Module 7. Angle inscrit et angle au centre

Compétences du module

Déterminer la mesure des angles inscrits et semi-inscrits dans une circonférence, à l'aide de théorèmes et de relations entre les cordes et les arcs sur une circonférence, afin d'étudier les caractéristiques et propriétés de figures planes.

Relation et développement

Cycles I et II

- Construction d'angles à l'aide d'un rapporteur
- Classification et construction de triangles
- Classification et construction de quadrilatères
- Classification de corps géométriques
- Figures symétriques.
- Périmètre, aire des triangles et quadrilatères
- Modèles de cubes et de prismes rectangulaires et triangulaires
- Longueur de la circonférence et aire du cercle
- Longueur et aire de secteurs circulaires remarquables
- Volume de prismes
- Translations, rotations et symétrie rotationnelle

Septième année

Module 8 : figures planes et construction de corps géométriques
- Mouvement de figures dans le plan.
- Cercles, segments et angles
- Plans, figures géométriques et aire totale du prisme, de la pyramide et du cylindre.

Huitième année

Module 4 : Parallélisme et angles d'un polygone
- Somme des angles internes et externes d'un polygone
- Droites parallèles et angles

Module 5 : Critères de congruence des triangles
- Congruence des triangles

Module 6 : Caractéristiques des triangles et quadrilatères
- Triangles
- Parallélogrammes

Module 7 : Aire et volume de solides géométriques
- Caractéristiques et éléments des solides géométriques
- Calcul du volume des solides géométriques
- Applications de volume
- Aire de solides géométriques
- Applications de l'aire.

Neuvième année

Module 5 : Figures semblables
- Similitude
- Similitude des triangles
- Similitude et parallélisme.
- Applications de la similitude et des triangles semblables

Module 6 : Théorème de Pythagore
- Théorème de Pythagore
- Applications du théorème

Module 7 : Angle inscrit et angle au centre
- Angle inscrit et angle au centre
- Applications de l'angle inscrit et de l'angle au centre

Programme du module

Leçon	Heures	Cours
1. L'angle inscrit et l'angle au centre	1	1. Les éléments de la circonférence
	1	2. Définition et mesures des angles inscrits
	1	3. Les angles inscrits, 1re partie
	1	4. Les angles inscrits, 2e partie
	1	5. Le théorème de l'angle inscrit
	1	6. Mets en pratique ce que tu as appris
	1	7. Les arcs congruents
	1	8. Mets en pratique ce que tu as appris
2. Applications de l'angle inscrit et de l'angle au centre	1	1. La construction de tangentes à une circonférence
	1	2. Les cordes et les arcs de circonférence
	1	3. Application à des triangles semblables
	1	4. Parallélisme
	1	5. Quatre points sur la circonférence d'un cercle
	1	6. L'angle semi-inscrit
	2	7. Mets en pratique ce que tu as appris
	1	Test du module 7

16 heures de cours + test du module 7

Aspects principaux de chaque leçon

Leçon 1 : L’angle inscrit et l’angle au centre
Dans le cours 1.2, le théorème de l'angle au centre est déterminé intuitivement, à l'aide d'outils géométriques, afin de pouvoir le démontrer formellement dans les leçons suivantes.

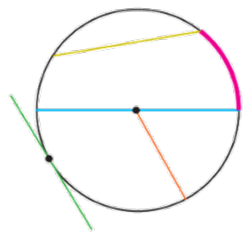
Leçon 2 : Application de l’angle inscrit et de l’angle au centre
Ayant prouvé précédemment le théorème de la mesure de l'angle inscrit, cette leçon utilise ce résultat comme outil principal pour la déduction de certaines propriétés.

Leçon 1 L'angle inscrit et l'angle au centre

1.1 Les éléments de la circonférence

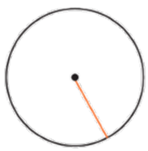
P

Écris le nom des éléments tracés sur la circonférence suivant :

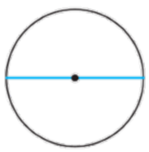


S

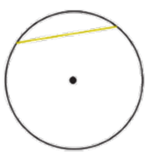
Les segments



Le segment qui va du centre à un point sur la circonférence est appelé le **rayon.**

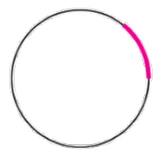


Le segment qui va d'un point de la circonférence à un autre en passant par le centre du cercle est appelé le **diamètre.**



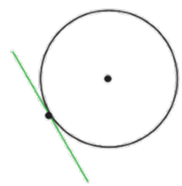
Le segment qui va d'un point de la circonférence à un autre est appelé une **corde.**

l'arc



Toute portion de la circonférence du cercle est appelé un **arc.**

La droite



La droite qui touche la circonférence en un point donné est appelé une **tangente.**

Le point où la tangente touche la circonférence est appelé : **point de tangence**.

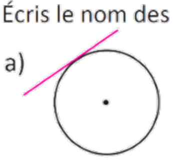
C

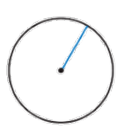
Les éléments de la circonférence sont :

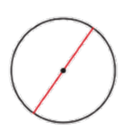
- Les segments : rayon, diamètre et corde
- Les droites : les tangentes
- L'arc de la circonférence

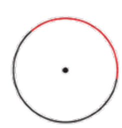
Le rayon au point de tangence est perpendiculaire à la tangente en ce point.

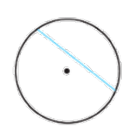
1. Écris le nom des éléments indiqués pour chaque circonférence :

a)  la tangente

b)  le rayon

c)  le diamètre

d)  l'arc

e)  la corde

2. Réponds aux questions suivantes :

   a) Quel est le nom de l'élément qui est la moitié du diamètre ? Le rayon

   b) Quel est le nom de la corde la plus longue d'une circonférence ? Le diamètre

   c) Comment sont la tangente et le rayon au point de tangence d'une circonférence ? Perpendiculaire

   d) En plaçant deux points sur la circonférence, combien d'arcs sont formés ? Deux

Indicateur de réussite

1.1 Identifier les éléments de la circonférence/ CERCLE.

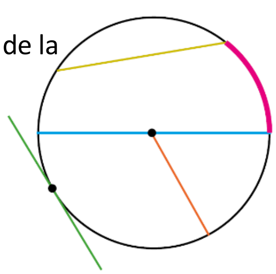
Séquence

De la 1e à la 6e année, les éléments du cercle ont été étudiés. Durant la septième année, le cercle a été réétudié pour travailler avec ses éléments et déterminer la signification de la tangente à la circonférence et déduire des propriétés à partir des caractéristiques de deux cercles qui se croissent. En outre, dans ce cours, un rappel est fait des éléments du cercle, la différence est qu'ils sont présentés en rapport avec la circonférence. De plus, la tangente à la circonférence est présentée comme un élément supplémentaire. Les élèves possèdent une compréhension très claire de la relation entre le cercle et la circonférence, il est donc escompté qu'il n'y aura pas de confusion concernant ce cours.

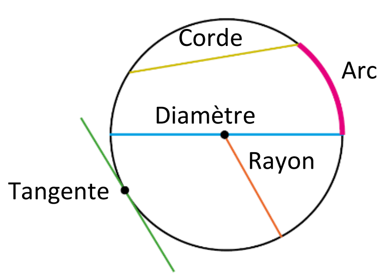
Dans ce cas, le premier élément est considéré comme complété lorsque tous les noms demandés sont écrits.

Date : **U7 1.1**

Ⓟ Écris le nom de chaque élément de la circonférence



Ⓢ



Ⓡ 1.
a) Tangente
b) Rayon
c) Diamètre
d) Arc
e) Corde

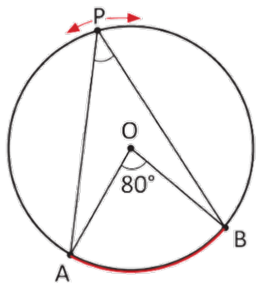
2.
a) Rayon
b) Diamètre
c) Perpendiculaire
d) Deux

Devoirs : manuel, page 148.

1.2 Définition et mesure des angles inscrits

P

Trace la figure sur un papier et mesure l'angle ∢BPA en déplaçant le point P à différents endroits sur la circonférence. Compare la mesure de l'angle ∢BPA avec celle de ∢BOA.



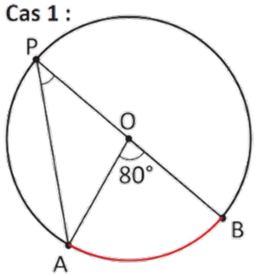
L'angle BOA est appelé **angle au centre** parce que son sommet est le centre de la circonférence.

Notez que les angles ∢BPA et ∢BOA ont en commun le même arc $\widehat{AB}$.

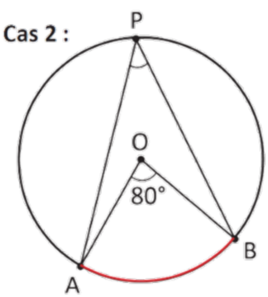
S

Utilise une règle et un compas pour tracer les figures et déplace le point P sur la circonférence dans les cas suivants :

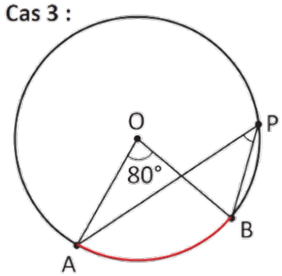
Cas 1 :



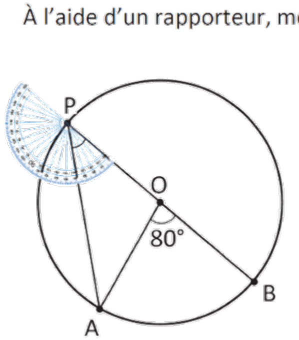
Cas 2 :

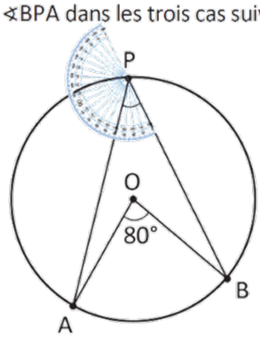


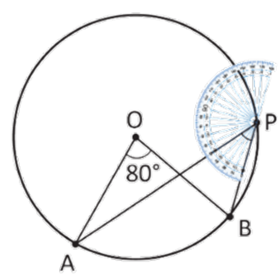
Cas 3 :



À l'aide d'un rapporteur, mesure l'angle ∢BPA dans les trois cas suivants :







Dans tous les cas, l'angle ∢BPA mesure 40°.

et ∢BOA = 2∢BPA ou ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

C

Les angles dont le sommet est sur la circonférence de la circonférence sont appelés : **angles inscrits.**

Sous-tendre le même arc signifie partager le même arc.

Dans une circonférence, il est vrai que la mesure de l'angle au centre qui sous-tend le même arc que n'importe quel angle inscrit est le double de la mesure de n'importe quel angle inscrit qui sous-tend le même arc.

Détermine la mesure d'un angle inscrit dans une circonférence dont l'angle au centre, qui a le même arc que l'angle inscrit, mesure 160°. Utilise un schéma comme dans le premier problème.

Indicateur de réussite

1.2 Distinguer les types d'angles inscrits sur la circonférence et leur relation intuitive à l'angle au centre.

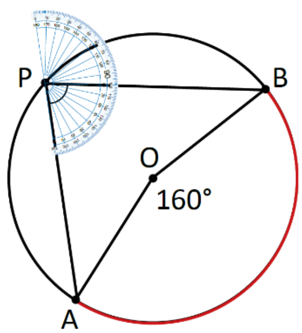
Séquence

Le concept de l'angle inscrit dans un cercle est introduit dans ce cours. Simultanément, la propriété en lien avec sa mesure est présentée. La propriété est étudiée intuitivement à partir de la construction, c'est-à-dire, à l'aide d'instruments de géométrie. Ce cours est important car il sert de base aux trois cours suivants, certains éléments sont repris et sont détaillés dans la section Objectif.

Objectif

Ⓟ Proposer trois cas possibles qui peuvent se produire lorsqu'on bouge le point sur la circonférence. Il se peut que les élèves proposent plus de formes, mais, toutes les formes ressembleront à l'un ou l'autre des cas présentés. Le 1er fait référence au cas où l'angle au centre est sur un côté de l'angle inscrit, le 2e au cas où l'angle au centre est dans l'angle inscrit et ; enfin, le 3e au cas où l'angle au centre est en dehors de l'angle inscrit.

Solution de certains exercices :



Mesure de ∢BPA = 80°

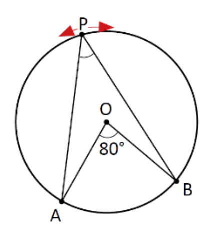
∢BOA = 2∢BPA

ou

∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

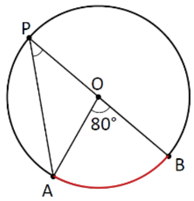
Date : **U7 1.2**

Ⓟ Mesure ∢BPA en plaçant P à différentes positions sur la circonférence. Compare la mesure de ∢BPA avec celle de ∢BOA.

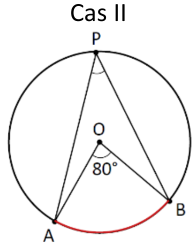


Ⓢ

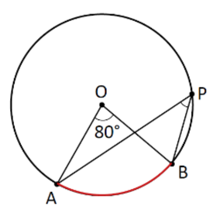
Cas I



Cas II

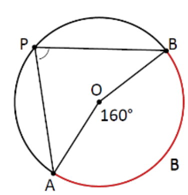


Cas III



Dans les trois cas ∢BPA = 40°, y ∢BOA = 2∢BPA ou ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Ⓡ



La mesure de ∢BPA = 80°

∢BOA = 2∢BPA

ou

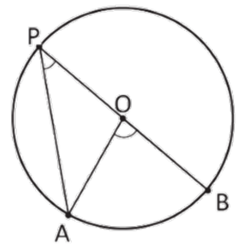
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Devoirs : manuel, page 149.

1.3 Les angles inscrits, 1[re] partie

P

Démontre que l'angle ∢BOA = 2 fois l'angle ∢BPA lorsque le centre se trouve quelque part dans le triangle ΔBPA.



Le diamètre est la corde qui passe par le centre de la circonférence.

S

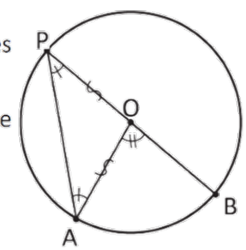
Dans le triangle ΔAOP : OP = OA (ce sont les rayons de la circonférence).

Donc, l'angle ∢OPA = l'angle ∢PAO (des côtés égaux s'opposent à des angles égaux).

Ou encore, l'angle ∢BOA = l'angle ∢OPA + l'angle ∢PAO (∢BOA est l'angle externe du triangle ΔAOP).

Donc, l'angle ∢BOA = 2 fois l'angle ∢OPA et comme ∢OPA = ∢BPA,

alors, l'angle ∢BOA = 2 fois l'angle ∢BPA.



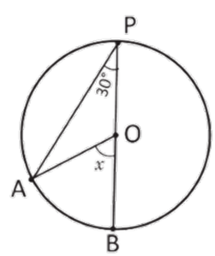
C

Dans les angles inscrits dont le côté correspond avec le diamètre de la circonférence, il s'avère que **la mesure de l'angle au centre sous-tendant le même arc est le double de la mesure de l'angle inscrit.**

E

Détermine la valeur de x dans chaque cas.

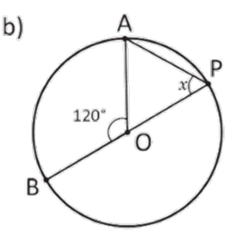
a)



Comme ∢BOA = 2 ∢BPA.

donc, $x = 2(30°) = 60°$.

b)



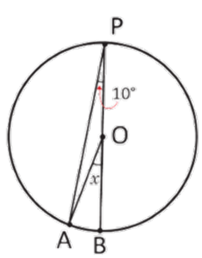
Comme ∢BOA = 2 ∢BPA.

alors, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

donc, $x = \frac{120°}{2} = 60°$.

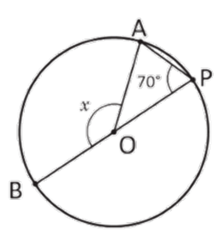
Détermine la valeur de x dans chaque cas.

a)



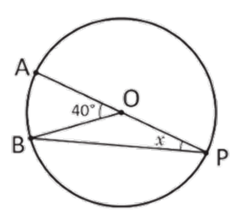
$x = 20°$

b)



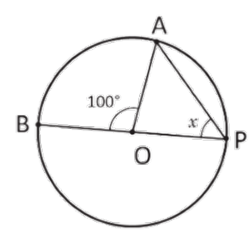
$x = 140°$

c)



$x = 20°$

d)



$x = 50°$

Indicateur de réussite

1.3 Déterminer les mesures des angles inscrits dont les côtés coïncident avec le diamètre d'une circonférence.

Séquence

Dans le cours précédent, la propriété concernant la mesure d'un angle inscrit a été établi intuitivement.
Dans ce cours, cela sera fait de manière formelle, en utilisant une situation semblable à celle du cas 1 de la section « La solution » du cours précédent.

Objectif

Ⓟ Appliquer le concept du rayon d'un cercle, les caractéristiques d'un triangle isocèle et la propriété de mesure de l'angle externe d'un triangle pour résoudre le problème initial. La première étape de la stratégie de la solution est de déterminer que ΔAOP est un triangle isocèle, car ces côtés coïncident avec les deux rayons de la circonférence. On considère ensuite que la mesure de l'angle externe BOA est la somme des deux angles internes qui ne lui sont pas adjacents qui, dans ce cas, sont égaux car ΔAOP est isocèle.

Ⓢ Appliquer directement la propriété de l'angle inscrit afin de déterminer la valeur d'une inconnue pour des angles qui sont dans une position différente de celle du problème initial.

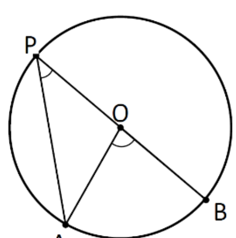
Solution de certains exercices :

a) Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$
donc, $x = 2(10°) = 20°$.

c) Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$
alors, $\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$.
donc, $x = \frac{40°}{2} = 20°$.

Date : **U7 1.3**

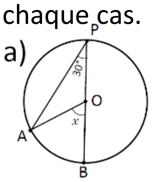
Ⓟ Montre que $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$.



Ⓢ Dans ΔAOP : OP = OA (rayons de la circonférence) **(1)**
$\sphericalangle OPA = \sphericalangle PAO$ (des côtés égaux sont opposés à des angles égaux)
$\sphericalangle BOA = \sphericalangle OPA + \sphericalangle PAO$ ($\sphericalangle BOA$ est l'angle externe de ΔAOP) **(2)**
$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle OPA$ (selon (1) et (2))
alors, $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$.

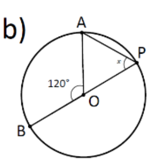
Ⓔ Détermine la valeur de x dans chaque cas.

a)



$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$
donc,
$x = 2(30°) = 60°$.

b)



$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$
alors,
$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$
donc, $x = \frac{120}{2} = 60°$.

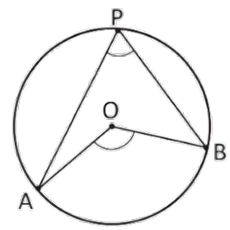
Ⓡ a) $x = 20°$ b) $x = 140°$
c) $x = 20°$ d) $x = 50°$

Devoir : manuel, page 150.

1.4 Les angles inscrits, 2e partie

P

Démontre que l'angle ∢BOA = 2 fois l'angle ∢BPA, quand le centre se trouve dans l'angle ∢BPA.



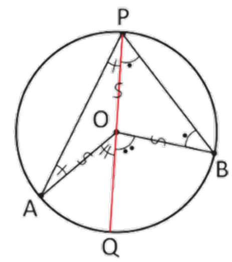
S

Trace le diamètre QP.

∢QOA = 2∢QPA et ∢BOQ = 2∢BPO (comme étudié dans le cours 3).

En additionnant les deux égalités
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

donc, ∢BOA = 2 ∢BPA.



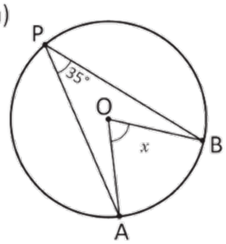
C

Dans les angles inscrits dans l'angle au centre, qui sous-tend le même arc, il est également vrai que **la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit**.

E

Détermine la valeur de x dans chaque cas.

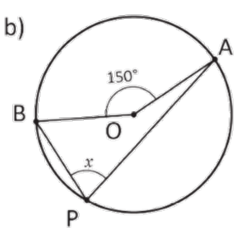
a)



Comme ∢BOA = 2 ∢BPA.

donc, $x = 2(35°) = 70°$.

b)



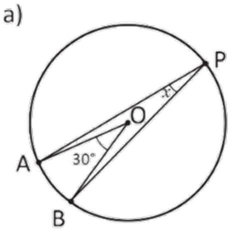
Comme ∢BOA = 2 ∢BPA.

alors, ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

donc, $x = \frac{150°}{2} = 75°$.

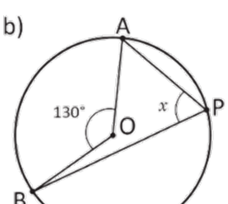
Détermine la valeur de x dans chaque cas.

a)



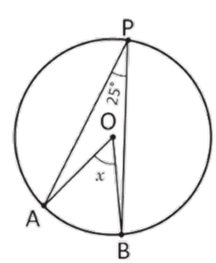
$x = 15°$

b)



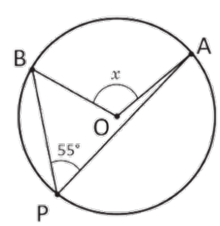
$x = 65°$

c)



$x = 50°$

d)



$x = 110°$

Module 7

147

Indicateur de réussite

1.4 Déterminer les mesures d’angles inscrits dont l’angle au centre est dans l’angle inscrit.

Séquence

Pour ce cours, nous prenons un cas similaire au cas 2 de la section « La solution » du cours 1.2 afin de démontrer la propriété. Pour ce faire, la démonstration faite au cours précédent est utilisée.

Objectif

Ⓟ La première étape de la stratégie de solution consiste à tracer le diamètre PQ afin d’avoir une situation similaire à celle du problème initial du cours précédent et de pouvoir utiliser le résultat obtenu comme outil de démonstration.

Ⓢ Appliquer directement la propriété de l’angle inscrit pour déterminer la valeur d’une inconnue pour des angles qui sont dans une position différente de celle du problème initial.

Solution de certains exercices :

a) Comme ∢BOA = 2∢BPA

alors, $∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA$.

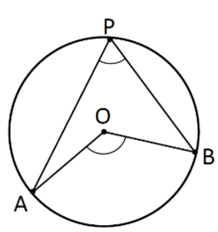
donc, $x = \frac{30°}{2} = 15°$.

c) Comme ∢BOA = 2∢BPA

donc, $x = 2(25°) = 50°$.

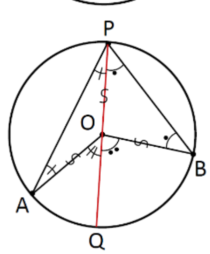
Date : **U7 1.4**

Ⓟ Démontre que :
∢BOA = 2∢BPA
Quand le centre est dans l’∢BPA.



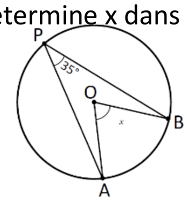
Ⓢ

Trace le diamètre QP.
∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO
(comme vu dans le cours 3)
Somme des deux égalités
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ
= 2(∢QPA + ∢BPQ)
donc, ∢BOA = 2∢BPA.



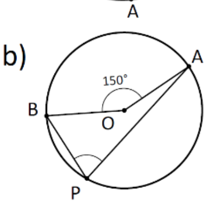
Ⓔ Détermine x dans chaque cas.

a)



Comme ∢BOA = 2∢BPA.
alors
$x = 2(35°) = 70°$.

b)



Comme ∢BOA = 2∢BPA
$∢BPA = \frac{1}{2}∢BOA$.
alors
$x = \frac{150°}{2} = 75°$.

Ⓡ a) $x = 15°$ b) $x = 65°$
c) $x = 50°$ d) $x = 110°$

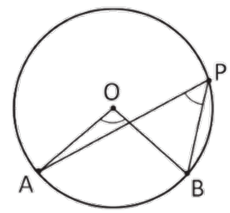
Devoirs : manuel, page 151.

Leçon 1

1.5 Le théorème de l'angle inscrit

P

Démontre que l'angle ∢BOA = 2 fois l'angle ∢BPA lorsque le centre est à l'extérieur de l'angle ∢BPA.



S

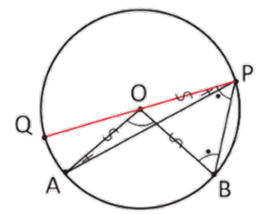
Trace le diamètre QP.

∢AOQ = 2∢APQ et ∢BOQ = 2∢BPQ (comme étudié dans le cours 3).

Comme ∢BOA = ∢BOQ - ∢AOQ.

alors, ∢BOA = 2∢BPQ - ∢APQ = 2(∢BPQ - ∢APQ) = 2∢BPA.

donc , ∢BOA = 2∢BPA.



C

Dans une circonférence, pour tout angle inscrit, il est vrai de stipuler que **la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit qui sous-tend le même arc.**

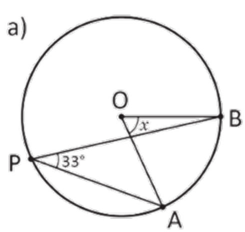
Les angles inscrits qui sous-tendent le même arc sont également égaux.

Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de l'angle inscrit.**

E

Détermine la valeur de x dans chaque cas.

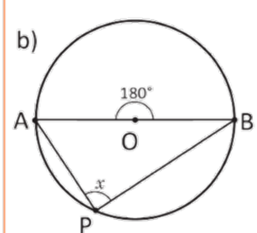
a)



Comme ∢BOA = 2 ∢BPA.

donc, x = 2(33°) = 66°.

b)



Comme∢BOA = 2 ∢BPA.

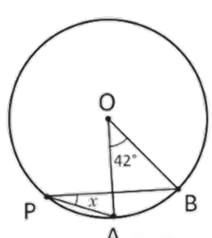
alors,∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

donc, $x = \frac{180°}{2} = 90°$.

L'angle inscrit dans le demi-circonférence mesure 90°.

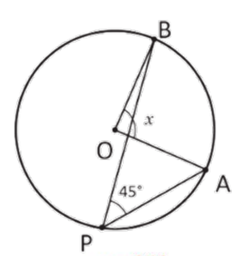
Détermine la valeur de x, y et z dans chaque cas.

a)



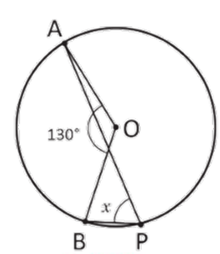
x = 21°

b)



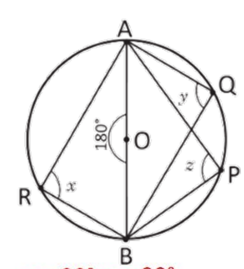
x = 90°

c)



x = 65°

d)



x = 90° y = 90°
z = 90°

Indicateur de réussite

1.5 Utiliser le théorème de l'angle inscrit pour déterminer la mesure des angles sur la circonférence.

Séquence

Une situation similaire au cas 3 de la section « La solution » du cours 1.2 est utilisée pour démontrer la propriété. Pour ce faire, la démonstration faite au cours 1.3 est utilisée.

Objectif

Ⓟ La première étape de la stratégie de solution consiste à tracer le diamètre PQ afin d'avoir une situation similaire à celle du cas 1, comme dans le problème initial du cours 1.3 et de pouvoir utiliser le résultat obtenu comme outil de démonstration.

Ⓢ En plus du résultat, il est important de noter dans la case d'informations supplémentaires que le nom donné à la relation entre les mesures de l'angle inscrit et de l'angle central est le **théorème de l'angle inscrit**. © Appliquer directement la propriété de l'angle inscrit pour déterminer la valeur d'une inconnue pour des angles qui sont dans une position différente de celle du problème initial.

Solution de certains exercices :

a) Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

alors, $\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA.$

donc, $x = \frac{42°}{2} = 21°.$

b) Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

donc, $x = 2(45°) = 90°.$

d) Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

alors, $\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA.$

donc, $z = \frac{180°}{2} = 90°.$

Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BQA$

alors, $\sphericalangle BQA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA.$

donc, $y = \frac{180°}{2} = 90°.$

Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BRA$

alors, $\sphericalangle BRA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA.$

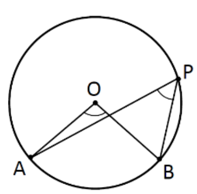
donc, $x = \frac{180°}{2} = 90°.$

Date : **U7 1.5**

Ⓟ Démontre que

$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA.$

Quand le centre est en dehors de $\sphericalangle BPA$



Ⓢ Trace le diamètre QP.

$\sphericalangle AOQ = 2\sphericalangle APQ$ y $\sphericalangle BOQ = 2\sphericalangle BPQ$

(comme étudié au cours 3)

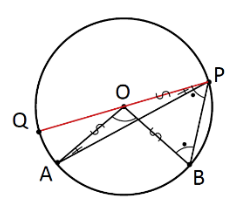
Comme $\sphericalangle BOA = \sphericalangle BOQ - \sphericalangle AOQ$

$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPQ - 2\sphericalangle APQ$

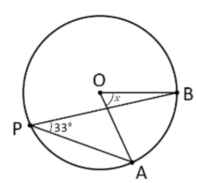
$= 2(\sphericalangle BPQ - \sphericalangle APQ)$

$= 2\sphericalangle BPA.$

donc, $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA.$



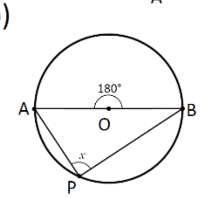
Ⓔ a)



Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

donc, $x = 2(33°) = 66°.$

b)



Comme $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA.$

donc, $x = \frac{180}{2} = 90°.$

Ⓡ a) $x = 21°$ b) $x = 90°$

c) $x = 65°$ d) $x = 90°$

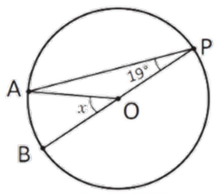
$y = 90°$

$z = 90°$

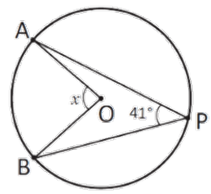
Devoirs : manuel, page 152.

1.6 Mets en pratique ce que tu as appris

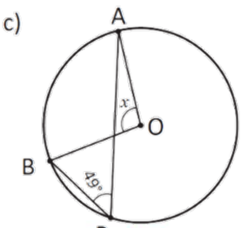
1. Détermine la valeur de x dans chaque cas

a)


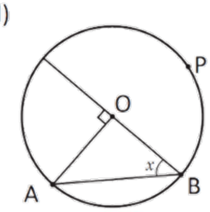
$x = 38°$

b)


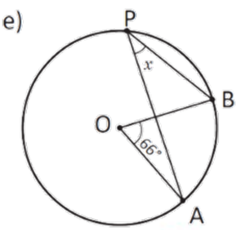
$x = 82°$

c)


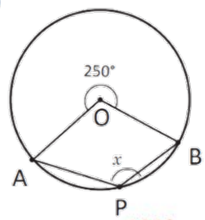
$x = 98°$

d)


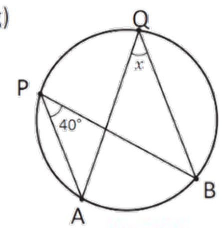
$x = 45°$

e)


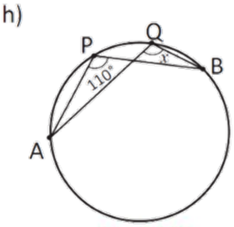
$x = 33°$

f)


$x = 125°$

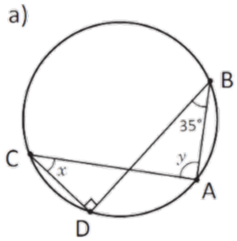
g)


$x = 40°$

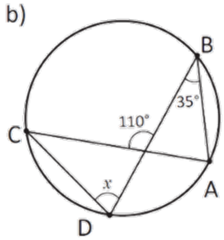
h)


$x = 110°$

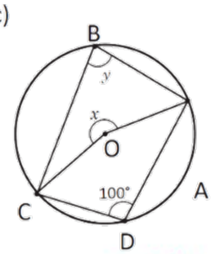
2. Détermine la valeur de x et y selon les cas.

a)


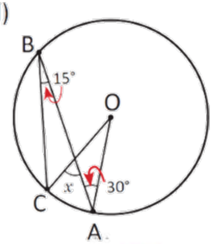
$x = 35°$
$y = 90°$

b)


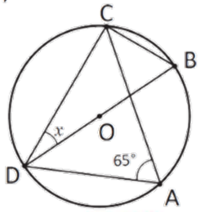
$x = 75°$

c)


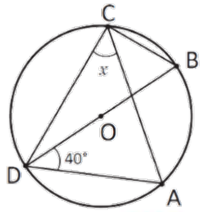
$x = 200°$
$y = 80°$

d)


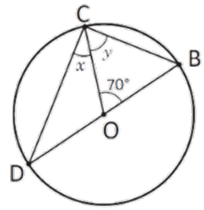
$x = 60°$

e)


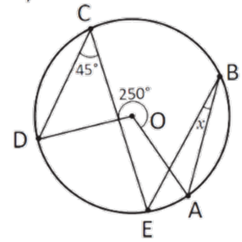
$x = 25°$

f)


$x = 50°$

g)


$x = 35°$
$y = 55°$

h)


$x = 10°$

Module 7

Indicateur de réussite

1.6 Résoudre les problèmes correspondant aux angles inscrits et aux angles au centre.

Solution de certains exercices :

1.

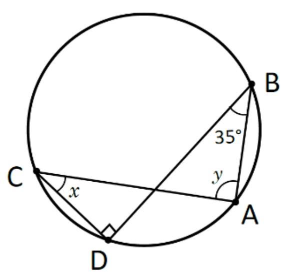
a) Comme $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$
donc, $x = 2(19°) = 38°$.

e) Comme $\measuredangle BOA = 2\measuredangle BPA$
alors, $\measuredangle BPA = \frac{1}{2}\ \measuredangle BOA$.
donc, $x = \frac{66°}{2} = 33°$

h) $x = \measuredangle BQA = \measuredangle BPA = 110°$,
parce que les deux angles inscrits sous-tendent $\overset{\frown}{AB}$.

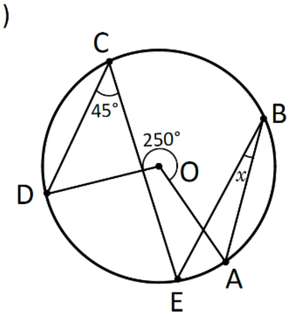
2.

a)



Comme $\measuredangle CED = 90° - 35° = 55°$,
alors $\measuredangle BEA = \measuredangle CED = 55°$.
donc, $y = 180° - 35° - 55° = 90°$.

h)



Trace d'abord $\overline{OE}$.
$\measuredangle AOD = 360° – 250° = 110°$
$\measuredangle EOD = 2(45°) = 90°$
$\measuredangle AOD = \measuredangle AOE + \measuredangle EOD$
$110° = \measuredangle AOE + 90°$
$\measuredangle AOE = 20°$

donc,
$x = \measuredangle ABE = \frac{1}{2}\ \measuredangle AOE\ = \frac{20°}{2} = 10°$.
$x = 10°$

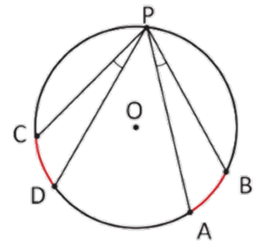
Devoirs : manuel, page 153.

Leçon 1

1.7 Les arcs congruents

P

Compare la mesure de l'angle ∢BPA avec celle de l'angle ∢DPC sur la figure suivante, si l'arc $\overset{\frown}{CD}$ = l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



La notation $\overset{\frown}{AB}$ signifie la portion de l'arc entre le point A et le point B.

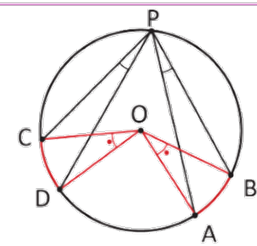
S

Les angles ∢BOA et ∢DOC sont construits.

∢BOA = ∢DOC ($\overset{\frown}{CD}$ = $\overset{\frown}{AB}$ par hypothèse).

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA et ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC (selon l'angle inscrit).

Donc, ∢BPA = ∢DPC.



C

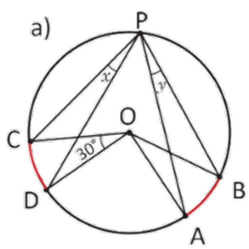
Dans la circonférence, les angles inscrits, qui sous-tendent des arcs égaux, ont la même mesure.

Il est également vrai que, si deux angles inscrits sont égaux, alors les arcs qu'ils sous-tendent sont également égaux.

E

Détermine la valeur de x et y dans chaque cas, quand l'arc $\overset{\frown}{CD}$ = l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

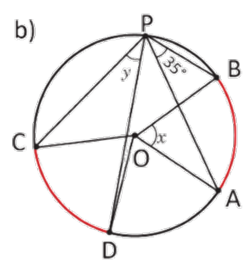
a)



Comme ∢BOA = ∢DOC.

donc,
$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

b)



Comme ∢BOA = 2∢BPA.

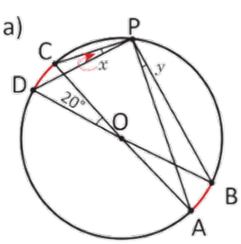
donc, $x = 2(35°) = 70°$.

donc, ∢BOA = ∢DOC.

alors, y =∢DPC = ∢BPA = 35°.

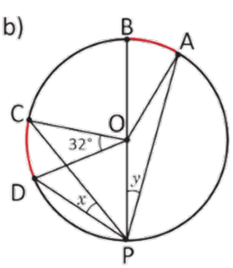
Détermine la valeur de x et y dans chaque cas. Considère que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$.

a)



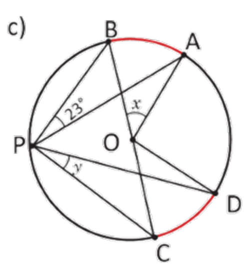
$x = y = 10°$

b)



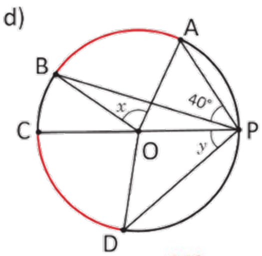
$x = y = 16°$

c)



$x = 46°$
$y = 23°$

d)



$x = 80°$
$y = 40°$

Indicateur de réussite

1.7 Déterminer la mesure des angles inscrits qui sous-tendent des arcs de même longueur.

Séquence

Pour ce cours, il est établi que les angles inscrits qui sous-tendent des arcs égaux, ont la même mesure ; et réciproquement, si deux angles inscrits sont égaux, alors les arcs qu'ils sous-tendent sont également égaux. Pour démontrer cette propriété, les angles au centre respectifs sont tracés en premier. Cette stratégie est utilisée car, en septième année, la longueur de l'arc de segments circulaires dont l'angle était considéré comme l'angle au centre d'un cercle a été étudié. Les élèves savent donc déjà que si deux arcs sont égaux, alors les angles au centre doivent être égaux. Ils sous-tendent.

Objectif

Ⓟ Comme première étape de la comparaison, les angles au centre ∢BOA y ∢DOC sont tracés, puis, il est déterminé que ces angles au centre sont égaux parce que $\overset{\frown}{CD}$ = $\overset{\frown}{AB}$ (la longueur d'un arc d'un segment circulaire a été étudié en 7^{e} année).

Ⓢ Appliquer directement la propriété de d'angle inscrit pour déterminer la valeur d'une inconnue pour des angles dont la position est différente que ceux du problème initial.

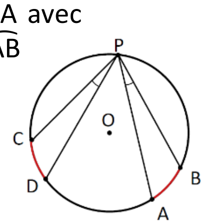
Solution de certains exercices :

a) Comme ∢BOA = ∢COD.
donc, $y = x = \frac{20°}{2} = 10°$.

c) Comme ∢BOA = 2∢BPA.
alors, $x = 2(23°) = 46°$.
de plus, ∢BOA = ∢DOC.
donc, y = ∢DPC = ∢BPA = 23°.

Date : **U7 1.7**

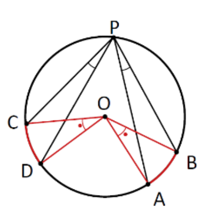
Ⓟ Compare la mesure de ∢BPA avec ∢DPC dans la figure si $\overset{\frown}{CD}$ = $\overset{\frown}{AB}$



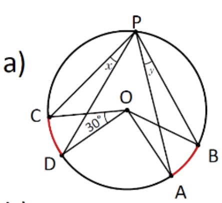
Ⓢ Les angles sont construits :
∢BOA et ∢DOC
∢BOA = ∢DOC
($\overset{\frown}{CD}$ = $\overset{\frown}{AB}$ par hypothèse)

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA et
∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC
(selon l'angle inscrit)

donc, ∢BPA = ∢DPC.

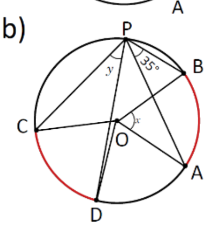


Ⓔ a)



Comme
∢BOA = ∢DOC.
donc,
$y = x = \frac{30}{2} = 15°$.

b)



Comme
∢BOA = 2∢BPA.
alors,
$x = 2(35°) = 70°$.
de plus,
∢BOA = ∢DOC.
donc,
y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

Ⓡ a) $x = y = 10°$ b) $x = y = 16°$
c) $x = 46°$ d) $x = 80°$
$y = 23°$ $y = 40°$

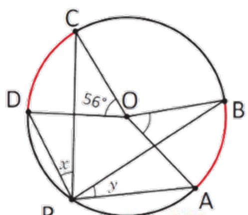
Devoirs : manuel, page 154.

Leçon 1

1.8 Mets en pratique ce que tu as appris

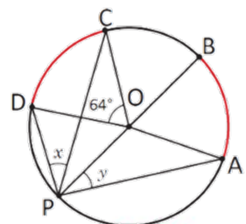
1. Détermine la valeur de x et y dans chaque cas. Considère que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$.

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



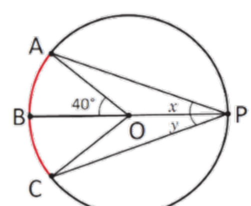
$x = 28°$
$y = 28°$

b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



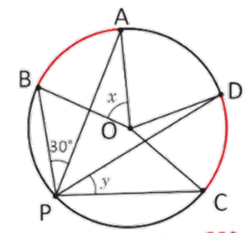
$x = 32°$
$y = 32°$

c) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



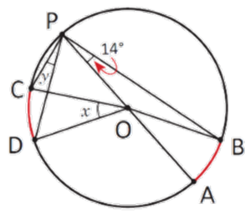
$x = 20°$
$y = 20°$

d) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



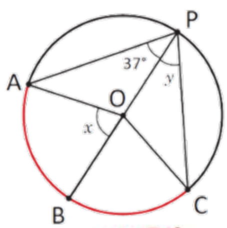
$x = 60°$
$y = 30°$

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



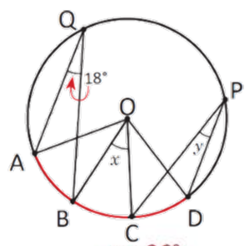
$x = 28°$
$y = 14°$

f) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



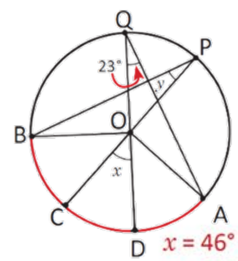
$x = 74°$
$y = 37°$

g) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$



$x = 36°$
$y = 18°$

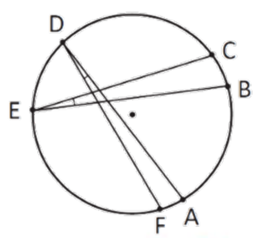
h) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$



$x = 46°$
$y = 23°$

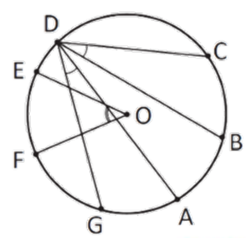
2. Sur les circonférences suivants, détermine les arcs égaux.

a) ∢ADF = ∢CEB



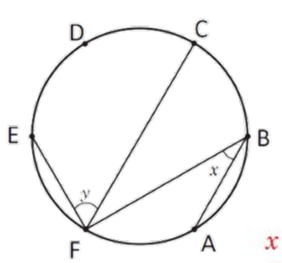
$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CB}$

b) ∢FOE = 2∢CDB y ∢BDC = ∢ADG



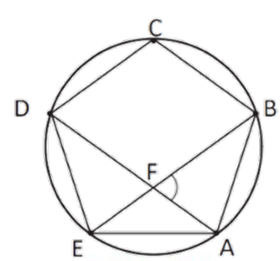
$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{AG}$

3. Utilise la figure et détermine la valeur de x et y si les points A, B, C, D, E et F divisent la circonférence en six arcs égaux.



$x = 30°$
$y = 60°$

4. Sur la figure, ABCDE est un pentagone régulier, trace les diagonales AD et BE. Détermine la mesure de l'angle ∢BFA.



∢BFA = 72°

Module 7

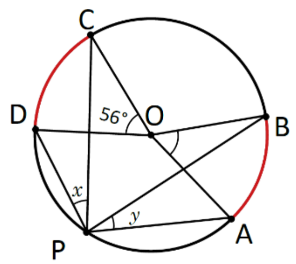
Indicateur de réussite

1.8 Résoudre des problèmes sur l'angle inscrit et l'angle au centre.

Solution de certains exercices :

1.

a)



$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC$ parce $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{CD}$,

$\sphericalangle BOA = \sphericalangle DOC = 56°$ qu'ils sont opposés au sommet.

Donc,

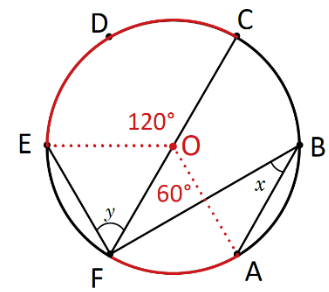
$x = y = \dfrac{56}{2} = 28°$.

3.

Comme il y a 6 arcs égaux, les 360° de la circonférence doivent également être divisés en 6 angles égaux.

$360 \div 6 = 60°$.

Ce qui signifie que l'angle au centre de chaque arc mesure 60°.



Comme $\sphericalangle COE = 2\sphericalangle CFE$.

alors, $\sphericalangle CFE = \dfrac{1}{2}\sphericalangle COE$.

donc, $y = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

Comme $\sphericalangle AOF = 2\sphericalangle ABF$.

alors, $\sphericalangle ABF = \dfrac{1}{2}\sphericalangle AOF$.

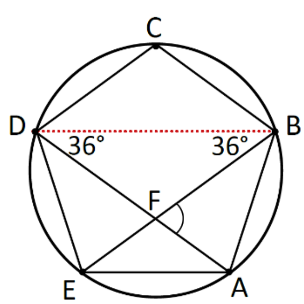
donc, $x = \dfrac{60°}{2} = 30°$.

4.

Comme le pentagone est régulier, chaque arc délimité par les sommets du pentagone a la même longueur.

Donc, chaque arc correspond à un angle au centre de $\frac{360°}{5} = 72°$. Donc, $\sphericalangle FBD = \sphericalangle FDB = \frac{72°}{2} = 36°$.

Dans ΔBFD, $\sphericalangle BFA = \sphericalangle FBD + \sphericalangle FDB = 72°$.

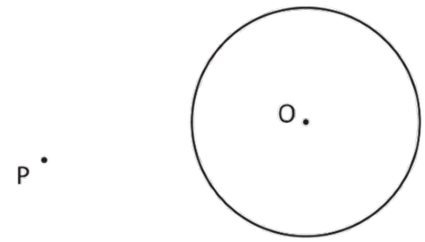


Devoirs : manuel, page 155.

2.1 La construction de tangentes à une circonférence

P

À partir de la circonférence donné et du point P, construis avec une règle et un compas les droites passant par le point P et qui sont tangentes à la circonférence.



S

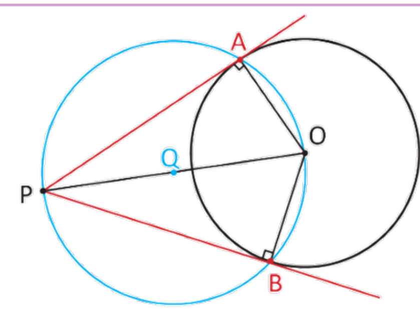
Considérant le milieu du segment PO, indiqué par Q,

trace la circonférence dont le centre est Q et le rayon QO.

indique les points A et B, où les circonférences se croisent.

Alors, l’angle ∢OAP = l’angle ∢PBO = 90° (les deux sous-tendant un arc de 180°).

Donc, les droites PA et PB sont tangentes à la circonférence dont le centre est O.



La droite perpendiculaire au rayon à un point de la circonférence est tangente à la circonférence.

C

En utilisant les résultats de l’angle inscrit, il est possible de construire des droites passant par un point P et tangentes à une circonférence donné en suivant les étapes décrites dans la « Solution » ci-dessus.

1. Trace une nouvelle circonférence et place un point P à l’extérieur de la circonférence. Construis les tangentes de la circonférence passant par le point P.

2. Sur la base des exercices faits en classe, réponds :

   a) Est-ce que les segments PA et PB sont les mêmes ?

   b) Pourquoi ?

Tu peux utiliser la congruence des triangles pour justifier ta réponse.

Indicateur de réussite

2.1 Construire des tangentes à un cercle à partir d'un point en dehors du cercle.

Séquence

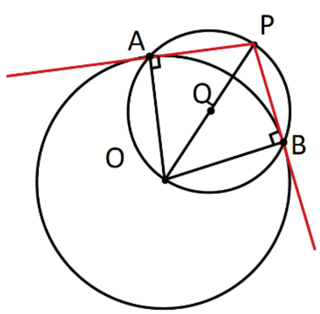
En 7e année, le concept de la tangente à un cercle a été introduit, les élèves connaissent donc déjà ce type de droite. Dans ce cours, deux tangentes passant par un point extérieur à la circonférence du cercle sont tracées. En outre, grâce à la propriété des angles inscrits, on en déduit qu'une droite perpendiculaire au rayon à un point sur la circonférence est tangente à ce point.

Objectif

Ⓟ Après avoir tracé les droites tangentes, faire remarquer aux élèves l'information donnée dans l'encadré de rappel qui indique qu'une droite perpendiculaire à un rayon à un point de la circonférence du cercle est une tangente.

Solution de certains exercices :

1.



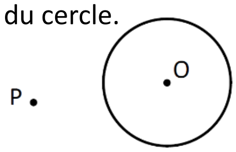
2.

a) Oui

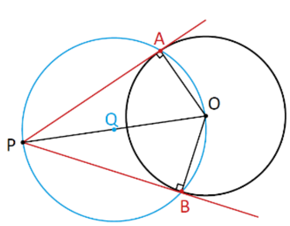
b) Parce que les triangles ΔOAP et ΔOBP sont des triangles rectangles et que leurs hypoténuses et un de leurs côtés correspondant aux rayons sont égaux (critère de congruence pour les triangles rectangles). Par conséquent, PA = PB.

Date : **U7 2.1**

Ⓟ Trace les droites passant par le point P et qui sont tangentes à la circonférence du cercle.



Ⓢ

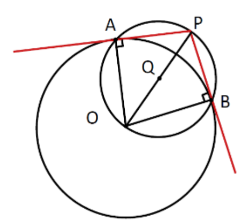


1. En prenant le milieu de $\overline{PO}$, indiqué par Q, la circonférence dont le centre est Q et le rayon $\overline{QO}$ sont tracés.

3. Les points A et B où les cercles se croisent sont indiqués.

4. Alors, ∢OAP = ∢PBO = 90° (tous les deux sous-tendent un arc de 180°).
   Donc, les droites PA et PB sont tangentes au cercle dont le centre est O.

Ⓡ 1.

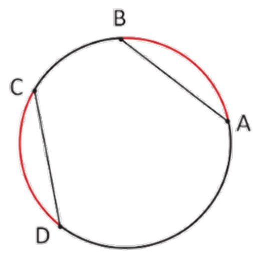


Devoirs : manuel, page 156.

2.2 Les cordes et les arcs de circonférence

P

Sur la figure suivante, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$. Compare la longueur des cordes AB et CD.



S

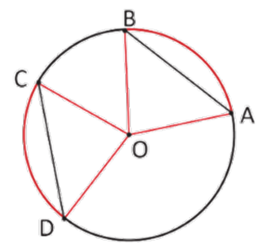
Trace les rayons OA, OB, OC et OD.

∢BOA = ∢DOC (parce que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$).

OA = OB = OC = OD (ce sont des rayons de la circonférence).

Alors, ΔBOA ≅ ΔDOC (selon le critère CAC).

Donc, la corde AB = la corde CD (par congruence).



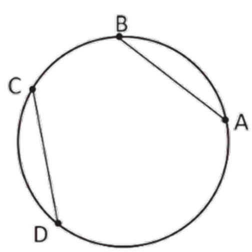
Pour appliquer le critère de congruence CAC, deux côtés et l'angle qu'ils forment doivent être congruents.

C

Dans une circonférence , si deux arcs sont égaux, alors les cordes qui sous-tendent ces arcs sont égales.

E

Dans le schéma suivant, AB = CD. Compare la longueur des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$.

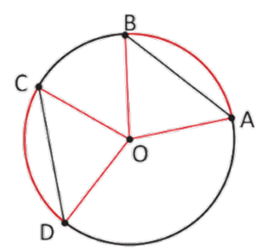


Trace les rayons OA, OB, OC et OD.

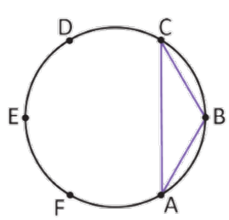
alors, ΔBOA ≅ ΔDOC (selon le critère CCC).

et, ∢BOA = ∢DOC (par congruence).

donc, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$ (l'angle du centre est égal).



Les points A, B, C, D, E, et F divisent la circonférence en six arcs égaux. Classe les figures formées en joignant les points donnés dans chaque énoncé. Observe l'exemple :



a) ABC La corde BA = la corde BC (parce que l'arc $\overset{\frown}{BA}$ = l'arc $\overset{\frown}{BC}$).
R : ABC est un triangle isocèle.

b) ABDE c) ACE d) ACD

e) ABCDEF f) DEF g) ABCD

Module 7

Indicateur de réussite

2.2 Classer les figures dont les côtés sont égaux à l'aide des cordes et des arcs congruents.

Séquence

Nous avons déjà travaillé sur les critères de congruence des triangles ; il a également été démontré que si deux arcs sont égaux, alors les angles au centre qui les sous-tendent sont égaux. Ce qui précède nous permet d'établir que sur une circonférence, si deux arcs sont égaux, alors les cordes qu'ils sous-tendent sont égales.

Objectif

Ⓟ Dans un premier temps, tracer les triangles ΔBOA et ΔDOC qui sont isocèles parce que leurs côtés sont égaux car ce sont les rayons de la circonférence. Alors, grâce au critère CAC, il peut en être déduit que les triangles sont congruents (les côtés en rouge sont égaux, ainsi que l'angle entre eux puisque AB = CD).

Déterminer que AB = CD, avec une construction similaire à celle des triangles ΔBOA et ΔDOC, à la différence que le critère CCC est appliqué pour déterminer que les triangles sont congruents puisqu'on fait l'hypothèse que AB = CD. Ensuite, sur la base de cette congruence, on en déduit que les arcs sont égaux puisqu'ils sont sous-tendus par des angles égaux.

Solution de quelques exercices :

b) ∢ABD = 90° (parce qu'$\overline{AD}$ est le diamètre).
De même : ∢BDE = ∢DEA = ∢EAB = 90°.
R : ABDE est un rectangle.

c) AC = CE = EA (parce qu'AC = CE = EA) ACE est un triangle équilatéral.

d) ∢ACD = 90° (parce qu' $\overline{AD}$ est le diamètre)
R : ACD est un triangle rectangle.

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$
∢ABC = ∢BCD = ∢CDE = ∢DEF = ∢EFA
(parce qu'AB = BC = CD = DE = EF = FA)
R : ABCDEF est un hexagone régulier.

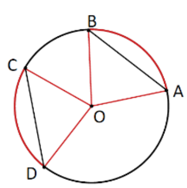
f) DE = EF (parce que DE = EF)
R : DEF est un triangle isocèle.

g) AB = CD (parce qu'$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (parce que ∢ACB = ∢DBC comme $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
R. ABCD est un trapèze isocèle.

Date : **U7 2.2**

Ⓟ Dans la figure $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, compare la longueur des cordes AB et CD.

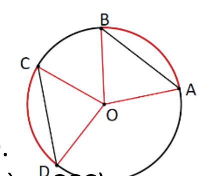
Ⓢ



Trace les rayons OA, $\overset{\frown}{OB}$, $\overset{\frown}{OC}$ et OD.
∢BOA = ∢DOC (parce que AB = CD)
OA = OB = OC = OD (rayons de la circonférence).

alors, ΔBOA ≅ ΔDOC (selon le critère CAC).
donc, AB = CD (par congruence).

Ⓔ Si AB = CD alors:



En traçant OA, OB, OC et OD.
ΔBOA ≅ ΔDOC. (selon le critère CCC)
∢BOA = ∢DOC (par congruence)
Donc, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.
(l'angle au centre est égal)

Ⓡ b) AB = DE et AE = BD
(parce que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$ et $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$)
R : ABDE est un rectangle

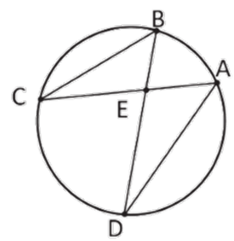
Devoirs : manuel, page 157.

Leçon 2

2.3 Application aux triangles semblables

P

Sur la figure suivante, détermine si $\Delta AED \sim \Delta BEC$.



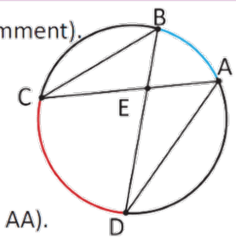
S

Sur la figure, l'angle $\sphericalangle AED$ = l'angle $\sphericalangle BEC$ (opposés au somment).

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$ (sous-tendent le même arc).

Si $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ et $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$.

donc, le triangle $\Delta AED \sim$ au triangle ΔBEC (selon le critère AA).



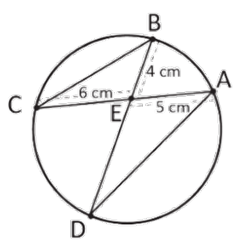
Pour appliquer le critère AA, il suffit uniquement que deux angles soient congruents.

C

Il faut observer les angles inscrits qui sous-tendent le même arc pour déterminer si les triangles sont semblables.

E

Sur la figure suivante, détermine la mesure du segment ED.



comme $\Delta AED \sim \Delta BEC$.

alors, $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AE}{BE}$.

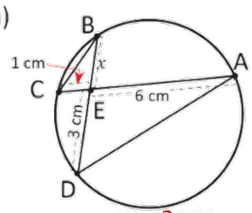
donc, $ED = EC \times \dfrac{AE}{BE} = 6 \times \dfrac{5}{4} = 7.5.$

ED = 7.5 cm

Quand 2 triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels.

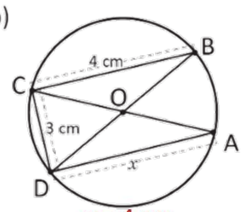
1. Determine x sur les figures suivantes :

a)



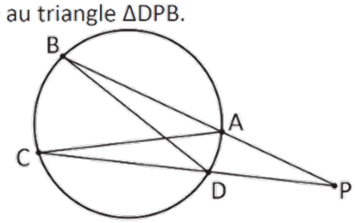
x = 2 cm

b)



x = 4 cm

2. Sur la figure suivante, détermine quelles conditions sont requises pour que le triangle ΔACP soit semblable au triangle ΔDPB.



Est-ce que quelque chose d'autre est nécessaire ?

Indicateur de réussite

2.3 Résoudre des problèmes avec des triangles semblables grâce au théorème de l'angle inscrit.

Séquence

Nous avons déjà travaillé sur le théorème des angles opposés et avons déterminé si deux triangles sont similaires. De même, les élèves ont appris au cours 1.7 de ce module que deux angles inscrits sont égaux s'ils sous-tendent des arcs égaux. Dans ce cours, ces faits sont utilisés pour démontrer qu'afin de déterminer la similarité entre des triangles tels que ceux du problème initial, il est nécessaire d'observer les angles inscrits qui sous-tendent le même arc.

Objectif

Ⓟ Après avoir établi la similitude des triangles, demander aux élèves de lire les informations de l'encadré donnant un indice.

Ⓢ Après avoir établi la similitude des triangles, demander aux élèves de lire les informations de l'encadré donnant un indice.

Solution de certains exercices :

1.

a) Comme $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (selon le critère de similitude AA).

alors, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

donc,

$BE = x = AE \times \frac{EC}{ED} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$x = 2$ cm

b) Dans les triangles ΔADC et ΔBCD, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 90°$, $CA = DB$ et $\overline{CD}$ est commun.

donc, $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.

alors $x = BC = 4$

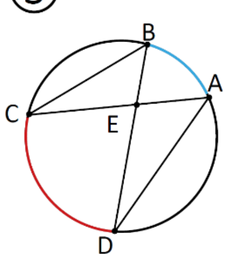
$x = 4$ cm

2. Dans les triangles ΔACP et ΔDBP, $\sphericalangle ACP = \sphericalangle DBP$ (puisque ce sont des angles inscrits sous-tendus par $\overset{\frown}{AD}$), $\sphericalangle P$ est commun.
Donc, $\Delta ACP \sim \Delta DBP$ (selon de critère de similitude AA).
Aucune autre condition n'est nécessaire.

Date : **U7 2.3**

Ⓟ Détermine s'il est vrai que $\Delta AED \sim \Delta BEC$ sur la figure.

Ⓢ

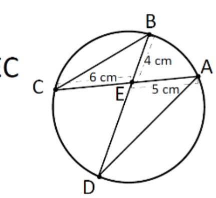


Sur la figure $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$.
(Ils sont opposés par le sommet)
$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC$.
(Ils sous-tendent le même arc)

mais $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DBC$ et $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAC$

donc, $\Delta AED \sim \Delta BEC$.
(selon le critère AA).

Ⓔ Sur la figure $\Delta AED \backsim \Delta BEC$



alors, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

donc, $ED = EC \times \frac{AE}{BE}$
$= 6 \times \frac{5}{4}$
$= 7.5$

Ⓡ 1.
a) $x = 2$ cm
b) $x = 4$ cm

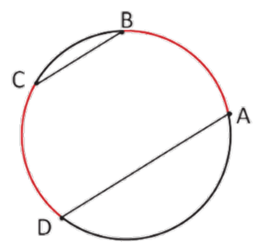
Devoirs : manuel, page 158.

Leçon 2

2.4 Parallélisme

P

Dans la figure suivante, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$. Détermine si les segments AD et BC sont parallèles ou sécants.

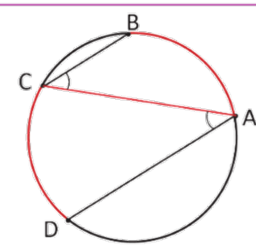


S

Trace la corde AC.

alors, l'angle $\measuredangle BCA$ = l'angle $\measuredangle DAC$ (puisque l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$).

Donc, BC est parallèle ∥ à AD (les angles internes alternés sont égaux).

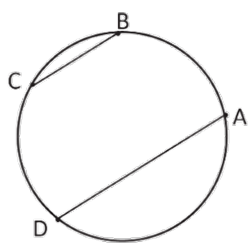


C

Si deux arcs de circonférence sont égaux, alors les cordes formées par le début d'un arc et la fin de l'autre arc sont parallèles.

E

Compare les arcs de circonférence $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$, si BC est parallèle ∥ à AD.

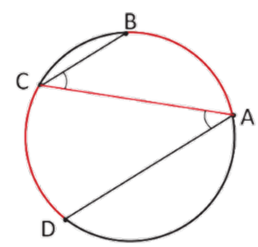


Trace le corde AC.

$\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (angles internes alternés).

Donc, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = l'arc $\overset{\frown}{CD}$ (théorème de l'angle inscrit).

Ce résultat est réciproque à celui du premier exercice.



Détermine lesquels de ces énoncés constituent une condition suffisante pour que les 4 points consécutifs A, B, C et D sur la circonférence, une fois reliés, forment au moins deux cordes parallèles.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$	b) $\measuredangle DBC = \measuredangle BDA$	c) CB = DA	d) $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$
e) AB = BC	f) $\measuredangle ACD = \measuredangle ADB$	g) AC = BD	h) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

Indicateur de réussite

2.4 Utiliser les arcs congruents pour déterminer le parallélisme entre deux cordes.

Séquence

Il est maintenant établi que si deux arcs sont égaux sur une circonférence, alors les cordes formées par l'extrémité d'un arc et le début de l'autre sont parallèles.

En huitième année, les conditions de parallélisme entre deux droites ont été étudiées. Dans le problème, la corde AC est tracée et comme l'angle ∢ACB = l'angle ∢CAD (par sous-tension d'arcs égaux), on détermine que BC et AD sont parallèles (∢ACB et ∢CAD sont des angles internes alternés). De plus, dans le cours 1.7, il a été déterminé que si deux arcs sont égaux, alors les angles inscrits qui les sous-tendent sont égaux.

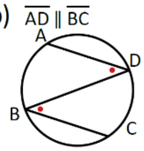
Objectif

Ⓟ Dans l'exemple, nous avons trouvé comme résultat la réciprocité de la propriété, c'est-à-dire, à partir du fait que $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ nous pouvons déterminer que AB = CD.

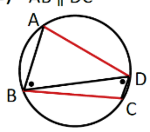
Solution de certains exercices :

Conditions suffisantes (b, c, d, g et h) :

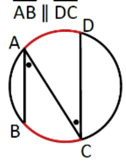
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



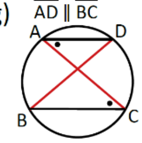
c) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

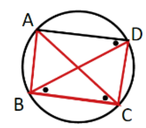


g) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



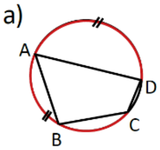
Si AC = BD alors, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.
Donc, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

h) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



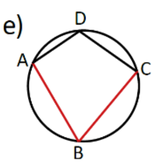
Conditions insuffisantes (a, e et f) :

a)



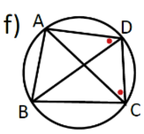
Le point B peut se déplacer sur $\overset{\frown}{AC}$

e)



Le point D peut se déplacer sur $\overset{\frown}{AC}$.

f)

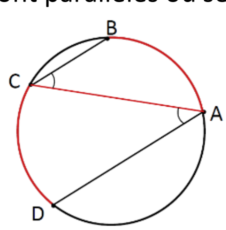


Le point C peut se déplacer sur $\overset{\frown}{BD}$.

Date : **U7 2.4**

Ⓟ Dans la figure, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Détermine si les segments AD et BC sont parallèles ou sécants.

Ⓢ

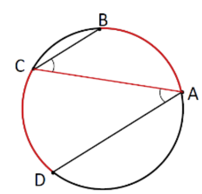


Trace la corde AC.

alors, ∢BCA = ∢DAC. (puisque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)

donc, BC ∥ AD.
(Les angles internes alternés sont égaux).

Ⓔ Si BC ∥ AD:



Trace la corde AC.
∢BCA = ∢DAC
(Angles internes alternés).

donc $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
(Théorème de l'angle inscrit).

Ⓡ b), c), d), g) et h)

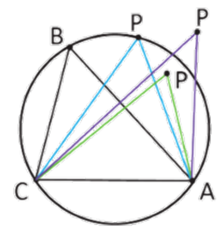
Devoirs : manuel, page 159.

Leçon 2

2.5 Quatre points sur la circonférence d'un cercle

P

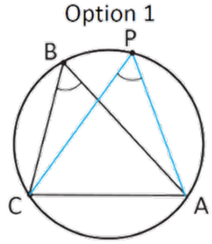
Considérant que l'angle ∢ABC = l'angle ∢APC et que ces deux angles ont en commun le segment AC.
Montre que les points A, B, C et P sont sur la même circonférence.



S

Il y a 3 options pour le point P: sur, dans ou à l'extérieur de la circonférence.

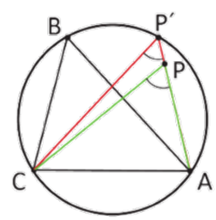
Option 1



Dans ce cas :
∢ABC = ∢APC.

Donc, A, B, C et P doivent être sur la même circonférence.

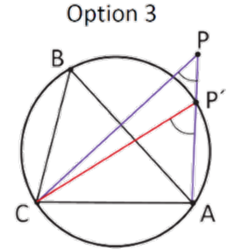
Option 2



Trace l'angle ∢AP'C, alors
∢ABC = ∢AP'C < ∢APC
comme ∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP

Donc, **∢ABC < ∢APC.**

Option 3



Trace l'angle ∢AP'C, alors
∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.
comme ∢AP´C = ∢APC + ∢PCP'.

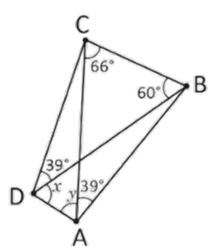
Donc, **∢ABC > ∢APC.**

C

Si deux angles égaux ont en commun un segment à leur ouverture, alors les quatre points sont sur la même circonférence.

E

Détermine la valeur de x et y.

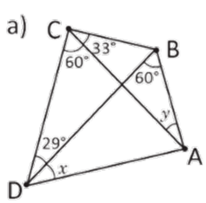


Comme l'angle ∢CAB = l'angle ∢CDB et que tous les deux ont en commun le segment CB, alors les points A, B, C et D sont sur la même circonférence.

La condition **∢BCA = ∢BDA** doit être satisfaite, alors x = 66°.
De plus, la condition **∢CBD = ∢CAD** doit également être satisfaite, alors y = 60°.

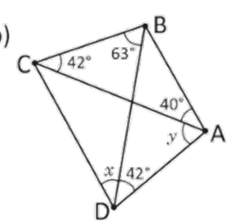
Détermine les valeurs de x et y.

a)



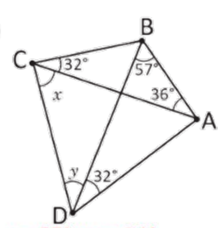
x = 33° y y = 29°

b)



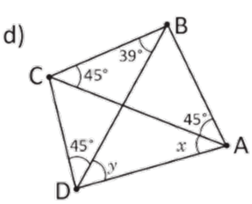
x = 40° y y = 63°

c)



x = 57° y y = 36°

d)



x = 39° y y = 45°

Indicateur de réussite

2.5 Déterminer les conditions pour que quatre points soient sur la circonférence d’un cercle.

Séquence

Dans ce cours, il est déterminé que si deux angles sont égaux et partage un segment à leur ouverture, alors les quatre points sont sur la même circonférence. Pour cela, les résultats obtenus à partir de la position qu’occupe un point P par rapport à la circonférence (à l’intérieur, sur et à l’extérieur de celle-ci) sont analysés.

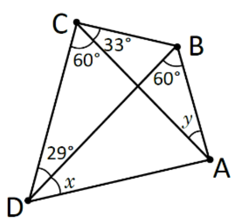
Objectif

Ⓟ L’énoncé du problème initial doit être : soit A, B et C des points fixes sur la circonférence et P, un autre point à l’intérieur, sur ou à l’extérieur de la circonférence. Si la condition ∢ABC = ∢APC est satisfaite et que les deux angles ont en commun le segment AC, montre que le point P est sur cette circonférence.

Ⓢ La solution traite des trois cas possibles pour démontrer que, lorsque le point n’est pas sur la circonférence, les angles ne sont pas égaux.

Solution de certains exercices :

a)



Puisque ∢ACD = ∢ABD et que les deux angles ont en commun le segment DA, alors A, B, C et D sont sur la même circonférence.

Comme ∢ADB et ∢ACB sous-tendent le même arc, alors :
x = ∢ADB = ∢ACB = 33

Alors, comme ∢BAC et ∢BDC sous-tendent le même arc, alors :

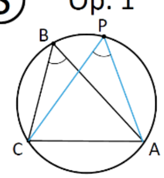
y = ∢BAC = ∢BDC = 29

x = 33° y = 29°

Date :   **U7 2.5**

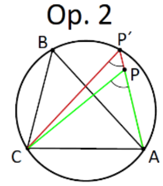
Ⓟ Si A, B et C sont des points fixes sur une circonférence et P peut être à l’intérieur, sur ou à l’extérieur. Si ∢ABC = ∢APC et ont en commun $\overline{AC}$. Montre que P est sur la circonférence.

Ⓢ Op. 1



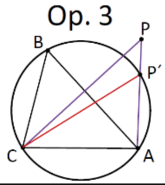
Dans ce cas :
∢ABC = ∢APC.

Op. 2



∢ABC = ∢AP'C.
∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP > ∢AP'C.
donc, ∢ABC = ∢AP'C < ∢APC.

Op. 3



∢ABC = ∢AP'C.
∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' > ∢APC.
donc, ∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.

Ⓔ Détermine x et y.
∢ABC = ∢APC ont en commun $\overline{CB}$
A, B, C et D sont sur la même circonférence.

∢BCA = ∢BDA, x = 66°
∢CBD = ∢CAD, y = 60°

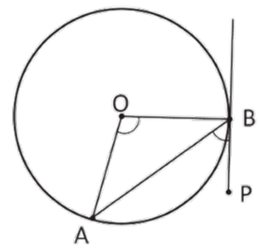
Ⓡ a) x = 33° et y = 29°
b) x = 40° et y = 63°
c) x = 57° et y = 36°
d) x = 39° et y = 45°

Devoirs : manuel, page 160.

2.6 L'angle semi-inscrit

P

Compare l'angle ∢ABP avec l'angle ∢BOA sur la figure suivante :



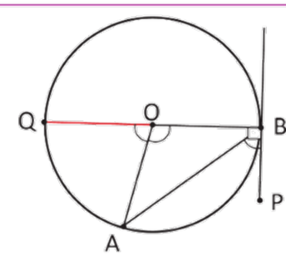
S

Trace le diamètre QB.

Alors, l'angle ∢AOQ = 2 fois l'angle ∢ABO (theorème de l'angle inscrit).

et, ∢AOQ = 180° - ∢BOA (angle supplémentaire).

alors 2 ∢ ABO = 180° - ∢BOA, donc ∢ABO = 90° - $\frac{∢BOA}{2}$.



Par conséquent, ∢PBA = $\frac{∢BOA}{2}$, ou encore ∢BOA = 2∢PBA (selon les angles complémentaire, car PB ⊥ BO).

C

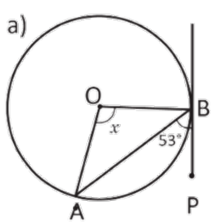
L'angle formé par une tangente et une corde de la circonférence est appelé : **angle semi-inscrit**.

Sur la circonférence, **la mesure de l'angle semi-inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre, qui sous-tend le même arc que la corde**.

E

Détermine la valeur de x dans chaque cas :

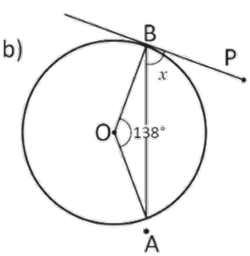
a)



Comme ∢BOA = 2∢PBA.

donc, x = 2(53°) = 106°.

b)

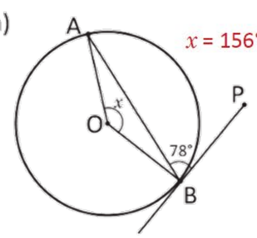


Comme ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

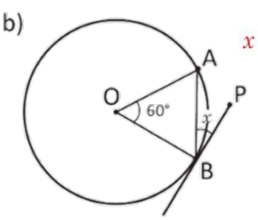
donc, $x = \frac{138°}{2} = 69°$.

Détermine la valeur de x dans chaque cas :

a)



b)



Module 7

Indicateur de réussite

2.6 Déterminer la mesure d'angle semi-inscrit grâce à la mesure de l'angle au centre.

Séquence

Le terme d'angle semi-inscrit est introduit ainsi que la propriété concernant sa mesure. Un cas similaire à celui présenté dans le problème initial du cours 1.3 (c'est-à-dire que l'angle au centre est sur un côté de l'angle inscrit) est proposé comme première étape dans la stratégie de déduction formelle de la propriété.

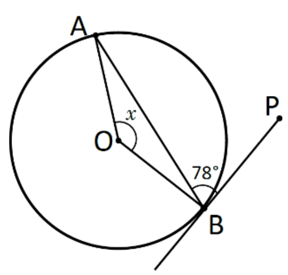
Objectif

Ⓟ À l'aide du théorème de l'angle inscrit et de la condition des angles supplémentaires, faire la comparaison des angles. Dans un premier temps, le diamètre QB est tracé pour construire l'angle inscrit comme dans le cas 1 de la solution du cours 1.2.

Ⓢ Souligner l'importance des constructions intermédiaires (dans ce cas, le diamètre) pour faire des démonstrations géométriques.

Solution de certains exercices :

a)

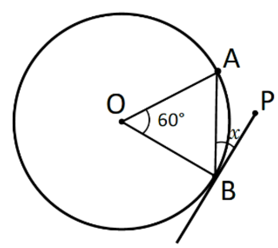


Comme ∢BOA = 2∢PBA.

donc, $x = 2(78°) = 156°$

$x = 156°$.

b)



Comme ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

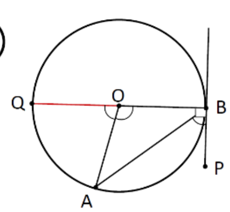
donc, $x = \frac{60°}{2} = 30°$

$x = 30°$.

Date : **U7 2.6**

Ⓟ Compare la mesure de ∢ABP avec celle de ∢BOA sur la figure.

Ⓢ



Trace le diamètre QB.
∢AOQ = 2∢ABO.
(Théorème de l'angle inscrit)

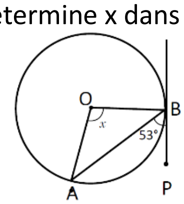
∢AOQ = 180° − ∢BOA.
(angle supplémentaire)

2∢ABO = 180° - ∢BOA, C'est-à-dire, ∢ABO = 90° $-$ $\frac{∢BOA}{2}$

donc, ∢PBA = 90° − ∢ABO = $\frac{∢BOA}{2}$, ou ∢BOA = 2∢PBA. (selon l'angle complémentaire, puisque PB ⊥ BO).

Ⓔ Détermine x dans chaque cas :

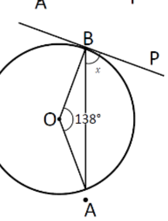
a)



∢BOA = 2∢PBA

donc,
$x = 2(53°) = 106°$.

b)



∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

donc,
$x = \frac{138°}{2} = 69°$.

Ⓡ

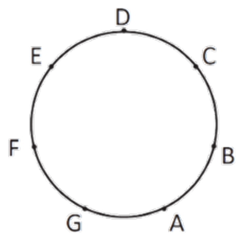
a) $x = 156°$
b) $x = 30°$

Devoirs : manuel, page 161.

2.7 Mets en pratique ce que tu as appris

1. Trace une circonférence et un point P à l'extérieur de la circonférence. Utilise une règle et un compas pour tracer les tangentes au cercle passant par le point P.

2. Les points A, B, C, D, E, F et G divisent la circonférence en 7 arcs égaux. Classe les figures formées en reliant les points pour chaque énoncé.



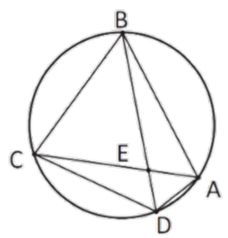
a) ABC
Triangle isocèle
AB = BC

b) ACDF
Triangle isocèle
CD ∥ AF et AC = FD

c) ADG
Triangle isocèle
AD = DG

d) ABCDEFG
Heptagone régulier. Les côtés et les angles sont respectivement congruents.

3. Sur la figure suivante, les points A, B, C et D sont sur la circonférence. Réponds aux questions suivantes:



a) Comment sont les angles ∢EAB et ∢EDC ?

b) Comment sont les angles ∢ABE et ∢ACD ? Pourquoi ?

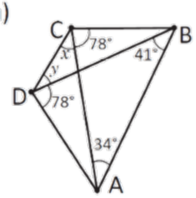
c) Comment sont les triangles ΔABE et ΔDCE ? Pourquoi ?

4. Détermine quels sont les énoncés qui satisfont des conditions suffisantes pour que les 4 points consécutifs A, B, C et D placés sur une circonférence forment au moins une paire de cordes parallèles.

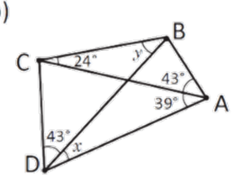
a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ b) ∢CAB = ∢CDB c) AC = AD d) ΔABC ~ ΔCDA

2.8 Mets en pratique ce que tu as appris

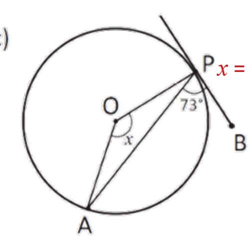
Détermine la valeur de x ou y, selon le cas :

a)


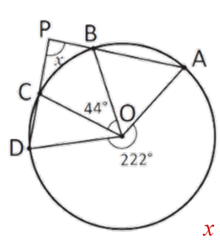
$x = 41°$
$y = 34°$

b)


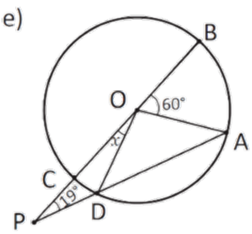
$x = 24°$
$y = 39°$

c)


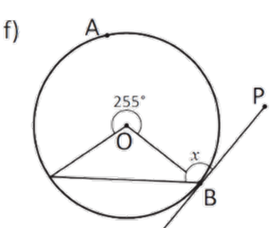
$x = 146°$

d)


$x = 89°$

e)


$x = 22°$

f)


$x = 127.5°$

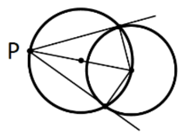
Indicateur de réussite

2.7 et 2.8 Résoudre les problèmes concernant les applications de l'angle inscrit et de l'angle au centre.

Solution de certains exercices :

Cours 2.7

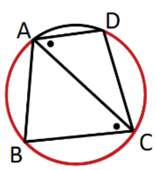
1. Un exemple de solution pourrait être :



3.
a) ∢EAB = ∢EDC parce qu'ils sous-tendent tous les deux $\overset{\frown}{BC}$.
b) ∢ABE = ∢ACD parce qu'ils coïncident tous les deux avec les angles inscrits qui sous-tendent $\overset{\frown}{AD}$.
c) ΔABE est semblable à ΔDCE parce que 2 des angles sont égaux (AA).

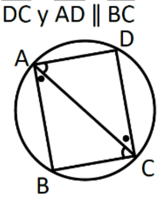
4.
Conditions suffisantes :

a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ alors $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
donc, ∢ACB = ∢CAD.

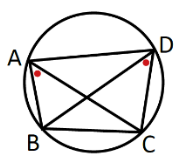
d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Comme ΔABC ~ ΔCDA alors,
∢CAB = ∢ACD, ∢BCA = ∢DAC.

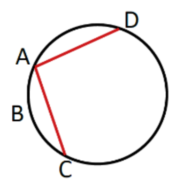
Conditions insuffisantes :

b)



Le point D peut se déplacer sur $\overset{\frown}{AC}$.

c)



Le point B peut se déplacer sur $\overset{\frown}{AC}$.

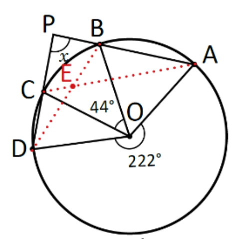
Cours 2.8

a) Puisque ∢ADB = ∢ACB et que les deux angles ont en commun le segment AB, alors A, B, C et D sont sur la même circonférence.
Comme ∢ACD et ∢ABD sous-tendent le même arc, Alors :
x = ∢ACD = ∢ABD = 41°
Puis, comme ∢BAC et ∢BDC sous-tendent le même arc, alors :
y = ∢BDC = ∢BAC = 34°

$x = 41°$ et $y = 34°$

Devoirs : manuel, page 162.

d)



En premier lieu, trace $\overline{BD}$ et $\overline{AC}$.
Puisque ∢AOD = 222° est un angle au centre, alors les angles inscrits ∢ABD = ∢ACD = 111° parce qu'ils sous-tendent tous les deux $\overset{\frown}{AD}$. Donc ∢BOC = 44° est un angle au centre, donc l'angle inscrit ∢CAB = 22° parce que tous les deux sous-tendent $\overset{\frown}{BC}$.
Et :
∢ACP = 180° – ∢ACD
= 180° – 111°
= 69°
Parce que les angles sont sur $\overline{DP}$.
Finalement :
$22 + 69 + x = 180$
$x = 89°$