kreisfrequenzen unter 1. als Bezugsfrequenz wählen. Die Ortskurve ist für $p = 0, 1/2, 1, 1,5$ und 2 zu konstruieren.
3. Kontrollieren Sie rechnerisch die Ortskurvenpunkte für $p = 0$ und $p = 1$.